

Visa du chef de département des
Sciences et Technologies

Signature:.....

Date:.....

ÉTUDE NUMÉRIQUE ET ANALITIQUE DU PROFIL DE TEMPERATURE DANS UNE AILETTE A SECTION UNIFORME

Mémoire de fin d'études pour l'obtention du diplôme
de master académique

en «*Installations Énergétiques et Turbomachines*»

Encadreur: Dr. KHERRIS
Sahraoui, (MCA)

Signature:

Date:

Réalisé par: ABDELHAMID
Nadjwa

Signature:

Date:

Membres du jury
FERNINI Brahim, (MCA) (Président)
BAGHDAD Mohammed, (MCA) (Examineur)
KHERRIS Sahraoui, (MCA) (Encadreur)

Remerciements

Avant toute chose, je remercie Dieu le tout puissant de m'avoir donné la force et la patience.

J'exprime ma profonde gratitude à mon encadreur M. KHERRIS Sahraoui, Maître Conférences au centre universitaire de Tissemsilt qui m'a fait l'honneur de veiller à diriger ce travail. Ses efforts et ses conseils pertinents m'ont permis de mener à terminer ce travail, merci pour la confiance qu'il m'a témoigné.

Mes remerciements sont destinés aux membres de jury qui m'ont honoré par leurs avis sur ce modeste travail.

Sans oublier tous mes enseignants du département science et technologie de Tissemsilt qui ont contribué à ma formation.

Enfin, j'adresse un grand merci à mes amis. Et à toutes les personnes qui m'ont aidé, de près ou de loin, un jour ou l'autre.

Dédicaces

*A mes très chers parents qui ont toujours été là pour
moi, et qui m'ont donné un magnifique modèle de
labeur et de persévérance.*

Mon frère

Mes sœurs

Ma famille

Mes amis

A tous ceux qui me sont chers et proche.

Nadjwa

Liste des figures

Fig. 1– Isotherme et gradient thermique	15
Fig. 2– Schéma du transfert de chaleur conductif	16
Fig. 3– Schéma du transfert de chaleur radiatif	17
Fig. 4– Schéma du transfert de chaleur convectif	18
Fig. 5– Exemples de systèmes à ailettes utilisés dans différents secteurs d'applications.....	20
Fig. 6– Exemple typique d'une surface étendue continue	21
Fig. 7– Quelques exemples typiques de surfaces étendues indépendantes	21
Fig. 8– Schéma d'une ailette à section constante circulaire	26
Fig. 9– Bilan d'énergie sur une tranche d'ailette d'épaisseur dx	27
Fig. 10– Représentation des flux élémentaires sur une ailette circulaire	29
Fig. 11 – Grille de calcul structuré 2D.....	32
Fig. 12 – Volume de contrôle bidimensionnel.....	33
Fig. 13– Maillage unidimensionnel	36
Fig. 14–Système de notation.....	36
Fig. 15– Maillage utilisé pour la résolution du 1 ^{er} cas	38
Fig. 16– Maillage utilisé pour la résolution du 2 ^{ème} cas	40
Fig.17 - Organigramme de calcul.....	42
Fig. 18– Distribution de température dans une ailette adiabatique	43
Fig. 19– Distribution de température dans une ailette adiabatique.....	43
Fig. 20– Distribution de température dans une ailette avec transfert de chaleur à l'extrémité	44
Fig. 21– Distribution de température dans une ailette à température isotherme à son extrémité	44
Fig. 22– Distribution de température dans une ailette infinie.....	45
Fig. 23– Distribution de température pour différents nombres de Biot.....	45
Fig. 24–L'efficacité d'une ailette adiabatique	46
Fig. 25– Comparaison d'efficacités des ailettes	46
Fig. 26– Comparaison du flux total dissipé par l'ailette	47
Fig. 27– Comparaison des résultats pour une plaque à ailettes.....	47
Fig. 28– Comparaison des résultats pour une plaque à tiges.....	47
Fig. 29–Distribution de température en fonction de la vitesse de l'air.....	48
Fig. 30– Distribution de température en fonction du temps.....	48

Liste des tableaux

Tableau 1 – Les paramètres physiques de l’air	26
Tableau 2 – Le coefficient de convection dans le cas d’un écoulement sur un cylindre vertical ...	27
Tableau 3 - Avantages et des inconvénients des différentes méthodes numériques.....	34
Tableau 4 –Les coefficients de discrétisation aux nœuds 2, 3, 4, et 5	39
Tableau 5 –Les coefficients de discrétisation au nœud 1	39
Tableau 6 –Les coefficients de discrétisation au nœud 6	39
Tableau 7 – Tableau récapitulatif des coefficients de discrétisation	39
Tableau 8 – Comparaison de la solution numérique et analytique pour la convection naturelle ...	42
Tableau 9 – Comparaison de la solution numérique et analytique pour la convection forcée.....	42
Tableau 10 – Comparaison de la solution numérique et analytique pour la convection naturelle	43
Tableau 11 – Comparaison de la solution numérique et analytique pour la convection forcée	44

Nomenclature

Symboles Latins

A	Surface	[m ²]
A _E , a _w , a _p	Coefficients de discrétisation	
A ₁ , A ₂	Constantes d'intégration de l'équation (2.7)	
B ₁ , B ₂	Constantes d'intégration de l'équation (2.7)	
C ₁ , C ₂	Constantes d'intégration de l'équation (2.25)	
C _p	Chaleur spécifique	[J/kg.K]
D	Diamètre	[m]
E	Epaisseur	[m]
G	Accélération de la pesanteur	[m.s ⁻²]
H	Coefficient d'échange convectif	[W/m ² . K]
I ₀ , I ₁	Fonction de Bessel de 1 ^{ère} espèce modifiée d'ordre n	
K ₀ , K ₁	Fonction de Bessel de 1 ^{ère} espèce modifiée d'ordre n	
L	Longueur	[m]
N	Paramètre de l'ailette	[m ⁻²]
P	Périmètre	[m]
R	Rayon	[m]
R	Résistance thermique	[K/W]
S _u , S _p	Composante du terme source	[W]
T	Température	[°C], [K]
T _∞	Température ambiante	[°C]
T ₀	Température d'ailette	[°C]
T	Temps	[s]
U	Vitesse	[m.s ⁻¹]
V	Volume	[m ³]
X	Variable d'espace	[m]

Symboles grecques

λ	Conductivité thermique	[W/m. K]
σ	Constante de Stefan-Boltzmann	[W/m ² . K ⁴]
Γ	Coefficient de diffusion	[W/m. °C]
μ	Viscosité dynamique	[kg/m.s]
α	Diffusivité thermique	[m ² /s]
φ	Densité de flux de chaleur	[W/m ²]

ν	Viscosité cinématique	[m ² /s]
ρ	Masse volumique	[kg/m ³]
ϕ	Flux de chaleur	[W]
θ	Température	[°C]
β	Coefficient de dilatation volumique du fluide	[K ⁻¹]
ΔT	Déférence de température	[K]
ε	Emissivité	
η	Efficacité	
ε	Rendement	

Nombres adimensionnels

Bi	Nombre de Biot
Gr	Nombre de Grashof
Nu	Nombre de Nusselt
Pe	Nombre de Peclet
Pr	Nombre de Prandtl
Ra	Nombre de Rayleigh
Re	Nombre de Reynolds

Abréviation

E.D.P	Équations à dérivées partielles
M.D.F	Méthode des différences finis
M.E.F	Méthode des éléments finis
M.V.F	Méthode des volumes finis
T.D.M.A	Tri diagonal matrix algorithm
2D	Deux dimensions

Indices

Ext	Externe
Int	Interne
Max	Maximum
P	Nœuds principale
e, w, n, s	Faces du volume de contrôle
E, W, N, S	Nœuds voisins : Est, West, Nord, Sud

Sommaire

Liste des figures	
Liste des tableaux	
Nomenclature	
Introduction générale	13
Chapitre 1 : Généralités sur le transfert de chaleur	
1.1 Introduction	15
1.2 Généralités sur le transfert de chaleur	15
1.2.1 Définitions.....	15
1.2.1.1 Champ de température	15
1.2.1.2 Gradient de température	15
1.2.1.3 Flux de chaleur.....	16
1.2.1.4 Densité de flux.....	16
1.2.2 Les différents modes de transferts	16
1.2.2.1 La conduction	16
1.2.2.2 Le rayonnement	16
1.2.2.3 La convection	17
1.2.3 Nombres adimensionnels	20
1.2.3.1 Nombre de Reynolds	20
1.2.3.2 Nombre de Nusselt	20
1.2.3.3 Le nombre de Peclet.....	20
1.2.3.4 Nombre de Prandtl	21
1.2.3.5 Nombre de Grashof	21
1.2.3.6 Le nombre de Rayleigh	21
1.2.3.7 Nombre de Biot	21
1.3 Les ailettes	22
1.3.1 Application des ailettes	22
1.3.2 Choix des ailettes	22
1.3.3 Différents types d'ailettes	23
1.3.3.1 Ailettes continues.....	23
1.3.3.2 Ailettes indépendantes	23
1.4 Recherche bibliographique	24
1.5 Conclusion	24
Chapitre 2 : Modélisation mathématique	
2.1 Introduction	26

2.2 Présentation du système physique et formulation mathématique.....	26
2.2.1 Description du système étudié	26
2.2.2 Hypothèses	27
2.2.3 Modèle thermique.....	27
2.2.4 Flux extrait par une ailette.....	28
2.2.4.1 Ailette longue	28
2.2.4.2 Ailette parfaitement isolée à son extrémité (adiabatique)	28
2.2.4.3 Ailette à température isotherme à son extrémité	29
2.2.4.4 Ailette avec transfert de chaleur à l'extrémité	39
2.2.4.5 Ailette circulaire de section rectangulaire	29
2.2.5 Efficacité d'une ailette.....	30
2.2.5.1 Ailette rectangulaire longue	30
2.2.5.2 Ailette rectangulaire isolée à l'extrémité	30
2.2.5.3 Ailette rectangulaire avec transfert de chaleur à l'extrémité.....	31
2.2.5.4 Ailette à température isotherme à son extrémité	31
2.2.5.5 Ailette circulaire de section rectangulaire	31
2.2.6 Le rendement d'une ailette.....	31
2.3 Résolution numérique	31
2.3.1 Discrétisation des (E.D.P)	31
2.3.1.1 Méthode des différences finis (M.D.F)	32
2.3.1.2 Méthode des éléments finis (M.E.F)	32
2.3.1.3 Méthode des volumes finis (M.V.F)	33
2.3.2 Choix de la méthode	34
2.4 Conclusion	34

Chapitre 3 : Résultats et discussions

3.1 Introduction	36
3.2 Application de la méthode des volumes finis pour un problème de diffusion stationnaire unidirectionnel.....	36
3.2.1 Génération du maillage	36
3.2.2 Discrétisation	37
3.3 Étude de cas : ailettes à section uniforme	38
3.3.1 Discrétisation de l'équation de l'ailette	38
3.3.1.1 Discrétisation des termes de flux aux nœuds internes	38
3.3.1.2 Discrétisation des termes de flux aux frontières	39
3.3.1.3 Résolution du système d'équation algébrique	41
3.3.1.4 Mise en œuvre et organigramme de calcul	41

3.4 Résultats	42
3.4.1 Résultats numériques	42
3.4.2 Résultats expérimentaux	47
3.5 Conclusion.....	49
Conclusion générale	51
Bibliographie	52
Annexe A. Corrélations empiriques en convection libre et forcée.....	54
Annexe B. Équations et fonctions de Bessel.....	56
Annexe C. Efficacité des ailettes	58
Annexe D. Méthode de Thomas.....	59
Annexe E. Programme de calcul	61
Résumé, Abstract, ملخص.....	63

Introduction générale

Introduction générale

Le transfert de chaleur est l'un des plus importants domaines scientifiques à cause de leur besoin et leur rôle dans la vie dont il couvre diverses applications qui comprennent les systèmes biologiques, les appareils ménagers courants, les processus industriels, les appareils électroniques, la transformation des aliments et la conservation des médicaments.

La théorie de ce dernier est une science qui étudie la façon dont la chaleur se propage d'une région à une autre sous l'influence d'une différence de température.

Le transfert de chaleur reste un domaine très vaste et compliqué car dans les processus réels, les trois modes fondamentaux du transfert à savoir, la conduction, la convection et le rayonnement interviennent simultanément.

De nombreux composants industriels génèrent une certaine quantité de chaleur lors de leur utilisation, cela pourrait élever la température du système ce qui pourrait entraîner de graves problèmes de chauffage ainsi que la défaillance de ce dispositif.

Cette chaleur doit être évacuée pour garder les instruments à une température leur permettant de fonctionner normalement. Ces derniers doivent être équipés d'ailettes.

Les ailettes sont largement utilisées pour améliorer le taux de transfert de chaleur dans les circuits électroniques et les moteurs de véhicules. Celles-ci peuvent être associées à une seule surface ou à une série de la surface étendue fournie à la surface du composant chauffé pour intensifier la dissipation de chaleur de la surface au fluide froid environnant. Ces surfaces étendues augmentent la surface totale de transfert de chaleur et amplifient ainsi le taux de dissipation de chaleur. En fonction de l'application, différentes configurations géométriques des ailettes sont disponibles : les ailettes à section transversale uniforme (rectangulaire et circulaire) et à section transversale non uniforme (triangulaire, elliptique et trapézoïdale).

L'objectif du présent travail porte sur une contribution à l'étude numérique et analytique du profil de température dans une ailette à section uniforme.

Outre l'introduction et la conclusion, le présent travail est subdivisé en trois chapitres. Le premier chapitre traite quelques notions de base sur le transfert de chaleur, les ailettes suivi par une recherche bibliographique. Dans le deuxième chapitre, une modélisation mathématique du système étudié a été élaborée. En effet, des généralités sur les méthodes numériques ainsi qu'une discrétisation de l'équation différentielle qui régit le problème sont abordées. Dans ce contexte un programme en langage FORTRAN est élaboré. Dans le dernier chapitre, les résultats et leurs discussions pour le système en question ont été présentés et analysés. La lecture des résultats a permis de mettre en exergue l'impact de l'influence des ailettes sur le refroidissement d'un solide

Chapitre 1
Généralité *sur le*
transfert de chaleur

1.1 Introduction

L'amélioration du transfert de chaleur d'un système avec le milieu extérieur joue un rôle pertinent dans la conception thermique des appareillages, cette amélioration se fait par les ailettes.

Dans ce chapitre nous allons présenter une étude générale sur le transfert de chaleur ainsi que les ailettes, ses différentes applications, ses types et son choix. Ensuite, nous exposons quelques études effectuées sur l'écoulement avec transfert de chaleur à travers les ailettes.

1.2 Généralités sur le transfert de chaleur

Lorsque deux systèmes sont à des températures différentes, le système le plus chaud cède de la chaleur au plus froid, il y a un échange thermique ou encore transfert thermique entre eux. Cette situation se rencontre dans de nombreuses situations industrielles (moteurs thermiques ou même électriques, centrales électriques au fuel au gaz, etc., électronique) ou domestique (chauffage de l'habitat). Un transfert d'énergie donne lieu à un flux de chaleur qui correspond à un déplacement de l'énergie du plus chaud vers le plus froid, le flux de chaleur dont la densité locale est notée $\vec{\varphi}$ est une grandeur vectorielle ce qui signifie qu'un flux de chaleur est caractérisé non seulement par son intensité mais aussi par sa direction. Il est défini en chaque point de l'espace et a l'unité d'une densité surfacique de puissance (W/m^2). [1]

1.2.1 Définitions

1.2.1.1 Champ de température

Les transferts d'énergie sont déterminés à partir de l'évolution dans l'espace et dans le temps de la température : $T = f(x, y, z, t)$. La valeur instantanée de la température en tout point de l'espace est un scalaire appelé champ de température. Nous distinguerons deux cas : [2]

- Champ de température indépendant du temps : le régime est dit permanent ou stationnaire.
- Evolution du champ de température avec le temps : le régime est dit variable ou transitoire.

1.2.1.2 Gradient de température

Si l'on réunit tous les points de l'espace qui ont la même température, on obtient une surface dite surface isotherme. La variation de température par unité de longueur est maximale le long de la normale à la surface isotherme. Cette variation est caractérisée par le gradient de température : [2]

$$\overrightarrow{\text{grad}}(T) = \vec{n} \frac{\partial T}{\partial n} \quad (1.1)$$

Avec \vec{n} : vecteur unitaire de la normale

Et $\frac{\partial T}{\partial n}$: dérivée de la température le long de la normale

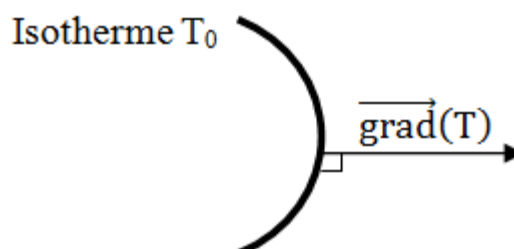


Fig. 1 – Isotherme et gradient thermique

1.2.1.3 Flux de chaleur

C'est la quantité de chaleur qui traverse une surface S par unité de temps en watt. [2]

$$\Phi = \frac{dQ}{dt} \quad (1.2)$$

1.2.1.4 Densité de flux

Elle représente la puissance qui traverse l'unité de surface, s'exprime en $W.m^{-2}$. [2]

Pour une surface perpendiculaire au flux de chaleur :

$$\varphi = \frac{d\Phi}{ds} \quad (1.3)$$

1.2.2 Les différents modes de transferts

Il existe trois modes de transfert de chaleur: la conduction, le rayonnement et la convection.

1.2.2.1 La conduction

C'est le transfert de chaleur au sein d'un milieu opaque, sans déplacement de matière, sous l'influence d'une différence de température. La propagation de la chaleur par conduction à l'intérieur d'un corps s'effectue selon deux mécanismes distincts : une transmission par les vibrations des atomes ou molécules et une transmission par les électrons libres. [3]

La théorie de la conduction repose sur l'hypothèse de Fourier : la densité de flux est proportionnelle au gradient de température :

$$\vec{\phi} = -\lambda S \overrightarrow{\text{grad}}(T) \quad (1.4)$$

Ou sous forme algébrique :

$$\phi = -\lambda S \frac{dT}{dx} \quad (1.5)$$

Avec :	ϕ	Flux de chaleur transmis par conduction	(W)
	λ	Conductivité thermique du milieu	(W/m. °C)
	x	Variable d'espace dans la direction du flux	(m)
	S	Aire de la section de passage du flux de chaleur	(m ²)

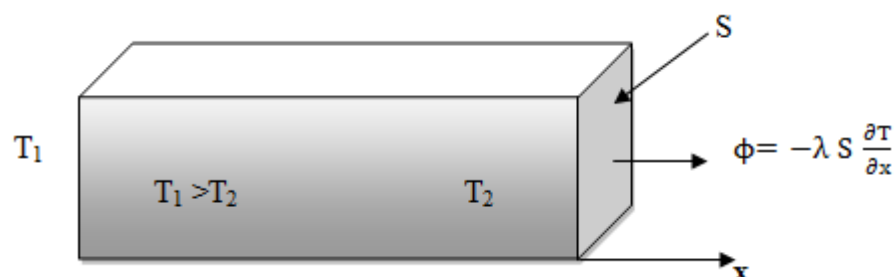


Fig. 2–Schéma du transfert de chaleur conductif

1.2.2.2 Le rayonnement

Le transfert de chaleur par rayonnement entre deux corps à des températures différentes séparés par du vide ou un milieu semi-transparent se produit par l'intermédiaire d'ondes électromagnétiques, donc sans support matériel [4].

Ce mécanisme de transfert est régi par la loi de Stefan :

$$\phi = \sigma \varepsilon S (T_p^4 - T_\infty^4) \quad (1.6)$$

Avec :

ϕ	Flux de chaleur transmis par rayonnement	(W)
σ	Constante de Stefan	(5,67.10 ⁻⁸ W/ m ² . K ⁴)
ε	Facteur d'émission de la surface	
T_p	Température de la surface	(K)
T_∞	Température du milieu environnant la surface	(K)
S	Aire de la surface de contact solide/fluide	(m ²)

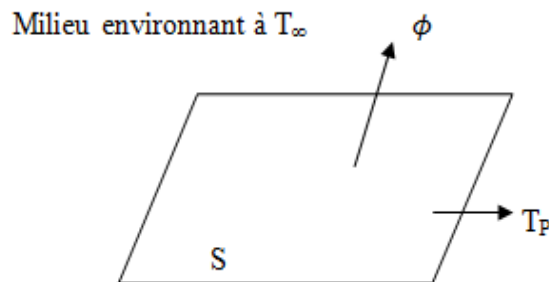


Fig. 3–Schéma du transfert de chaleur radiatif

1.2.2.3 La convection

La convection est un mode de transfert de chaleur qui met en jeu, en plus de la conduction, le mouvement macroscopique de la matière. Ce phénomène se produit au sein des milieux fluides en écoulement ou entre une paroi solide et un fluide en mouvement. [4]

On distingue deux types de convection :

- **Convection naturelle** : les mouvements sont dus aux variations de masse volumique dans un fluide soumis au champ de pesanteur. Les variations de masse volumique peuvent être générées par des gradients de température (l'air chaud est plus léger que l'air froid) et/ou par des gradients de composition.

- **Convection forcée** : le mouvement du fluide est provoqué par des actions mécaniques extérieures (pompe, ventilateur...). [4]

Ce mécanisme de transfert est régi par la loi de Newton :

$$\phi = h S (T_p - T_\infty) \quad (1.7)$$

Avec :	ϕ	Flux de chaleur transmis par convection	(W)
	h	Coefficient de transfert de chaleur par convection	(W/ m ² . °C)
	T_p	Température de surface du solide	(°C)
	T_∞	Température du fluide loin de la surface du solide	(°C)
	S	Aire de la surface de contact solide/fluide	(m ²)

La valeur du coefficient de transfert de chaleur par convection h est fonction de la nature du fluide, de sa température, de sa vitesse et des caractéristiques géométriques de la surface de contact solide/fluide.

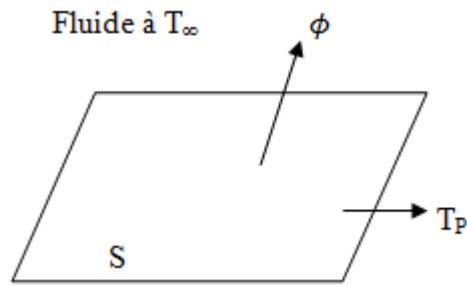


Fig. 4—Schéma du transfert de chaleur convectif

1.2.3 Nombres adimensionnels

Déterminés à partir de la méthode d'analyse dimensionnelle (théorème de Vaschy Buckingham ou théorème des groupements π), les nombres qui caractérisent les écoulements et les transferts d'énergie associés sont :

1.2.3.1 Nombre de Reynolds

Ce nombre représente le rapport des forces d'inertie aux forces visqueuses, il est défini par l'expression suivante : [5]

$$Re = \frac{\rho u d}{\mu} \quad (1.8)$$

Il caractérise le régime d'écoulement dans la canalisation :

- En circulation forcée Laminaire si $Re < 2300$
- De transition si $2300 > Re < 10\,000$
- Turbulent si $Re > 10\,000$

Avec :

μ : La viscosité dynamique (kg/m.s)

ρ : La masse volumique (kg/m³)

d : Dimension caractéristique de la conduite (m)

u : La vitesse du fluide (m/s)

1.2.3.2 Nombre de Nusselt

C'est le nombre adimensionnel fondamental de la convection. [5]

$$Nu = \frac{h d}{\lambda} \quad (1.9)$$

1.2.3.3 Le nombre de Peclet :

$$Pe = \frac{u d \rho C_p}{\lambda} \quad (1.10)$$

Nous pouvons aussi l'écrire : [5]

$$Pe = \frac{u d \rho}{\mu} \cdot \frac{\mu C_p}{\lambda} = Re \cdot Pr \quad (1.11)$$

Et faire apparaître un nouveau nombre adimensionnel appelé Prandtl « Pr »

1.2.3.4 Nombre de Prandtl

Ce nombre est calculable pour un fluide donné indépendamment des conditions expérimentales (il ne dépend de la température que par l'intermédiaire de la capacité calorifique) et caractérise l'influence de la nature du fluide sur le transfert de chaleur par convection. Le nombre de Prandtl caractérise la distribution des vitesses par rapport à celle des températures, c'est une caractéristique du fluide. [5]

$$Pr = \frac{\mu C_p}{\lambda} \quad (1.12)$$

1.2.3.5 Nombre de Grashof

Il caractérise l'écoulement en convection naturelle (remplace Re).[5]

$$Gr = \frac{g L^3 \rho^2 \beta \Delta T}{\mu^2} \quad (1.13)$$

Où β : facteur de dilatation volumique du fluide (K^{-1})

$$\beta = \frac{1}{T} \quad (1.14)$$

1.2.3.6 Le nombre de Rayleigh :

Ce nombre est le paramètre de contrôle de la convection. Il peut être vu comme une forme sans dimension de la différence de température ΔT . Il représente le terme de la poussée d'Archimède rapporté au produit des deux termes diffusifs. [5]

$$Ra = Pr * Gr = \frac{g L^3 \beta \Delta T}{\alpha \nu} \quad (1.15)$$

Avec: viscosité cinématique du fluide (m^2/s)

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (1.16)$$

Et α : diffusivité thermique (m^2/s)

$$\alpha = \frac{\lambda}{\rho C_p} \quad (1.17)$$

1.2.3.7 Nombre de Biot

Est un nombre sans dimension, qui mesure le rapport entre la résistance thermique interne du milieu et la résistance thermique externe. [6]

$$Bi = \frac{R_{int}}{R_{ext}} = \frac{\frac{V}{\lambda A}}{\frac{1}{hA}} = \frac{h(V/A)}{\lambda} \quad (1.18)$$

- $Bi < 0.1$ \longrightarrow La température peut être considérée comme constante dans une section donnée. (Méthode du gradient nul).
- $100 \leq Bi < 0.1$ \longrightarrow Le flux de chaleur est limité par la conduction. (Correspond à une condition de Fourier).
- $Bi \geq 100(\infty)$ \longrightarrow Le flux de chaleur est limité par la conduction. (Correspond à une condition de Dirichlet). (Une température imposée en surface implique que $h = \infty$ et donc que $Bi = \infty$)

1.3 Les ailettes

Une ailette est un dispositif thermique visant à augmenter la surface de contact avec un fluide extérieur pour augmenter les échanges convectifs, et donc le transfert de chaleur. L'ailette est le corps chaud, la chaleur se propage par conduction à travers l'ailette qui est refroidi par convection par le fluide environnant.[7]

1.3.1 Application des ailettes

Le rôle des ailettes thermiques est de favoriser l'échange de chaleur entre deux milieux, or le nombre de domaines mettant en jeu des échanges thermiques est impressionnant. Étudions le rôle précis des ailettes thermiques dans certains systèmes de notre vie quotidienne.

Application la plus connue, les systèmes de chauffage des particuliers mettent en jeu des systèmes d'ailettes thermiques afin de transmettre la chaleur issue d'une résistance (dans le cas du chauffage électrique), ou d'un fluide caloporteur (porteur de chaleur) en circulation, à l'air ambiant.

Les ailettes thermiques peuvent aussi être nommées radiateurs. Leur but est alors de refroidir un élément, en transmettant l'excédent de chaleur au milieu extérieur, c'est à dire l'air dans la plupart des cas.[8]

Le radiateur d'une voiture permet de refroidir le moteur. Le liquide de refroidissement circule dans des tubes auxquels sont associées des ailettes thermiques qui transmettent cette chaleur à l'air. La circulation de l'air est assurée par la vitesse du véhicule, ce qui assure un phénomène de convection suffisant.[8]

Les microprocesseurs des ordinateurs génèrent beaucoup de chaleur lors de leur fonctionnement. Afin d'éviter que ceux-ci soient endommagés par une surchauffe, ils sont parfois recouverts par un radiateur. Le plus souvent en aluminium, ce système d'ailettes transmet directement la chaleur du processeur à l'air.[8]

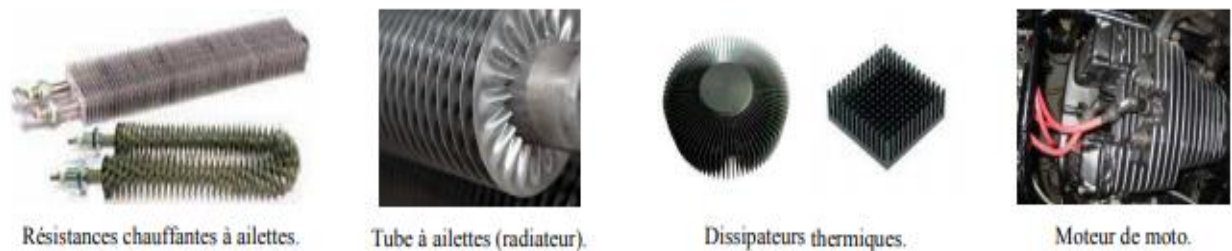


Fig. 5– Exemples de systèmes à ailettes utilisés dans différents secteurs d'applications [4]

1.3.2 Choix des ailettes

Le choix des ailettes résulte finalement d'un compromis entre le prix, les pertes de charge et les qualités de chaleur échangée. Parce que les ailettes sont utilisées pour améliorer le transfert de chaleur, leur forme doit être optimisée de telle sorte que le flux de chaleur est maximisé lorsque l'espace et les matériaux utilisés pour les surfaces à ailettes sont contraints. [9]

1.3.3 Différents types d'ailettes

Les différents types d'ailettes sont regroupés en deux grandes parties:

1.3.3.1 Ailettes continues :

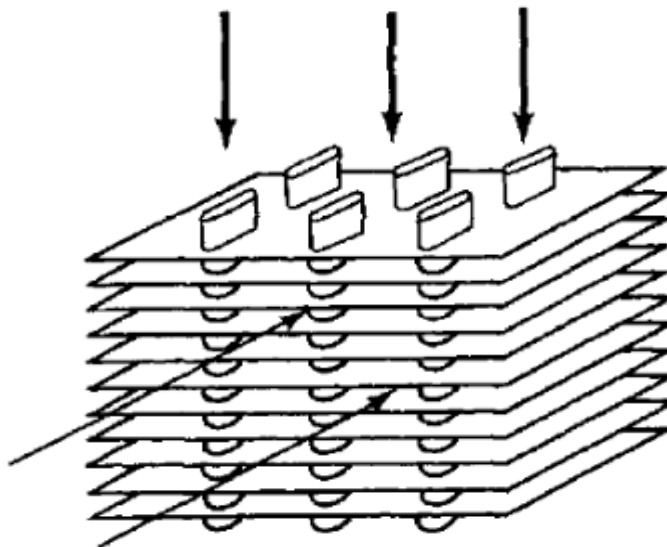


Fig. 6—Exemple typique d'une surface étendue continue [10]

1.3.3.2 Ailettes indépendantes : peuvent être classées comme suit :

- Ailettes longitudinales
- Ailettes radiales
- Ailettes épingles

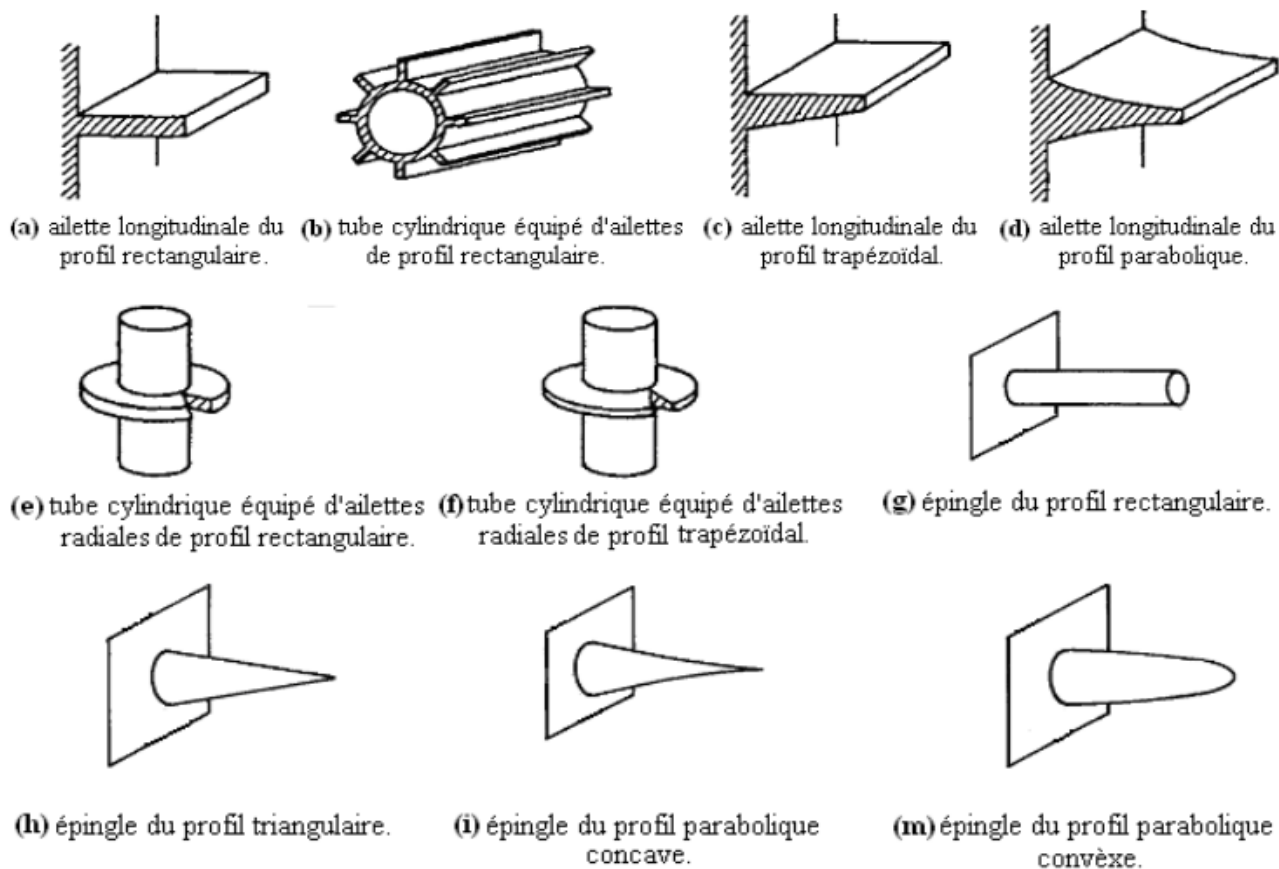


Fig. 7—Quelques exemples typiques de surfaces étendues indépendantes [10]

1.4 Recherche bibliographique

Huang, M.J et Chen, C[11] ont effectué une étude numérique du transfert de chaleur de convection forcée sur une ailette verticale d'épaisseur 2δ et hauteur L . Elle est attachée à la paroi qui à une température T_0 . La température ambiante est T_∞ où $T_0 > T_\infty$.

Les résultats obtenus démontrent que la variation du nombre de Nusselt augmente avec l'augmentation de la température et nombre de Prandtl. Le coefficient de transfert de chaleur aussi augmente.

Mehemmai, M et al.[12] Ont étudiés les transferts thermiques et l'efficacité dans les ailettes.

Par la suite, ils ont comparé les efficacités des différents types d'ailettes étudiées. L'étude a montré que l'augmentation de la conductivité thermique et l'épaisseur de l'ailette et la diminution de coefficient d'échange thermique amélioreraient l'efficacité des ailettes. D'autre part, l'ailette triangulaire est la plus performante de différents types d'ailettes. L'étude encore a traité les ailettes en cascade (première partie est rectangulaire et la deuxième doit être des diverses formes). Ils ont résolu l'équation de la chaleur des différents types d'ailettes et ils ont calculé le champ de température et l'efficacité des ailettes à l'aide du logiciel MAPLE (version 16).

Rouss, V et al.[13] Ont mené une étude pour estimer numériquement les conditions de frontières appliquées sur une ailette de forme cylindrique. Celle-ci est soumise à une condition de flux (ou de température) sur l'une de ses extrémités et une condition d'échange par convection sur le reste de ses frontières. Pour résoudre ce problème inverse de conduction de la chaleur, ils ont minimisé la fonctionnelle résiduelle (ou objectif) exprimant l'écart quadratique entre les températures calculées par le problème direct et celles mesurées à l'intérieur de l'ailette. La méthode de programmation séquentielle quadratique avec relaxation est utilisée comme algorithme de minimisation. Le travail est d'abord validé sur des données simulées numériquement puis expérimentalement sur une ailette cylindrique exposée d'abord au milieu ambiant puis à un écoulement d'air forcé. Les mesures thermiques sont réalisées sur une ligne le long de la surface de l'ailette et sur une autre à l'intérieur de l'ailette le long de son axe.

Manuraj, S et al. [14] Ont présenté les problèmes de transfert de chaleur multidimensionnels qui peuvent être abordés de différentes manières.

L'approche analytique utilisant l'équation de Laplace implique d'accorder les solutions d'équations différentielles. L'analyse a permis d'obtenir une analyse complexe en fonction des conditions aux limites, impliquant souvent des mathématiques avancées utilisant des séries de Fourier et d'autres fonctions spéciales. Une approche plus pratique consiste à utiliser des méthodes numériques. La méthode des différences finies semble fournir une bonne approche en utilisant ces

problèmes complexes avec une variété de programmation MATLAB de conditions aux limites. À l'aide de la méthode FDM, un problème triangulaire et un profil circulaire ont été examinés

Rishav, K.M et al.[15] Ont analysé les résultats d'une expérience effectuée dans un laboratoire de transfert de chaleur et de masse sur la mesure des températures à la surface des ailettes ainsi que le calcul du taux de transfert de chaleur. Ils ont comparés résultats avec des résultats théoriques et numériques. L'étude théorique est réalisée à l'aide d'une formulation standard et l'analyse numérique est réalisée en discrétisant l'équation directrice de fin en mode algébrique. Pour ces deux cas, ils ont supposé des conditions aux limites appropriées. Il a été observé que la tendance de la distribution de la température dans les trois cas est similaire bien que des erreurs soient associées à des observations expérimentales et à des études numériques.

Vikas, K et al.[16] Ont effectué une étude expérimentale de la distribution de la température le long d'une ailette de forme cylindrique. L'analyse est effectuée sur une ailette de 100 mm de long composée de laiton de 19,6 mm de diamètre et de conductivité thermique de 111 W / m.K. La distribution de température le long de l'ailette est évaluée expérimentalement et théoriquement.

L'influence de mode de convection à savoir convection naturelle et forcée et apport de chaleur variable sur la distribution de la température est évaluée. Les résultats obtenus sont ensuite comparés aux relations analytiques largement acceptées. Une comparaison du coefficient de transfert de chaleur par convection pour les ailettes uniformes et non uniformes est également présentée. Les résultats par méthode expérimentale et analytique sont en bon accord pour le phénomène de convection libre.

Mathiazhagan, Pet Jayabharathy, S[17] Ont mené une étude numérique dont le but est de décrire l'application d'une méthode analytique à l'estimation du transfert de chaleur et de la distribution de la température de différents profils d'ailettes. L'analyse des performances est réalisée à l'aide des méthodes analytiques et numériques. Le résultat montre que le taux de transfert de chaleur est élevé pour l'ailette triangulaire, suivi de l'ailette aiguille et de l'ailette rectangulaire.

Pour évaluer l'exactitude de la méthode analytique, les résultats sont comparés à la méthode des différences finies (FDM).

1.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons passé en revue, dans un premier temps, les principes théoriques du transfert de chaleur. Ensuite, nous avons concentré notre attention sur les ailettes thermiques ainsi que les applications, le choix et les types de cette dernière. Enfin, nous exposons quelques travaux qui traitent l'écoulement avec transfert de chaleur à travers les ailettes.

Chapitre 2
Modélisation
mathématique

2.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons présenter le système physique à étudier en l'illustrant à l'aide d'un schéma et établir les équations mathématiques modélisantes de ce système ainsi que les hypothèses et les conditions aux limites appropriées. Ensuite, nous allons présenter les méthodes de résolution numériques afin de choisir celle qui est convenable à notre cas d'étude.

2.2 Présentation du système physique et formulation mathématique

2.2.1 Description du système étudié

Le travail est consacré à l'étude du profil de température dans une ailette à section constante.

La figure 8 montre le modèle physique en question. Il s'agit d'une ailette circulaire de section rectangulaire en acier inoxydable de conductivité thermique ($\lambda=16\text{W/m.K}$) avec 12mm de diamètre et 73mm de longueur, exposée à un environnement de température $T_\infty=20^\circ\text{C}$ et de coefficient d'échange par convection naturelle et forcée respectivement : 8.1 et 53.03 $\text{W/m}^2.\text{K}$. Sa base est maintenue à une température constante égale à $T_0=100^\circ$.

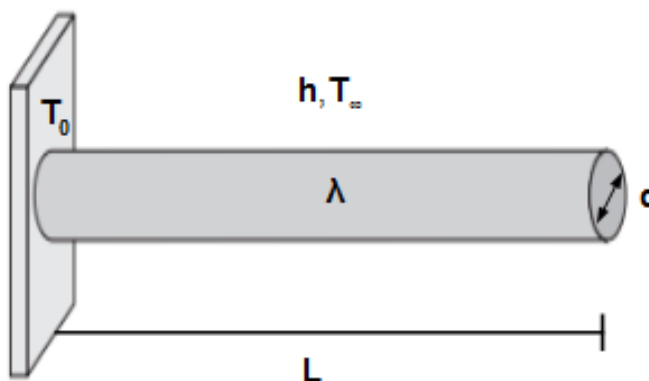


Fig. 8–Schéma d'une ailette à section constante circulaire

Les propriétés et les caractéristiques physiques de l'air utilisées dans l'étude sont regroupées dans Tab.1 [3]

Tableau 1 – Les paramètres physiques de l'air

Désignation	Expression	Valeur	Unité
Température moyenne	$T_m = (T_\infty + T_0)/2$	60	($^\circ\text{C}$)
Masse volumique	$\rho = 353 / (T_m + 273)$	1,059	(kg/m^3)
Conductivité thermique	$\lambda = 7,57 \cdot 10^{-5} T_m + 0,0242$	0.0287	(W/m. K)
Chaleur spécifique Cp		1008	(J/kg. K)
Viscosité dynamique	$\mu = 10^{-5} (0,0046 T_m + 1,7176)$	$1,99 \cdot 10^{-5}$	(kg/m.s)
Nombre de Prandtl	$Pr = -2,54 \cdot 10^{-4} T_m + 0,7147$	0.70	
Coefficient de dilatation volumique	$\beta = 1 / (T_m + 273)$	$3 \cdot 10^{-3}$	(K^{-1})
Accélération de la pesanteur g		9,81	(m.s^{-2})
Diffusivité thermique	$\alpha = 10^{-5} (0,0146 T_m + 1,8343)$	$2,69 \cdot 10^{-5}$	(m^2/s)

Tableau 2 – Le coefficient de convection dans le cas d'un écoulement sur un cylindre vertical [16]

Type de convection	Type d'écoulement	Nombre de Nusselt (Nu)	h (W/m ² .K)
Convection naturelle	Ra = 1815652.09 10 ⁴ < Ra < 10 ⁹ Laminaire	Nu = 0.59 (Ra) ^{1/4} = 21.65	$h = \frac{Nu \lambda}{L}$ = 8.1
Convection forcée	Re = 1532.6 100 < Re < 10 ⁷ Turbulent	$Nu = 0.3 + \frac{0.62 Re^{0.5} Pr^{\frac{1}{3}}}{[1 + \frac{(0.4)^{\frac{2}{3}}}{Pr}]^{0.25}} [1 + (\frac{Re}{28200})^{\frac{5}{8}}]^{0.8} = 22.17$	$h = \frac{Nu \lambda}{d}$ = 53.03

2.2.2 Hypothèses

Pour quantifier le transfert de chaleur associé à cette ailette nous devons tout d'abord déterminer la distribution de température le long de l'ailette à partir d'un bilan d'énergie que nous allons établir en posant les hypothèses suivantes : [4]

- Le régime est permanent et il n'y a pas de dissipation interne de chaleur.
- La conductivité thermique de l'ailette λ est constante.
- Le coefficient d'échange convectif h est uniforme sur toute la surface de l'ailette.
- On néglige le transfert de chaleur par rayonnement.
- Le problème est monodimensionnel.
- La température est uniforme dans une section donnée de l'ailette.
- Le matériau de l'ailette est homogène et isotrope.

2.2.3 Modèle thermique

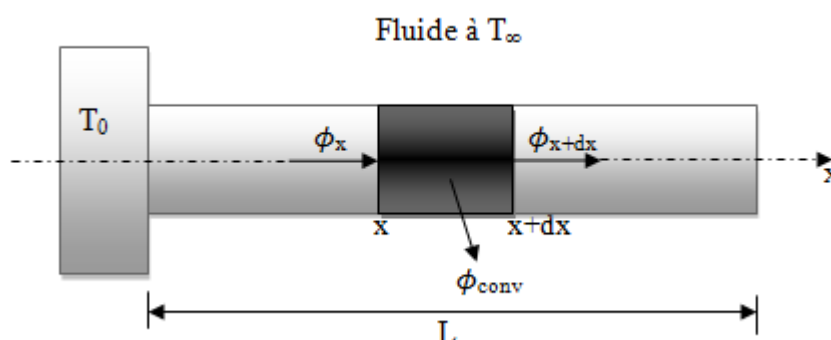


Fig. 9–Bilan d'énergie sur une tranche d'ailette d'épaisseur dx

- ϕ_x flux de chaleur transmis par conduction en x
- ϕ_{x+dx} flux de chaleur transmis par conduction en x + dx
- ϕ_{conv} flux évacué par convection à la frontière entre x et x + dx
- A Section de passage du flux de conduction
- P Périmètre de l'ailette (périmètre d'échange du flux convectif)

Le bilan d'énergie s'écrit : [3]

$$\phi_x = \phi_{x+dx} + \phi_{conv} \quad (2.1)$$

Soit :

$$\lambda A \left(\frac{dT}{dx} \right)_{x+dx} - \lambda A \left(\frac{dT}{dx} \right)_x = h P dx (T(x) - T_\infty) \quad (2.2)$$

Si λ et S sont indépendants de l'abscisse x , nous obtenons :

$$\lambda A \frac{\left(\frac{dT}{dx} \right)_{x+dx} - \left(\frac{dT}{dx} \right)_x}{dx} = h P (T(x) - T_\infty) \quad (2.3)$$

L'équation différentielle qui permet de résoudre le problème de l'ailette de section uniforme S et de périmètre P s'écrit :

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{h P}{\lambda A} [T(x) - T_\infty] = 0 \quad (2.4)$$

En posant :

$$n^2 = \frac{h P}{\lambda A} \quad (2.5)$$

Et

$$\theta = T(x) - T_\infty \quad (2.6)$$

L'équation devient finalement :

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - n^2\theta = 0 \quad (2.7)$$

La solution de l'équation différentielle du second ordre est du type :

$$\theta = A_1 \exp(nx) + A_2 \exp(-nx) \quad (2.8)$$

Ou :

$$\theta = B_1 \text{Ch}(nx) + B_2 \text{Sh}(nx) \quad (2.9)$$

2.2.4 Flux extrait par une ailette

2.2.4.1 Ailette longue

Dans le cas de l'ailette longue, on émet l'hypothèse que : $T_{(x=L)} = T_\infty$, où L est la longueur de l'ailette. [3]

Les conditions aux limites s'écrivent alors :

$$\left. \begin{array}{l} \text{En } x = 0 \quad : \quad \theta(0) = T_0 - T_\infty = \theta_0 \quad (a) \\ \text{En } x = L \quad : \quad \theta(L) = 0 \quad (b) \end{array} \right\} \quad (2.10)$$

$$\left. \begin{array}{l} (a) \quad A_1 = 0 \\ (b) \quad A_2 = T_0 - T_\infty \end{array} \right\} \quad (2.11)$$

$$\frac{T(x) - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \exp(-nx) \quad (2.12)$$

Et le flux total dissipé par l'ailette a pour expression :

$$\phi_p = n \lambda A (T_0 - T_\infty) \quad (2.13)$$

2.2.4.2 Ailette parfaitement isolée à son extrémité (adiabatique)

La solution générale obtenue est identique au cas précédent, ce sont les conditions aux limites qui diffèrent : [3]

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{(x=0)} = T_0 \\ -\lambda A \left(\frac{dT}{dx} \right)_{x=L} = 0 \text{ (Conservation du flux de chaleur en } x=L) \end{array} \right. \quad (2.14)$$

La distribution de température s'écrit alors :

$$\frac{T(x)-T_{\infty}}{T_0-T_{\infty}} = \frac{\text{ch}[n(L-x)]}{\text{ch}(nL)} \quad (2.15)$$

Et le flux total dissipé par l'ailette a pour expression :

$$\Phi_p = n \lambda A (T_0 - T_{\infty}) \text{th}(nL) \quad (2.16)$$

2.2.4.3 Ailette à température isotherme à son extrémité

$$\begin{cases} T_{(x=0)}=T_0 \\ x = L \quad : \quad \theta(L) = \theta_L \end{cases} \quad (2.17)$$

La solution s'écrit : [3]

$$\frac{T(x)-T_{\infty}}{T_0-T_{\infty}} = \frac{\frac{T_L-T_{\infty}}{T_0-T_{\infty}} \text{Sh}(nL) + \text{Sh}[n(L-x)]}{\text{Sh}(nL)} \quad (2.18)$$

Et le flux total dissipé par l'ailette a pour expression :

$$\Phi_p = n \lambda A (T_0 - T_{\infty}) \frac{\text{Ch}(nL) - \frac{T_L-T_{\infty}}{T_0-T_{\infty}}}{\text{Sh}(nL)} \quad (2.19)$$

2.2.4.4 Ailette avec transfert de chaleur à l'extrémité

$$\begin{cases} T_{(x=0)}=T_0 \\ -\lambda A \left(\frac{dT}{dx} \right)_{x=L} = h A [T_{(x=L)} - T_{\infty}] \text{(Conservation du flux de chaleur en } x=L) \end{cases} \quad (2.20)$$

La solution s'écrit : [3]

$$\frac{T(x)-T_{\infty}}{T_0-T_{\infty}} = \frac{\text{Ch}[n(L-x)] + \frac{h}{n\lambda} \text{Sh}[n(L-x)]}{\text{Ch}(nL) + \frac{h}{n\lambda} \text{Sh}(nL)} \quad (2.21)$$

Et le flux total dissipé par l'ailette a pour expression :

$$\Phi_p = n \lambda A T_0 \frac{\text{th}(nL) + \frac{h}{n\lambda}}{1 + \frac{h}{n\lambda} \text{th}(nL)} \quad (2.22)$$

2.2.4.6 Ailette circulaire de section rectangulaire

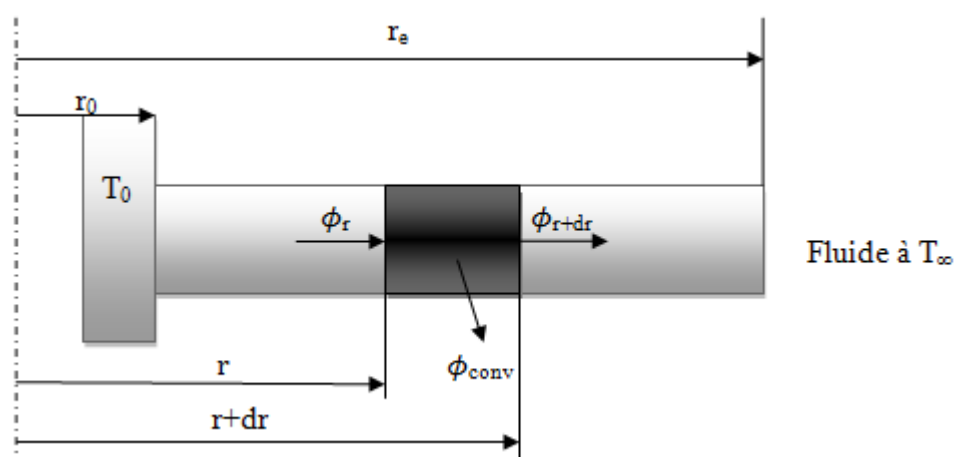


Fig. 10—Représentation des flux élémentaires sur une ailette circulaire

Effectuons un bilan thermique sur l'élément d'ailette compris entre les rayons \$r\$ et \$r+dr\$:

Le bilan d'énergie s'écrit : [3]

$$\phi_r = \phi_{r+dr} + \phi_{conv} \quad (2.23)$$

Avec :

ϕ_r Flux de chaleur transmis par conduction au rayon r

ϕ_{r+dr} Flux de chaleur transmis par conduction au rayon $r+ dr$

ϕ_{conv} Flux de chaleur transmis par convection sur la surface de l'ailette entre r et $r + dr$

Si λ est indépendant du rayon r , nous obtenons :

$$\frac{1}{r} \frac{(r+dr) \left(\frac{dT}{dx} \right)_{r+dr} - r \left(\frac{dT}{dx} \right)_r}{dr} = \frac{2h}{\lambda e} [T(x) - T_\infty] \quad (2.24)$$

Soit encore :

$$\frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\theta}{dr} - \frac{2h}{\lambda e} \theta \quad (2.25)$$

C'est une équation de Bessel (Annexe B) dont la solution s'écrit sous la forme :

$$\theta = C_1 I_0(nr) + C_2 K_0(nr) \quad (2.26)$$

C_1 et C_2 étant déterminés par les conditions aux limites :

En $r = r_0$: $\theta = T_0 - T_\infty$ (2.27)

En $r = r_e$: $h\theta(r_e) = -\lambda \left(\frac{d\theta}{dr} \right)_{(r_e)}$ (2.28)

On en déduit les valeurs de C_1 et de C_2 :

$$C_1 = \frac{K_1(nr_e) - \frac{h}{\lambda n} K_0(nr_e)}{I_1(nr_e)K_0(nr_0) + I_0(nr_0)K_1(nr_e) + \frac{h}{\lambda n} [I_0(nr_e)K_0(nr_0) + I_0(nr_0)K_0(nr_e)]} \quad (2.29)$$

$$C_2 = \frac{1 - C_1 I_0(nr_0)}{K_0(nr_0)} \quad (2.30)$$

On aboutit à l'expression simplifiée suivante :

$$\frac{T(r) - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \frac{K_1(nr_e)I_0(nr) + I_1(nr_e)K_0(nr)}{I_1(nr_e)K_0(nr_0) + I_0(nr_0)K_1(nr_e)} \quad (2.31)$$

Et le flux total dissipé par l'ailette a alors pour expression :

$$\phi_p = \lambda 2\pi r_0 e n (T_0 - T_\infty) \frac{I_1(nr_e)K_0(nr_0) - K_1(nr_e)I_1(nr_0)}{I_1(nr_e)K_0(nr_0) + I_0(nr_0)K_1(nr_e)} \quad (2.32)$$

2.2.5 Efficacité d'une

Elle définit les performances d'une ailette en comparant le flux dissipé à celui qui serait dissipé dans une ailette de mêmes dimensions mais dont la température serait uniforme et égale à celle de la base. [3]

$$\eta = \frac{\phi_p}{\phi_{max}} \quad (2.33)$$

Pour une ailette rectangulaire de périmètre P et de longueur L

$$\phi_{max} = hpL(T_0 - T_\infty) \quad (2.34)$$

Pour une ailette circulaire de rayon de base r_0 et de rayon externe r_e

$$\phi_{max} = 2h\pi(r_e^2 - r_0^2)(T_0 - T_\infty) \quad (2.35)$$

2.2.5.1 Ailette rectangulaire longue

$$\eta = \frac{1}{nL} \quad (2.36)$$

2.2.5.2 Ailette parfaitement isolée à son extrémité

$$\eta = \frac{\text{th}(nL)}{nL} \quad (2.37)$$

2.2.5.3 Ailette rectangulaire avec transfert de chaleur à l'extrémité

$$\eta = \frac{\text{th}(nL) + \frac{h}{n\lambda}}{nL + \frac{h}{n\lambda} \text{th}(nL)} \quad (2.38)$$

2.2.5.4 Ailette à température isotherme à son extrémité

$$\eta = \frac{\text{Ch}(nL) - \frac{T_L - T_\infty}{T_0 - T_\infty}}{nL \text{Sh}(nL)} \quad (2.39)$$

2.2.5.5 Ailette circulaire de section rectangulaire

$$\eta = \sqrt{\frac{2\lambda e}{hr_0^2} \frac{1}{\frac{r_e^2}{r_0^2} - 1}} \frac{I_1(nr_e)K_1(nr_0) - K_1(nr_e)I_1(nr_0)}{I_1(nr_e)K_0(nr_0) + I_0(nr_0)K_1(nr_e)} \quad (2.40)$$

2.2.6 Le rendement d'une ailette

Est définie comme étant le rapport entre le flux de chaleur dissipé par l'ailette et le flux de chaleur sans ailette. [19]

$$\varepsilon = \frac{\Phi_p}{\Phi_{\text{sans ailette}}} = \frac{\Phi_p}{hA(T_0 - T_\infty)} \quad (2.41)$$

$$\varepsilon_{\text{ailette longue}} = \frac{n\lambda A(T_0 - T_\infty)}{hA(T_0 - T_\infty)} = \sqrt{\frac{p\lambda}{hA}} \quad (2.42)$$

$$\varepsilon_{\text{ailette adiabatique}} = \frac{n\lambda A(T_0 - T_\infty)\text{th}(nL)}{hA(T_0 - T_\infty)} = \text{th}(nL) \sqrt{\frac{p\lambda}{hA}} \quad (2.43)$$

2.3 Résolution numérique

Les équations différentielles aux dérivées partielles régissant le transfert de chaleur à travers les ailettes peuvent être résolues numériquement, en tenant compte des conditions aux limites et initiales. Parmi les méthodes de résolution des EDP, il y a essentiellement trois méthodes : [20]

- Méthode des différences finies ;
- Méthode des volumes finis ;
- Méthode des éléments finis ;

Chaque méthode de résolution numérique d'un problème continu comporte une phase de maillage et une phase de discrétisation. La phase de maillage consiste à diviser le domaine d'étude en de petits volumes appelés volumes de contrôle. La phase de discrétisation transforme le problème continu en un problème discret. Les équations ainsi que les conditions aux limites sont approchées par des équations et conditions discrètes. [21]

2.3.1 Discrétisation des (E.D.P)

Il existe deux grandes familles de méthodes de discrétisation :

- Les méthodes d'approximation des équations : Selon ces méthodes, on cherche une solution exacte des équations approchées car les opérateurs différentiels sont discrétisés sur un maillage (la méthode des différences finies et la méthode des volumes finis) ;

▪ Les méthodes d'approximation des solutions : Selon ces méthodes on cherche une solution approchée à partir des équations exactes. Les solutions sont écrites comme des séries de fonctions tronquées aux ordres de précisions désirées (les méthodes spectrales et la méthode des éléments finis).[22]

2.3.1.1 Méthode des différences finis (M.D.F)

La méthode des différences finies, présente une technique de résolution des équations aux dérivées partielles, par l'approximation de dérivées par des différences finies. Cette méthode consiste à subdiviser le domaine d'étude en un nombre déterminé de nœuds et à représenter la fonction recherchée en chacun des nœuds du domaine par un développement limité en série de Taylor. Ainsi, l'équation différentielle est transformée en équation algébrique pour chaque nœud.

La résolution du système d'équations algébriques permet d'obtenir la distribution de la fonction étudiée dans le domaine d'étude. La méthode de différence finie ne permet pas la prise en compte des conditions de passage d'un milieu physique à un autre et des non-linéarités, cela nécessite un traitement spécifique. D'autre part, elle s'adapte mal aux objets de la géométrie complexe à cause de la rigidité du maillage. [23]

La Figure 11 représente un détail d'un maillage de calcul structuré d'un domaine bidimensionnel (2D).

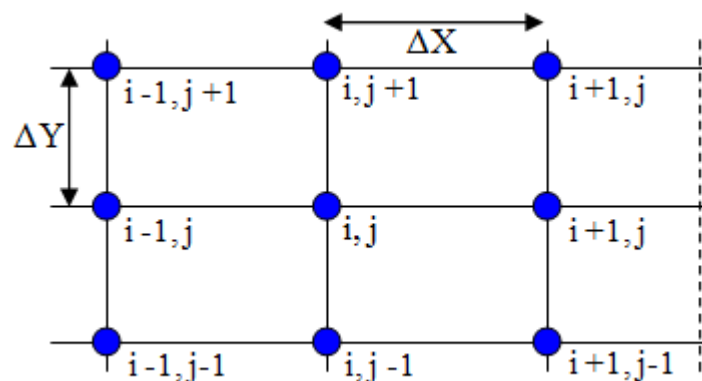


Fig. 11 –Grille de calcul structuré 2D

2.3.1.2 Méthode des éléments finis (M.E.F)

Cette méthode consiste à transformer les équations différentielles sous des formes intégrales basées sur le concept de minimisation d'une quantité (comme l'énergie...), conduisant à la solution exacte. En d'autre terme elle s'agisse de trouver une fonction globale représentant le modèle mathématique dans le domaine étudié. Le principe fondamental de la méthode des éléments finis consiste à :

- Définir une partition du domaine d'étude c'est-à-dire subdivisé le domaine d'étude en régions élémentaires (Eléments Finis).
- Représenter la fonction inconnue sur chacun de ces éléments par une approximation polynomiale.

- Construire les formes intégrales.
- Minimiser l'intégrale.
- Une organisation matricielle des calculs.
- Une résolution du système algébrique.

La M.E.F est une méthode très puissante pour la résolution des équations aux dérivées partielles surtout dans les géométries complexes. Sa mise en œuvre par contre, est assez compliquée et nécessite une place mémoire assez importante [23]

2.3.1.3 Méthode des volumes finis (M.V.F)

La méthode des volumes finis est une version spéciale de la méthode des résidus pondérés où la fonction de projection égale à l'unité. Cette méthode consiste à subdiviser le domaine d'étude en volumes élémentaires de telle manière que chaque volume entoure un nœud principal P.

Chaque volume est délimité par : deux interfaces dans le cas monodimensionnel noté (e, w), quatre interfaces dans le cas bidimensionnel (e, w, s, n) et six interfaces dans le cas tridimensionnel (e, w, s, n, t, b). Chaque nœud principal P est limité par des nœuds voisins (E, W) dans le cas monodimensionnel, (E, W, S, N) dans le cas bidimensionnel, et (E, W, S, N, T, B) dans le cas tridimensionnel. L'équation différentielle est intégrée dans chaque volume élémentaire finis. Pour calculer l'intégrale dans ce volume élémentaire l'inconnue est représentée à l'aide d'une fonction d'approximation (linéaire, parabolique, exponentielle, de puissance etc.) entre deux nœuds consécutifs. Ensuite, la forme intégrale est discrétisée dans le domaine d'étude. Le résultat de discrétisation donne une équation algébrique qui est constituée par les valeurs nodales. [23]

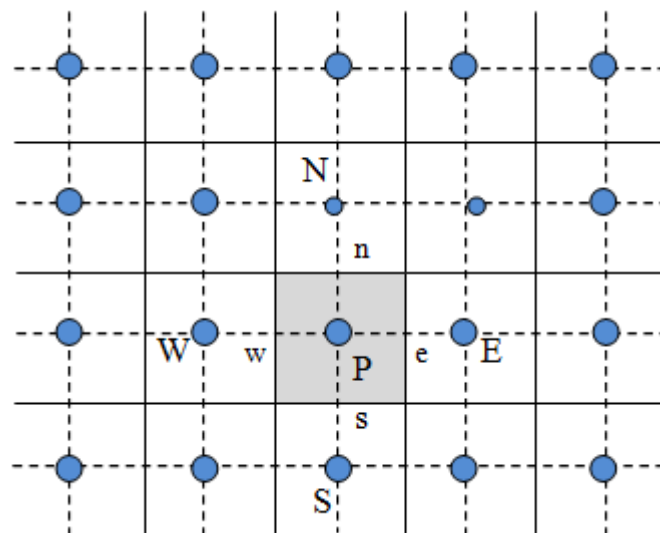


Fig.12 –Volume de contrôle bidimensionnel

Tableau 3 - Avantages et des inconvénients des différentes méthodes numériques [24]

Méthode	Avantage	Inconvénient
M.D.F	- Grande simplicité d'écriture et faible coût de calcul.	- Limitation à des géométries simples, difficultés de prise en compte des conditions aux limites de type Neumann.
M.E.F	- Traitement possible de géométries complexes, nombreux résultats théoriques sur la convergence.	- Complexité de mise en œuvre et grand coût en temps de calcul et mémoire.
M.V.F	- Permet de traiter des géométries complexes avec des volumes de forme quelconque, détermination plus naturelle des conditions aux limites de type Neumann.	- Peu de résultats théoriques de convergence.

2.3.2 Choix de la méthode numérique

Le choix de l'utilisation de telle méthode numérique va dépendre essentiellement du type et de la complexité du problème à résoudre : la nature du fluide, le comportement thermodynamique, la modélisation du milieu et le problème stationnaire ou in stationnaire.

Dans notre présente étude, nous avons choisi la méthode des volumes finis, car elle présente des avantages considérables du fait qu'elle soit simple, sa fiabilité quant aux résultats, son adaptation au problème physique, ce qui n'est pas le cas pour les autres méthodes numériques.[25]

2.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté le système physique considéré ainsi que le modèle thermique, la formulation mathématique, les hypothèses et les conditions aux limites. Ensuite, nous avons présenté les méthodes de résolution numériques utilisées pour résoudre les équations différentielles aux dérivées partielles régissant le phénomène de transfert de chaleur dans les ailettes et enfin nous avons choisi la méthode des volumes finis pour l'appliquer à notre cas d'étude dans le chapitre qui suit.

Chapitre 3

Résultats et discussions

3.1 Introduction

Les équations régissant le phénomène étudié sont des équations aux dérivées partielles (EDP) non-linéaires. Dans ce chapitre nous allons présenter la méthode numérique utilisée pour étudier le transfert de chaleur associé à une ailette de section uniforme. Nous avons choisi la méthode des volumes finis pour discrétiser les équations du modèle mathématique.

Ensuite nous analysons et nous discutons les résultats obtenus.

3.2 Application de la méthode des volumes finis pour un problème de diffusion stationnaire unidirectionnel

Supposons l'équation de conduction thermique stationnaire unidimensionnelle : [22]

$$\frac{d}{dx} \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} \right) + S = 0 \quad (3.1)$$

Γ : Coefficient de diffusion

S : Terme source

3.2.1 Génération du maillage

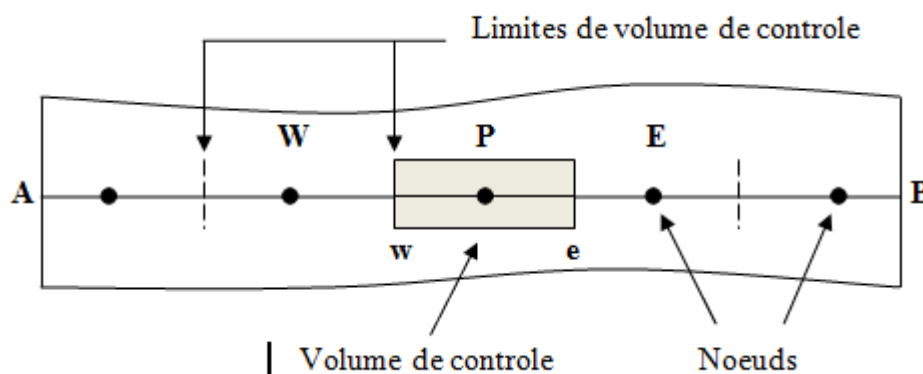


Fig. 13–Maillage unidimensionnel

La valeur de ϕ aux frontières A et B est maintenue constante (conditions de Dirichlet).

Le domaine d'étude est subdivisé en un nombre fini de nœuds. Chaque volume fini entoure un nœud principal "P". Les nœuds voisins sont "E" côté Est et "W" côté West. Les lignes en tirets représentent les faces du volume fini coté est (e) et coté west (w) (Voir Fig. 14).

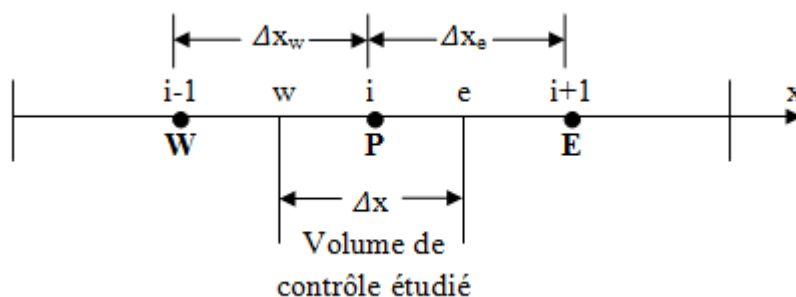


Fig. 14– Système de notation

3.2.2 Discrétisation

Cette étape consiste à intégrer l'équation (3.1) sur le volume de contrôle (fig.13) on obtient successivement :

$$\int_{\Delta V} \frac{d}{dx} \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} \right) dV + \int_{\Delta V} s dV = \left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_e - \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} \right)_w + \bar{S} \Delta V = 0 \quad (3.2)$$

Avec :

A : L'aire de la face du volume de contrôle.

ΔV : Le volume du volume de contrôle.

\bar{S} : La valeur moyenne du terme source.

Les coefficients de diffusion pour l'Est et l'Ouest sont donnés par :

$$\Gamma_w = \frac{\Gamma_w + \Gamma_p}{2}, \text{ et } \Gamma_e = \frac{\Gamma_p + \Gamma_E}{2} \quad (3.3)$$

Outre les termes diffusifs sont évalués comme suit :

$$\left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_e = \Gamma_e A_e \left(\frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_{PE}} \right) \quad (3.4)$$

$$\left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_w = \Gamma_w A_w \left(\frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_{WP}} \right) \quad (3.5)$$

En pratique, le terme source S peut être une fonction de variable dépendent. Dans ce cas-ci la méthode des volumes finis l'approxime au moyen d'une forme linéaire donnée par :

$$\bar{S} \Delta V = S_u + S_p \phi_p \quad (3.6)$$

En remplaçant les équations (3.4), (3.5), et (3.6) dans (3.2) on obtient :

$$\Gamma_e A_e \left(\frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_{PE}} \right) - \Gamma_w A_w \left(\frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_{WP}} \right) + (S_u + S_p \phi_p) = 0 \quad (3.7)$$

Cette équation peut être réarrangée comme suit :

$$\left(\frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} A_e + \frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} A_w - S_p \right) \phi_P = \left(\frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} A_w \right) \phi_W + \left(\frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} A_e \right) \phi_E + S_u \quad (3.8)$$

Identifiant les coefficients de ϕ_W et ϕ_E dans l'équation (3.8) comme a_W et a_E , et le coefficient de ϕ_P comme a_P , l'équation précédente s'écrit alors :

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E + S_u \quad (3.9)$$

Avec :

$$a_W = \frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} A_w \quad (3.10)$$

$$a_E = \frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} A_e \quad (3.11)$$

$$a_P = a_W + a_E + S_p \quad (3.12)$$

Les valeurs de S_u et S_p peuvent être obtenues de la source modèle (3.6).

Les équations (3.6) et (3.9) représentent la forme discrétiser de l'équation (3.1)

3.3 Étude de cas : ailettes à section uniforme

En se basant sur les différentes étapes décrites précédemment, nous allons effectuer une analyse numérique du système représenté dans la figure 8. Le but final de cette étude est de connaître la distribution de température le long de l'ailette. L'équation dérivant le problème est :

[22]

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dT}{dx} \right) - n^2 (T - T_\infty) = 0 \quad (3.13)$$

Cas 1 : ailette parfaitement isolée à son extrémité (adiabatique)

La solution analytique est donnée par l'équation (2.15)

Comme on a décrit précédemment, la première étape est de construire le maillage. La figure 13 illustre un exemple de maillage constitué par six nœuds

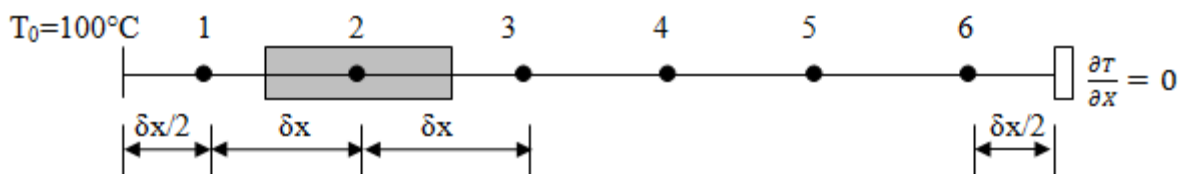


Fig. 15– Maillage utilisé pour la résolution du 1^{er} cas

3.3.1 Discrétisation de l'équation de l'ailette

3.3.1.1 Discrétisation des termes de flux aux nœuds internes

L'intégration de l'équation (3.13) sur le volume de contrôle donne :

$$\int_{\Delta V} \frac{d}{dx} \left(\frac{dT}{dx} \right) dV - \int_{\Delta V} n^2 (T - T_\infty) dV = 0 \quad (3.14)$$

La dérivée seconde est évaluée en supposant que l'intégrale est localement constante sur le volume de contrôle choisi.

$$\left[\left(A \left(\frac{dT}{dx} \right)_e \right) - \left(A \left(\frac{dT}{dx} \right)_w \right) \right] - [n^2 (T_p - T_\infty) A \delta x] \quad (3.15)$$

On développe maintenant une formulation pour les nœuds 2, 3, 4 et 5 en utilisant une approximation linéaire pour les termes représentant les flux, l'équation (3.15) s'écrit :

$$\left[\left(\frac{T_E - T_P}{\delta x} \right) - \left(\frac{T_P - T_W}{\delta x} \right) \right] - [n^2 (T_p - T_\infty) \delta x] = 0 \quad (3.16)$$

Cette équation, peut être réarrangée comme suit :

$$\left(\frac{1}{\delta x} + \frac{1}{\delta x} \right) T_p = \left(\frac{1}{\delta x} \right) T_w + \left(\frac{1}{\delta x} \right) T_E + n^2 \delta x T_\infty - n^2 \delta x T_p \quad (3.17)$$

Par conséquent, l'équation des nœuds internes 2, 3, 4 et 5 qui a la forme générale de l'équation (3.12) est donnée par :

$$a_p T_p = a_w T_w + a_e T_e + S_u \quad (3.18)$$

Tableau 4 - Les coefficients de discrétisation aux nœuds 2, 3, 4, et 5

a_w	a_e	a_p	S_p	S_u
$\frac{1}{\delta x}$	$\frac{1}{\delta x}$	$a_w + a_e + S_p$	$-n^2 \delta x$	$n^2 \delta x T_\infty$

3.3.1.2 Discrétisation des termes de flux aux frontières

Nœud gauche 1 :

Il s'agit d'une température imposée au nœud 1, alors on en déduit :

$$\left[\left(\frac{T_e - T_p}{\delta x} \right) - \left(\frac{T_p - T_0}{\delta x / 2} \right) \right] - [n^2 (T_p - T_\infty) \delta x] = 0 \quad (3.19)$$

Tableau 5 - Les coefficients de discrétisation au nœud 1

a_w	a_e	a_p	S_p	S_u
0	$\frac{1}{\delta x}$	$a_w + a_e - S_p$	$-n^2 \delta x - \frac{2}{\delta x}$	$n^2 \delta x T_\infty + \frac{2}{\delta x} T_0$

Nœud droit 6 :

Au nœud 6 l'ailette est calorifugée, le flux côté ouest est nul et donc la discrétisation nous a permis de trouver l'équation suivante :

$$\left[0 - \left(\frac{T_p - T_w}{\delta x} \right) \right] - [n^2 (T_p - T_\infty) \delta x] = 0 \quad (3.20)$$

Tableau 6 - Les coefficients de discrétisation au nœud 6

a_w	a_e	a_p	S_p	S_u
$\frac{1}{\delta x}$	0	$a_w + a_e - S_p$	$-n^2 \delta x$	$n^2 \delta x T_\infty$

Tableau 7 - Tableau récapitulatif des coefficients de discrétisation

Nœuds	a_w	a_e	S_u	S_p	$a_p = a_w + a_e - S_p$
1	0	82	16434.6	-166	248
2	82	82	41.23	-2.06	166.06
3	82	82	41.23	-2.06	166.06
4	82	82	41.23	-2.06	166.06
5	82	82	41.23	-2.06	166.06
6	82	0	41.23	-2.06	84.06

Après avoir calculé les valeurs des coefficients de discrétisation des nœuds internes et nœuds aux limites récapitulés dans Tab.6, on obtient le système algébrique suivant :

$$\begin{cases} 248 T_1 - 82 T_2 = 16434.6 \\ -82 T_1 + 166.06 T_2 - 82 T_3 = 41.23 \\ -82 T_2 + 166.06 T_3 - 82 T_4 = 41.23 \\ -82 T_3 + 166.06 T_4 - 82 T_5 = 41.23 \\ -82 T_4 + 166.06 T_5 - 82 T_6 = 41.23 \\ -82 T_5 + 84.06 T_6 = 41.23 \end{cases}$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} 248 & -82 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -82 & 166.06 & -82 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -82 & 166.06 & -82 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -82 & 166.06 & -82 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -82 & 166.06 & -82 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -82 & 84.06 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16434.6 \\ 41.23 \\ 41.23 \\ 41.23 \\ 41.23 \\ 41.23 \end{bmatrix}$$

Cas 2 : ailette avec transfert de chaleur à l'extrémité (Conservation du flux de chaleur en $x=L$)

La solution analytique est donnée par l'équation (2.20)

Le maillage utilisé est celui de la figure 14.

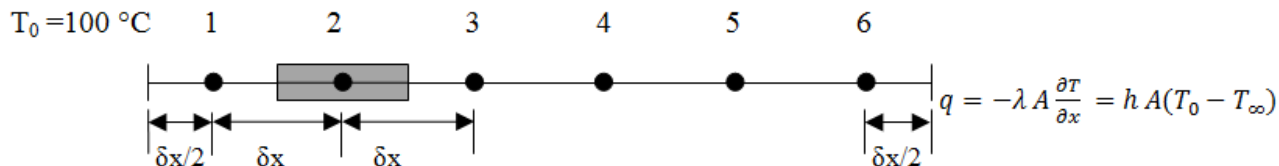


Fig. 16– Maillage utilisé pour la résolution du 2^{ème} cas

Les équations discrétisées est identiques qu'avant et les valeurs numériques des coefficients et des termes sources sont les mêmes aux nœuds 1, 2, 3, 4 et 5 sauf au nœud 6 car le flux côté ouest n'est pas nul et donc la discrétisation nous a permet de trouver l'équation suivante :

$$\left[q - \left(\frac{T_p - T_w}{\delta x} \right) \right] - [n^2 (T_p - T_\infty) \delta x] = 0 \quad (3.21)$$

$$a_w = \frac{1}{\delta x} \quad (3.22)$$

$$a_E = q \quad (3.23)$$

$$a_p = a_w + a_E - S_p \quad (3.24)$$

$$S_p = -n^2 \delta x \quad (3.25)$$

$$S_u = n^2 \delta x T_\infty \quad (3.26)$$

3.3.1.3 Résolution du système d'équation algébrique

On remarque qu'il s'agit d'un système avec une matrice tri-diagonale et donc pour la résolution on va utiliser l'algorithme de Thomas (T.D.M.A). [22]

La discrétisation, du modèle décrit auparavant, conduit au système tri diagonal suivant :

$$a_i T_i = b_i T_{i+1} + c_i T_{i-1} + d_i \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (3.27)$$

$$c_1=0, b_n=0$$

$$T_i = P_i T_{i+1} + Q_i \quad (3.28)$$

$$T_{i-1} = P_{i-1} T_i + Q_{i-1} \quad (3.29)$$

Remplaçant T_{i-1} par sa valeur dans l'équation (3.21) on obtient :

$$a_i T_i = b_i T_{i+1} + c_i (P_{i-1} T_i + Q_{i-1}) + d_i \quad (3.30)$$

Après simplification :

$$T_i = \left(\frac{b_i}{a_i - c_i P_{i-1}} \right) T_{i+1} + \frac{d_i + c_i Q_{i-1}}{a_i - c_i P_{i-1}} \quad (3.31)$$

Avec :

$$P_i = \frac{b_i}{a_i - c_i P_{i-1}} \quad (3.32)$$

$$Q_i = \frac{d_i + c_i Q_{i-1}}{a_i - c_i P_{i-1}} \quad (3.33)$$

Pour $i = 1$

$$P_1 = \frac{b_1}{a_1} \quad (3.34)$$

$$Q_1 = \frac{d_1}{a_1} \quad (3.35)$$

Pour $i = n$

$$T_n = Q_n \quad (3.36)$$

3.3.1.4 Mise en œuvre et organigramme de calcul

Nous présentons l'organigramme correspondant à la mise en œuvre de la méthode de Thomas sur la figure 14, il s'agit d'une méthode directe. L'équation continue associée à ses conditions aux limites doit être écrite sous une forme discrète. En premier lieu, il faut fixer les caractéristiques géométriques du système, et les propriétés thermophysiques.

La subroutine 'Temp' nous permet en deuxième lieu d'obtenir le système d'équation algébrique $[A] \cdot [T] = [B]$, ce dernier est résolu à l'aide de la subroutine 'T.D.M.A'. En fin les résultats de la propagation de la température le long de l'ailette sont visualisés par la subroutine 'Writing'

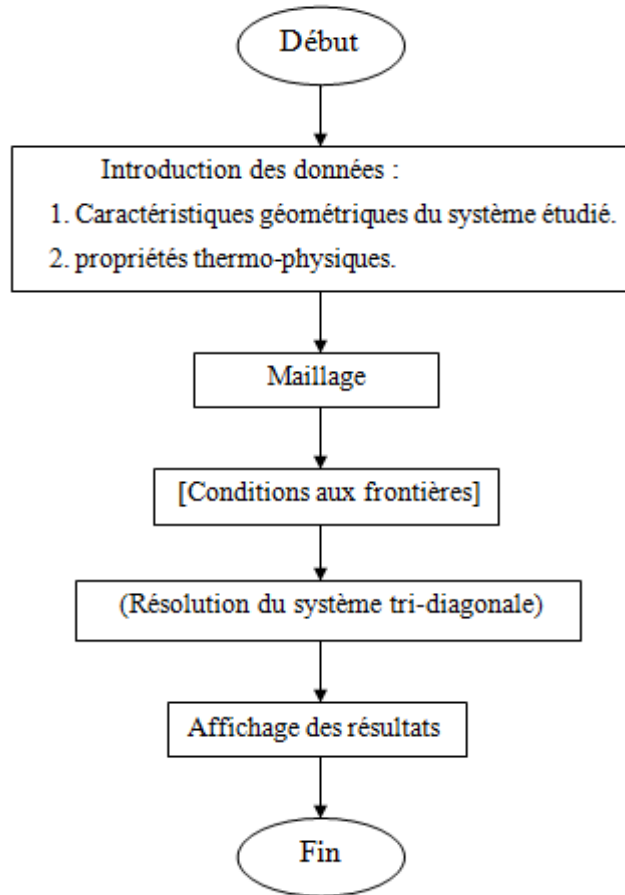


Fig.17 -Organigramme de calcul

3.4 Résultats

3.4.1 Résultats numériques

Les tableaux 8 et 9 montrent un exemple de solution avec un maillage grossier de 6 nœuds comparé avec la solution analytique pour le premier cas (condition adiabatique), on remarque que la solution numérique est raisonnablement près de la solution exacte (Voir fig. 18).

Tableau 8 -Comparaison de la solution numérique et analytique pour la convection naturelle

Nœuds	Pas	MVF	Solution analytique	Pourcentage d'erreur
1	0.0061	95.34	95.57	0.002
2	0.0182	87.91	88.10	0.002
3	0.0304	82.18	82.35	0.002
4	0.0426	78.00	78.15	0.001
5	0.0548	75.27	75.41	0.001
6	0.0669	73.92	74.05	0.001

Tableau 9 -Comparaison de la solution numérique et analytique pour la convection forcée

Nœuds	Pas	MVF	Solution analytique	Pourcentage d'erreur
1	0.0061	84.54	85.73	0.01
2	0.0182	63.99	64.67	0.01
3	0.0304	50.51	50.89	0.007
4	0.0426	41.94	42.14	0.004
5	0.0548	36.89	36.99	0.002
6	0.0669	34.55	34.61	0.001

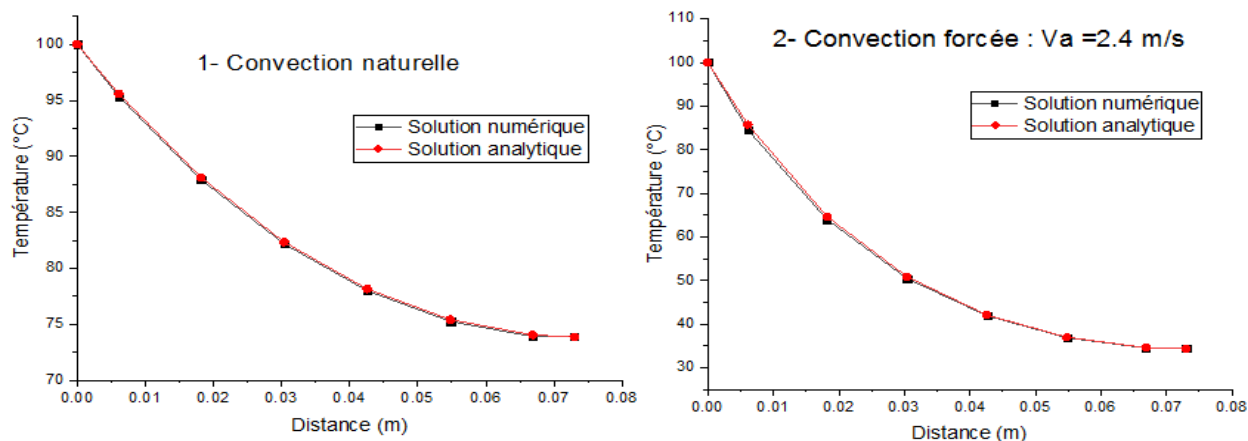


Fig. 18– Distribution de température dans une ailette adiabatique

La figure 18 montre la distribution de température le long d'une ailette à extrémité adiabatique, il est clair qu'à la base de l'ailette la température est maximale et par la suite va descendre au fur et à mesure le long de l'ailette. Les résultats montrent que l'ailette devient plus froide en convection forcée qu'en convection naturelle.

La précision de la solution numérique peut être augmentée en utilisant un maillage plus fin.

La comparaison du deuxième calcul avec la solution analytique est montrée sur la figure 19.

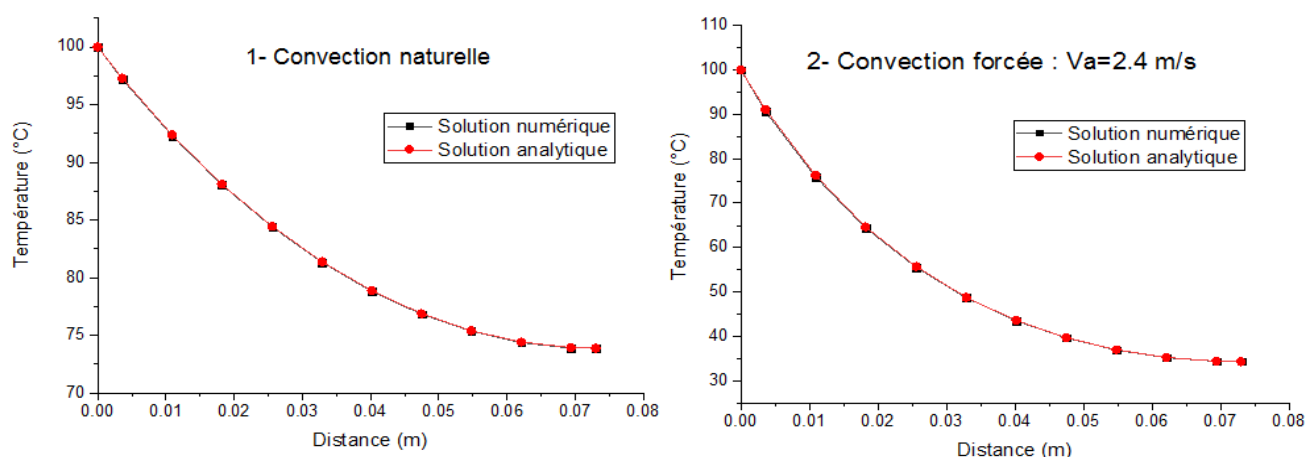


Fig. 19– Distribution de température dans une ailette adiabatique

Les deuxièmes résultats numériques montrent un meilleur accord avec la solution analytique.

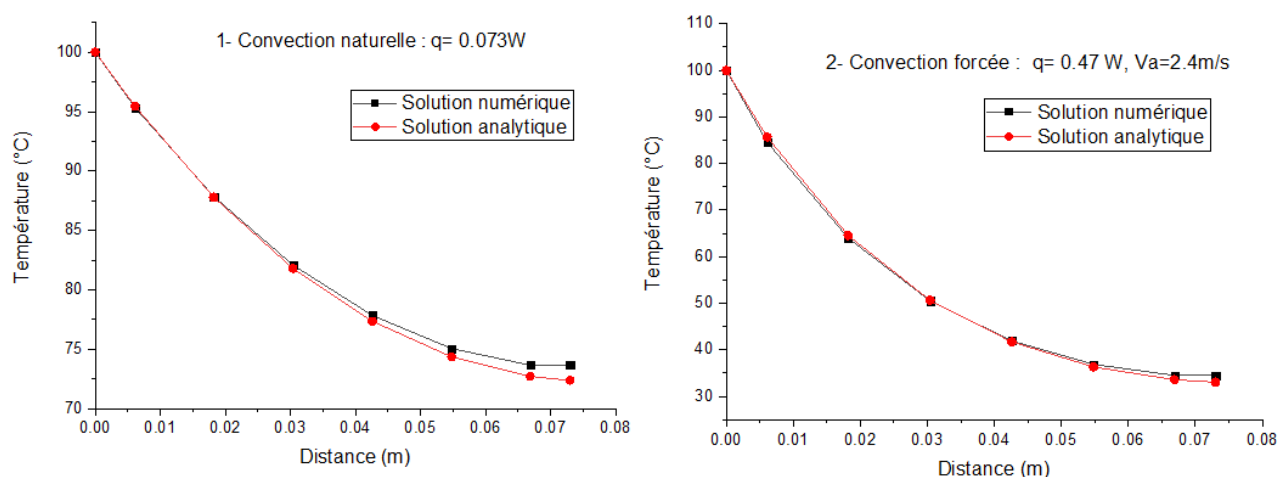
La comparaison des résultats numériques obtenus avec la méthode des volumes finis, avec la solution analytique pour le deuxième cas est représentée dans les tableaux 10, 11 (Voir figure 20).

Tableau 10 -Comparaison de la solution numérique et analytique pour la convection naturelle

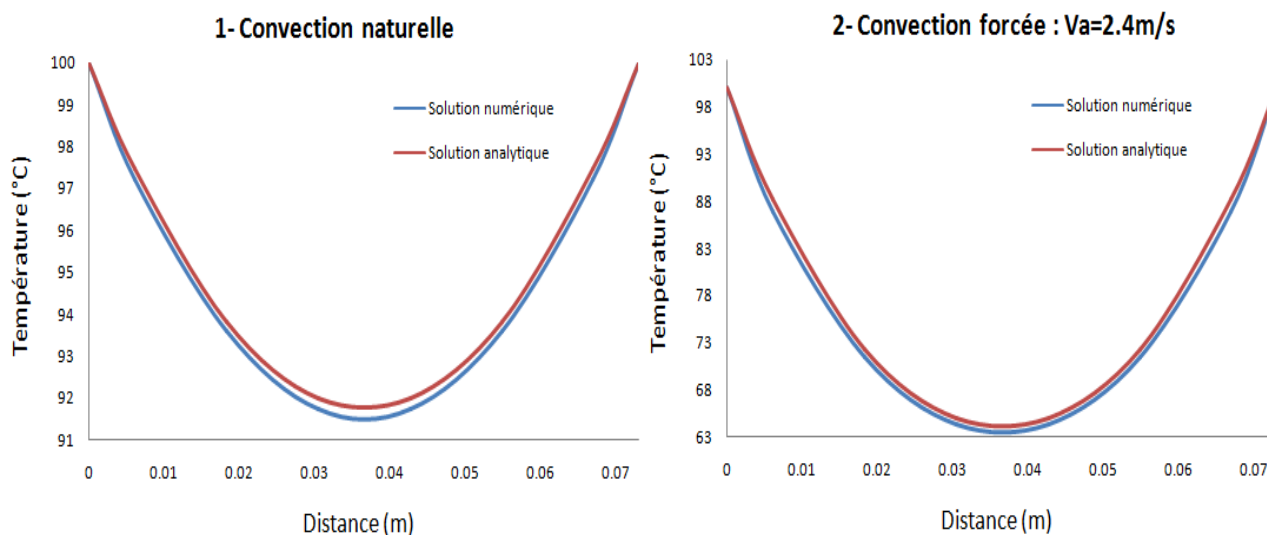
Nœuds	Pas	MVF	Solution analytique	Pourcentage d'erreur
1	0.0061	95.32	95.46	0.001
2	0.0182	87.85	87.78	0.0007
3	0.0304	82.07	81.79	0.003
4	0.0426	77.84	77.35	0.006
5	0.0548	75.06	74.35	0.009
6	0.0669	73.65	72.71	0.012

Tableau 11 -Comparaison de la solution numérique et analytique pour la convection forcée

Nœuds	Pas	MVF	Solution analytique	Pourcentage d'erreur
1	0.0061	84.54	85.68	0.013
2	0.0182	63.98	64.52	0.008
3	0.0304	50.5	50.61	0.002
4	0.0426	41.91	41.69	0.005
5	0.0548	36.85	36.3	0.015
6	0.0669	34.49	33.56	0.027

**Fig. 20– Distribution de température dans une ailette avec transfert de chaleur à l'extrémité**

Il est clair qu'à la base de l'ailette la température est maximale et par la suite va descendre au fur et à mesure le long de l'ailette. Les résultats montrent que l'ailette devient plus froide en convection forcée qu'en convection naturelle.

**Fig. 21– Distribution de température dans une ailette à température isotherme à son extrémité**

La figure 21 montre la distribution de température le long d'une ailette à température isotherme à son extrémité, il est clair que la température diminue de T_0 jusqu'au milieu de l'ailette à une température donnée et par la suite va augmenter jusqu'à T_0 à l'extrémité de l'ailette. Les résultats montrent que l'ailette devient plus froide en convection forcée qu'en convection naturelle.

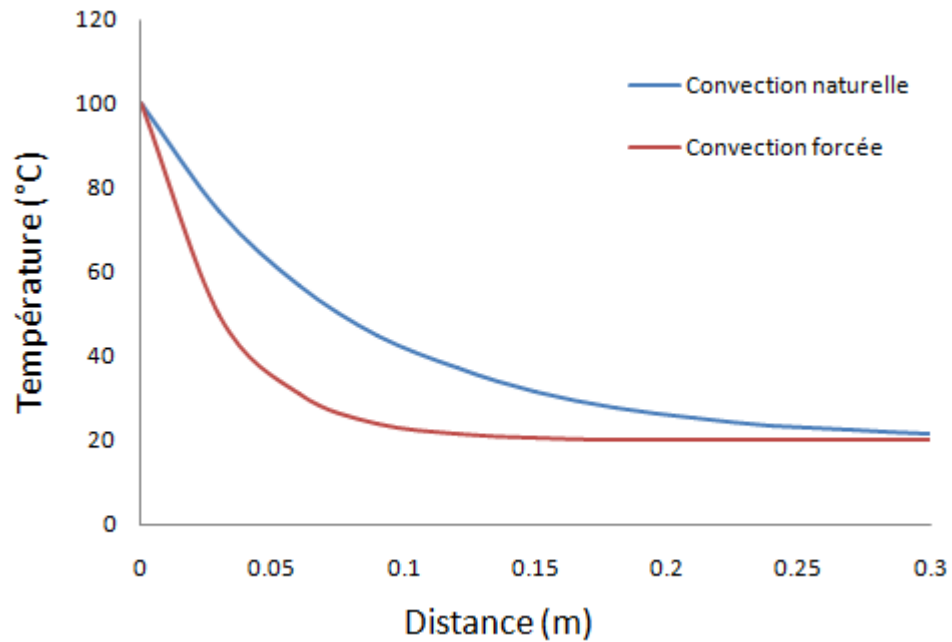


Fig. 22– Distribution de température dans une ailette infinie

La figure 22 montre la distribution de température dans une ailette très longue, nous remarquons que la température diminue de façon exponentielle de T_0 à T_∞ le long de l'ailette. Les résultats montrent que l'ailette devient plus froide en convection forcée qu'en convection naturelle.

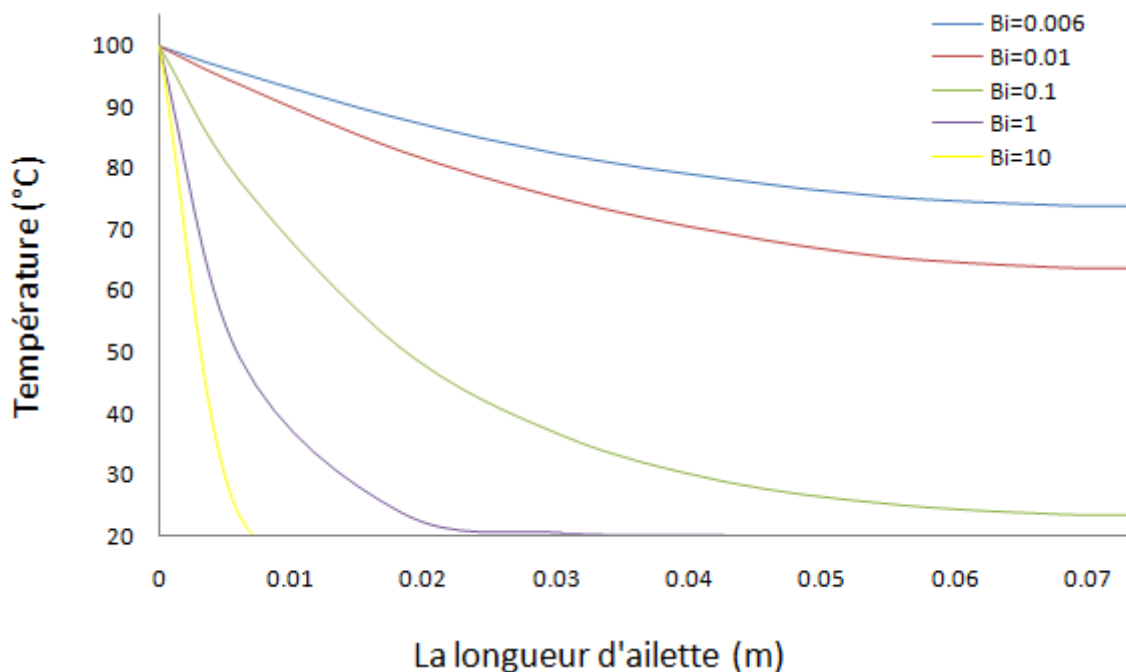


Fig. 23– Distribution de température pour différents nombres de Biot

La figure 23 représente la distribution de température le long d'une ailette adiabatique pour différents nombres de Biot. On voit bien que si Bi augmente la température diminue rapidement de T_0 à T_∞ et y reste constante le long de l'ailette.

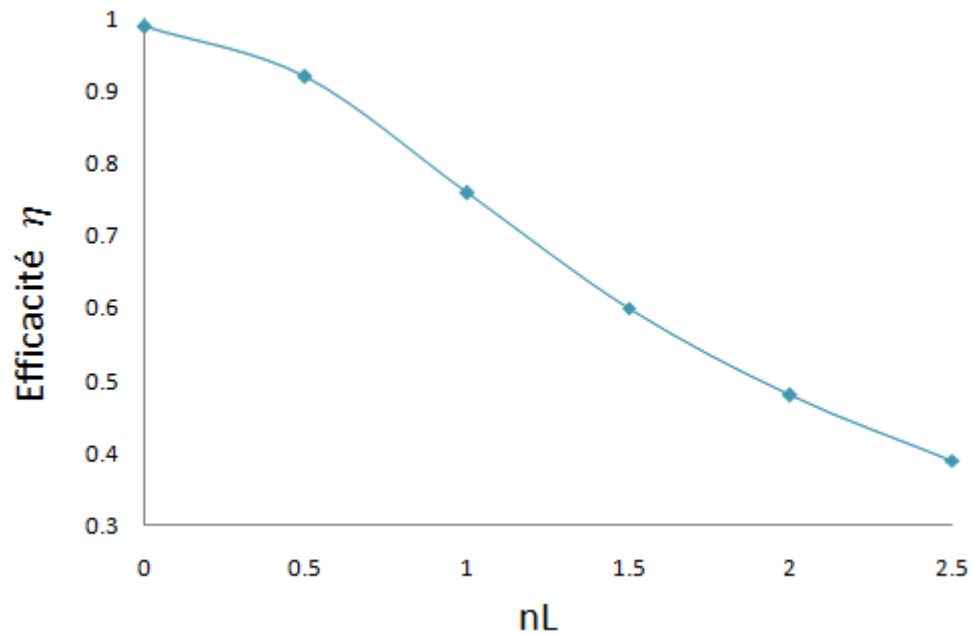


Fig. 24–L’efficacité d’une ailette adiabatique

La figure 24 illustre la variation d’efficacité en fonction du paramètre nL . Il est à noter que l’efficacité décroît avec l’augmentation de ce paramètre, ce qui indique que l’efficacité diminue quand l’aillette a une faible conductivité thermique et quand sa longueur augmente et son diamètre diminue.

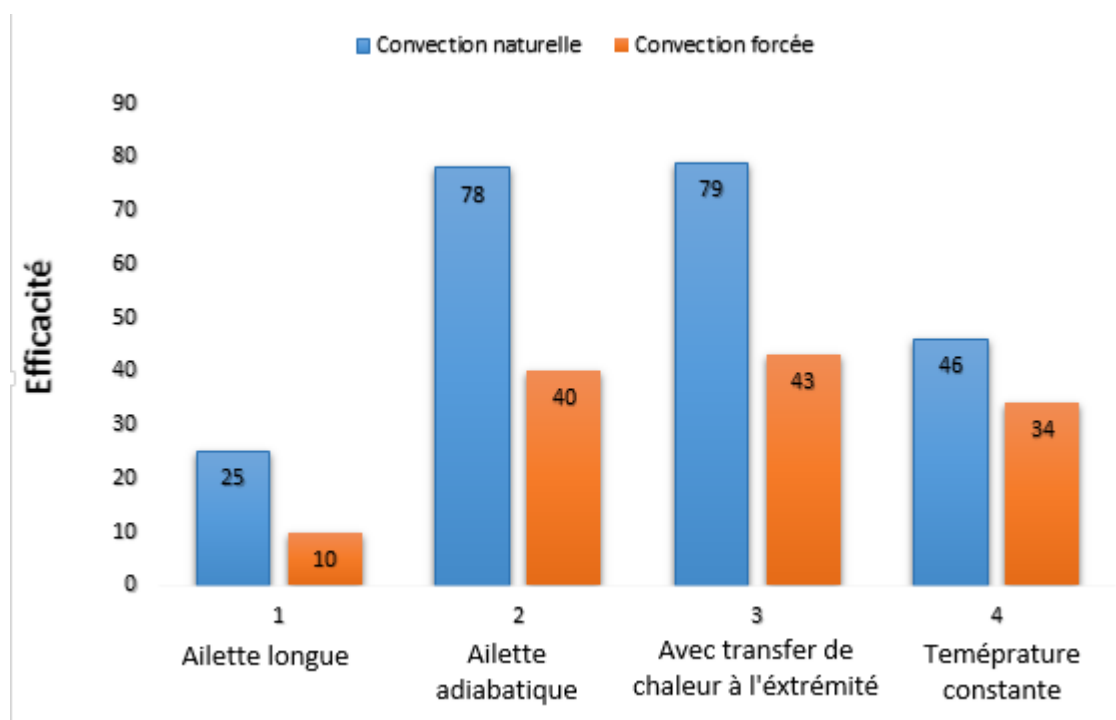


Fig. 25– Comparaison d’efficacités des ailettes

On remarque que l’efficacité de l’aillette adiabatique et l’aillette avec transfert de chaleur à l’extrémité est la plus importante suivie par celle à température constante à l’extrémité, tandis que l’efficacité de l’aillette longue est la plus faible. Et on remarque aussi que l’efficacité est plus élevée en convection naturelle que celle en convection forcée.

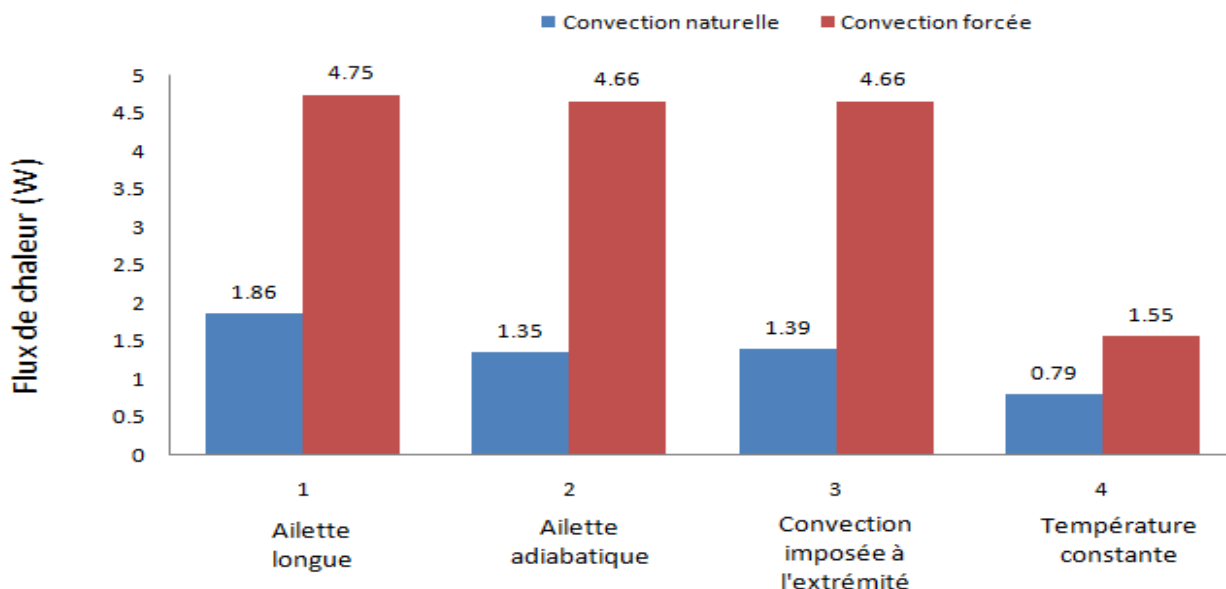


Fig. 26– Comparaison du flux total dissipé par l'ailette

On remarque que le flux total dissipé par l'ailette adiabatique et l'ailette avec transfert de chaleur à l'extrémité est le même et le plus élevé suivie par celui de l'ailette longue, tandis que le flux dissipé par l'ailette à température constante est le plus faible. Et on remarque aussi que le flux total est plus élevé en convection forcée que celui en convection naturelle.

3.4.2 Résultats expérimentaux

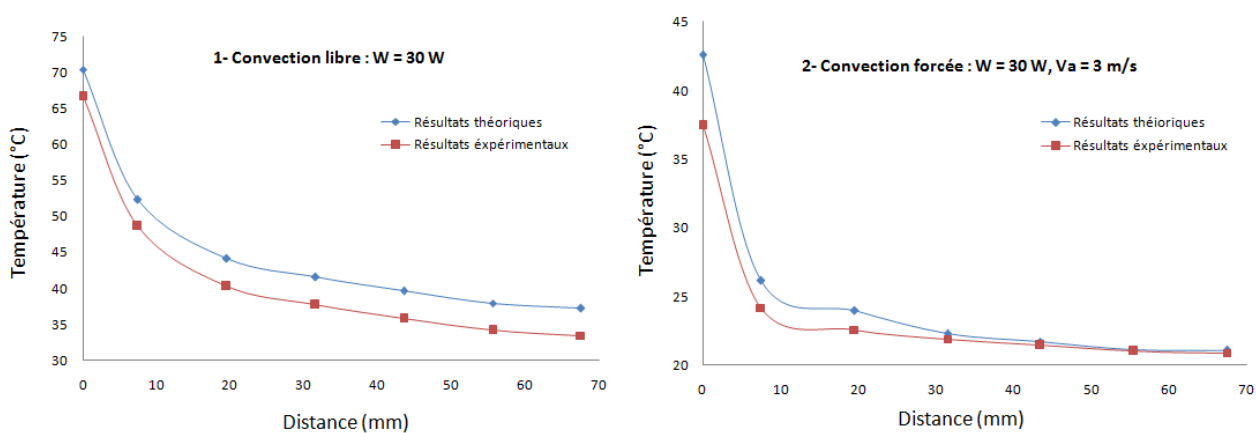


Fig. 27– Comparaison des résultats pour une plaque à ailettes [26]

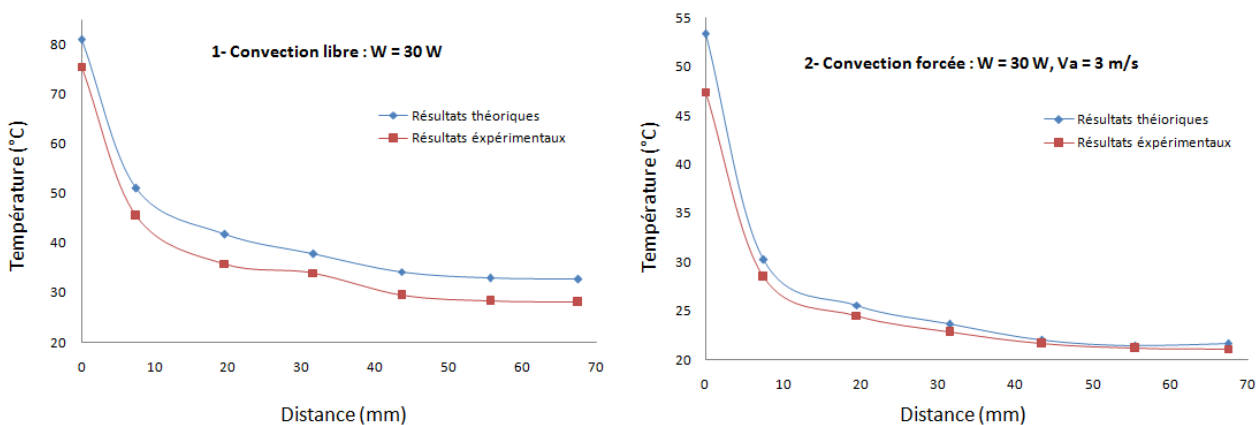


Fig. 28– Comparaison des résultats pour une plaque à tiges [26]

D'après les figures 27 et 28, nous remarquons que la plaque à ailettes devient plus froide que la plaque à tiges.

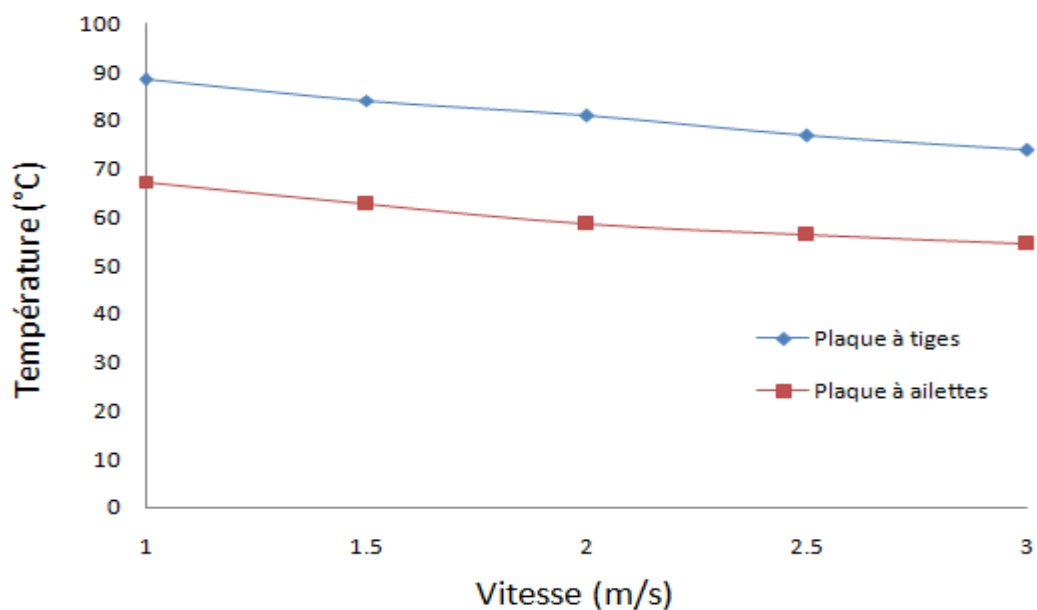


Fig. 29–Distribution de température en fonction de la vitesse de l'air [26]

Les résultats montrent que les surfaces deviennent plus froides à mesure que la vitesse augmente. La plaque à ailettes devient plus froide à une vitesse de l'air donnée.

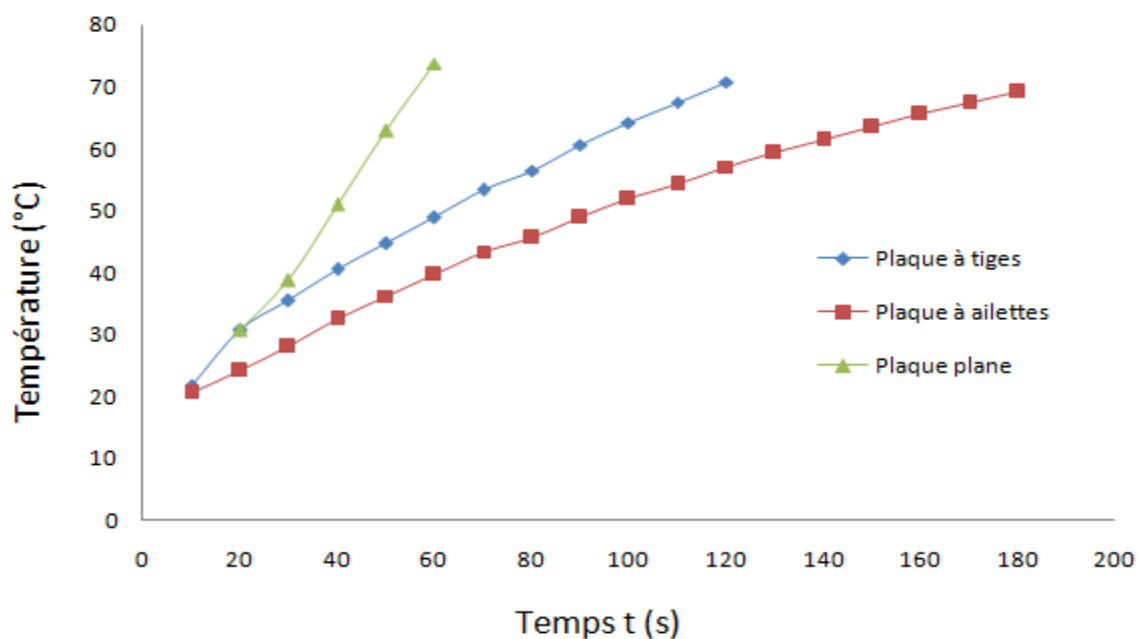


Fig. 30– Distribution de température en fonction du temps [26]

Les résultats montrent que pour une puissance d'entrée fixe, la surface plane atteint une température donnée plus rapidement que les deux autres surfaces. La plaque à ailettes prend plus de temps pour atteindre une température donnée.

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons effectué une étude numérique du transfert de chaleur associé à une ailette de section uniforme pour les différents régimes de fonctionnement et conditions. Les équations élaborées par le modèle mathématique ont été résolues numériquement par la méthode des volumes finis. On a utilisé le langage FORTRAN comme outil de programmation.

Les résultats et leurs discussions pour le système en question ont été présentés et analysés.

Conclusion générale

Conclusion générale

Dans ce mémoire nous avons présenté une étude numérique et analytique du profil de température dans une ailette à section uniforme. Une modélisation mathématique du système étudié a été élaborée ainsi qu'une discrétisation de l'équation différentielle qui régit le problème. Dans ce contexte un programme en langage FORTRAN est élaboré. Une comparaison des résultats numérique, analytique et expérimentale a été effectuée pour différents régimes de fonctionnement et conditions.

A l'issue du travail effectué, les conclusions suivantes peuvent être établies :

- Les résultats numériques montrent un meilleur accord avec la solution analytique.
- La température diminue quand le nombre de Biot augmente.
- L'augmentation de la conductivité thermique et la longueur de l'ailette et la diminution de coefficient de convection amélioraient l'efficacité des ailettes.
- Les résultats montrent une bonne concordance entre les résultats théoriques et expérimentales ;
- Pour une puissance d'entrée fixe, la surface plane atteint une température donnée plus rapidement que les deux autres surfaces.
- La diminution de la température en fonction de la longueur des surfaces étendues provoque une propagation uniforme de la chaleur ce qui les rendent plus efficaces du point de vu dissipation de la chaleur.
- Les résultats montrent encore que la surface plane est moins susceptible de transférer son énergie thermique à l'air même lors d'une convection forcée. Toutes les températures de surface ont diminué par rapport aux résultats de convection libre, ce qui montre dans le cas de la convection forcée le coefficient d'échange convectif augmente ce qui contribue à l'amélioration du transfert thermique en augmentant le flux échangé.

Bibliographie


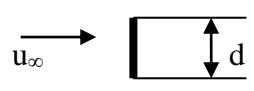

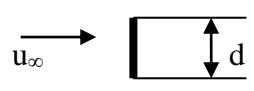

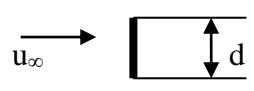
- [1] Philippe, M., 2013. Cour de transfert thermique université de Joseph Fourier, Grenoble ;
- [2] Hafsaoui, I., 2018. Transfert thermique. Faculté des sciences et de la technologie. Département d'électrotechnique ;
- [3] Jannot, Y., 2012. Cours Transferts thermiques 2^{ème} année. École des Mines Nancy ;
- [4] Mergui, S ; Transferts thermiques. Licence de mécanique 2^{ème} année. Module 2A101. Université de Sorbonne ;
- [5] Tabet, S., 2017. Étude numérique de la convection naturelle dans une enceinte fermée partiellement chauffée. Université d'Oran 2 ;
- [6] Itterbeek, R., 2018 .Dynamique des systèmes thermiques. Annexe 2 : Nombres adimensionnels ;<https://www.itterbeek.org/fr/index/cours-transferts-thermiques> Date de la dernière consultation du site : 29/06/2019 ;
- [7] https://fr.wikiversity.org/wiki/Conduction_thermique/Annexe/Ailette. Date de la dernière consultation du site : 23/06/2019 ;
- [8] Bouvier, C et al ; 2013. Ailettes thermiques, Projet de physique STPI/P6/2012 – 28, Institut national des sciences appliquées de Rouen ;
- [9] <https://fr.scribd.com/document/367475730/TP-ailette>. Date de la dernière consultation du site : 23/06/2019 ;
- [10] Rezik, H., 2014. Étude des transferts de chaleur et de masse de l'ailette. Université de Batna.
- [11] Hamada, K., 2017. Étude du transfert de chaleur à travers une ailette verticale. Université de Constantine ;
- [12] Mehemmai, M., Rezik, H., Mehira, A., 2016. Comparaison des efficacités des ailettes en cascade, ICEMAEP : third international conference on energymaterialsapplidenergetics and pollution ;
- [13] Rouss, V., Younes, R., Abboudi, S., 2014. Estimation du coefficient de transfert de chaleur sur une ailette cylindrique, L'institut FEMTO -ST (Franche-Comté Electronique Mécanique Thermique et Optique – Sciences et Technologies, UMR 6174) ;
- [14] Manuraj, S., Gulab, C.S., Manoj, S., Abhishek, K.J., 2018. Analysis of heat transfer from fins using finite difference method, IJARIT: International Journal of Advance Research, Ideas and Innovations in Technology, (ISSN: 2454-132X);
- [15] Rishav, K.M., Abhinav, G., Shubham, V., Sudipto, S., 2017. Measurement of temperature distributions on a fin surface by analytical, experimental and numerical methods, International Journal of Advances in Scientific Research and Engineering (IJASRE) ISSN: 2454-8006 [Vol. 03, Issue 4];
- [16] Vikas, K., Riya, S., Rahul, G., Anil, J., Pushpender, Y., Pooja, P., 2018. Experimental investigation of temperature distribution along the length of uniform area fin for forced and free convection, IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 330 012100;
- [17] Mathiazhagan, P., Jayabharathy, S., 2012. Heat transfer and temperature distribution of different fin geometry using numerical method, JP Journal of Heat and Mass Transfer, Volume 6, Number 3, Pages 223-234;
- [19] <http://thegateacademy.com/files/wppdf/Heat-transfer-through-fins.pdf>. Date de la dernière consultation du site : 20/07/2019 ;
- [20] Tahrour, F., 2016. Modélisation et optimisation des échangeurs de chaleur à ailettes indépendantes. Thèse de Doctorat LMD, université El Hadj Lakhder Batna ;
- [21] Gueraoui, K., 2009. Analyse numérique, Méthode des volumes finis. Énergie et technologie des matériaux ;
- [22] Ioan, C., P., 2002. Modélisation numérique du transfert thermique. Méthode des volumes finis, université de Craiova ;

- [23] Becer, Z., 2006. Investigation de la concentration de gaz d'électrons à deux dimensions 2DEG dans les Hétérostructures $n\text{-Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}/\text{In}_y\text{Ga}_{1-y}\text{As}/\text{GaAs}$ dopé sélectivement. Masters thesis, Université Mohamed Khider Biskra ;
- [24] Goncalvès, E., 2005. Résolution numériques. Discrétisation des EDP et EDO. Institut national polytechnique de Grenoble, pp 9 ;
- [25] Menni, Y., 2012. Etude numérique comparative entre deux types de chicanes et ailettes (trapézoïdale et triangulaire) utilisées pour améliorer les performances des capteurs solaires plans à air, Thèse de Magistère, université Abou Bekr Belkaïd Tlemcen ;
- [26] Kherris, S., Mebarki, B., Mekroussi, S., Zebbar, D., Benlakhdar, L., 2017. Étude théorique et expérimentale de la distribution des températures à travers les surfaces étendues, International Congress of Environmental Engineering and Renewable Energy ICEERE ;

Annexe A. Corrélations empiriques en convection libre et forcée (Jannot, Y., 2012.Cours Transferts thermiques)

A.1 Corrélations pour le calcul des coefficients de transfert en convection forcée

Caractéristiques du fluide calculées à $\theta_f = \frac{\theta_p + \theta_\infty}{2}$

Géométrie	Corrélation																		
Écoulement sur un plan	<p>Nu(x) : Nu à la distance x du bord du plan Nu_L : Nu moyen sur la longueur L du plan Écoulement turbulent : $Nu(x) = 0.0288 Re(x)^{0.8} Pr^{1/3}$ $Nu_L = 0.035 Re_L^{0.8} Pr^{1/3}$ $Re > 5 \cdot 10^5$ et $10 \geq Pr \geq 0.5$ Écoulement laminaire : $Nu(x) = 0.324 Re(x)^{0.5} Pr^{1/3}$ $Nu_L = 0.628 Re_L^{0.5} Pr^{1/3}$ $Re < 5 \cdot 10^5$ et $10 \geq Pr \geq 0.5$</p>																		
Écoulement dans un tube	<p>Écoulement turbulent : $Nu = 0.023 Re^{0.8} Pr^n$ $n=0.3$ Si $\theta_{fluide} > \theta_{paroi}$ $n=0.4$ Si $\theta_{fluide} < \theta_{paroi}$ $Re > 5000$ et $0.6 < Pr < 100$ Re calculé pour $D_H = 4S / P$ où : S = section de passage du fluide P = périmètre de contact fluide/paroi Écoulement laminaire : $Nu = 1.86 (Re Pr)^{1/3} \left(\frac{D}{L}\right)^{1/3} \left(\frac{\mu}{\mu_p}\right)^{0.14}$ Valable pour $Re Pr \frac{D}{L} \geq 10$, μ_p calculé à θ_p</p>																		
Écoulement perpendiculaire à un cylindre circulaire	<p>$Nu = C Re^n Pr^{1/3}$, u_∞ vitesse calculée en amont du tube</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Re</th> <th>C</th> <th>n</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0,4 – 4</td> <td>0,989</td> <td>0,330</td> </tr> <tr> <td>4 – 40</td> <td>0,911</td> <td>0,385</td> </tr> <tr> <td>40 – 4000</td> <td>0,683</td> <td>0,466</td> </tr> <tr> <td>4000 – 40000</td> <td>0,193</td> <td>0,618</td> </tr> <tr> <td>40000 - 250000</td> <td>0,0266</td> <td>0,805</td> </tr> </tbody> </table>	Re	C	n	0,4 – 4	0,989	0,330	4 – 40	0,911	0,385	40 – 4000	0,683	0,466	4000 – 40000	0,193	0,618	40000 - 250000	0,0266	0,805
Re	C	n																	
0,4 – 4	0,989	0,330																	
4 – 40	0,911	0,385																	
40 – 4000	0,683	0,466																	
4000 – 40000	0,193	0,618																	
40000 - 250000	0,0266	0,805																	
Écoulement perpendiculaire à un cylindre non circulaire	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Géométrie</th> <th>Re</th> <th>C</th> <th>n</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td></td> <td>$5 \cdot 10^3 - 10^5$</td> <td>0,102</td> <td>0,675</td> </tr> <tr> <td></td> <td>$4 \cdot 10^3 - 1,5 \cdot 10^4$</td> <td>0,228</td> <td>0,731</td> </tr> </tbody> </table>	Géométrie	Re	C	n		$5 \cdot 10^3 - 10^5$	0,102	0,675		$4 \cdot 10^3 - 1,5 \cdot 10^4$	0,228	0,731						
Géométrie	Re	C	n																
	$5 \cdot 10^3 - 10^5$	0,102	0,675																
	$4 \cdot 10^3 - 1,5 \cdot 10^4$	0,228	0,731																

A.2 Corrélations pour le calcul des coefficients de transfert en convection naturelle

Corrélations valables pour tous fluides : $Nu = C (Gr Pr)^m$			
Géométrie	Gr Pr	C	m
Plaques et cylindres verticaux	$10^4 - 10^9$	0,59	1/4
	$10^9 - 10^{13}$	0,021	2/5
Cylindres horizontaux	$10^{-10} - 10^{-2}$	0,675	0,058
	$10^{-2} - 10^2$	1,02	0,148
	$10^2 - 10^4$	0,850	0,188
	$10^4 - 10^7$	0,480	0,25
	$10^7 - 10^{12}$	0,125	0,33
Face supérieure d'une plaque chaude ou face inférieure d'une plaque froide	$2 \cdot 10^4 - 8 \cdot 10^6$	0,54	0,25
	$8 \cdot 10^6 - 10^{11}$	0,15	0,33
Face inférieure d'une plaque chaude ou face supérieure d'une plaque froide	$10^5 - 10^{11}$	0,27	0,25
Relations simplifiées pour de l'air à pression atmosphérique			
Géométrie	Laminaire $10^4 < Gr Pr < 10^9$	Turbulent $Gr Pr > 10^9$	
Plaque ou cylindre vertical	$h = 1.42 \left(\frac{\Delta\theta}{L} \right)^{1/4}$	$h = 1.31(\Delta\theta)^{1/3}$	
Cylindre horizontal	$h = 1.32 \left(\frac{\Delta\theta}{D} \right)^{1/4}$	$h = 1.24(\Delta\theta)^{1/3}$	
Face supérieure d'une plaque chaude ou face inférieure d'une plaque froide	$h = 1.32 \left(\frac{\Delta\theta}{L} \right)^{1/4}$	$h = 1.52(\Delta\theta)^{1/3}$	
Face inférieure d'une plaque chaude ou face supérieure d'une plaque froide	$h = 0.59 \left(\frac{\Delta\theta}{L} \right)^{1/4}$	$h = 0.59 \left(\frac{\Delta\theta}{L} \right)^{1/4}$	

Annexe B. Équations et fonctions de Bessel (Jannot, Y., 2012. Cours Transferts thermiques)

B.1 Équations particulières de Bessel et leurs solutions

$$y'' + \frac{y'}{x} + m^2 y = 0 \quad y = k_1 J_0(mx) + k_2 Y_0(mx) \quad (\mathbf{B.1})$$

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - n^2) y = 0 \quad y = k_1 J_n(x) + k_2 Y_n(x) \quad (\mathbf{B.2})$$

$$y'' + \frac{y'}{x} - m^2 y = 0 \quad y = k_1 I_0(mx) + k_2 K_0(mx) \quad (\mathbf{B.3})$$

$$x^2 y'' + x y' - (x^2 + n^2) y = 0 \quad y = k_1 I_n(x) + k_2 K_n(x) \quad (\mathbf{B.4})$$

J_n Fonction de Bessel de 1^{ère} espèce non modifiée d'ordre n

I_n Fonction de Bessel de 1^{ère} espèce modifiée d'ordre n

Y_n Fonction de Bessel de 2^{ème} espèce non modifiée d'ordre n

K_n Fonction de Bessel de 2^{ème} espèce modifiée d'ordre n

(cf. Özisik, 1993, pour la définition des fonctions de Bessel)

B.2 Principales propriétés des fonctions de Bessel

Récurrence $J_{n+1}(u) = -J_{n-1}(u) + \frac{2n}{u} J_n(u)$ **(B.5)**

$$Y_{n+1}(u) = -Y_{n-1}(u) + \frac{2n}{u} Y_n(u) \quad (\mathbf{B.6})$$

$$I_{n+1}(u) = I_{n-1}(u) - \frac{2n}{u} I_n(u) \quad (\mathbf{B.7})$$

$$K_{n+1}(u) = K_{n-1}(u) - \frac{2n}{u} K_n(u) \quad (\mathbf{B.8})$$

Dérivée

$$\frac{dJ_0(u)}{du} = -J_1(u) \quad (\mathbf{B.9})$$

$$\frac{d[uJ_1(u)]}{du} = u J_0(u) \quad (\mathbf{B.10})$$

$$\frac{dI_0(u)}{du} = I_1(u) \quad (\mathbf{B.11})$$

$$\frac{dK_0(u)}{du} = -K_1(u) \quad (\mathbf{B.12})$$

$$\frac{dY_0(u)}{du} = -Y_1(u) \quad (\mathbf{B.13})$$

B.3 Limites des fonctions de Bessel d'ordre 0 et 1

Si $u \rightarrow 0$:

$$J_0(u) \rightarrow 1, J_1(u) \rightarrow 0 \quad (\mathbf{B.14})$$

$$Y_0(u) \rightarrow -\infty, Y_1(u) \rightarrow -\infty \quad (\mathbf{B.15})$$

$$I_0(u) \rightarrow 1, I_1(u) \rightarrow 0 \quad (\mathbf{B.16})$$

$$K_0(u) \rightarrow +\infty, K_1(u) \rightarrow +\infty \quad (\mathbf{B.17})$$

Si $u \rightarrow \infty$

$$J_0(u) \rightarrow 0, J_1(u) \rightarrow 0 \quad (\mathbf{B.18})$$

$$Y_0(u) \rightarrow 0, Y_1(u) \rightarrow 0 \quad (\mathbf{B.19})$$

$$I_0(u) \rightarrow +\infty, I_1(u) \rightarrow +\infty \quad (\mathbf{B.20})$$

$$K_0(u) \rightarrow 0, K_1(u) \rightarrow 0 \text{ (B.21)}$$

B.4 Comportement asymptotique des fonctions de Bessel d'ordre 0 et 1

Siu $\rightarrow 0$:

$$J_0(u) \rightarrow 1, J_1(u) \rightarrow u/2 \text{ (B.22)}$$

$$Y_0(u) \rightarrow (2/\pi) \ln(u), Y_1(u) \rightarrow (2/\pi u) \text{ (B.23)}$$

$$I_0(u) \rightarrow 1, I_1(u) \rightarrow u/2 \text{ (B.24)}$$

$$K_0(u) \rightarrow -\ln(u), K_1(u) \rightarrow 1/u \text{ (B.25)}$$

Siu $\rightarrow \infty$

$$J_0(u) \rightarrow \sqrt{2/\pi u} \cos(u - \frac{\pi}{4}), J_1(u) \rightarrow \sqrt{2/\pi u} \cos(u - \frac{u}{2} - \frac{\pi}{4}) \text{ (B.26)}$$

$$Y_0(u) \rightarrow \sqrt{2/\pi u} \sin(u - \frac{u}{2} - \frac{\pi}{4}), Y_1(u) \rightarrow \sqrt{2/\pi u} \sin(u - \frac{\pi}{4}) \text{ (B.27)}$$

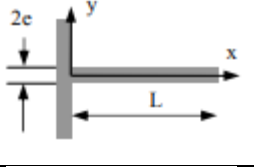

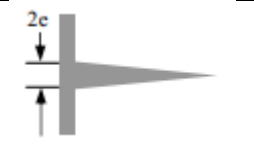
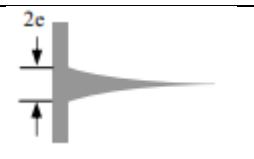
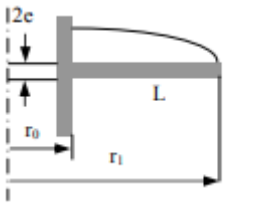
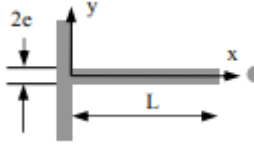
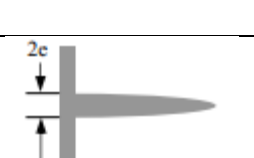


$$I_0(u), I_1(u) \rightarrow \sqrt{2/\pi u} \exp(u) \text{ (B.28)}$$

$$K_0(u), K_1(u) \rightarrow \sqrt{\pi/2u} \exp(-u) \text{ (B.29)}$$

X	I ₀ (x)	I ₁ (x)	K ₀ (x)	K ₁ (x)	x	I ₀ (x)	I ₁ (x)	K ₀ (x)	K ₁ (x)
0	1,0000	0,0000			3.0	4,881	3,953	0,035	0,041
0,1	1,0025	0,0501	2,427	9,849	3.1	5.294	4.326	0.031	0.036
0.2	1,01	0,1005	1,753	4,775	3.2	5.747	4.734	0.028	0.031
0.3	1,0226	0,1517	1,373	3,057	3.3	6.243	5.181	0.025	0.028
0.4	1,0404	0,204	1,115	2,185	3.4	6.785	5.67	0.022	0.025
0.5	1,0635	0,2579	0,924	1,656	3.5	7.378	6.206	0.019	0.022
0.6	1,092	0,3137	0,778	1,302	3.6	8.028	6.793	0.017	0.020
0.7	1,1263	0,3719	0,660	1,051	3.7	8.379	7.436	0.016	0.017
0.8	1,1665	0,4329	0,565	0,862	3.8	9.517	8.14	0.014	0.016
0.9	1,213	0,4971	0,487	0,716	3.9	10.369	8.913	0.013	0.014
1.0	1,2661	0,5652	0,421	0,602	4.0	11.3	9.76		
1.1	1,3262	0,6375	0,366	0,509	4.1	12.32	10.69		
1.2	1,3937	0,7147	0,319	0,435	4.2	12.44	11.71		
1.3	1,4693	0,7973	0,278	0,372	4.3	14.67	12.82		
1.4	1,5534	0,8861	0,243	0,320	4.4	16.01	14.05		
1.5	1,6467	0,9817	0,214	0,278	4.5	17.48	15.39		
1.6	1,75	1,0848	0,188	0,240	4.6	19.09	16.86		
1.7	1,864	1,1963	0,165	0,209	4.7	20.86	18.48		
1.8	1,9896	1,3172	0,146	0,182	4.8	22.79	20.25		
1.9	2,1277	1,4482	0,129	0,160	4.9	24.91	22.2		
2.0	2,28	1,591	0,113	0,140	5.0	27.24	24.34		
2.1	2,446	1,746	0,101	0,123	5.1	29.79	26.68		
2.2	2,629	1,914	0,090	0,108	5.2	32.58	29.25		
2.3	2,83	2,098	0,079	0,094	5.3	35.65	32.08		
2.4	3,049	2,298	0,071	0,083	5.4	39.01	35.18		
2.5	3,29	2,517	0,063	0,074	5.5	42.7	38.59		
2.6	3,553	2,755	0,055	0,066	5.6	46.74	42.33		
2.7	3,842	3,016	0,049	0,058	5.7	51.17	46.44		
2.8	4,157	3,301	0,044	0,050	5.8	56.04	50.95		
2.9	4,503	3,613	0,039	0,046	5.9	61.38	55.9		

Annexe C. Efficacité des ailettes (Jannot, Y., 2012. Cours Transferts thermiques)

Hypothèse : Flux nul à l'extrémité de l'ailette, vérifié si $\sqrt{\frac{he}{\lambda}} \ll 1$ (d'après Whitaker, 1983).

Ailette droite	Rectangulaire $y = e$		$\eta = \frac{1}{\omega L} \text{th}(\omega L)$ avec $\omega = \sqrt{\frac{h}{\lambda e}}$
	Parabolique $y = e \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2$		$\eta = \frac{1}{\omega L} \frac{I_{2/3}\left(\frac{4}{3}\omega L\right)}{I_{-1/3}\left(\frac{4}{3}\omega L\right)}$
	Triangulaire $y = e \left(1 - \frac{x}{L}\right)$		$\eta = \frac{1}{\omega L} \frac{I_1(2\omega L)}{I_0(2\omega L)}$
	Parabolique $y = e \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2$		$\eta = \frac{2}{1 + \sqrt{4(\omega L)^2 + 1}}$
Ailette circulaire	Rectangulaire $y = e$		$\eta = \frac{2}{\omega L \left(\frac{r_1}{r_0} + 1\right)} \frac{I_1(\omega r_0)K_1(\omega r_1) - I_1(\omega r_1)k_1(\omega r_0)}{I_0(\omega r_0)K_1(\omega r_1) - I_1(\omega r_1)K_0(\omega r_0)}$
Aiguilles (section droite circulaire)	Rectangulaire $y = e$		$\eta = \frac{1}{\sqrt{2}\omega L} \frac{I_1\left(\frac{4}{3}\sqrt{2}\omega L\right)}{I_0\left(\frac{4}{3}\sqrt{2}\omega L\right)}$
	Parabolique $y = e \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2$		$\eta = \frac{3}{2\sqrt{2}\omega L} (\text{th}\sqrt{2}(\omega L))$
	Triangulaire $y = e \left(1 - \frac{x}{L}\right)$		$\eta = \frac{\sqrt{2}}{\omega L} \frac{I_2(2\sqrt{2}\omega L)}{I_1(2\sqrt{2}\omega L)}$
	Parabolique $y = e \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2$		$\eta = \frac{2}{1 + \sqrt{\frac{8}{9}(\omega L)^2 + 1}}$

Annexe D. Méthode de Thomas(Ioan, C., P., 2002. Modélisation numérique du transfert thermique. Méthode des volumes finis. Université de Craiova)

Cet algorithme permet de calculer la solution d'un système algébrique linéaire lorsque la matrice est tridiagonale. C'est notre cas, car les équations discrétisées dans le système linéaire s'écrivent sous la forme tridiagonale :

$$\left\{ \begin{array}{l} T_1 \\ -c_2 T_1 + a_2 T_2 - b_2 T_3 \\ -c_3 T_2 + a_3 T_3 - b_3 T_4 \\ -c_4 T_3 + a_4 T_4 - b_4 T_5 \\ \dots \\ -c_n T_{n-1} + a_n T_n - b_n T_{n+1} \\ T_{n+1} \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ \dots \\ d_n \\ d_{n+1} \end{array} \right. \quad (\mathbf{D.1})$$

Dans le système d'équations (1) T_1 et T_{n+1} sont des valeurs connues sur les frontières du domaine de calcul. La forme générale pour une seule équation est :

$$a_i T_i - b_i T_{i+1} - c_i T_{i-1} = d_i \quad (\mathbf{D.2})$$

Le système d'équations (D.1) (sauf la première et la dernière équation) peut être réécrit ainsi :

$$T_2 = \frac{b_2}{a_2} T_3 + \frac{c_2}{a_2} T_1 + \frac{d_2}{a_2} \quad (\mathbf{D.3})$$

$$T_3 = \frac{b_3}{a_3} T_4 + \frac{c_3}{a_3} T_2 + \frac{d_3}{a_3} \quad (\mathbf{D.4})$$

$$T_4 = \frac{b_4}{a_4} T_5 + \frac{c_4}{a_4} T_3 + \frac{d_4}{a_4} \quad (\mathbf{D.5})$$

$$T_n = \frac{b_n}{a_n} T_{n+1} + \frac{c_n}{a_n} T_{n-1} + \frac{d_n}{a_n} \quad (\mathbf{D.6})$$

Ces équations peuvent être résolues par élimination en avant et substitution en arrière. Le processus d'élimination en avant commence par la substitution de T_2 dans l'équation (D.4) avec l'expression de T_2 de l'équation (D.3) et on obtient :

$$T_3 = \left(\frac{b_3}{a_3 - c_3 \frac{b_2}{a_2}} \right) T_4 + \frac{c_3 \left(\frac{c_2}{a_2} T_1 + \frac{d_2}{a_2} \right) + d_3}{a_3 - c_3 \frac{b_2}{a_2}} \quad (\mathbf{D.7})$$

Si l'on note :

$$P_2 = \frac{b_2}{a_2} \quad \text{Et} \quad Q_2 = \frac{c_2}{a_2} T_1 + \frac{d_2}{a_2} \quad (\mathbf{D.8})$$

L'équation (D.7) peut être réécrite ainsi :

$$T_3 = \left(\frac{b_3}{a_3 - c_3 P_2} \right) T_4 + \frac{c_3 Q_2 + d_3}{a_3 - c_3 P_2} \quad (\mathbf{D.9})$$

Si l'on note encore :

$$P_3 = \left(\frac{b_3}{a_3 - c_3 P_2} \right) \quad \text{Et} \quad Q_3 = \left(\frac{c_3 Q_2 + d_3}{a_3 - c_3 P_2} \right) \quad (\mathbf{D.10})$$

L'équation (D.9) peut être écrite ainsi :

$$T_3 = P_3 T_4 + Q_3 \quad (\mathbf{D.11})$$

La formule (D.11) peut être utilisée pour éliminer T_3 de l'équation (D.5) et la procédure peut être répétée jusqu'à la dernière équation. Celle-ci constitue la procédure d'élimination en avant.

Pour la procédure d'élimination en arrière on utilise la relation de récurrence (D.11) :

$$T_i = P_i T_{i+1} + Q_i \quad (\mathbf{D.12})$$

Où

$$P_i = \left(\frac{b_i}{a_i - c_i P_{i-1}} \right) \quad \text{Et} \quad Q_i = \left(\frac{c_i Q_{i-1} + d_i}{a_i - c_i P_{i-1}} \right) \quad (\mathbf{D.13})$$

La formule (D.12) peut être utilisée également pour les points de frontières 1 et $n + 1$ si on pose les suivantes valeurs pour P et Q :

$$P_1 = 0 \quad \text{Et} \quad Q_1 = T_1 \quad (\mathbf{D.14})$$

$$P_{n+1} = 0 \quad \text{Et} \quad Q_{n+1} = T_{n+1} \quad (\mathbf{D.15})$$


```

DO i = 1, nn-2
  C (i) = - 1.0/DX
ENDDO
C (nn-1) = 0.0
c-----diagonale principale-----
  SP = - an2*DX
  DO i = 1, nn-2
    B (i) = 1.0/DX + 1.0/DX - SP
  ENDDO
  B (nn-1) = 1.0/DX - SP/2.0
c-----formation du vecteur du terme libre (wk) -----
  - wk (1) = an2*DX*TINF + (1.0/DX)*TB
do j = 2, nn-2
wk (j) = an2*DX*TINF
enddo
  wk (nn-1) = an2*DX*TINF/2.0
c-----RESOLUTION DU SYSTEME-----
  CALL TRIDAG (a, b, c, wk, temp1, nn -1)
c-----formation de la solution finale sur tout le domaine-----
  temp (1) = TB
do j = 2, nn
  temp (j) = temp1 (j-1)
enddo
c----formation du vecteur pour les points de calcul sur "x"-----
  AX (1) = 0.0
do j = 2, NN
  AX(j) = AX (j-1) + DX
enddo
c ===== ECRIRE la solution =====
open (20, file = 'SOL1Ds3.prn')
  do j = 1, nn write (20,101) ax (j), temp (j)
  enddo
close (20)
101 format (F5.2, 5x, F7.3)
STOP
END

```

Résumé :

Les surfaces étendues sont largement utilisées dans de nombreuses applications industrielles pour améliorer le taux de transfert de chaleur entre un solide et un fluide adjacent. Le présent travail porte sur une étude numérique et analytique de la distribution de température le long d'une ailette à section uniforme. Une modélisation mathématique du système étudié a été élaborée.

En effet, des généralités sur les méthodes numériques ainsi qu'une discrétisation de l'équation différentielle qui régit le problème sont abordées. Dans ce contexte un programme en langage FORTRAN est élaboré. Six positions sont choisies pour calculer la température en convection naturelle et forcée : 7.5, 19.5, 31.5, 43.5, 55.5 et 67.5 mm. Les résultats et leurs discussions pour le système en question ont été présentés et analysés. La lecture des résultats a permis de mettre en exergue l'impact de l'influence des ailettes sur le refroidissement d'un solide.

Une comparaison des résultats numérique, analytique et expérimentale a été effectuée pour différents régimes de fonctionnement et conditions. Elle montre la bonne concordance.

Mots-clés: Ailette, équation de la chaleur, convection forcée, discrétisation

Abstract

Extended surfaces are widely used in many industrial applications to improve the rate of heat transfer between a solid and an adjacent fluid. The present work deals with a numerical and analytical study of the temperature distribution along a fin with a uniform section. Mathematical modeling of the studied system has been developed. Indeed, generalities on the numerical methods as well as a discretization of the differential equation which governs the problem are approached.

In this context a program in FORTRAN language is developed. Six positions are chosen to calculate the temperature in natural convection and forced: 7.5, 19.5, 31.5, 43.5, 55.5 and 67.5 mm. The results and their discussions for the system in question were presented and analyzed. The reading of the results made it possible to highlight the impact of the influence of the fins on the cooling of a solid. Numerical, analytical and experimental results were compared for different operating regimes and conditions. It shows the good match.

Keywords : Fin, equation of heat , forced convection, discretization

ملخص:

تستخدم الاسطح الممتدة على نطاق واسع في العديد من التطبيقات الصناعية لتحسين معدل نقل الحرارة بين جسم صلب والموائع المحيطة. يتناول العمل الحالي دراسة عددية وتحليلية لتوزيع درجة الحرارة على طول زعفة مع قسم موحد. تم تطوير النموذج الرياضي للنظام المدروس. يتم تناول العموميات على الطرق العددية وكذلك تقدير المعادلة التفاضلية التي تحكم المشكلة. في هذا السياق تم تطوير برنامج فورتران. يتم اختيار ستة مواقع لحساب درجة الحرارة في الحمل الحراري الحر والاضطراري: 7.5، 19.5، 31.5، 43.5، 55.5، 67.5 مم. تم عرض النتائج ومناقشتهم حول النظام المعني وتحليلها. مكنت قراءة النتائج من إبراز تأثير الزعانف على تبريد مادة صلبة. تمت مقارنة النتائج العددية والتحليلية والتجريبية لمختلف أنظمة التشغيل والشروط. هذا يظهر المطابقة الجيدة.

الكلمات المفتاحية: زعفة، معادلة الحرارة، الحمل الحراري الإضطرابي، تقدير