



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique
Université de Tissemsilt



Faculté des Sciences et de la Technologie
Département des Sciences et de la Technologie

Mémoire de fin d'études pour l'obtention du diplôme
de Master académique en
Filière : **Génie Mécanique**
Spécialité : **Installation Energétique et Turbomachines**

Présentée par : **BENAFIA Aicha**

Thème

Étude numérique de la convection naturelle dans une cavité carrée par la méthode de Boltzmann sur réseau

Soutenu le, 12/06/2022

Devant le Jury :

XXXXXX Xxxxxxxx

BAGHDAD Mohammed

XXXXXX Xxxxxxxx

Examineur

Encadreur

Examineur

M.C.A.

M.C.A.

M.C.B.

Univ. de Tissemsilt

Univ. de Tissemsilt

Univ. de Tissemsilt

Année universitaire : 2021-2022



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique
Université de Tissemsilt



Faculté des Sciences et de la Technologie
Département des Sciences et de la Technologie

Mémoire de fin d'études pour l'obtention du diplôme
de Master académique en
Filière : **Génie Mécanique**
Spécialité : **Installation Energétique et Turbomachines**

Présentée par : **BENAFIA Aicha**

Thème

Étude numérique de la convection naturelle dans une cavité carrée par la méthode de Boltzmann sur réseau

Soutenu le, 12/06/2022

Devant le Jury :

XXXXXX Xxxxxxxx	Examineur	M.C.A.	Univ. de Tissemsilt
BAGHDAD Mohammed	Encadreur	M.C.A.	Univ. de Tissemsilt
XXXXXX Xxxxxxxx	Examineur	M.C.B.	Univ. de Tissemsilt

Année universitaire : 2021-2022

Remerciements

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon encadreur Dr. M. BAGHDAD. Je le remercie de m'avoir encadré, orienté, aidé et conseillé.

J'adresse mes sincères remerciements à tous les enseignants, intervenants et toutes les personnes qui par leurs paroles, leurs écrits, leurs conseils et leurs critiques ont guidé pour obtenir du diplôme de Master académique en génie mécanique, spécialité Installation Energétique et Turbomachines.

Je remercie mes très chers parents, Ali et Fatma, qui ont toujours été là pour moi. Je remercie mes sœurs (Selma, Achouak, soundous) et mes frères (Hichem, Nasser, Mohamed), pour Leur soutien inconditionnel et leurs encouragements ont été d'une grande aide.

À tous les enseignants qui ont contribué à notre formation à l'université de Tissemsilt, je présente mes remerciements, mon respect et ma gratitude.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

À mon très Cher Père.

À ma très Chère Mère

À tous mes Frères.

À tous mes Sœurs.

À mes chers et fidèles Amis.

À toute la famille Belaid.

À toute la promotion Génie mécanique.

Résumé

Les problèmes de convection naturelle sont rencontrés dans de nombreuses applications industrielles telles que l'augmentation du nombre d'applications et mène à un certain nombre de conceptions industrielles et d'environnements sophistiqués. Les coûts de fonctionnement sont importants, les petites améliorations d'efficacité sont essentielles et peuvent jouer un rôle dans la consommation d'énergie. Les problèmes océanographiques et atmosphériques tels que les problèmes technologiques, les équipements électriques et les réactions nucléaires, les appareils ménagers et les échangeurs de chaleur sont tous des problèmes, qui ont donné l'intérêt particulier à cette science.

Ce sujet consiste à étudier numériquement la convection naturelle dans une cavité carrée remplie d'air. Les parois horizontales de la cavité sont adiabatiques et les parois verticales sont chaudes et froides respectivement dans le cas hors Boussinesq. L'objectif ici est de prendre en compte de grands écarts de température par choix de modèles dits faible Mach qui permettent de s'affranchir de l'hypothèse de Boussinesq, tout en conservant le découplage entre les fluctuations de pression et de masse volumique, caractéristique des écoulements incompressibles. La résolution numérique de ce problème passe essentiellement par l'approximation en volumes finis des équations généralisées de Navier-Stokes.

L'étude sera effectuée par des simulations en utilisant un code numérique bidimensionnel basé sur la méthode de Boltzmann sur réseau pour les équations généralisées. Le problème radiatif est résolu par la méthode des ordonnées discrètes.

Nomenclature

Notations latines

t	Temps [s]
p	La pression [Pa]
S	Surface [m ²]
x, y	Les coordonnées arbitraires
u, v, w	Composants de vitesse [m/s]

Les indices

i	Vecteur unitaire suivant x
j	Vecteur unitaire suivant y

Symbole Grecque

ρ	Densité [kg/m ³]
μ	Viscosité dynamique [N.s/m ²]
ε	Taux de dissipation

Nombres sans dimensions

Re	Nombre de Reynolds
Pr	Nombre de Prandtl
Ra	Nombre de Rayleigh

Abréviation

CFD	Computational Fluid Dynamics.
LGCA	Lattice Gas cellular Automata
HPP	créateurs Hardy, Pomeau et Pazzis
FHP	Frish-Hasslacher-Pomeau
BGK	Bhatnagar, Gross et Krook
MRT	Multiple-Relaxation-Time
VPTLBGK	<i>variable property thermal lattice BGK</i>
LBE	<i>Lattice Boltzmann Equation</i>
SRT	Single relaxation Time

Liste de figures

Figure.2.1	Chronologie récapitulative des moments historiques important dans l'avènement de la méthode Boltzmann sur réseau. Les cadres en pointillés indiquent les premiers modèles à vitesses discrètes sans discrétisation spatiale et temporelle	14
Figure.2.2	Position et de vitesse d'une particule après et avant l'application d'une force	15
Figure.2.3	schéma D2Q9	20
Figure.2.4	Propagation des distribution après la collision depuis une cellule (i, j)	22
Figure.2.5	Condition de Rebond pour le modèle D2Q9	26
Figure.3.1	Illustration des différents types de transferts thermique [33]	28
Figure.3.2	Transfert thermique par conduction à traverse une barre rectangulaire [34]	29
Figure.3.3	Illustration de la loi de Newton [34]	30
Figure.3.4	Comportement d'une particule fluide [34]	31
Figure.3.5	Interface du logiciel Fortran	35
Figure.4.1	Domaine physique	36
Figure.4.2	Maillage uniforme typique du domaine	38
Figure.4.3	Algorithme de base de la méthode LBM adoptée	39
Figure.4.4	Lignes de courant obtenues pour différentes nombre de Ra a)= 10^3 , b)= 10^4 , c)= 10^5 , d) 10^6	41
Figure.4.5		41
Figure.4.6	Champs de vitesse u pour divers Ra a)= 10^3 , b)= 10^4 , c)= 10^5 , d) 10^6	42
Figure.4.7	Champs de vitesse v pour divers $Ra =$ a) 10^3 , b) 10^4 , c) 10^5 , d) 10^6	43
Figure.4.8	Composante de vitesse verticale sans dimension	43
Figure.4.9	Profil de température adimensionnelle à mi-hauteur de la cavité	44

Liste de tableaux

Tableau.2.1	Vecteurs prédéfinis \vec{e}_i pour les schémas classiques DDQQ(On a la relation $\vec{c}_i \equiv c_r \cdot \vec{e}_i$)	20
Tableau.4.1	Validation de nombre de Nusselt moyen sur la paroi chaude avec les travaux antérieurs	41

Sommaire

Nomenclature.....	i
List des figures.....	ii
List des tableaux	iv
Sommaire.....	v

Introduction générale

Chapitre 1 Etude Bibliographique

1.1	Introduction.....	1
1.2	Synthèse bibliographique.....	2
1.3	Objectifs du mémoire.....	7

Chapitre 2 Méthode de Boltzmann sur les réseaux

2.1	Historique	8
2.2	Equation de transport de Boltzmann	11
2.3	Opérateur de collision	12
2.3.1	Opérateurs de collision BGK	13
2.3.2	Fonction de distribution à l'équilibre	16
2.3.3	Opérateur de collision MRT	16
2.4	Mise en œuvre de la méthode de Boltzmann	17
2.4.1	Equation de Boltzmann sur les réseaux	18
2.5	Discrétisation temporelle	18
2.6	Discrétisation des vitesses (Modèle $D_n Q_m$)	18
2.7	Fonction de distribution discrète à l'équilibre	19
2.8	Vitesse de son LBM	19
2.9	Fonction de distribution discrète à l'équilibre g_k^{eq}	19
2.10	Processus de collision-propagation	20
2.11	Modèle à temps de relaxation multiple MRT	21
2.12	Condition aux limites	22
2.13	Algorithme de la méthode LBM	24

Chapitre 3 Transfert thermique

3.1	Introduction.....	29
-----	-------------------	----

3.2	Modes de transfert de chaleur	29
3.2.1	Conduction	29
3.2.2	Rayonnement	30
3.2.3	Convection	30
3.3	Type de convection	30
3.3.1	Convection forcée	30
3.3.2	Convection mixte	31
3.3.3	Convection naturelle	31
3.4	Domaine d'application de la convection naturelle	32
3.5	Formulation générale des équations du problème considéré	32
3.6	Grandeur sans dimension	32
3.7	Hypothèse de Boussinesq	34

Chapitre 4 Résultats et discussions

4.1	Introduction	36
4.2	Présentation de langage Fortran	36
4.3	Description du Problème	37
4.4	Hypothèse de Boussinesq	37
4.5	Variables adimensionnels	38
4.6	Maillage	39
4.7	Résolution numérique	39
4.8	Validation	40
4.9	Résultats et discussions	41
4.9.1	Champ d'écoulement	41
4.9.2	Champ de température	44
	Conclusion.....	45
	Références.....	46

Introduction générale

La convection naturelle est un des trois modes de transfert de chaleur : conduction, convection et rayonnement. Par convection, on désigne l'ensemble des mouvements naturels de la matière induits, généralement, par des gradients de températures. Ces gradients provoquent une distribution non uniforme de la densité du fluide qui provoque à son tour un mouvement convectif sous l'effet de la gravité.

L'étude numérique de ces différents phénomènes de transfert thermique a fait l'objet de plusieurs travaux. En effet l'étude numérique des écoulements de convection naturelle dans des cavités carrées fermées continues d'être un domaine de recherche fertile vu son omniprésence dans la vie quotidienne ainsi que dans plusieurs applications industrielles telles que le refroidissement des composants électroniques, la conception thermique des bâtiments, la conception des capteurs solaires, la climatisation, etc.

Dans la majorité des travaux numérique portant sur les problèmes de transfert thermique, des méthodes numériques classiques comme la méthode des volume finis (FDM) basées sur la discrétisation des équations de Navier-stokes et de l'équation de l'énergie ont été utilisées pour étudier le transfert de chaleur par convection naturelle. De nos jours, on a tendance à utiliser d'autres méthodes telle que la méthode de Lattice Boltzmann. Cette méthode macroscopique offre une grande capacité à aborder des géométries et des conditions aux limites complexes et elle est intrinsèquement transitoire, ce qui permet d'étudier des problèmes d'instationnaires et de prédire d'éventuelles transition observées dans de nombreux problèmes d'ingénierie. Tous ces avantages sont accompagnés par l'attractivité de la méthode qui devient un outil numérique efficace pour la dynamique des fluides computationnelle au cours des dernières années.

Ce travail a donc pour objectif de traiter des problèmes de convection naturelle dans une cavité carrée remplis d'air, Les parois horizontale de la cavité sont adiabatiques est les parois verticales sont soumis à des température constantes. En outre, elle a pour second objectif de développer un outil de simulation numérique performant la résolution de ces problèmes. En effet, le choix s'est focalisé sur l'utilisation de la méthode de Lattice Boltzmann (LBM) vu son efficacité et sa simplicité.

Chapitre 01

Etude bibliographique

Introduction

Au cours des deux dernières décennies, la méthode de Boltzmann sur réseau (LBM) est apparue comme une méthode intéressante pour la dynamique des fluides computationnelle (CFD). Malgré une première restriction aux écoulements isothermes et faiblement compressibles, son champ d'application tant en physique qu'en ingénierie s'est élargi de telle manière qu'elle est désormais possible de simuler des phénomènes très complexes dont la turbulence, la combustion, les interactions multi-phases, la magnétohydrodynamique, les écoulements relativistes ou encore les systèmes quantiques.

Du point de vue numérique, la LBM nécessite un couplage fort entre les discrétisations de la vitesse et les espaces physiques. Cela se fait généralement en utilisant une grille cartésienne couplée à une technique de raffinement. De plus, la méthode est simple à mettre en œuvre, induit un coût de calcul par degré de liberté très faible, et présente un gabarit compact, ce qui contribue à son avantage intrinsèque pour les calculs parallèles.

LBM est basé sur l'équation continue de Boltzmann (CBE), qui décrit le mouvement des molécules microscopiques. Les détails de la LBM seront développés dans la suite du mémoire.

1.1 Synthèse bibliographique

La méthode de Boltzmann sur réseau est une méthode numérique relativement nouvelle par rapport aux approches classiques basées sur les équations de Navier-Stokes. A connu une augmentation régulière vue qu'elle se distingue par sa capacité d'être exécutée en parallèle et par la simplicité de son utilisation.

Barrios [1] a été utilisé la méthode de Boltzmann sur réseau en deux dimensions pour analyser les écoulements convectifs naturels. La méthode a été validée expérimentalement dans une cavité ouverte avec des parois verticales divisée en deux parties, la partie inférieure conductrice, la paroi supérieure est les autres parois son adiabatique. Une couche limite thermique ascendante s'est formée près de la paroi conductrice. En a placé cette couche à un panache mural. On a comparé Les résultats numériques avec les expériences dans les régimes laminaires et transition. En étude numériquement le comportement du panache de départ pour des différents nombre de Rayleigh. Le panache de paroi son développe en trois étapes.

Mezrhab et al. [2] ont été utilisé équations hybrides (équation de Boltzmann et différences finies) pour étudier les phénomènes de la convection naturelle avec rayonnement dans une cavité carrée. Les résultats montrer que l'échange radiatif produite une augmentation du transfert de chaleur avec une augmentation de nombre moyen de Nusselt et la force d'écoulement.

Mezrhab et al. [3] ont été simulé l'interaction de convection naturelle dans une cavité rectangulaire différentielle ment chauffée. Les parois verticales de la cavité sont adiabatiques est les parois horizontale supérieure et inférieure sont froide et chaud respectivement. Ils sont déterminé les vitesses par la méthode de Boltzmann sur réseau.

Sidik et al. [4] ont été démontré que la méthode de Boltzmann est un outil pour la simulation des phénomènes de transfert de chaleur par convection naturelle dans une large gamme de valeurs du nombre de Rayleigh.

Une analyse numérique est effectuée pour la convection naturelle dans une cavité carrée chauffée asymétriquement contenant un milieu émetteur absorbant par **Moufekkik et al. [5]**. L'approche numérique adoptée utilise la méthode de Boltzmann au réseau. Les résultats montrent que l'absence de rayonnement provoque des champs de température et d'écoulement concentrés au cœur de la cavité.

Dans l'étude de **Alouah et al. [6]**, la méthode de Boltzmann a été utilisée pour analyser l'écoulement de convection naturelle et le transfert de chaleur dans une cavité carrée avec un intérieur mince chauffé. Les parois verticales de la cavité sont adiabatiques tandis que les parois horizontales sont maintenues à des températures constantes. Les résultats montrés que l'augmentation de la taille de la plaque chauffante améliore le transfert de chaleur.

Yang et al. [7] ont simulé la stabilité et les transitions de la convection naturelle dans un anneau horizontal avec des différents nombres de Prandtl ($0.1 \leq Pr \leq 0.7$) et de Rayleigh ($10^3 \leq Ra \leq 10^5$). Ils ont trouvé qu'en augmentation de nombre de Rayleigh, le régime d'écoulement devient de plus complexe et passe d'un état permanent à un état oscillant. L'augmentation du nombre de Prandtl retarde la transition vers le régime d'écoulement oscillatoire tandis que l'augmentation du rapport de forme de l'anneau accéléré cette transition.

Yong et al [8] ont proposé une nouvelle méthode Boltzmann au réseau pour la simulation de la convection naturelle avec un grand écart de température et de nombre de Rayleigh élevé. L'approche hybride est présentée pour le couplage de l'équation de conservation de la masse, l'équation de conservation quantité de mouvement et l'équation d'évolution de température. Le modèle proposé à simuler plusieurs cas de test, à savoir la convection naturelle bidimensionnelle non Boussinesq dans une cavité carrée avec de grandes différences de température horizontales et deux écoulement de convection naturelle instationnaires dans une enceinte à haut nombre de Rayleigh.

Rehhali et al. [9] ont utilisé un schéma de temps de relaxation multiple (MRT) de la méthode de Boltzmann sur réseau. La cavité est chauffée avec une température constante d'un côté est le côté opposé à une température qui varie linéairement le long de la frontière. Les parois parallèles restantes sont adiabatiques. L'objectif de l'étude est double : tester les performances du schéma MRT et les effets combinés du nombre de Rayleigh, de l'angle d'inclinaison et de l'émissivité des parois. Les résultats montrés que le rayonnement de surface a un effet quantitatif important sur le transfert de chaleur global. Ainsi elle a confirmé que la méthode MRT-LBM est un outil de simulation robuste qui est utilisé à la place des méthodes classiques pour les simulations de transfert de chaleur par convection naturelle couplée au rayonnement de surface.

Nee [10] a utilisé un modèle hybride pour la convection naturelle 3D combinée au rayonnement thermique de surface dans un cube fermé à chauffage différentielle ment développé. La procédure numérique de ce modèle pour l'écoulement des fluides a été considérée en termes de méthode de Boltzmann en réseau sous l'approximation de Bhatnagar-Gross-Krook avec le schéma D3Q19. L'équation d'énergie tridimensionnelle instationnaire a été résolue au moyen de la méthode des différences finies. L'approche hybride développée a validée par des données expérimentales. Il a constaté que les résultats 2D et 3D était accru avec une amélioration du taux de transfert de chaleur par rayonnement. Les performances de calcul de la méthode de Boltzmann sur réseau hybride étaient plusieurs fois supérieures à celles de l'approche CFD conventionnelle.

Mikhail et al. [11] ont été fait une étude numérique de la convection naturelle thermo-gravitationnelle conjuguée dans une cavité fermée. On place un réchauffeur de forme carrée ou triangulaire sur le substrat conducteur de chaleur. L'effet de la forme géométrique de l'élément chauffant, le nombre de Rayleigh sur les paramètres thermo hydrodynamiques est étudiée. Ils remarquent qu'elle est une seule augmentation de la conductivité thermique de la paroi inférieure provoque une augmentation du nombre de Nusselt moyen sur la surface de l'élément chauffant.

Shan [12] a été simulé la convection de Rayleigh-Bénard numériquement en deux et trois dimension à l'aide de la méthode de Boltzmann. Elle est utilisé le champ de densité de la deuxième composante pour simuler le champ de température. En appliquant une force corporelle proportionnelle à la température, et le système satisfait l'équation de Boussinesq à une légère compressibilité. Au fur et à mesure que le nombre de Rayleigh augmente, les rouleaux de convection bidimensionnels stables deviennent instables. L'instabilité ondulatoire et le mouvement aperiodique observés, ainsi que le nombre de Nusselt en fonction bien du nombre Rayleigh, sont en bon accord avec les observations expérimentales et les prédictions théorique.

Shu et al. [13] ont été utilisé la méthode de Boltzmann qui est basé sur les moindres carrée pour étendre le modèle thermique actuel à géométrie arbitraire afin qu'il puisse être utilisé pour résoudre la thermo-hydrodynamique pratique dans la limite incompressible. La nouvelle méthode explicite basée sur la méthode de Boltzmann sur réseau standard, et le développement de cette

nouvelle méthode est dans la série de Taylor et approche des moindres carrés. Finalement est comme un résultats l'utilisation de nombre de points de maillage qui est utilisé sur les grille non uniforme est bien inférieur par rapport utilisation sur la grille uniforme.

Dixit et al. [14] a utilisé la méthode de Boltzmann sur réseau thermique qui est basée sur le modèle BGK pour simuler la convection naturelle à haut nombre de Rayleigh dans une cavité carrée. En utilisent le modèle l'approche des doubles populations pour simules les champs hydrodynamiques et thermique. Et dans ce travail, nous treillis complétée par interpolation de la méthode de Boltzmann. Les résultats numériques présentés la convection naturelle dans une cavité carrée avec l'isolement des parois horizontales et des parois verticales isothermes maintenues à différentes températures. Ont été utilisées des grilles très fines pour les simulations à nombre de Rayleigh plus élevé. Les résultats numériques sont très bon accord avec les résultats de référence disponibles dans la littérature.

Jourabian et al. [15] ont été étudié numériquement le phénomène de fusion avec convection naturelle dans une cavité avec ailette en basant sur la méthode de Boltzmann. En appliquant le modèle D2Q9 pour déterminer les champs de la masse volumique et de vitesse et le modèle D2Q5 pour le champ de température. Les résultats montrent que la conductivité thermique relative devient plus grand, est la cause d'augmentation de la vitesse de fusion. Ils constatent que la variation de la position verticale de l'ailette du bas vers le milieu a un effet insignifiant sur la fusion alors qu'elle provoque l'augmentation du temps de fusion complète lorsque l'ailette est montée sur le dessus de la cavité.

Krunal et al. [16] ont été présenté la simulation de Boltzmann sur réseau de la convection naturelle dans une cavité carrée à extrémité ouverte soumise à un échauffement partiel. Ces simulations numériques sont effectuées pour trois différents fluides. On constate que les isothermes deviennent plus confinées vers la partie partiellement chauffée du mur avec l'augmentation du nombre de Prandtl. Les résultats numériques sont résumés par la corrélation empirique reliant le nombre de Nusselt aux nombres de Rayleigh et Prandtl.

Zhao et al. [17] ont été étudié écoulements thermiques à faible nombre de mach avec dissipation visqueuse par la méthode de Boltzmann sur réseau. Une fonction de distribution de l'énergie totale est définie sur la base d'une seule fonction de distribution de vitesse, et son équation d'évolution est dérivée de l'équation continue de Boltzmann. Un modèle d'équation de Boltzmann sur réseau avec une physique claire et une structure simple est ensuite obtenu à partir d'un modèle cinétique pour les équation hydrodynamiques et énergétique découplées. Le modèle est testé en simulant un écoulement thermique de poiseuille et une convection naturelle dans une cavité carrée, les résultats numériques concordent bien avec les solutions analytiques et /ou les études précédentes.

Zhang et al. [18] ont proposé un modèle BGK (Bhatnagar, Gross et Krook) à des propriétés variable (VPTLBGK) (*variable property thermal Lattice BGK*) pour la convection naturelle avec une grande différence de température dans une cavité carrée. Le principe de base est remplacé les temps de relaxation constants par des temps variables dans l'espace afin que les coefficients de transport variables dans LBE (Lattice Boltzmann Method) soient réalisés. On constate que la viscosité variable elle-même a un effet observable sur les schémas d'écoulement, alors qu'elle a peu d'effet sur le taux de transfert de chaleur. Fait intéressant, l'action combinée de la viscosité variable et de la diffusion thermique variable conduit à des caractéristiques d'écoulement et de transfert de chaleur particulières. En comparaison avec les résultats pour des coefficients de transfert constants, les schémas d'écoulement symétriques sont rompus et le transfert de chaleur près de la paroi froide est amélioré. Une relation de loi de puissance dépendante du nombre de Rayleigh est satisfaite entre le nombre de Nusselt et le nombre de Rayleigh pour la convection naturelle avec des coefficients de transport variable, mais les constantes de relation de loi de puissance différents de transport constants. Le modèle VPTLBGK s'est avéré efficace pour étudier les effets des propriétés variables. De plus, il est instructif pour le développement de modèles à haute efficacité de traiter des systèmes fortement non linéaires.

Yuhui [19] a été proposé un solveur basant sur la méthode de Boltzmann pour les écoulements thermiques avec des propriétés du fluide variable dans la limite de faible nombre de Mach. Dans le solveur, une fonction de distribution est introduite pour la pression et la quantité de mouvement, et une autre pour la température du fluide. Les variables macroscopiques au centre des cellules sont déterminées à partir de la solution des équations gouvernantes macroscopiques par la méthode des volumes finis. Les flux aux interfaces des cellules sont évalués par la construction locale de la solution de l'équation standard de Boltzmann sur réseau. Les termes supplémentaires dus aux variations des propriétés du fluide et aux forces de corps sont considérés comme des termes sources et traités par la discrétisation en volumes finis. Ce modèle est validé par plusieurs exemples numériques, y compris les écoulements de fluide entre deux plaques parallèles, la convection naturelle dans une cavité carrée avec une grande différence de température et la convection naturelle du dioxyde de carbone supercritique. Les résultats numériques montrent une bonne fiabilité.

Safari et al. [20] ont été modifié et développé un nouveau modèle de la méthode de Boltzmann faiblement compressible pour simuler des écoulements thermiques compressibles à faible nombre de Mach. En utilisant la construction à bas nombre de Mach (LMNA) et en divisant la pression en deux parties, à savoir la pression thermodynamique et pression hydrodynamique, les équations de Navier-Stokes aux limites de bas nombre de Mach avec une densité variable sont récupérées à partir du modèle cinétique ; la masse volumique du fluide est régie par l'équation d'état choisie. Afin de satisfaire l'équation de continuité aux grandes variations de température ce qui conduit à

de grandes différences de densité, une compensation appropriée pour la divergence finie du champ de vitesse est introduite via un tem de forçage. Cette relation relie les différences totales de la température et de la pression thermodynamique à la divergence du champ de vitesse. Le modèle est validé avec succès par rapport à des références bien connues. Des expériences numériques sont menées pour prédire le nombre de Rayleigh critique dans un cas de test de convection de Rayleigh-Benard compressible, où approximation de Boussinesq n'est plus valide en raison des grandes différences de température dans le domaine. Les résultats sont en bon accord avec la théorie et les travaux déjà publiés. De plus, le transfert de chaleur par convection naturelle bidimensionnelle dans une cavité carrée avec de grandes différences de température est simulé et les résultats sont en accord avec les données disponibles de la littérature. Un aspect intéressant de l'algorithme présenté est sa capacité à être étendu aux écoulement bi phasiques liquide-gaz pour modéliser la phase gazeuse comme thermiquement compressible pour les écoulements à faible nombre de Mach.

Une nouvelle méthode de Boltzmann est proposée pour la simulation de la convection naturelle avec de grandes différences de température et un nombre de Rayleigh élevé par **Feng et al. [21]**. Une procédure de régularisation est développée au troisième ordre des fonctions de distribution d'équilibre, dans laquelle un terme de température est impliqué pour retrouver l'équation d'état du gaz parfait. Une approche hybride est présentée pour coupler l'équation de conservation de la quantité de mouvement et l'équation d'évolution de la température. Une forme simple et robuste d'équation de transport de température est adoptée et résolue par la méthode des volumes finis. Une étude comparative entre le modèle classique de fonction de distribution et le modèle de volume fini hybride avec différents schémas d'intégration est présentée pour démontrer à la fois la cohérence et la précision des modèles hybrides. Le modèle proposé est évalué en plusieurs cas, à savoir la convection naturelle bidimensionnelle non-Boussinesq dans une cavité carrée avec de grandes différences horizontales de température et deux flux de convection naturelle instationnaires dans une enceinte à nombre de Rayleigh élevé. La présente méthode peut préciser les flux de convection non-Boussinesq stables et instables avec un transfert de chaleur important. Pour la convection naturelle instable les oscillations avec une caractéristique chaotique peuvent être bien capturées dans des conditions de grand gradient de température.

1.2 Objectives de mémoire

Le but de ce mémoire est étudié numériquement la convection naturelle dans une cavité carrée classique qui est latéralement chauffée sur les côtés basant sur la méthode de Lattice Boltzmann. On considère. Cette méthode offre une grande capacité à aborder des géométries et des conditions aux limites complexes et elle est intrinsèquement transitoire, ce qui permet d'étudier des

problèmes d'instationnaires et de prédire d'éventuelles transition observées dans de nombreux problèmes d'ingénierie.

Le mémoire est organisé de la manière suivant : le premier chapitre présente une revue bibliographique détaillée liée à la thématique de notre travail et abordant donc les différents travaux portant sur la convection naturelle dans des cavités carrées fermé ; les études réalisées pour une cavité ayant différents types de conditions de températures seront aussi présentées.

Dans le deuxième chapitre, on s'intéresse à la méthode de Lattice Boltzmann utilisée pour la résolution du problème convectif. On présente un rappel de son historique, ses étapes de construction, sa théorie de base et les différentes approches et modèles sur lesquels repose cette méthode. La procédure de mise en œuvre de cette méthode sera également exposée.

Le troisième chapitre consacré aux généralités sur les trois modes de transfert de chaleur ainsi que sur la convection naturelle. Nous avons expliqué aussi les domaines d'application concernant la configuration physique étudiée. On a présenté la formulation mathématique du problème où nous avons présenté et les hypothèses simplificatrices et les conditions aux limites associées. Ensuite nous avons établi les équations adimensionnelles avec leurs principales grandeurs adimensionnelles caractérisant le transfert de chaleur.

Le quatrième chapitre est réservé à la validation du modèle et la présentation des résultats. Une conclusion générale ainsi que les travaux futurs envisagés clôturent le mémoire.

Chapitre 02

Méthode de Boltzmann sur les réseaux

2.1 Historique

La méthode de Boltzmann sur les réseaux est une nouvelle par rapport aux approches classique utilisées en simulation numérique. Malgré, dans la physique statique sur laquelle elle est basée et son achèvement théorique, il s'est écoulé plus d'un siècle. On va présenter les grands historiques nécessaires pour comprendre les différents côtés théoriques de cette méthode. On essaiera de faire ressortir les étapes principales dans l'élaboration de l'équation de Boltzmann sur les réseaux

- Au **milieu du XIXème siècle** l'émergence de la physique statique basée sur les travaux de l'Américain Josiah Willard Gibbs. Des anglais lords kelvin et James Clark Maxwell et de l'autrichien Ludwig Eduard Boltzmann.
- En **1872**, Boltzmann a proposé de célèbre équation $\frac{\partial f}{\partial t} + c_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{F_i}{m} \frac{\partial f}{\partial c_i} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll}$ décrivant l'évolution spatio-temporelle d'une fonction f (fonction est appelée fonction de distribution) qui est présenter la distribution des particules ayant on donne la vitesse à un endroit et à un temps donnés ;
- A la **fin du XIXème siècle** idée de collision à deux particules (dites collision binaires), c'est la seule idée approximative de cet opérateur proposée par Boltzmann ;
- En **1970** est après les travaux de Cohen et Dorfman on a sait que l'équation de Boltzmann avec un tel opérateur de collision ne peut appliquer pas aux liquide et aux gaz de haute densité. A l'époque les travaux de Boltzmann sont très controversés ne furent validés expérimentalement après sa mort en 1906 ;
- Ce n'est que les travaux indépendant d'un astronome anglais, Sydney Chapman et d'un mathématicien suisse, David Enskog a été intéressent les collisions complexe ;
- **Enskog** utilise la méthode de Hilbert (1912) à l'idée de développement systématique de la fonction de distribution de l'équation de Boltzmann ;
- **Chapman** et partir de l'idée d'Enskog a imaginé les particules comme des sphères dures pour pondre en compte les collisions complexe ;
- En **1921** Chapman et Enskog est après ces travaux confirmés expérimentalement per le chimiste Dootson qui permet établir des liens directs entre l'équation de Boltzmann et celles de Navier-stokes (1823) ;

- Après elle attendre une **trentaine d'années** pour un modèle de collision simple Viot jour se sont les mathématiciens Bhatnagar, E.P. Gross et Max Krook à la cause de la complexité et spécifiques d'opérateur de collision de de Chapman et Enskog ;
- BGK (la forme très simple qui décrire l'opérateur de collision) es établir à partir de dévalément théoriques complexe [22] ;
- En la **seconde moitié du XXème siècle** les automates cellulaires apparaissent pour la première fois avec Ulam, Neumann (1963 et 1966), Zuse (1970) ;
- **1973** Hardy et al à utiliser ces automates cellulaires pour des simulations en mécanique des fluides ;
- HPP (créateurs Hardy, Pomeau et de Pazzis) c'est le premier modèle LGCA (Lattice Gas Cellular Automata). Et on **1986** Frisch, Hasslacher et Pomeau a créé le modèle FHP (Frisch-Hasslacher-Pomeau) qui caractérisé par une symétrie meilleure que celle de modèle HPP ;
- Wolfram (**1986**) et Frisch (**1987**) a été formulés les fondements théoriques de la LGCA ;
- **1988** Mcnamara et Zanetti retourne vers l'équation de Boltzmann et remplacé les variables boules des méthodes LGCA par une fonction de distribution des particules à cause du volume des travaux réalisés en LGCA et le principal inconvénient demeurait le bruit statistique est limitait les applications de ce nouvel outil. Et elle est arrivée à la conclusion que toutes les autres anomalies affectant la LGCA pouvaient être éliminées naturellement par LBM.
- Finalement et pour conclure cette section sur la **figure 1.1** représente les moments historiques les plus importants dans l'avènement de la méthode de Boltzmann sur les réseaux [23].

2.2 Equation de transport de Boltzmann

Equation de Boltzmann est une équation qui décrit le comportement statique d'un système thermodynamique déséquilibré. La fonction de distribution $f(x, c, t)$ permet de réaliser cette description correspond au nombre de particules à l'instant t située entre $(x + \partial x)$ et des vitesses $(c + \partial c)$ [23].

$$\text{L'équation de Boltzmann : } \frac{\partial f}{\partial t} + c \nabla f = \Omega(f) \quad (2.1)$$

f : la fonction de distribution des particules sur l'espace des phases ;

x : la position.

t : le temps.

Ω : opérateur de collision.

c : la vitesse.

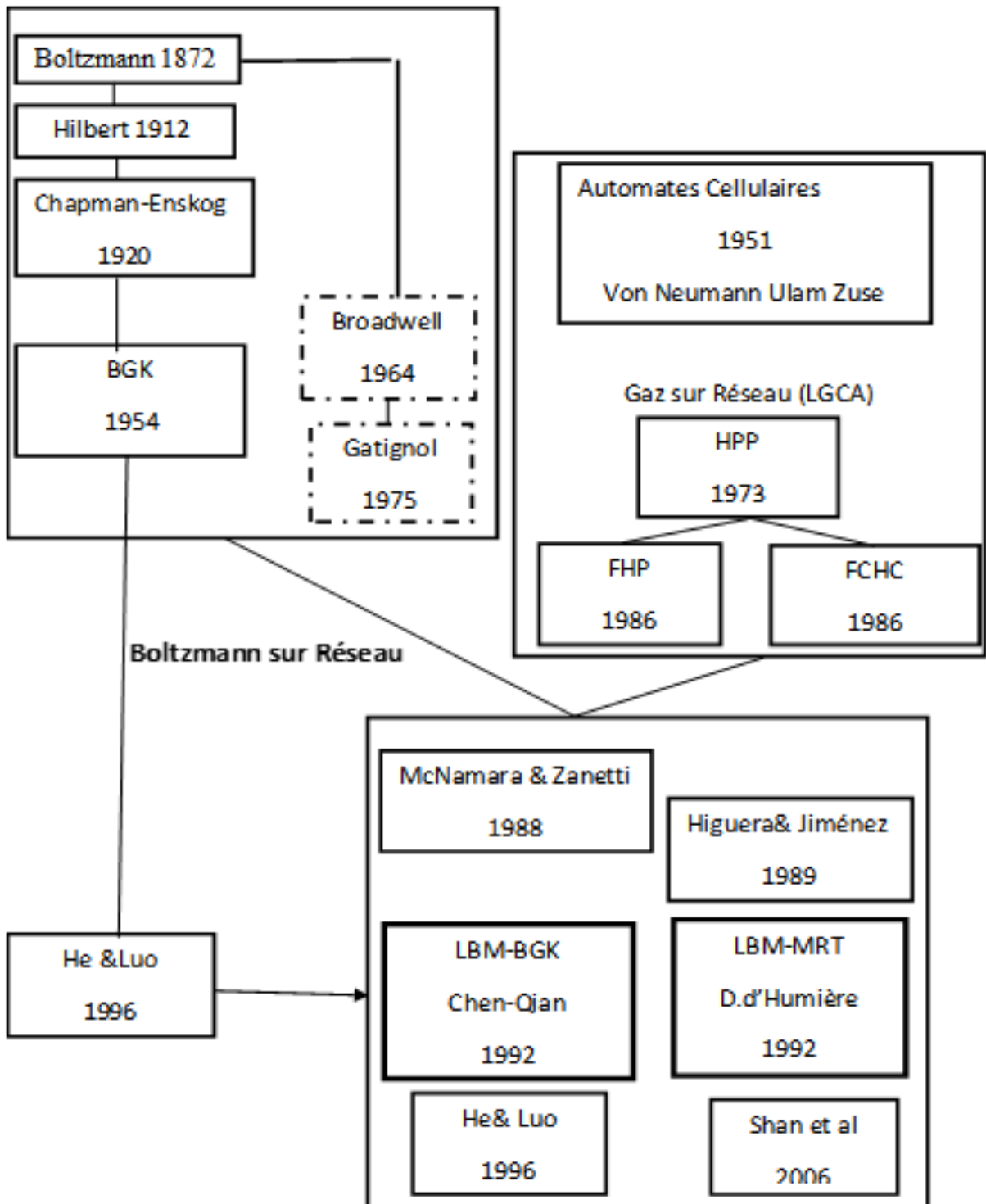


Figure 2.1 Chronologie récapitulative des moments historiques important dans l'avènement de la méthode Boltzmann sur réseau. Les cadres en pointillés indiquent les premiers modèles à vitesses discrètes sans discrétisation spatiale et temporelle.

Les expressions des variable macroscopiques sont la masse volumique du fluide $\rho(x,t)$, la quantité de mouvement $\rho(x,t)u(x,t)$ et l'énergie interne $e(x,t)$ [23] :

$$\rho(x,t) = \int mf(x,c,t)dc \quad (2.2)$$

$$\rho(x,t)U(x,t) = \int mcf(x,c,t)dc \quad (2.3)$$

$$\rho(x,t)e(x,t) = \frac{1}{2} \int m(c-u(x,t))^2 f(x,c,t)dc \quad (2.4)$$

ρ Est la masse volumique du fluide, m est la masse moléculaire, u est la vitesse, e l'énergie interne.

Après la théorie cinétique $e = \frac{2}{3m} k_b T$, avec k_b est la constante de Boltzmann et T la température.

La masse moléculaire généralement choisi égale à l'unité [23]

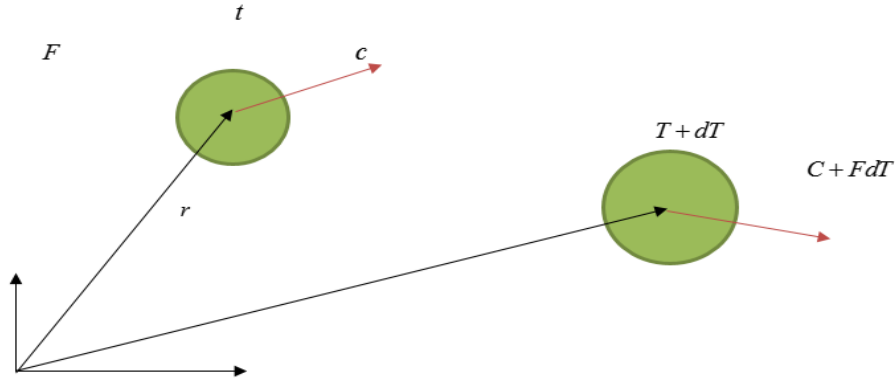


Figure 2.2- Position et de vitesse d'une particule après et avant l'application d'une force

2.3 Opérateur de collision

2.3.1 Opérateurs de collision BGK

Bhatnagar, Gross et Krook ont remarqué, cependant que le principal effet du terme de collision est de reprocher la fonction de distribution de vitesse de distribution d'équilibre. La distribution d'équilibre est donnée par [24].

$$f^0(v) = \frac{n}{(2\pi\theta)^{3/2}} (e)^{-(v-u)/2\theta} \quad (2.5)$$

Où n est la densité numérique des particules, u est la vitesse moyenne et $\theta = kT$ est la température. Ces grandeurs macroscopiques sont données par les moments de la fonction de distribution

$$\begin{aligned} \int f &= n \\ \int f v_\alpha &= n u_\alpha \\ \int f v^2 &= n u^2 + 3n\theta \end{aligned} \quad (2.6)$$

La façon la plus simple d'approximer le terme de collision consiste à utiliser une seule approximation du temps de relaxation

$$\int dv_1' dv_2' dv_2 (f_1' f_2' - f_1 f_2) P_{12 \rightarrow 1'2'} \approx \frac{1}{\tau} (f^0 - f) \quad (2.7)$$

Une caractéristique important de cette approximation est cette masse. La quantité de mouvement et l'énergie sont encore exactement conservées par le terme de collision. Avec cette approximation, équation de Boltzmann devient :

$$\partial_t f + v \partial_x f + F \partial_v f = \frac{1}{\tau} (f^0 - f) \quad (2.8)$$

On peut utiliser cette expression pour approximation la fonction de densité de probabilité par la distribution d'équilibre et ses dérivées [24],

$$f = f^0 - \tau (\partial_t f + v \partial_x f + F \partial_v f) \quad (2.9)$$

2.3.1.1 Fonction de distribution à l'équilibre

L'élément clé dans la méthode LBM pour différents problèmes est la fonction de distribution d'équilibre, la procédure de résolution des équations de diffusion, d'advection diffusion, de mouvement et d'énergies la même. La différence dépend principalement de la fonction de distribution d'équilibre. Différents problèmes physiques (tels qu'un problème de propagation d'ondes, etc.) peuvent être résolus par LBM à condition qu'une fonction de distribution d'équilibre appropriée soit utilisée. Pour des particules se déplaçant dans un milieu avec une vitesse macroscopique u . La fonction de distribution de Maxwell normalisée peut être écrite comme ;

$$f = \frac{\rho}{2\pi/3} e^{-\frac{3}{2}(c-u)^2} \quad (2.10)$$

Qui peut s'écrire comme ;

$$f = \frac{\rho}{2\pi/3} e^{-\frac{3}{2}(c^2)} e^{3(c.u - u^2)/2} \quad (2.11)$$

Où $c^2 = c.c$ et $u^2 = u.u$. Rappelons que le développement en série de Taylor pour e est,

$$e^{-x} = 1 - x + x^2/2 - x^3/(3!)... \quad (2.12)$$

D'où l'équation (2.11) peut être étendu auteur de l'état stationnaire comme,

$$f = \frac{\rho}{2\pi/3} e^{-\frac{3}{2}(c^2)} \left[1 + 3(c.u) - \frac{3}{2}u^2 + ... \right] \quad (2.13)$$

La forme générale de la fonction de distribution d'équilibre peut être écrire comme,

$$f_i^{eq} = \phi w_i \left[A + B c_i . u + c(c_i . u)^2 + D u^2 \right] \quad (2.14)$$

Où u c'est la vecteur vitesse d'écoulement macroscopique ; A, B, C et D sont des constantes et doivent être déterminées selon le principe de conservation (masse, quantité de mouvement et énergie). ϕ représente un paramètre scalaire, tel que la densité (ρ), la température (densité

d'énergie thermique) ou la concentration d'espèces, qui est égale à la somme de toutes les fonctions de distribution, c'est-à-dire

$$\phi = \sum_{i=0}^{i=n} f_i^{eq} \quad (2.15)$$

Où n est le nombre de liens du réseau par exemple dans un processus de diffusion, le flux est stagnant, la vitesse est nulle, alors équation (2.14) peut être réduit à :

$$f_i^{eq} = \phi A w_i \quad (2.16)$$

Il s'avère que A est égal à l'unité, où $\sum_{i=0}^{i=n} w_i = 1$ [25].

2.3.2 Opérateur de collision MRT

Opérateur à temps de relaxation multiples (*Multiple-Relaxation-Time*) est une méthode qui remplace le temps de relaxation τ de l'opérateur BGK par une matrice (matrice de collision). Cette matrice est de dimension $Q \times Q$ avec Q est le nombre de différentes vitesses i de la fonction de distribution f^i . La matrice de collision est une matrice diagonale afin de manière à ce que chacun de ses vecteurs soit associé au retour à l'équilibre d'un moment. Ces valeurs propres correspondent pour sa part à l'inverse du temps de relaxation vers l'équilibre de moment, donc elle est permis de contrôler de manière indépendante la relaxation vers l'équilibre de Q moments de f^i à partir de Q temps de relaxation car l'étape de collision. Mais pour les écoulements non thermiques les moments qui permettent d'exprimer la densité, la vitesse et le tenseur de contraintes, c'est les seuls moments de pertinence physique et qui sont soumis aux lois de conservation. Mais les autres moments il n'y a aucune pertinence physique et correspond à des paramètres numériques. La matrice de collision du modèle MRT est basée sur les équations de Navier-Stokes dans le cas limite, et favorise la précision et la stabilité de la méthode. Le modèle BGK est entre autres le cas particulier du modèle MRT pour lequel tous les temps de relaxation sont égaux [26].

2.4 Mise en œuvre de la méthode de Boltzmann

Dans les parties précédentes, nous nous intéressons à notre travail sur l'origine de la méthode de Boltzmann sur les réseaux ainsi qu'à l'équation de base de cette méthode, caractérisée par la fonction de distribution de collision. Il y a très peu de solutions analytiques mais l'équation de Boltzmann est la seule équation qui consiste en sa résolution numérique [27]. Dans cette deuxième section nous présentons quelques détails pour implémenter effectivement la méthode LBM, comme la définition de la méthode est la description de l'approche numérique utilisée dans notre thème pour résoudre l'équation de cette méthode.

2.4.1 Equation de Boltzmann sur les réseaux

Ludwig Eduard Boltzmann (1844-1906), le physicien autrichien dont la plus grande réussite fut le développement de la mécanique statistique, explique et dicte comment les propriétés des atomes et des molécules (propriétés microscopiques) déterminent les propriétés phénoménologiques (macroscopiques) de la matière telles que la viscosité, la conductivité thermique et le coefficient des diffusions. La fonction de distribution (probabilité de trouver des particules dans une certaine plage de vitesses à une certaine plage d'emplacements à un moment donnée) remplace le marquage de chaque particule, comme dans les simulations de dynamique moléculaire [28].

2.5 Discrétisation temporelle

Après l'équation de Boltzmann avec l'opérateur de collision BGK que nous allons vu précédemment.

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = -\frac{f - f^{eq}}{k\Delta t} \quad (2.17)$$

Pour écrire sa forme il suffit d'écrire $f(x + v\Delta t, t + \Delta t)$ à l'aide de développement de Taylor et on trouve :

$$\begin{aligned} f(x + v\Delta t, t + \Delta t) &= f(x + v\Delta t, t) + \Delta t \partial_t f(x + v\Delta t, t) + \frac{\Delta t^2}{2} \partial_t^2 f(x + v\Delta t, t) + \varphi(\Delta t^3) \\ &= f(x, t) + \Delta t v \cdot \nabla_x f(x, t) + \Delta t^2 v^T \cdot \nabla^2_x f(x, t) \cdot v \\ &\quad + \Delta t \partial_t f(x, t) + \Delta t \Delta t v \cdot \nabla_x \partial_t f(x, t) + \frac{\Delta t^2}{2} \partial_t^2 f(x, t) + (\Delta t^3) \\ &= f(x, t) + \Delta t (\partial_t f + v \cdot \nabla_x f)(x, t) + \frac{\Delta t^2}{2} (v^T \cdot \nabla^2_x f \cdot v \\ &\quad + 2v \cdot \nabla_x \partial_t f + \partial_t^2 f)(x, t) + \varphi(\Delta t^3) \end{aligned} \quad (2.18)$$

On néglige la valeur de vitesse v pour simplifier les calculs et on considère les termes de second ordre comme une viscosité artificielle, on retrouve :

$$f(x + v\Delta t, t + \Delta t) - f(x, v, t) = -\frac{f(x, v, t) - f^{eq}(x, v, t)}{k} \quad (2.19)$$

2.6 Discrétisation des vitesses (Modèle $D_n Q_m$)

La terminologie commune utilisée dans LBM est de référer à la dimension du problème et le nombre de vitesse en utilisant $D_n Q_m$, ou n représente la dimension du problème (1 pour 1-D, 2 pour 2-D 3 pour 3-D) et m fait référence au modèle de vitesse, nombre de liaisons [25].

2.6.1 Schéma D2Q9

Ce modèle est très courant, notamment pour résoudre des problèmes d'écoulement de fluide. Il a neuf vecteurs de vitesse, avec la vitesse de particule centrale égale à zéro. Les vitesses sont $c(0,0), c(1,0), c(0,1), c(-1,0), c(0,-1), c(1,1), c(-1,1), c(-1,-1), c(1,-1)$ pour $f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8$,

respectivement. Les facteurs de pondération pour les fonctions de distribution correspondantes sont $4/9, 1/9, 1/9, 1/9, 1/9, 1/36, 1/36, 1/36, 1/36$ [28].

Tableau 2.1- Vecteurs prédéfinis \vec{e}_i pour les schémas classiques DDQQ (On a la relation $\vec{c}_i \equiv c_r \cdot \vec{e}_i$)

Schéma	Vecteurs prédéfinis \vec{e}_i
D1Q3	(1 -1 0)
D1Q5	(1 -1 2 -2 0)
D2Q4	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
D2Q5	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
D2Q7	$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 & -1 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & \sqrt{3}/2 & 0 & -\sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \end{pmatrix}$
D2Q9	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
D3Q15	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
D3Q19	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

2.7 Fonction de distribution discrète à l'équilibre

L'équilibre d'un élément principal de l'application de LBM à différents problèmes est la fonction de distribution d'équilibre f . La procédure de résolution des équations de diffusion, d'advection, de diffusion, la quantité de mouvement et d'énergie est la même. La différence réside principalement dans la fonction de distribution d'équilibre. En fait, différents problèmes physiques (tels qu'un problème de propagation d'ondes) peuvent être résolus par LBM, à condition que la fonction de distribution d'équilibre et le temps de relaxation appropriés soient utilisés. Pour les particules se déplaçant dans un milieu avec une vitesse macroscopique u , la fonction de distribution de Maxwell peut écrire. [28]

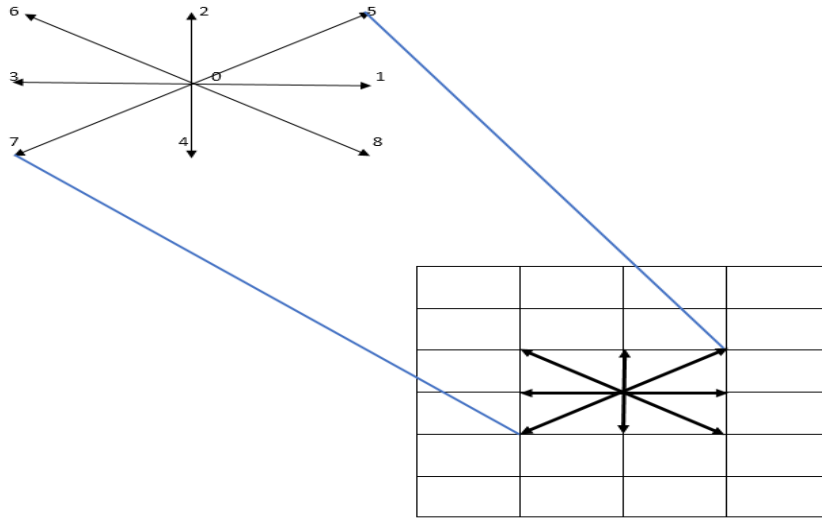


Schéma 2.3- schéma D2Q9

$$\begin{aligned}
 f^{eq} &= \frac{\rho}{(2\pi RT)^{D/2}} \exp\left(-\frac{(\bar{c} - \bar{u})^2}{2RT}\right) \\
 &= \frac{\rho}{(2\pi RT)^{D/2}} \exp\left(-\frac{(\bar{c} \cdot \bar{c} - 2\bar{c} \cdot \bar{u} + \bar{u} \cdot \bar{u})}{2RT}\right) \\
 &= \frac{\rho}{(2\pi RT)^{D/2}} \exp\left(\frac{\bar{c} \cdot \bar{c}}{2RT}\right) \exp\left(-\frac{-2\bar{c} \cdot \bar{u} + \bar{u} \cdot \bar{u}}{2RT}\right)
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Où D est la dimension du problème, par exemple, égal à 2 pour le problème bidimensionnel, la fonction exponentielle peut être développée en utilisant une série de Taylor :

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \tag{2.21}$$

Donc, l'équation (2.27) devenir :

$$f^{eq} = \frac{\rho}{(2\pi RT)^{D/2}} \exp\left(-\frac{(\bar{c} \cdot \bar{c})}{2RT}\right) \left[1 - \frac{(-2\bar{c} \cdot \bar{u} + \bar{u} \cdot \bar{u})}{2RT} + \frac{(-2\bar{c} \cdot \bar{u} + \bar{u} \cdot \bar{u})^2}{4R^2 T^2} + \dots \right] \tag{2.22}$$

Ignorer les termes d'ordre $O(u^3)$ et Higer, la fonction de distribution de Ceubium peut être approximée comme ;

$$f^{eq} = \frac{\rho}{(2\pi RT)^{D/2}} \exp\left(-\frac{(\bar{c} \cdot \bar{c})}{2RT}\right) \left[1 - \frac{(-2\bar{c} \cdot \bar{u} + \bar{u} \cdot \bar{u})}{2RT} + \frac{(\bar{c} \cdot \bar{u})^2}{2R^2 T^2} \right] \tag{2.23}$$

La fonction de distribution bien connue peut-être récupérée par les deux autres substitutions suivantes :

$$RT = c_s^2 \text{ et } W(\bar{c}) = \exp\left(-\frac{c \cdot c}{2RT}\right) (2\pi RT)^{-D/2}, \tag{2.24}$$

$$f^{eq} = \rho W(\bar{c}) \left[1 + \frac{2\bar{c} \cdot \bar{u} - \bar{u} \cdot \bar{u}}{2c_s^2} + \frac{(\bar{c} \cdot \bar{u})^2}{2c_s^4} \right]. \tag{2.25}$$

La fonction de distribution d'équilibre le long d'une direction de vitesse discrétisée est

$$f_i^{eq} = \rho w_i \left[1 + \frac{2\bar{c} \cdot \bar{u} - \bar{u} \cdot \bar{u}}{2c_s^2} + \frac{(\bar{c} \cdot \bar{u})^2}{2c_s^4} \right] + o(u^2). \quad (2.26)$$

La représentation d'ordre supérieur est

$$f_i^{eq} = \rho w_i \left[1 + \frac{2\bar{c} \cdot \bar{u} - \bar{u} \cdot \bar{u}}{2c_s^2} + \frac{(\bar{c} \cdot \bar{u})^2}{2c_s^4} + \frac{(\bar{c} \cdot \bar{u})^2}{2c_s^6} - \frac{(\bar{c} \cdot \bar{u})u^2}{2c_s^4} \right] + o(u^4). \quad (2.27)$$

Pour un support stationnaire ($u = 0$), $f_i^{eq} = \rho w_i$.

Un autre élément à discuter est le terme antérieur dans LBM, qui fait l'objet de la section suivante.

2.8 Vitesse de son LBM

La vitesse de son dans le cas d'un écoulement isotherme sur le réseau de Boltzmann est exprimée par :

$$c_s = \sqrt{RT} \text{ Donc } c_s^2 = RT \quad (2.28)$$

Elle est liée avec la vitesse macroscopique pour le modèle D2Q9 par la relation suivant :

$$c_s = \frac{c}{\sqrt{3}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{3}\Delta t} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (2.29)$$

En utilisant les unités LBM, $\Delta x = \Delta t = 1$

Après l'incorporation de la vitesse du son à l'expression de la fonction de distribution à l'équilibre elle devient : [2]

$$f_k^{eq} = \rho w_k \left[1 + \frac{uc_k}{c_s^2} + \frac{(uc_k)^2}{2c_s^4} - \frac{uc_k^2}{2c_s^2} \right] \quad (2.30)$$

2.9 Fonction de distribution discrète à l'équilibre g_k^{eq}

La fonction de distribution thermique g_k^{eq} est obtenue après la procédure similaire à celle qui permet de retrouver l'expression de la fonction de distribution dynamique discrète f_k^{eq} . Elle est donnée par l'expression suivant [24]

$$g_k^{eq} = T w_k \left[1 + \frac{uc_k}{c_s^2} \right] \quad (2.31)$$

En calcule les variations de modèle D2Q9 par les moments :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = \sum_{i=0}^8 f_i^{(eq)} \\ \rho v_\alpha = \sum_{i=0}^8 f_i^{(eq)} c_{i\alpha} \\ \Pi_{\alpha\beta} = \sum_{i=0}^8 f_i^{(eq)} c_{i\alpha} c_{i\beta} \\ Q_{\alpha\beta\gamma} = \sum_{i=0}^8 f_i^{(eq)} c_{i\alpha} c_{i\beta} c_{i\gamma} \\ R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \sum_{i=0}^8 f_i^{(eq)} c_{i\alpha} c_{i\beta} c_{i\gamma} c_{i\delta} \end{array} \right. \quad (2.32)$$

Avec $\Pi = \rho.(\vec{v}.\vec{v} + \vec{R}T.I)$ Dans le cas de champ de température est considéré uniforme [32].

2.10 Processus de collision-propagation

Elle est comporte par deux termes, un terme de collision et un terme de propagation soit :

$$\underbrace{f_i(x + e_i \Delta t, t + \Delta t) - f_i(x, t)}_{\text{Diffusion}} = - \underbrace{\frac{1}{\tau} [f_i(x, t) - f_i^{eq}(x, t)]}_{\text{Collision}}$$

Généralement divisé en
Deux étapes

$f_i(x + e_i, t + \Delta t) = f_i^*(x, t)$

$f_i^*(x, t) = f_i(x, t) - \frac{1}{\tau} [f_i(x, t) - f_i^{eq}(x, t)]$

Etape de collision : $\tilde{f}_k(\vec{x}, t) = f_k(\vec{x}, t) - \frac{1}{\tau} [f_k(\vec{x}, t) - f_k^{eq}(\vec{x}, t)]$ (2.33)

Etape de propagation : $f_k(\vec{x} + \vec{e}_k \Delta t, t + \Delta t) = \tilde{f}_k(\vec{x}, t)$ (2.34)

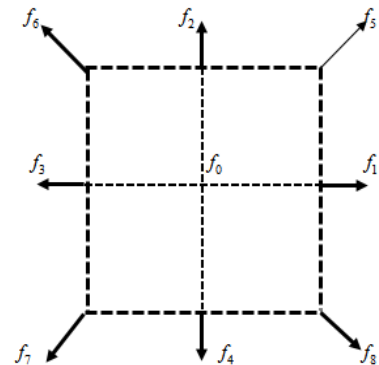
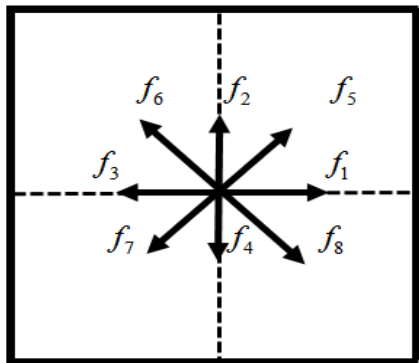


Figure 2.6 Propagation des distribution après la collision depuis une cellule (i, j)

Avec f_k et f_k est la valeur avant et après la collision respectivement. On a bien remarqué que l'étape de collision est purement locale et l'étape de propagation est un simple décalage uniforme de l'information qui est pas nécessaire pour les grands efforts de calcul. [30]

2.11 Modèle à temps de relaxation multiple MRT

L'opérateur de collision peut être généralisé comme [28] :

$$f_i(c\Delta t, t + \Delta t) - f_i(x, t) = -\Omega \left[f_i(x, t) - f_i^{eq}(x, t) \right] \quad (2.35)$$

Où Ω est la matrice de collision. L'étape de collision dans l'espace des vitesses est difficile à réaliser. Il est plus pratique d'effectuer le processus de collision dans l'espace des impulsions. Par conséquent, l'équation 2.45 peut se transformer sous la forme suivant :

$$f_i(x + c\Delta t, t + \Delta t) - f_i(x, t) = -M^{-1}S \left[m(x, t) - m^{eq}(x, t) \right] \quad (2.36)$$

Où $m(x, t)$ et m^{eq} sont des vecteurs de moments $m = (m_0, m_1, m_2, \dots, m_n)^T$

La matrice de relaxation S est une matrice diagonale.

La correspondance entre les espaces de vitesse et de moment peut être effectuée par transformation linéaire,

$$m = Mf \quad f = M^{-1}m \quad (2.37)$$

La matrice M pour D2Q9 est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & -2 & -2 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice inverse de M c'est :

$$M^{-1} = \alpha \begin{pmatrix} 4 & -4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & -2 & 6 & -6 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 4 & -1 & -2 & 0 & 0 & 6 & -6 & -9 & 0 \\ 4 & -1 & -2 & -6 & 6 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 4 & -1 & -2 & 0 & 0 & -6 & 6 & -9 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 6 & 3 & 6 & 3 & 0 & 9 \\ 4 & 2 & 1 & -6 & -3 & 6 & 3 & 0 & -9 \\ 4 & 2 & 1 & -6 & -3 & -6 & -3 & 0 & 9 \\ 4 & 2 & 1 & 6 & 3 & -6 & -3 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

Où $\alpha = 1/36$

Notez que la matrice M est écrite en supposant que le centre du réseau est zéro (0) ce qui est bien si le lecteur code en fortran. En Matlab, l'indexation zéro n'est pas autorisée, et donc dans le code (annexe), indice 9 est utilisé pour le point central. La première colonne de la matrice M doit donc être la dernière colonne. Le vecteur moment m est : $m = (\rho, e, \epsilon, j_x, q_x, j_y, q_y, p_{xx}, p_{xy})^T$

L'équilibre du moment m^{eq} est

$$\begin{aligned}
m_1^{eq} &= -2\rho + 3(j_x^2 + j_y^2) \\
m_2^{eq} &= \rho - 3(j_x^2 + j_y^2) \\
m_3^{eq} &= j_x \\
m_4^{eq} &= -j_x \\
m_5^{eq} &= j_y \\
m_6^{eq} &= -j_y \\
m_7^{eq} &= (j_x^2 - j_y^2) \\
m_8^{eq} &= j_x j_y
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Où

$$j_x = \rho u_x = \sum_i f_i^{eq} c_{ix}, \tag{2.39}$$

$$j_y = \rho u_y = \sum_i f_i^{eq} c_{iy}, \tag{2.40}$$

Pour des problèmes avec la force extrême, le terme F , les équations ci-dessus peuvent être modifiées comme

$$j_x = \rho u_x = \sum_i f_i^{eq} c_{ix} - F/2. \tag{2.41}$$

$$j_y = \rho u_y = \sum_i f_i^{eq} c_{iy} - F/2.$$

(2.42)

La matrice diagonale S est donnée par

$$\begin{pmatrix}
s_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & s_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & s_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & s_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & s_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_5 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_6 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_7 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_8
\end{pmatrix}$$

Dans la notation compacte. S Peut-être écrit comme

$$S = \text{diag}(1.0, 1.4, 1.4, s_3, 1.2, s_5, 1.2, s_7, s_8),$$

Où $s_7 = s_8 = \frac{2}{(1+6\nu)}, s_3$, et s_5 sont arbitraires et peuvent être fixés à 1 pour D2Q5 la matrice M est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice diagonale S est

$$S = \text{diag}(1, s, s, 1, 1, 1)$$

Où $S = \frac{1}{5\alpha} + 0.5$ et α est le coefficient de diffusion (notez que les autres éléments sur S sont arbitraires ; ici, nous avons utilisé 1).

Pour le problème d'advection-diffusion, les moments d'équilibre sont

$$\begin{aligned} m_0^{eq} &= \rho \\ m_1^{eq} &= \rho u_x \\ m_2^{eq} &= \rho u_y \\ m_3^{eq} &= 1 \\ m_4^{eq} &= 1 \end{aligned} \tag{2.43}$$

Afin d'employer MRT le sous- programme de collision doit être modifié. A part cela, la procédure est la même que pour SRM. Le code d'une cavité entraînée par couvercle avec collision MRT est donné en annexe. Notez que seuls les codes principaux et de collision sont différents du code de SRM.

2.12 Condition aux limites

Les conditions aux limites de pression ou de vitesse sont utilisées. Pour simuler un déplacement non miscible en 2D, une condition aux limites de vitesse et une condition aux limites de pression constante (ou densité) peuvent être définies pour les limites supérieure et inférieure, respectivement. Pour notre exemple de simulation, dans la frontière supérieure, les fonctions de distribution, f_i, f_7 et f_8 sont inconnues après l'étape d'écoulement pour le fluide. On obtient la densité de la composante majoritaire comme

$$\rho_n = \frac{f_0^n + f_1^n + f_3^n + 2(f_2^n + f_5^n + f_6^n)}{1 + u_i} \tag{2.44}$$

Où u est la vitesse d'entrée spécifiée du fluide. Les fonctions de distribution inconnues peuvent être obtenues par

$$f_4^n = f_2^n - \frac{2}{3} \rho_n u_i \quad (2.45)$$

$$f_8^n = f_6^n + \frac{1}{2} (f_3^n - f_1^n) + \frac{1}{6} \rho_n u_i$$

La condition aux limites de pression pour la frontière inférieure peut être traitée de la même manière. Supposons qu'elle soit spécifiée comme la densité de la composante humide (composante majoritaire) sur le nœud limite de sortie inférieur. On peut obtenir la vitesse de sortie du fluide comme.

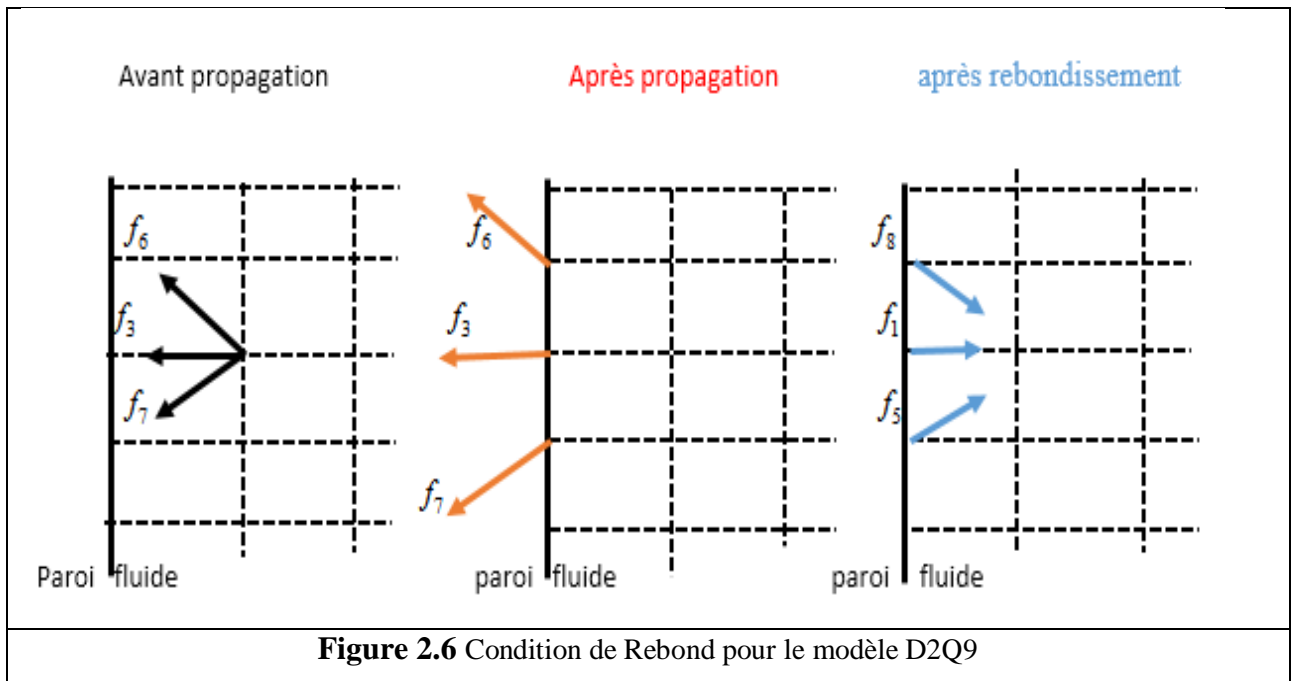
$$u_0 = 1 - \frac{1}{\rho_w} [f_0^w + f_1^w + f_3^w - 2(f_4^w + f_7^w + f_8^w)] \quad (2.46)$$

Et les fonctions de distribution inconnues f_2 , f_5 et f_6 est

$$f_2^w = f_4^w - \frac{2}{3} \rho_w u_0$$

$$f_5^w = f_7^w + \frac{1}{2} (f_3^w - f_1^w) + \frac{1}{6} \rho_w u_0 \quad (2.47)$$

$$f_6^w = f_8^w + \frac{1}{2} (f_1^w - f_3^w) + \frac{1}{6} \rho_w u_0$$



2.13 Algorithme de la méthode LBM

À l'aide d'implémentation, les étape d'advection de collision sont séparées :

$$\underbrace{f_i(x + c_i, t + 1)}_{\text{Advection: } t+1} = \underbrace{f_i(x, t) + \frac{1}{\tau} (f_i^{eq} - f_i)}_{\text{collision: } t}$$

La matrice f'_i à introduire afin de stocker temporairement les populations des particule entre advection et la collision.

Etape de collision :

$$f'_i(x, t+1) = f_i(x, t) + \frac{1}{\tau}(f_i^{eq} - f_i) \quad (2.48)$$

Etape d'advection ;

$$f_i(x, c_i, t+1) = f'_i(x, t+1) \quad (2.49)$$

Finalement, en a présentés dans les travaux suivant les étapes nécessairement à l'implémentation de l'algorithme LBM, utilisation l'opérateur BGK, pour l'écoulement isotherme et incompressible.

Prétraitement

- Choix de géométrie : la génération du maillage, et détermination des conditions aux frontières.
- Choix des paramètres physiques : Nombre de Reynolds
- Choix des paramètres numériques : la finesse de maillage en espace et en temps
- Imposition des conditions initiales

Boucle principale

- Evaluation dès les variables macroscopiques (moment) :

$$\rho(x, t) = \sum_i f_i \quad (2.50)$$

$$u(x, t) = \frac{1}{\rho} \sum_i f_i c_i$$

- Evaluation de la distribution à l'équilibre :

$$f'_i = W_i \rho \left(1 + \frac{c_i \cdot u}{c_s^2} + \frac{(c_i \cdot u)^2}{2c_s^4} - \frac{|u|^2}{2c_s^2} \right) \quad (2.51)$$

- Collision :

$$f'_i(x, t) + \frac{1}{\tau}(f_i^{eq} - f_i) \quad (2.52)$$

Imposition des conditions aux frontières

- Advection :

$$f_i(x + c_i, t+1) = f'_i(x, t) \quad (2.53)$$

Post-traitement

- Récupération de la solution : champ tensoriel $f_i(x, t)$
- Les variables macroscopiques sont évaluées à partir des moments de f_i et de l'équation d'état $p = \rho c_s^2$.

En peut paralléliser la boucle principale facilement lors de son implémentation. En effet l'évolution des moments, évolution de la distribution à l'équilibre, il est peuvent d'évaluées l'étape de collision avec un manier indépendante pour chaque nœud.

Chapitre 03

Transfert thermique

3.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à la présentation du mode de transfert thermique ainsi que les équations qui régissent le transfert de chaleur dans un fluide. Il s'agit principalement des équations régissant le mouvement du fluide et le transfert de chaleur, ainsi que les hypothèses pour lesquelles ces équations sont valables.

3.2 Modes de transfert de chaleur

Le transfert de chaleur entre deux corps, ou deux parties d'un même corps à une différence de température, à tend suivant trois mode.

- La conduction,
- Le rayonnement,
- La convection,

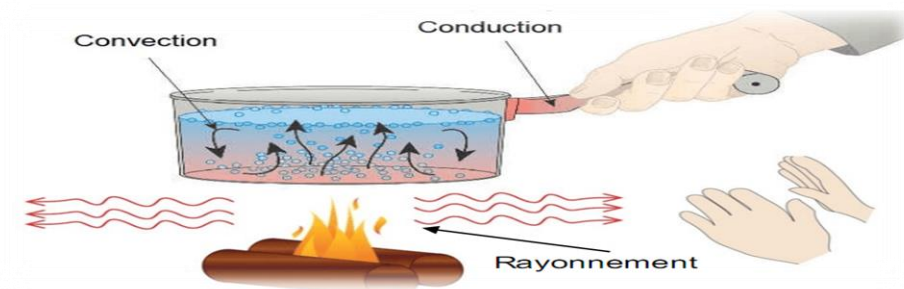


Figure 3.1 Illustration des différents types de transferts thermique [33]

3.2.1 La conduction

La conduction est un mode de transfert de chaleur sans déplacement de la matière avec la présence du gradient de température. Ce transfert de chaleur obéit à la loi de Fourier par l'équation suivant :

$$dQ = -\lambda S \frac{dT}{dx} .dt \quad (3.1)$$

dQ est la quantité de chaleur transmis par conduction (J) , λ est la Conductivité thermique du milieu ($W.m^{-1}.K^{-1}$), S est la surface de la section de passage du flux de chaleur (m^2) et $\frac{dT}{dx}$ gradient de température en ($K.m^{-1}$) Le flux de chaleur ϕ en watt qui circule est donné par :

$$\phi = \frac{dQ}{dt} = -\lambda.S.\frac{dT}{dx} \quad (3.2)$$

Ainsi que la densité de chaleur φ en ($W.m^{-2}$)

$$\phi = \frac{\dot{Q}}{S} = -\lambda \cdot \frac{dT}{dx} \quad (3.3)$$

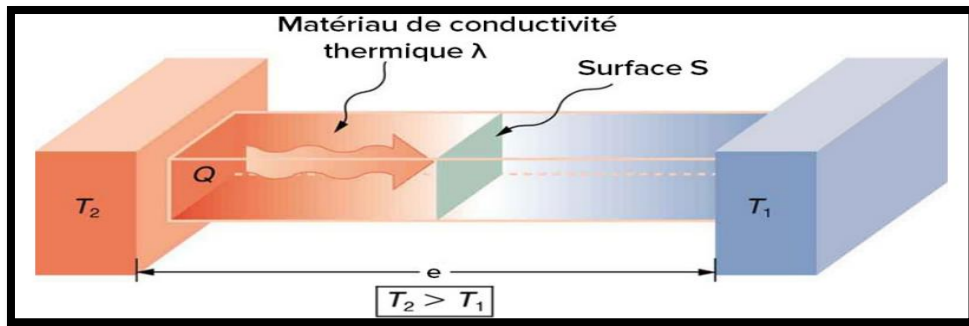


Figure 3.2 Transfert thermique par conduction à travers une barre rectangulaire [34]

3.2.2 Rayonnement

Le transfert de chaleur par rayonnement est un transfert entre deux corps séparés par du vide ou un milieu semi transparent qui produit par l'intermédiaire d'ondes électromagnétiques, le phénomène d'émission d'un corps correspond à la version d'énergie matérielle en énergie radiative. Le phénomène d'absorption est la conversion inverse [35].

3.2.3 La convection

La convection est le mécanisme très important du transfert d'énergie entre une surface solide et un gaz ou un liquide. Le transfert de chaleur par convection d'une surface dont la température est supérieure à celle de fluide par des étapes suivant :

- La chaleur s'écoule par conduction de la surface aux les particules de fluide, l'énergie transmise sert à augmenter la température et l'énergie interne des particules
- Fin ces particule son mélanger avec les autres particules. Les particules fluides et fluides sont transportées sous l'effet de leur

La modélisation simplifiée de ce phénomène peut être trouvée dans la loi de Newton :

$$\phi = h(T_p - T_f) \quad (3.4)$$

T_p est la température de la paroi, T_f est la température du fluide, ϕ est la densité de flux thermique ($W.m^{-2}$) et h est le coefficient d'échange superficielle.

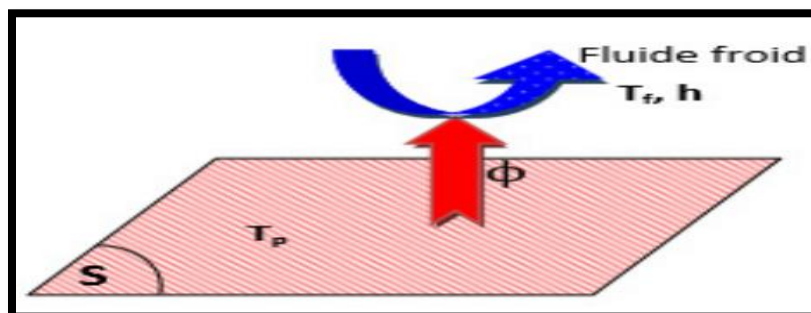


Figure 3.4 Illustration de la loi de Newton [34]

3.3 Type de convection

3.3.1 Convection forcée

Le fluide dans ce type a été actionné à cause des forces extérieures du processus (pompe, ventilateur, etc.) qui est donner des vitesses de déplacement important. [33]

3.3.2 Convection mixte

La différence entre la convection mixte et force est insignifiant par rapport à l'écoulement principal. La convection mixte et present dans quand les deux phénomènes coexistent. [35]

3.3.3 Convection naturelle

Le mouvement du fluide dans la convection naturelle est le résultat de gradient de température ou/et de concentration qui produit un gradient de masse volumique dans le fluide (poussée d'Archimède). Dans le cas d'une convection naturelle, la particule fluide (l'objet) a été immergée dans un fluide comme la figure 3.5 avec T_f la température caractéristique du bain de fluide, et T_p la particule de fluide. Le mouvement de la convection prend naissance dès lors que la particule de fluide de température T_p est supérieure à T_f avec la masse volumique inférieur du fluide. Elle est soumise à une poussée d'Archimède, qui met en mouvement.

Les vitesses de la convection naturelle son modérées par rapport à la convection forcée a causé de la convection naturelle est les résultat du gradient de masse volumique avec la température. En 1903, à l'époque même où Rayleigh s'intéresse à la convection, Boussinesq propose une simplification des équations de façon à, ne conserver que les ingrédients important et suffisant à la convection thermique.



Figure 3.5 Comportement d'une particule fluide [34]

3.4 Domaine d'application de la convection naturelle

La convection naturelle est un phénomène très dominant ; par exemple

- Augmentation de nombre d'application et mène à un certain nombre de conception industrielles et environnement sophistiquées.
- Les couts de fonctionnement sont important, les petites améliorations d'efficacité sont essentielles et peuvent jouer un rôle dans la consommation d'énergie.
- Les problèmes océanographiques et atmosphériques tels que les problèmes technologiques.

- Les équipements électriques et les réactions nucléaires.
- Les appareils ménagers et les échangeurs de chaleur sont tous les problèmes, qui donné l'intérêt particulier à cette science.

3.5. Formulation générale des équations du problème considéré

Les équations de Navier-stokes et l'équation d'énergie a été exprimés la conservation de masse, la quantité de mouvement et d'énergie est la formulation de ces équations sous la forme vectorielle suivants :

Equation de continuité

Est un l'équation qui est découlé de la loi de la conservation de masse

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{V} = 0 \quad (3.5)$$

ρ est la masse volumique du fluide, t est le temps, et \vec{V} est le vecteur de vitesse du fluide.

Equation du mouvement

D'après le principe de conservation de quantité de mouvement en peut écrire l'équation de mouvement avec la forme suivant :

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\nabla P + \rho \vec{g} + \mu \Delta \vec{V} \quad (3.6)$$

est l'accélération de la pesanteur μ est la viscosité dynamique et P est la pression

Equation de conservation de l'énergie

En peut d'écrire l'équation d'énergie partir le 1^{er} principe de la thermo dynamique

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) T \right) = \operatorname{div} (\lambda \overline{\operatorname{grad} T}) \quad (3.7)$$

λ est la conductivité thermique du fluide, T est la température du fluide et c_p est la capacité calorifique massique à pression constante du fluide.

3.6 Grandeur sans dimension

Il est plus commode de présenter les équations régissant le problème sous une forme adimensionnelle. Des nombres sans dimensions caractéristiques vont apparaître et qui réduiront considérablement la complexité du problème.

Dans le présent travail, les équations régissant le phénomène de la convection naturelle dans une cavité ont été adimensionnées en utilisant des variables caractéristiques. A cet effet, la largeur L entre les deux parois isotherme de la cavité a été choisie comme longueur de référence. La vitesse est adimensionnée par rapport à la diffusivité thermique. Alors que la température est adimensionnée par rapport à l'écart de température ΔT entre les parois isothermes. Les variables adimensionnelles sont données par :

$$u = \frac{u^* L}{\alpha}, \quad v = \frac{v^* L}{\alpha}, \quad x = \frac{x^*}{L}, \quad y = \frac{y^*}{L},$$

$$p = \frac{(p^* - p_\infty) L^2}{\rho \alpha^2}, \quad \theta = \frac{(T - T_c)}{(T_h - T_c)} \quad (3.8)$$

Dans le cas de l'approximation de Boussinesq, on introduit généralement un paramètre, le nombre de Rayleigh (Ra), qui incorpore les effets des propriétés du fluide, des conditions aux limites et la géométrie du domaine physique dans un seul paramètre :

$$Ra = \frac{g \beta \Delta T L^3}{\nu k} \quad (3.9)$$

où g est l'accélération due à la pesanteur, β le coefficient de dilatation thermique, ΔT la différence de température entre les parois isothermes, L la largeur de la cavité, ν la viscosité cinématique et k la diffusivité thermique.

Il est clair que le nombre de Rayleigh est un paramètre déterminant dans ce type de problème car il exprime la force d'entraînement (flottabilité) dans la cavité, sans laquelle il n'y aura aucune turbulence. Un nombre de Rayleigh plus élevé, engendre un effet de flottabilité plus grand et par conséquent plus de turbulence. Un nombre de Rayleigh moins élevé signifie qu'une faible flottabilité agisse sur l'écoulement, le rendant laminaire.

Plus le nombre de Rayleigh est élevé, plus la convection prend le pas sur la diffusion de chaleur ou de quantité de mouvement. Ce nombre, une fois le fluide choisi pour une enceinte fermée, ne dépend plus que de ΔT , qui est ainsi le paramètre de contrôle.

Pour prendre en compte la nature du fluide utilisé, un autre nombre sans dimension est introduit, le nombre de Prandtl :

$$Pr = \frac{\nu}{k} \quad (3.10)$$

Il compare les importances relatives de la diffusion de quantité de mouvement (viscosité) et de la diffusion de chaleur (conduction).

Les différents cas à étudier peuvent être obtenus en variant la différence de température entre les parois chaude et froide (nombre de Rayleigh), la nature du fluide (nombre de Prandtl), ou la géométrie de la cavité (le facteur de forme, qui est le rapport de la hauteur de la cavité sur sa largeur).

Le nombre de Grashof est le rapporte des forces de gravité sur les forces visqueuses. Il est défini de manière suivante :

$$G_r = \frac{g \beta \Delta T L^3}{\nu^2} \quad (3.11)$$

L : la dimension caractéristique du système étudié (m)

ΔT : l'écart de température caractéristique (K)

g : l'accélération de la gravité ($m.s^{-2}$)

β : le coefficient de dilatation (K^{-1})

ν : la viscosité cinématique [9].

Le Nombre de Nusselt est défini par le rapport entre les quantités de chaleur échangée par convection et par conduction.

$$Nu = \frac{h.L}{\lambda} \quad (3.12)$$

Avec L : la longueur de la couche de fluide en écoulement entre deux parois solides.

Le nombre de Nusselt représente la perfection du transfert de chaleur dans la couche de fluide, qui est fait par la convection et par conduction. D'où on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{flux convectif} = h.\Delta T \\ \text{flux conductif} = \frac{\lambda.\Delta T}{L} \end{array} \right. \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\text{flux convectif}}{\text{flux conductif}} = \frac{h.\Delta T}{\lambda.\Delta T/L} = \frac{h.L}{\lambda} = Nu \end{array} \right.$$

3.7 Hypothèse de Boussinesq

Dans le cas où les variations de température sont prises comme suffisamment faibles pour que les propriétés physiques du fluide (tels que sa dilatibilité thermique, sa diffusivité thermique et sa viscosité cinématique) puissent être considérées comme constantes, les variations de la masse volumique au sein du fluide sont faibles. Ainsi, il est possible de considérer le fluide comme quasi incompressible. Les variations de ρ sont négligées partout, exceptées dans le terme de poussée à l'origine du mouvement.

L'hypothèse de Boussinesq suppose que la densité du fluide dans le terme des forces de volume, varie linéairement avec la température, ce qui amène à la relation suivante :

$$\rho = \rho_0 [1 - \beta(T - T_0)] \quad (3.13)$$

où ρ_0 et T_0 dénotent respectivement, la masse volumique et la température de référence et β est le coefficient de dilatation thermique donné par l'expression suivante :

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \quad (3.14)$$

Chapitre 04

Résultats et discussions

4.1 Introduction

Ce chapitre est consacré principalement à la présentation et la discussion de résultats d'une étude numérique d'un problème de convection naturelle en régime laminaire dans une cavité carrée fermée. Le fluide confiné étant l'air, $Pr = 0.71$. Le nombre de Rayleigh varie de 10^3 à 10^{12} .

Basant sur la méthode Lattice-Boltzmann, un code de calcul est élaboré dans le langage fortran vont permettre de montrer l'influence du régime de l'écoulement, à travers le nombre de Rayleigh, sur le champ d'écoulement et le transfert de chaleur.

4.2 Présentation de langage Fortran

Fortran est un langage de programmation pensé dans les années 50. Il est utilisée dans le domaine de la recherche scientifique pour les calculs. Le déroulement des opérations individuelles en machine reste relativement contrôlable dans le langage, qui est permis d'écrire des codes relativement efficaces en termes de calcul.

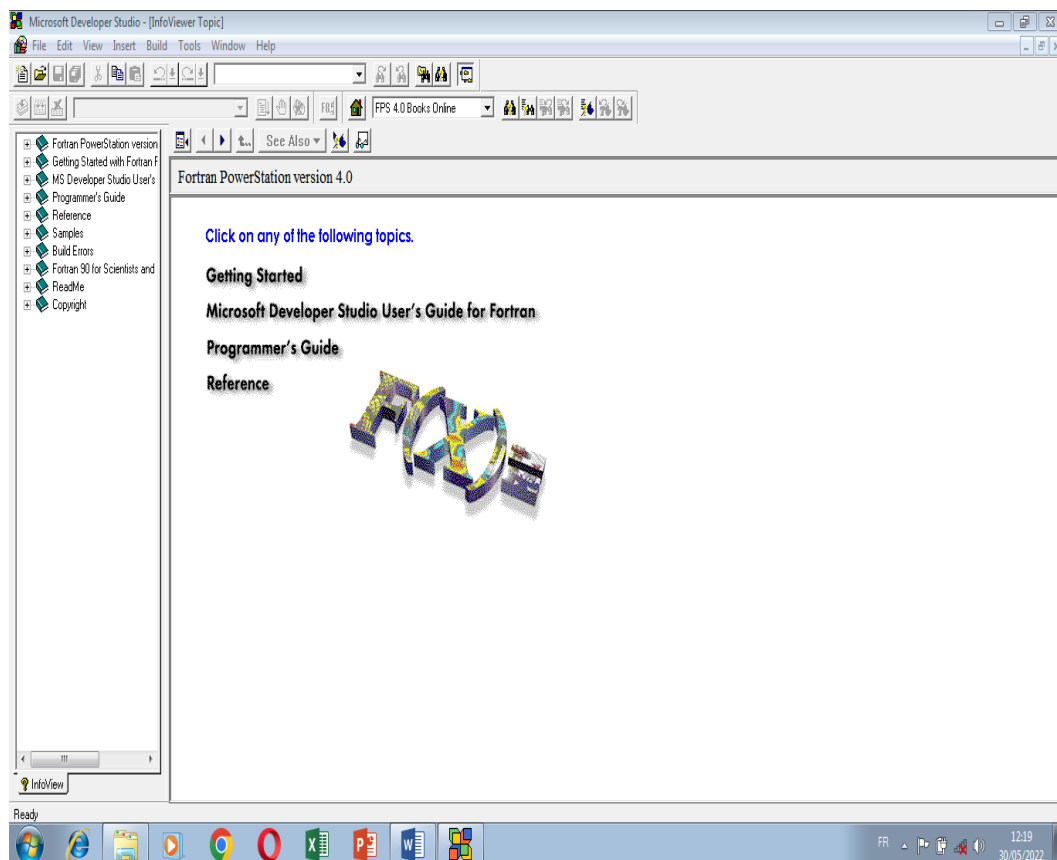


Figure 4.1 Interface du logiciel Fortran

4.3 Description du Problème

On se propose d'étudier le phénomène de la convection naturelle dans un espace confiné contenant de l'air ($Pr = 0.71$). La configuration de l'écoulement est illustrée sur la Figure 4.2. Il s'agit d'une enceinte carrée. Les axes de coordonnées x et y sont respectivement orientés suivant les directions horizontale et verticale. Les parois parallèles verticales sont soumises à des températures uniformes. Les autres parois sont considérées imperméables et adiabatiques.

Toute simulation repose sur une modélisation du problème. Cette dernière implique certaines hypothèses simplificatrices. Les hypothèses utilisées souvent dans l'étude de la convection naturelle sont énumérées comme suit:

- absence de source de chaleur,
- les propriétés thermophysiques du fluide sont constantes et sont évaluées à la température de référence,
- l'écoulement est considéré 2D et stationnaire,
- la dissipation visqueuse est négligée,
- la densité du fluide, quant à elle, suit l'hypothèse de Boussinesq.

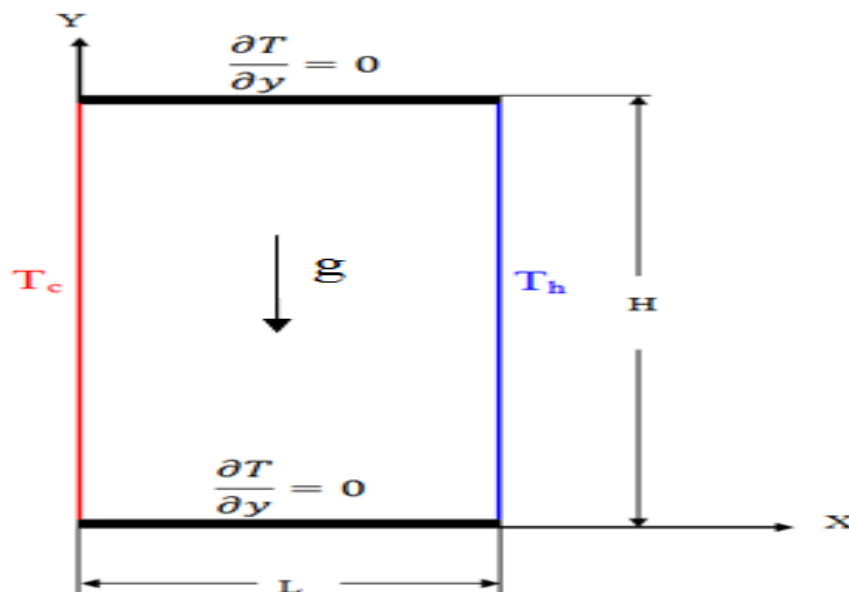


Figure 4.2 Domaine physique

4.4 Hypothèse de Boussinesq

Dans le cas où les variations de température sont prises comme suffisamment faibles pour que les propriétés physiques du fluide (tels que sa dilatibilité thermique, sa diffusivité thermique et sa viscosité cinématique) puissent être considérées comme constantes, les variations de la masse volumique au sein du fluide sont faibles. Ainsi, il est possible de considérer le fluide comme quasi incompressible. Les variations de ρ sont négligées partout, exceptées dans le terme de poussée à l'origine du mouvement.

L'hypothèse de Boussinesq suppose que la densité du fluide dans le terme des forces de volume, varie linéairement avec la température, ce qui amène à la relation suivante:

$$\rho = \rho_0 [1 - \beta(T - T_0)] \quad (4.1)$$

où ρ_0 et T_0 dénotent respectivement, la masse volumique et la température de référence et β est le coefficient de dilatation thermique donné par l'expression suivante :

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \quad (4.2)$$

4.5 Variables adimensionnels

Dans le présent travail, les équations régissant le phénomène de la convection naturelle dans une cavité ont été adimensionnées en utilisant des variables caractéristiques. A cet effet, la largeur L entre les deux parois isotherme de la cavité a été choisie comme longueur de référence. La vitesse est adimensionnée par rapport à la diffusivité thermique. Alors que la température est adimensionnée par rapport à l'écart de température ΔT entre les parois isothermes. Les variables adimensionnelles sont données par :

$$u = \frac{u^* L}{\alpha}, \quad v = \frac{v^* L}{\alpha}, \quad x = \frac{x^*}{L}, \quad y = \frac{y^*}{L}, \quad (4.3)$$

$$p = \frac{(p^* - p_\infty) L^2}{\rho \alpha^2}, \quad \theta = \frac{(T - T_c)}{(T_h - T_c)}$$

Dans le cas de l'approximation de Boussinesq, on introduit généralement un paramètre, le nombre de Rayleigh (Ra), qui incorpore les effets des propriétés du fluide, des conditions aux limites et la géométrie du domaine physique dans un seul paramètre :

$$Ra = \frac{g \beta \Delta T L^3}{\nu k} \quad (4.4)$$

Où g est l'accélération due à la pesanteur, β le coefficient de dilatation thermique, ΔT la différence de température entre les parois isothermes, L la largeur de la cavité, ν la viscosité cinématique et k la diffusivité thermique.

Il est clair que le nombre de Rayleigh est un paramètre déterminant dans ce type de problème car il exprime la force d'entraînement (flottabilité) dans la cavité, sans laquelle il n'y aura aucune turbulence. Un nombre de Rayleigh plus élevé, engendre un effet de flottabilité plus grand et par conséquent plus de turbulence. Un nombre de Rayleigh moins élevé signifie qu'une faible flottabilité agisse sur l'écoulement, le rendant laminaire.

Plus le nombre de Rayleigh est élevé, plus la convection prend le pas sur la diffusion de chaleur ou de quantité de mouvement. Ce nombre, une fois le fluide choisi pour une enceinte fermée, ne dépend plus que de ΔT , qui est ainsi le paramètre de contrôle.

Pour prendre en compte la nature du fluide utilisé, un autre nombre sans dimension est introduit, le nombre de Prandtl :

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{k} \quad (4.5)$$

Il compare les importances relatives de la diffusion de quantité de mouvement (viscosité) et de la diffusion de chaleur (conduction).

4.6 Maillage

Le code de calcul dans ses versions traite avec le type de maillage structuré. Ce maillage est composé de mailles quadrilatérales en deux dimensions (2D ou maillage surfacique), et pour présent travail, on a utilisé un maillage 100×100 qui est jugé suffisant pour assurer une bonne précision pour le présent problème.

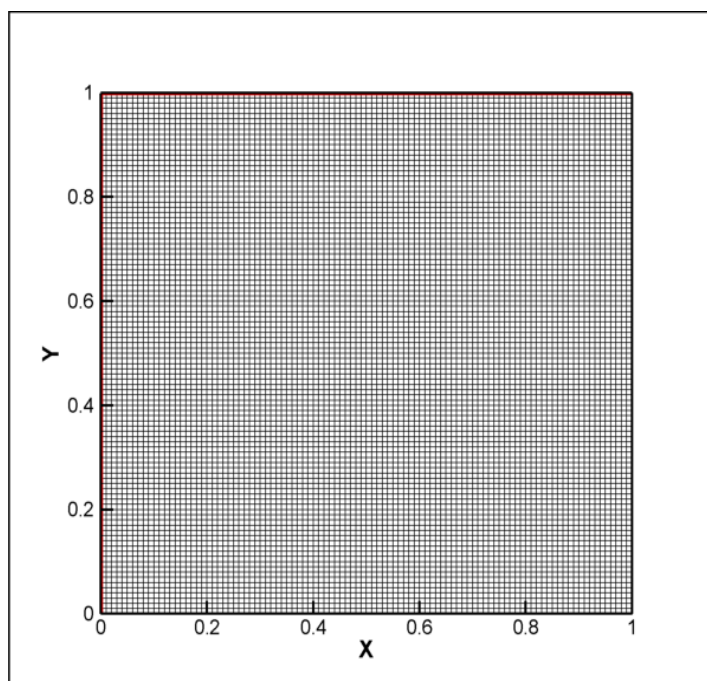


Figure 4.3 Maillage uniforme typique du domaine

4.7 Résolution numérique

Basant sur les équations et la méthode de Boltzman montrées sur chapitre 2 et les paramètres du problème discuté avant, un code du calcul a été élaboré sous langage du Fortran suivant l'organigramme pour discuter les phénomènes de la convection naturelle dans une cavité carrée (figure 4.4)

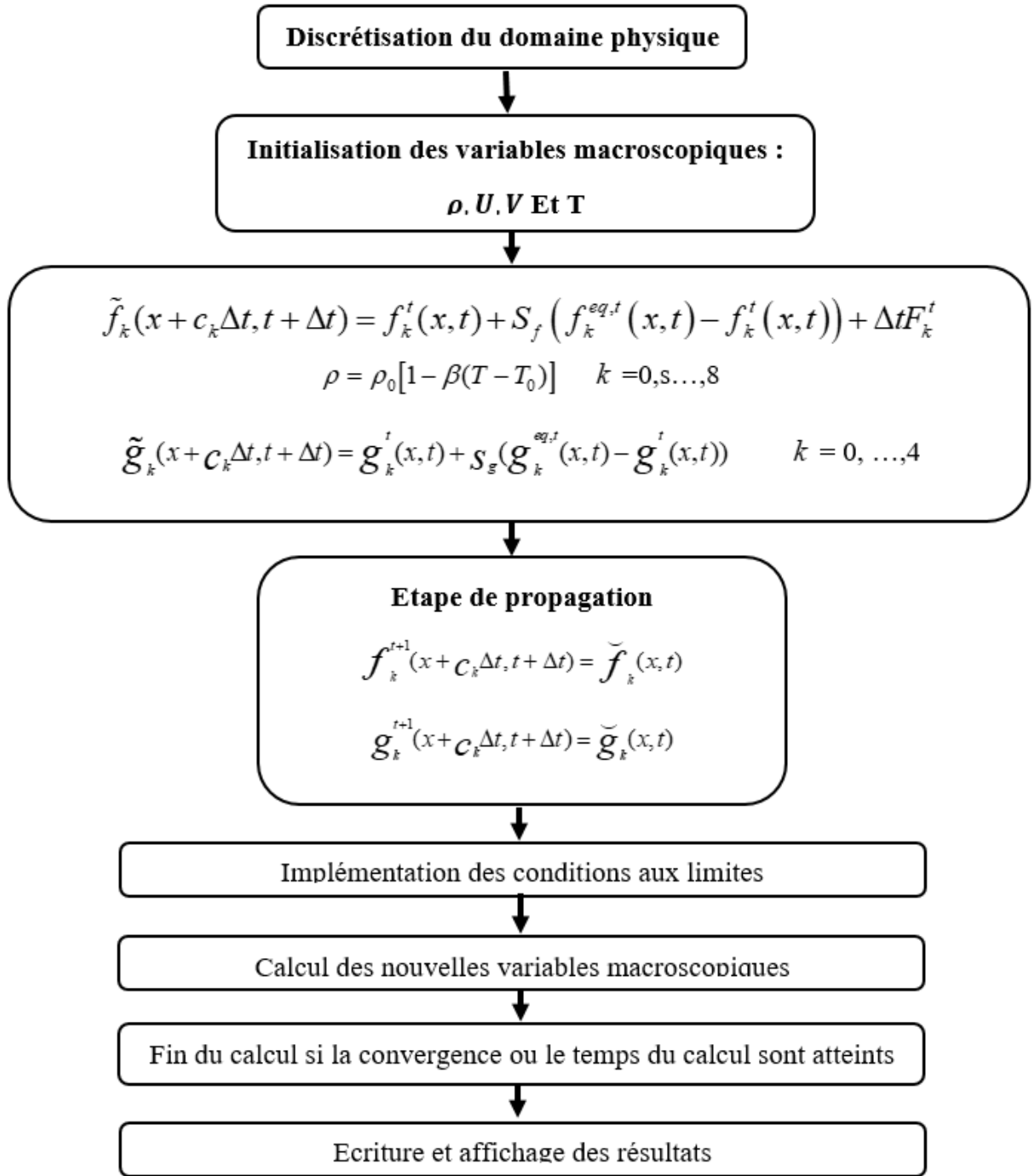


Figure 4.4 Algorithme de base de la méthode LBM adoptée

4.8 Validation

Le point le plus important est de vérifier l'exactitude des résultats obtenus. Le meilleur moyen est de les comparer à des résultats de la littérature. A cet effet, le modèle adopté a été validé en réalisant des calculs pour le cas d'une cavité carrée avec deux parois isothermes et comparé les résultats aux données publiées.

Les paramètres de calcul ont été pris égaux à ceux des expériences menées dans les travaux cités et qui donnent un nombre de Rayleigh variant de 10^3 à 10^6 . Les résultats se sont avérés en bon accord avec les résultats correspondants comme le montre le tableau (4.1).

Tableau 4.1. Validation de nombre de *Nusselt* moyen sur la paroi chaude avec les travaux antérieurs

Ra	Présent travail	De Vahl Davis (1983)	Markatos&Pericleous (1984)	Fusegi et <i>al.</i> (1991)	Dixit et <i>al.</i> (2006)	Mobedi (2008)
10^3	1.15728	1.118	1.108	1.085	1.121	1.114
10^4	2.28252	2.243	2.201	2.100	2.286	2.240
10^5	4.56443	4.519	3.430	4.361	4.546	4.510
10^6	8.68422	8.851	8.754	8.020	8.652	8.803

4.9 Résultats et discussions

L'étude présente est menée pour analyser l'effet du nombre de Rayleigh sur l'écoulement du fluide et le transfert de chaleur dans une cavité carrée. Les résultats illustratifs sont présentés en termes de lignes de courant, d'isothermes et de nombres de Nusselt et Champs de vitesse et le champ de température.

4.9.1 Champ d'Écoulement

L'analyse du champ d'écoulement englobe l'étude des lignes de courant et les profils des vitesses verticales à mi-hauteur des cavités en fonction du nombre de Rayleigh.

La Figure 4.5 montre l'effet du nombre de Rayleigh sur les contours des lignes de courant. Les effets thermiques engendrent une cellule de convection dans la région centrale de la cavité tournant dans le sens antihoraire. Il est à noter que le fluide reste monocellulaire en augmentant le nombre de Rayleigh. Toutefois, une stratification est obtenue pour les nombres de Rayleigh élevés.

Pour de faibles nombres de Rayleigh, le mode de transfert de chaleur dominant est la conduction. L'augmentation du nombre de Rayleigh intensifie la circulation d'air en boucle dans la couche limite près des parois verticales.

Les figures (4.6) et (4.7) représentent les champs de de vitesse u et v respectivement. La structure de ces champs est circulaire qui apparait dans le sens ascendant proche de la paroi chaude et inversement pour la paroi froide, ce qui signifie que la convection naturelle s'intensifie. La fonction de courant de ces nombres prend une forme ellipsoïdale localisée au milieu de la cavité et qui se déforme près des parois de l'enceinte. Les valeurs de cette fonction augmentent progressivement avec l'augmentation de la valeur de Rayleigh.

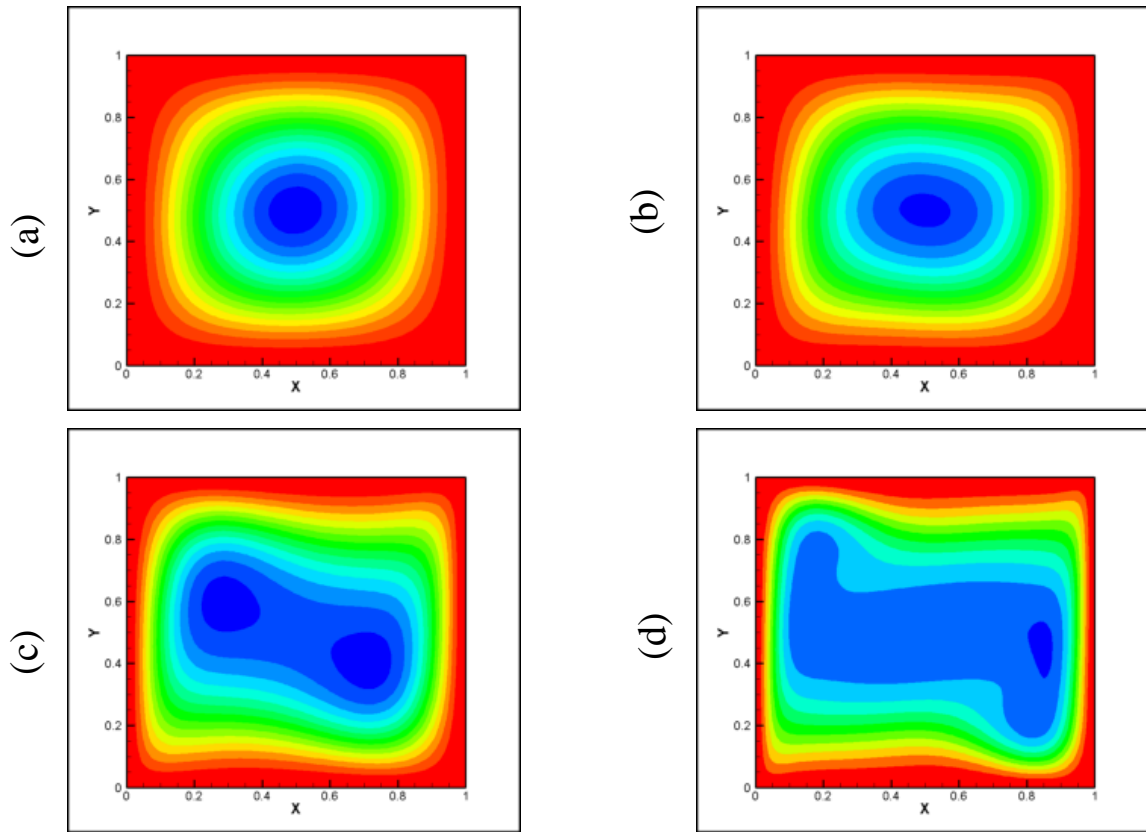


Figure 4.5 Lignes de courant obtenues pour différents nombre de Ra a) $= 10^3$, b) $= 10^4$, c) $= 10^5$, d)
 10^6

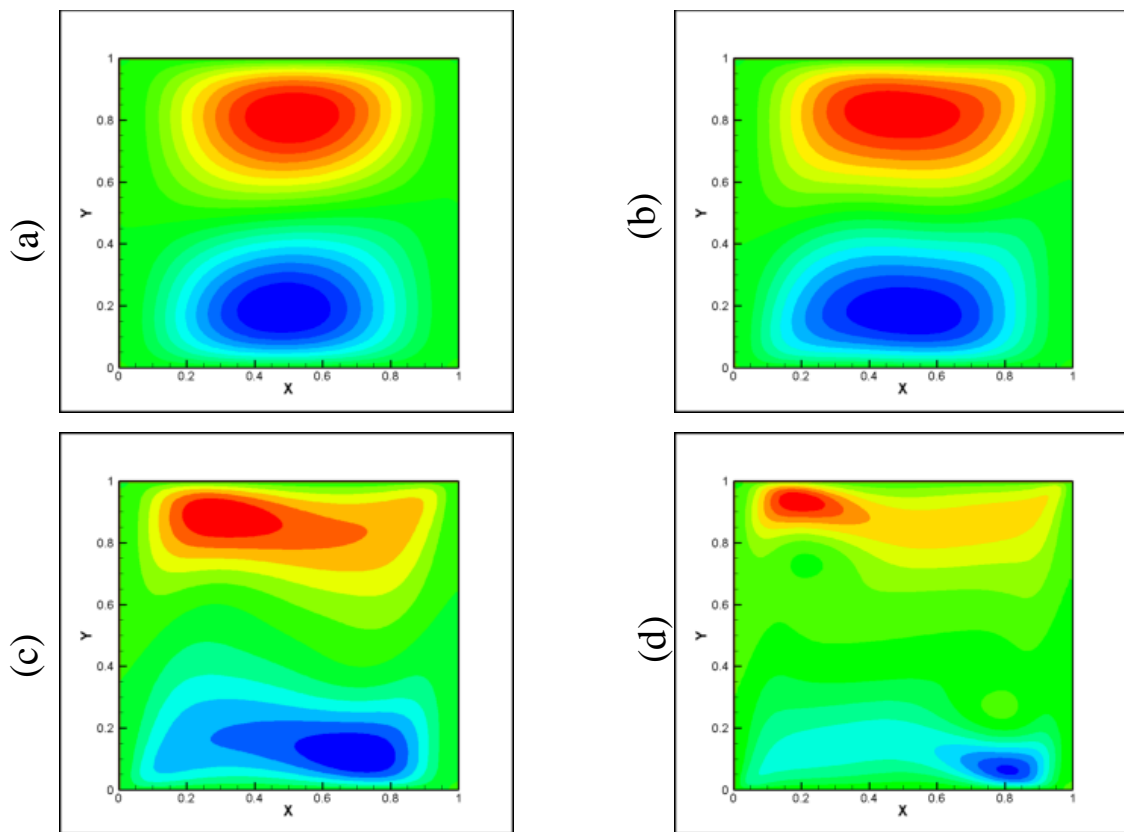


Figure 4.6 : Champs de vitesse u pour divers Ra a) $= 10^3$, b) $= 10^4$, c) $= 10^5$, d) 10^6

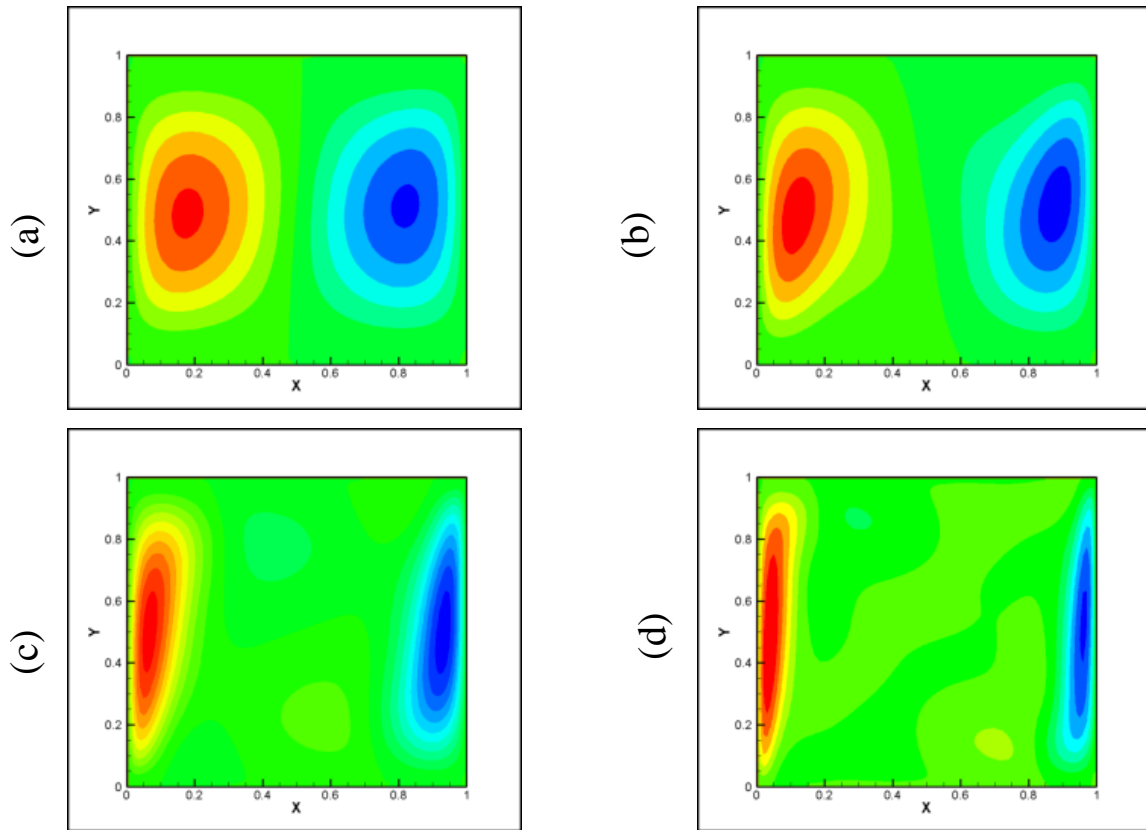


Figure 4.7 Champs de vitesse v pour divers $Ra =$ a) 10^3 , b) 10^4 , c) 10^5 , d) 10^6

Les profils de la vitesse verticale à mi-hauteur de la cavité sont représentés sur la Figure (4.8). On observe que l'épaisseur de la couche limite hydrodynamique, côté paroi froide, augmente en descendant le long de cette paroi. Cette épaisseur est fortement influencée par la nature de l'écoulement. Elle augmente avec l'augmentation du nombre de Rayleigh.

Il est clair que quel que soit le nombre de Rayleigh, la courbe forme un sommet (un pic) aux voisinages des parois chaude et froide de façon symétrique révélant ainsi un écoulement intense près de celle-ci et confirmant les résultats des iso-courants et du champ des vecteurs des vitesses. Les gradients de vitesses sont nulles au centre de la cavité.

Lorsque le nombre de Rayleigh augmente, les pics dont il est question précédemment se déplacent vers le centre de la cavité montrant que l'épaisseur de la couche limite augmente, et l'écoulement principal du fluide se produit près des parois de la cavité.

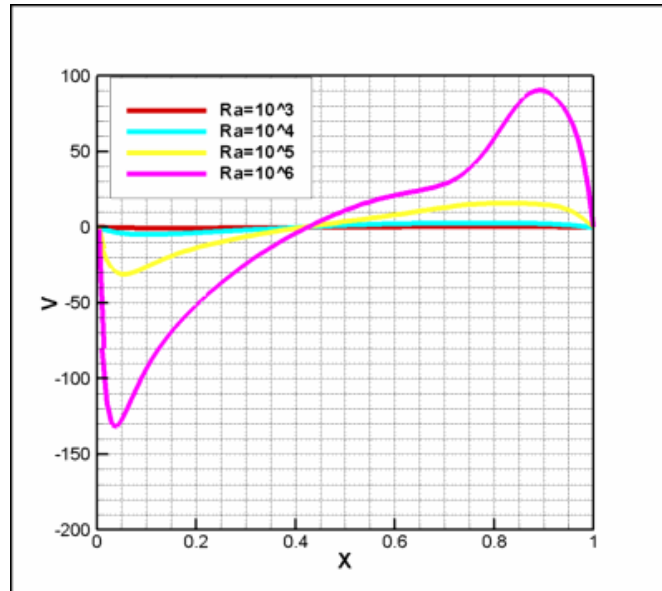


Fig4.8 Composante de vitesse verticale sans dimension

4.9.2 Champ de température

Les isothermes correspondantes sont présentées à la Figure 4.9. Lorsque le nombre de Rayleigh augmente, le changement du mécanisme de transfert de chaleur dominant est présenté à la Figure 4.9.

On voit que la chaleur est transférée principalement par conduction entre les parois chaudes et froides, et les isothermes sont presque verticales pour les petits nombre de Ra . Comme le montre la figure, on peut également voir que le mécanisme de transfert de chaleur dominant passe de la conduction à la convection, et les isothermes deviennent horizontales au centre de la cavité et ne sont verticales que dans les couches limites minces près des parois chaudes et froides.

La Figure (4.10) illustre l'évolution de température en fonction de x à mi-hauteur de la cavité pour quatre valeurs différentes de Ra . Une fonction linéaire pour $Ra = 10^3$, cette linéarité est obtenue quand la force de flottabilité est insuffisante pour surmonter la force de viscosité et donc les particules de fluide restent stationnaires et le transfert de chaleur se produit uniquement par le mode de conduction.

Par contre l'utilisation des valeurs de Ra plus importantes permet de la non linéarité ce qui indique que la distribution de température est faite par une force de convection.

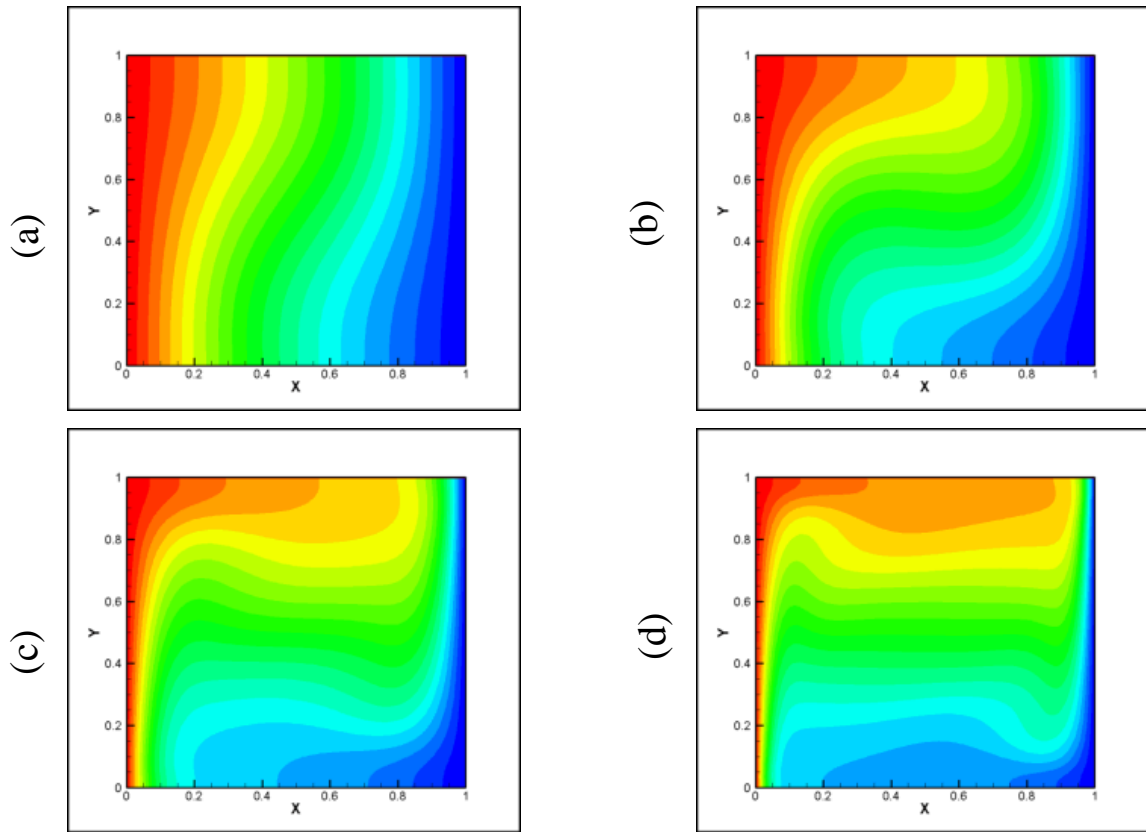


Figure 4.9 Isothermes obtenues pour divers Ra a) 10^3 , b) 10^4 , c) 10^5 , d) 10^6

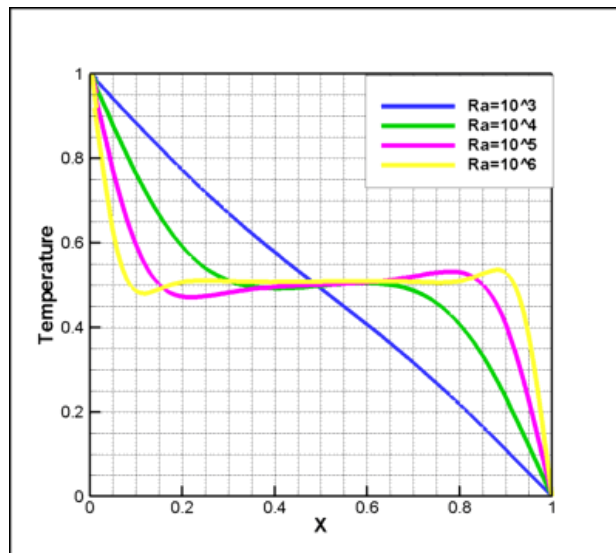


Figure 4.10 Profil de température adimensionnelle à mi-hauteur de la cavité

Conclusion générale

Ce travail s'intéresse à l'expérimentation de la méthode Lattice Boltzmann (LBM) pour l'étude de la convection naturelle dans une cavité carrée remplie d'air, Les parois horizontales de la cavité sont adiabatiques et les parois verticales sont chaudes et froides respectivement. Le choix du sujet revient à une étude bibliographique détaillée dans le premier chapitre, les éléments de base de la méthode LBM ont fait l'objet du deuxième chapitre avec un bref rappel de l'histoire de cette méthode, ses origines, les difficultés initiales de son utilisation, son évolution à travers les décennies jusqu'à l'aboutissement aux formulations utilisées dans le domaine des transferts thermiques.

Dans le chapitre 3, nous avons présenté le transfert de chaleur par la convection naturelle dans une cavité carrée remplie d'air, Les parois horizontales de la cavité sont adiabatiques et les parois verticales sont chaudes et froides respectivement. Le modèle mathématique est représenté par les équations de continuité, de quantité de mouvement et de l'énergie dans les coordonnées cartésiennes pour le cas bidimensionnel. On a l'approximation de Boussinesq adoptée afin de simplifier le système d'équations.

Dans le chapitre 4, l'étude a porté sur une cavité carrée remplie d'air, Les parois horizontales de la cavité sont adiabatiques et les parois verticales sont chaudes et froides respectivement. À l'effet du nombre de Rayleigh varié 10^3 , 10^4 , 10^5 et 10^6 . Les résultats obtenus représentent l'influence du nombre de Rayleigh sur les lignes de courant, d'isothermes et de nombres de Nusselt et de champs de vitesse et le champ de température par la convection.

Finalement, nous pouvons conclure que l'objectif de ce mémoire qui consiste en la maîtrise de la méthode de Lattice Boltzmann et son application aux phénomènes de la convection naturelle dans une cavité carrée remplie d'air, Les parois horizontales de la cavité sont adiabatiques et les parois verticales sont chaudes et froides respectivement. Le code a été modifié pour le nombre de Rayleigh et validé pour ces cas.

References Bibliographies

- [1].Barrios, Rechtman, Rojas, Tovar 2004 the lattice equation for natural convection in two-dimensional cavity with a partially heated wall
- [2].Mezrhab, Jami, Bouzidi, Lallmand 2006. Analysis of radiation-natural convection in divided enclosure using the lattice Boltzmann method
- [3].Mezrhab, Naji 2007 Modélisation des transferts thermique à l'aide de la méthode de Boltzmann sur réseau.
- [4].Che Sidik, Rosdzimin, A.R.M 2008. simulation of natural convection heat transfers in an enclosure using lattice Boltzmann method
- [5].Moufekkir, Moussaoui, Maezrhab, Naji, Lemonnir 2011. Etude numérique du couplage convection naturelle rayonnement volumique par la méthode de Boltzmann sur réseau (MRT-LBM)
- [6].Alouah, Hasnaoui, Amahmid, Rehhali (2017)''lattice Boltzmann modelling of natural convection in cavity with heated plate inside''
- [7].yang, ding, Qin Lou, Wang, Zhang (2017) lattice Boltzmann method simulation of natural convection heat transfer in horizontal annulus. Vol31 issue3
- [8].Yong-Liang Feng, Shao-Long GUO, Wen-QUAN Tao, Pierre SAGAUT 2018. Regularized thermal lattice Boltzmann method for natural convection with large temperature differences
- [9].Rehhali, Hasnaoui, Raji, EL Mansouri, Beji, Amahmid, Dahani (2018) Lattice Boltzmann approach for natural convection and radiation in a tilted square cavity
- [10].Nee. Hybrid 2020 Lattice Boltzmann-finite difference formulation for combined heat transfer problems bay 3D naturel convection and surface thermal radiation
- [11].Nikita. Gibanov, Sheremet (2021) Numerical investigation of conjugate natural convection in a cavity with a local heater by the lattice Boltzmann method
- [12].Shan (1997) simulation of Rayleigh-Bénard convection using a lattice Boltzmann method
- [13].Shu, Peng, Chew (2002) simulation of natural convection in a square cavity by Taylor series expansion- and least squares- Based lattice Boltzmann Method
- [14].Dixit, Babu (2005) simulation of high Rayleigh number natural convection in a square cavity using the lattice Boltzmann method
- [15].Jourabian, Farhadi, sedighi, Rabienataj Darzi, Vazifeshenas (2011) simulation of natural convection melting in a cavity with fin using lattice Boltzmann method.
- [16].Krunal, Gangawane, Ram, Bharti, Surendra (2014) lattice Boltzmann analysis of natural convection in a partially heated open ended enclosure for different fluids
- [17].Shoal Guo, Chuguang Zheng, Baochang Shi (2007) thermal lattice Boltzmann equation for low Mach number flows: Decoupling model
- [18].Xin-Rong Zhang, Yuhui Cao (2009) A lattice Boltzmann model for natural convection with a large temperature difference
- [19].Yuhui Cao (2016) variable property-based lattice Boltzmann flux solver for thermal flows in the low Mach number limit.
- [20].Safari, Krafczyk, Geyser (2018) A lattice Boltzmann model for thermal compressible flows at low Mach numbers beyond the Boussinesq approximation
- [21].Feng, Guo, Tao, sagaut (2019) regularized thermal lattice Boltzmann method for naturel convection with large temperature differences

- [22] **Simon marié 27 février 2008** étude de la méthode Boltzmann sur les réseaux pour les simulations en aérodynamique D. thèses université de Pierre et Marie Curie ;
- [23]. **REHHALI 1^{er}Mares 2019**. Simulation de la convection naturelle couplée au rayonnement surfacique par la méthode de Boltzmann sur les réseaux : cas des chauffages variable et discret, D. thèse université de Picardie jules verne et de l'université cadi AYYAD ;
- [24]. **Alexander. Wagner March 2008** A Practical introduction to the lattice Boltzmann method, department of physics North Dakota state university;
- [25]. **A. A. Mohamad 1^{er} edition: springer-Verlag London Limited 2011**, Lattice Boltzmann Method fundamentals and Engineering applications with computer codes pp. 23-24; PP19
- [26]. **Neveu Maxence août 2017** vérification de la méthode de Boltzmann sur les réseaux en vue de calculer la perméabilité de milieux poreux, université de Montréal.
- [27]. **Bordeaux INP (ENSERB-MATMECA) et institut de Mathématiques de Bordeaux 1^{er} novembre 2020** partie 2. Application aux écoulements incompressibles : la méthode Boltzmann sur les réseaux.
- [28]. **A. A. Mohamed part of springer nature 2019**, Lattice Boltzmann method fundamentals and Engineering Applications with Computer Codes Second Edition PP25. PP31.PP48,49
- [29]. **Marie Bechereau 14 décembre 2016**, Élaboration de méthode Lattice Boltzmann pour les écoulements bi fluides à ratio de densité arbitraire. D. thèses de l'université PARIS-SACLAY ;
- [30]. **DJEBALI 14 mai 2011** Simulation et Modélisation des Transferts dans Milieux Multi phases et Multi constituants par une Approche Boltzmann Réseau. D. THESE DE Université de Tunis El Manar.
- [31]. **HAIBO HUANG MICHAEL SUKOP XI6YUG LU** multi phase lattice Boltzmann méthode théorie and application. PP87.88
- [32]. **Ecole Nationale Supérieure des Mines de saint-Etienne.22 Mai2021**.méthode de Boltzmann sur réseau.
- [33]. **Makhloufi 2018**. Simulation numérique de la convection naturelle BI-DUFFISUVE dans une cavité poreuse. Thème université Larbi Ben M'hidi, Oum EL-bouaghi.
- [34]. **Brahim, debih 2020**. Etude numérique de la convection naturelle au sein d'une cavité carrée. Intitulé université Mohamed Boudiaf-M'Sila.
- [35]. **Seghiour, Saadi 2020**. Etude de la convection naturelle laminaire dans une quarte ellipse utilisant un chauffage sur des murs adjacents. Université de Mohamed Boudiaf-M'Sila

- [36]. **Haddadi, chenaf 2019.** Etude numérique de la convection naturelle dans une cavité contenant une couche poreuse. Thème université d'Akli Mohand Oulhadj-Bouira
- [37]. **Medjahed, Benamor 2019.** Simulation numérique du Transfer de chaleur dans un four rectangulaire. Thème université Abdel Hamide Ben Badis-Mostaganem.
- [38]. **Nassima.ghebrid.2011.** Étude numérique des transferts thermiques couplés dans une cavité fermée. Thème université FERHAT ABBAS-SETIF
- [39]. **Noriega, Harold Nicolas. 2011.** Convection naturelle de nano fluides par la méthode de Boltzmann sur réseau. University Montreal école polytechnique de Montreal.
- [40] **Mohamad.** Lattice Boltzmann method fundamentals and engineering application with computer codes second edition
- [41] **Belghoul 2018** Modélisation et simulation de la convection due à un champ de force externe dans des cavités : convection naturelle, MHD et Marangoni