

REPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE
CENTRE UNIVERSITAIRE DE TISSEMSILT
INSTITUT DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
DÉPARTEMENT DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE

Visa du chef de département
des Sciences et de la
Technologie
Signature:.....
Date :.....

**Analyse du comportement vibratoire
des poutres poreuses en FGM**

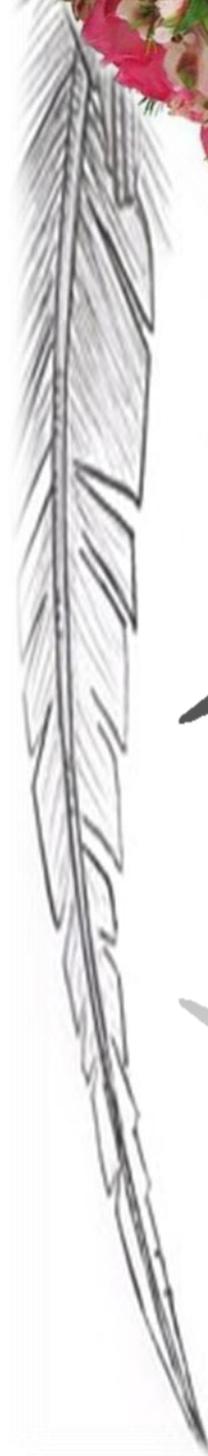
Mémoire de fin d'études pour l'obtention du diplôme de master académique
en Filière : génie civil
Spécialité : structure

Encadreur: Bourada Fouad
Signature:
Date:

Réalisé par : Bettoumi Amel
Menia Fatima

Dr : Tabet Mohammed (Président)
Dr : Adim Belkacem (Examineur)
Dr : Bourada Fouad (Encadreur)
Dr : Ouazir Mansour (Invité)

Tissemsilt – 2018/2019



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Remerciements

Remerciements

A l'issue de ce travail, je remercie, en premier lieu, le BON DIEU de m'avoir donné la force et le courage de mener à terme ce projet de fin d'études.

Ce travail ne serait pas aussi riche et n'aurait pas pu avoir le jour sans l'aide et l'encadrement de Dr FOUAD BOURADA, je le remercie pour la qualité de s'encadrement exceptionnel, pour sa patience, sa disponibilité, ses conseils durant ma préparation de ce mémoire

J'adresse mes remerciements les plus sincères à Mademoiselle Wafaa Kasri, Ingénieur informatique au sein d'Institut de Sciences et Technologies du Centre Universitaire El Wancharissi de Tissemsilt pour les remarques et conseils.

Enfin, mes remerciements à tous ceux qui contribue de près ou de loin à la réalisation de ce projet ; ma famille, pour leur patience à m'accorder tout le temps nécessaire ; ainsi qu'à mes chers amis.

Résumé

Résumé

Dans ce travail de recherche, l'étude du comportement vibratoire des poutres simplement appuyées est présentée en utilisant la théorie de déformation de cisaillement hyperbolique. Les imperfections sous forme des micro-vides qui peut être introduit durant la phase de fabrication sont prises en compte. La loi de mélange de puissance (P-FGM) est employée après des modifications pour décrire d'une façon approximative les propriétés matérielles effectives des poutres FG avec la présence des pores. Le principe d'Hamilton est utilisé pour dérivé les équations de mouvement. Les solutions analytiques sont obtenues en utilisant la méthode de Navier L'exactitude et l'efficacité des résultats du présent modèle sont confirmé en les comparants avec ceux reportés par d'autres théories connus dans la littérature. Une étude paramétrique est présentée pour démontrer les différents paramètres influençant la réponse dynamique des poutres fonctionnellement graduée.

Mots clé :

vibrations ; théorie de déformation de cisaillement ; Poutres FG ; Principe d'Hamilton ; porosité.

Abstract

Abstract

In this research work, an analysis of the free vibration of the simply supported functionally graded beams is presented using an hyperbolic shear deformation theory, The imperfections in the form of micro-voids that can be introduced during the manufacturing phase are taken into account. The mixing law (P-FGM) is used after modifications to approximate the material properties of the functionally graduated beams with the presence of the pores. The Hamilton principle is employed here to derive the equations of motion. The analytical solutions are obtained using the Navier method. The accuracy and efficiency of the results of this model are confirmed by comparing them with those reported by other theories known in the literature. A parametric study is presented to demonstrate the different parameters influencing the dynamic response of the functionally graduated beams.

Key words:

Vibration; shear deformation theory; FG beams; Hamilton Principle; porosity.

ملخص

ملخص

في هذا البحث يتم دراسة السلوك الاهتزازي للعوارض بدعائم بسيطة باستخدام نظرية تشوه القص هيبربوليكية تأخذ بعين اعتبار للعيوب الي تتمثل في شكل فراغات صغيرة التي يمكن ان تخلق في مرحلة التصنع يستخدم قانون خلط معدل لوصف الخصائص المادية الفعالة للعوارض المتدرجة وظيفيا مع وجود مسام بطريقة تقريبية يستخدم مبدأ هاملتون لاشتقاق المعدلات الحركية يتم الحصول على الحلول التحليلية باستخدام طريقة نافبي يتم تأكيد دقة وكفاءة نتائج هذا النموذج من خلال مقارنتها مع تلك التي استخرجها بنظريات اخرى المعرفة يتم تقديم دراسة معلميه لإظهار مختلف العوامل التي تأثر على الاستجابة الديناميكية للعوارض المتدرجة وظيفيا

كلمات المفتاح:

الاهتزاز ؛ نظرية التشوه القص ؛ عوارض متدرجة ؛ مبدأ هاملتون ؛ المسام .

Table des matières

Table des Matières

Remerciement	i
Résumé	ii
Abstract	iii
ملخص	iv
Table des matières	v
Liste des figures	viii
Liste des tableaux	x
Liste des notations et symboles	xi
Introduction	1

Chapitre I: Généralités Sur Les Matériaux à Gradient De Propriétés

I.1. Introduction	3
I.2. Historique du développement des matériaux à gradient de propriété	3
I.3. Définition des matériaux FGM	6
I.4 Concept des matériaux fonctionnellement gradués	8
I.5. Différences entre matériaux à gradient de propriétés et matériaux composites traditionnels	9
I.6 Propriétés effectives des FGMs	11
I.7. Méthodes d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés	12
I.7.1 Coulage en bande (Tape Casting	12
I.7.2 Coulage Séquentiel en Barbotine (Slip Casting)	13
I.7.3 Compaction sèche des Poudres	13
I.7.4 Dépôt par Electrophorèse	13
I.7.5 Projection plasma	14
I.7.6 C. V. D. et P. V. D	14
I.7.7 Frittage et Infiltration	14
I.7.8 Frittage Laser Différentiel	14
I.7.9 Implantation Ionique (Sputtering)	15
I.7.10 Dépôt par Centrifugation	15

I.8 L'utilisation des FGM	16
I.8.1. Aéronautique	16
I.8.2. Matières industrielles	16
I.8.3. Optoélectronique	17
I.8.4. Biomatériaux	17
I.8.5. D'autres	17
I.9 Propriétés physiques et mécaniques des FGM	18
I.9.1 Propriétés physiques de l'aluminium	18
I.9.2 Propriétés physiques de la céramique	20
I.10 Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM	20
I.10.1 Propriétés matérielles de la plaque P-FGM	22
I.10.2 Propriétés matérielles de la plaque S-FGM	23
I.10.3 Les propriétés matérielles de la plaque E-FGM	24
I.11 Conclusion	25

Chapitre II: Les théories des poutres

II.1. Introduction	26
II.2. La théorie classique des poutres (EULER BERNOULLI)	26
II.3. la théorie de déformation en cisaillement en de premier ordre (TIMOSHENKO)	27
II.4. la théorie de déformation en cisaillement en d'ordre élevé (REDDY)	30
II.5. Conclusion	35

Chapitre III : Modèle Analytique de la vibration libre des poutres poreuses

III .1 .Introduction	36
III .2 .Propriétés matérielles effectives des poutres FG	36
III .2.1 . Poutres FG imparfaite (Type-I)	36
III .2.2 . Poutres FG imparfaite (Type-II)	37
III .2.3 . Poutres FG imparfaite (Type-III)	38
III.3. Hypothèses de base	38
III.4. cinématique et équations constitutives	39

III. 5.Principe d' Hamilton	40
III. 6.La solution Analytique	41
III. 7.Conclusion	43

Chapitre IV : Les résultats numériques et discussions

IV.1.Introduction	44
IV.2.Propriétés effectives	44
IV. 3. Poutre homogène en céramique	44
IV. 4. Poutre fonctionnellement graduée parfaite	45
IV. 5. Poutre fonctionnellement graduée imparfaite	46
IV. 6. Etude paramétrique	48
IV.7.Conclusion	51
Conclusion générale	52
Références bibliographiques	54

Liste des figures

Liste des Figures

Chapitre I: Généralités Sur Les Matériaux à Gradient De Propriétés

Figure I.1 : <i>Formes de conversion d'énergies couvertes par la partie II du projet de FGM (Koizumi, 1992).</i>	5
Figure I.2 : <i>Concept des matériaux à gradient de propriétés (Houari MSA 2011).</i>	8
Figure I.3 : <i>Protection thermique des Matériaux FGM et Non FGM (Houari MSA 2011).</i>	9
Figure I.4 : <i>Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels (Koizumi et al 1996).</i>	10
Figure I.5 : <i>La distribution composante des matériaux. (Yoshihisa, 2004)</i>	10
Figure I.6 : <i>Modèle analytique pour une couche d'un matériau FGM</i>	11
Figure I.7 : <i>Principe de la méthode coulage en bande (Lostec, 1997).</i>	12
Figure I.8 : <i>Disposition du procédé frittage laser différentiel.</i>	15
Figure I.9 : <i>Schéma du procédé dépôt par centrifugation (Abdizadeh, 1997) .</i>	15
Figure I.10 : <i>Les principaux domaines d'application des FGM (Ait Sidhoum 2019).</i>	18
Figure I.11 : <i>Géométrie d'une plaque en FGM</i>	21
Figure I.12 : <i>Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.</i>	23
Figure I.13: <i>Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.</i>	24
Figure I.14 : <i>Variation du module de Young dans une plaque E-FGM.</i>	25

Chapitre II: Les théories des poutres

Figure II.1 : <i>Schéma de principe de la théorie classique des poutres</i>	27
Figure II.2 : <i>schéma de principe de la théorie des poutres de Timoshenko (FSDT).</i>	28
Figure II. 3: <i>Variation de la fonction de gauchissement $f(z) = z$ et $f'(z)$ suivant l'épaisseur.</i>	29
Figure II.4 : <i>la distribution (constante) des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur dans la théorie de Timoshenko.</i>	30
Figure II.5 : <i>Illustration de la poutre d'ordre élevé.</i>	31
Figure II.6 : <i>la distribution (variable) des contraintes de cisaillement à travers</i>	32

l'épaisseur dans la théorie d'ordre élevé.

Figure II.7: *Variation de la fonction de forme $f(z)$ des différents modèles en fonction de l'épaisseur.* 34

Figure II.8: *Variation de la dérivée de la fonction de forme $f'(z)$ des différents modèles suivant l'épaisseur.* 34

Figure II.9 : *la distribution (variable) des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur dans la théorie d'ordre élevé.* 35

Chapitre III : Modèle Analytique de la vibration libre des poutres poreuses

Figure III.1: *Géométrie d'une poutre.* 36

Chapitre IV : Les résultats numériques et discussions

FigureIV.1 : *Variation des fréquences fondamentales des poutres FG avec l'élançement pour différentes valeurs de l'indice matériel.* 48

Figure. IV.2 : *Variation des fréquences fondamentales des poutres FG ($k = 1.5$) avec l'élançement pour différentes valeurs du paramètre de la porosité (modèle I).* 49

Figure. IV.3: *Variation des fréquences fondamentales des poutres FG ($k = 1.5$) avec l'élançement pour différentes valeurs du paramètre de la porosité (modèle II).* 50

Figure. IV.4 : *Variation des fréquences fondamentales des poutres FG ($k = 1.5$) avec l'élançement pour différentes valeurs du paramètre de la porosité (modèle III).* 50

Figure. IV.5 : *la variation de la fréquence naturelle non dimensionnelle avec l'indice matériel k en utilisant les trois modèles de distribution de porosité à travers l'épaisseur.* 51

Liste des Tableaux

Liste des tableaux

Chapitre I: Généralités Sur Les Matériaux à Gradient De Propriétés

Tableau I.1 : Progrès de la recherche sur les matériaux FGM au Japon	5
Tableau I.2: Une panoplie avantages et inconvénients des matériaux constituant les FGM.	7

Chapitre IV : Les résultats numériques et discussions

Tableau IV.1 : Les propriétés effectives d'Aluminium et d'Alumina.	44
Tableau IV.2: Comparaison des fréquences non-dimensionnelles fondamentales $(\bar{\omega})$ pour des poutres homogènes ($\kappa = 0$).	45
Tableau IV.3: les fréquences fondamentales non-dimensionnelles $(\bar{\omega})$ des poutres FG simplement appuyées.	45
Tableau IV.4: Les trois premières fréquences naturelles non-dimensionnelles $(\bar{\omega})$ pour des poutres (FG) parfaite (non-poreuse) et imparfaite (poreuse Type-I) simplement appuyées	46
Tableau IV.5: Les six premières fréquences naturelles non-dimensionnelles $(\bar{\omega})$ pour des poutres (FG) parfaite (poreuse) et imparfaite (non-poreuse Type-III) simplement appuyées.	47

*Liste des notations
et symboles*

Liste des Symboles et notations

G	Module de cisaillement dans le plan (x, z)
E	Module de Young suivant x
ν	Coefficient de Poisson
α	Paramètre qui tient compte de la porosité
$G(z)$	Module de cisaillement en fonction de « z »
$E(z)$	Module de Young en fonction de « z »
$\nu(z)$	Coefficient de Poisson en fonction de « z »
$V(z)$	Fraction volumique
k	Paramètre du matériau
L	Longueur de la poutre
b	Largeur de la poutre
h	Epaisseur de la poutre
u_0, w_0	Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque
u, w	Les déplacements dans les directions x, z .
$f(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
σ_x, σ_z	Contraintes normales
τ_{xz}	Contraintes de cisaillement
ε_x	Déformation dans la direction x
γ_{xz}	Déformations de distorsion
$\delta u, \delta w$	Champ virtuel de déplacement
$\delta \varepsilon_x$	Champ de déformation longitudinal virtuel
$\delta \gamma_{xz}$	Champ de déformation transversal virtuel

N	Efforts normaux
M_x	Moments de flexion
Q_{xz}	Effort de cisaillement
∂	Dérivée partielle
i et j	Sont des nombres naturels.
A_{ij}	Termes de rigidité de la matrice de membrane
B_{ij}	Termes de rigidité de la matrice de couplage
D_{ij}	Termes de la matrice de flexion
H_{ij}	Termes de la matrice de flexion
A_{ij}^s	Termes de rigidité de la matrice
B_{ij}^s	Termes de rigidité de la matrice
D_{ij}^s	Termes de rigidité de la matrice
H_{ij}^s	Termes de rigidité de la matrice
$\{\Delta\}$	Le vecteur des déplacements généralisés
$\{ \}$	Vecteur colonne
$[]$	Matrice

Introduction générale

Introduction générale

A cause de l'avancement de la technologie des éléments structuraux des (FGMs) dans la conception des structures d'ingénieur, leurs caractéristiques statiques et dynamiques ont attiré l'attention de plusieurs chercheurs dans les dernières années (Saidi et al., 2013, Tounsi et al., 2013, Bachir Boudjra et al., 2013, Boudjerba et al., 2013, Hebali et al., 2014, Ait Amar Meziane et al., 2014, Fekrar et al., 2014, Belabed et al., 2014, Swaminathan et Naveenkumar, 2014, Chakraverty et Pradhan, 2014, Bousahla et al., 2014, Zidi et al., 2014, Khalfi et al., 2014, Najafov et al., 2014, Hamidi et al., 2015, Ait Yahia et al., 2015, Mahi et al., 2015, Attia et al., 2015, Duc et Thang, 2015). À partir de la littérature, il est remarquable que les études sur comportement mécanique des poutres Fonctionnellement graduées sont considérable.

Zhong et Yu (2007) ont présenté une solution analytique d'une poutre console (FG) avec des variations graduelle et arbitraire des propriétés matériels . Benatta et al. (2008) on proposé une solution analytique pour le problème de la flexion d'une poutre FG symétrique en considérant le gauchissement de la section transversale et l'effet de déformation de cisaillement. Kaddoli et al. (2008) ont étudié le comportement statique des poutres FG en utilisant une théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé et la méthode des éléments finis. Li (2008) a proposé une nouvelle approche unifier pour étudier le comportement dynamique et statique des poutres d'Euler Bernoulli et de Timoshenko. Sallai et al. (2009) ont examiné les réponses statiques des poutres épaisses sigmoïdes en utilisant différentes théorie des poutres.

Bedjilili et al. (2009) ont présenté une solution exacte pour les poutres composites symétrique avec une fraction volumique des fibres à travers l'épaisseur. Benatta et al. (2009), ont présenté une solution mathématique pour la flexion des poutres composites courtes hybrides avec un espacement variable des fibres. Ould larbi et al. (2013) ont présenté une théorie efficace de déformation de cisaillement des poutres basée sur le concept de la position de la surface neutre pour la flexion et la vibration libre des poutres FG. Yaghoobi et al. (2014) ont étudié aussi le poste flambement et la vibration non-linéaire des poutres FG reposant sur une fondation élastique non-linéaire soumise à un chargement thermomécanique en utilisant la méthode d'itération variationnelle. Hadji et al. (2014) ont étudié les réponses statiques et dynamiques des poutres FG en utilisant une théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevée. AL-Basyouni et al. (2015) ont proposé une nouvelle théorie unifiée des poutres et une

théorie modifiée des contraintes de couple pour les réponses statiques et dynamiques des micro-poutres FG. Bourada et al. (2015) ont utilisé le concept de la position de la surface neutre pour développer une théorie trigonométrique simple d'ordre élevée pour le comportement de la flexion et de la vibration des poutres FG. Récemment, Zemri et al. (2015). Larbi chaht et al. (2015) ont étudié le comportement statique, vibratoire et de stabilité des nano-poutres FG simplement appuyées.

Cependant, dans la fabrication des FGMs, les micro-vides ou les pores peuvent être produites dans le matériau durant le processus de fabrication cela est due à la large différence dans la température de solidification entre les constitutions du matériau (Zhu et al., 2001). Wattanasakulpong et al. (2012) ont donné aussi une discussion sur l'apparition des pores à l'intérieure des FGMs fabriqué par la technique d'infiltration séquentielle multi-étapes. Par conséquent, il est important de prendre en considération l'effet de la porosité dans la conception des structures FGMs soumises à un chargement dynamique. Ressèment, Wattanasakulpong et Ungbhakorn (2014) ont étudié les problèmes de vibration linéaires et non linéaires des poutres FG avec la présence des pores.

Dans ce travail, on s'intéresse à l'étude du comportement vibratoire des poutres poreuses non-homogènes courtes, en utilisant une théorie de déformation de cisaillement raffinée hyperbolique. Ce mémoire de fin d'étude s'articule autour de quatre 04 chapitres :

- Le premier chapitre présente des généralités sur les matériaux composites avancées.
- Le deuxième chapitre est consacré pour une étude bibliographique sur les théories des poutres.
- Le troisième chapitre présente le modèle analytique mathématique de la vibration des poutres poreuses.
- Dans le quatrième chapitre, nous présenterons les résultats numériques et leurs discussions.

En fin, une conclusion générale sur l'ensemble de ces travaux permet de revenir sur les résultats importants mis en avant.

Chapitre I :
Généralités sur les
matériaux à gradient
de propriétés

Chapitre I : Généralités sur les matériaux à gradient de propriétés

I.1. Introduction

La diversité des matériaux et de leurs propriétés correspond à la diversité des applications techniques : éléments porteurs d'une construction mécanique ou civile, éléments d'un circuit électromagnétiques protecteurs résistants aux agressions thermiques ou chimiques capteurs. La multitude d'objectifs provoque toujours de nouveaux matériaux.

L'utilisation des matériaux composites multicouches dans différentes applications d'ingénierie a largement augmenté depuis le début du XX^{ème} siècle; Grace aux avantages qui présentent ces matériaux (grande rigidité, résistance chimique et mécanique élevée, légèreté, réduction des coûts...), Mais aussi ils apportent des problèmes spécifiques liés principalement à leur hétérogénéité. Comme par exemple : la différence des propriétés mécaniques entre des couches adjacentes peut entraîner des contraintes très élevées aux interfaces.

Ces contraintes inter-faciales élevées peuvent engendrer des fissurations au niveau des interfaces qu'on appelle délaminage, des fissures, et d'autre mécanisme d'endommagement en raison du changement brutal des propriétés mécaniques et thermiques d'une couche à l'autre.

Ce problème a attiré beaucoup d'attention en raison de son influence significative sur la résistance et la rigidité des structures composites multicouches (Navid Saeedi, 2012).

Afin d'améliorer le comportement de ces matériaux , et à la fin des années 80 , une équipe de chercheurs japonaise au laboratoire national d'aérospatial (National Aerospace Laboratory, STA), a proposé de surmonter ces difficultés par une solution d'une graduation continue des propriétés recherchées, en concevant de nouveaux matériaux qui possèdent un gradient de composition permettant de diminuer les fortes concentrations de contrainte par l'utilisation des matériaux à gradient de propriétés (en anglais : **Functionally Graded Materials "FGM"**) dont les propriétés mécaniques varient lentement et continuellement dans une direction de la structure (Baron and Naili, 2008 ; Niino et al., 1988).

I.2. Historique du développement des matériaux à gradient de propriétés

Le concept de FGM est né au milieu des années quatre vingt dans le laboratoire national d'aérospatial au Japon, qui fût suivit par d'autres pays : l'Allemagne, la Suisse, Les Etats-Unis, la Chine et la Russie. En 1984 M. Niino et ses collègues à Sendai. Ont eu l'idée de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion (Koizumi, 1992). Les changements continus dans la composition, dans la

microstructure, et même dans la porosité de ces matériaux a comme conséquences des gradients des propriétés matérielles telles que les propriétés (résistance) mécaniques et la conductivité thermique (Koizumi, 1997). Cette nouvelle classe de matériaux composites peuvent être utilisés pour différentes applications, telles que les enduits des barrières thermiques pour les moteurs en céramique, turbines à gaz, couches minces optiques (Nguyen et al., 2007).

En 1987, un vaste programme pour le développement des FGM sur la relaxation des contraintes thermiques c'est-à-dire des matériaux constituant les parois des engins spatiaux et les murs thermiques spéciaux pouvant travailler à des températures de surface de 1800°C et à un gradient de température de l'ordre de 1300°C. A cette année-là, aucun matériau industriel n'était connu pour supporter de telles sollicitations thermomécaniques (Koizumi, 1997).

Trois caractéristiques sont à considérer pour la conception de tels matériaux:

- Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la couche superficielle du matériau;
- Ténacité du matériau côté basse température;
- Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau.

Pour répondre à un tel cahier des charges, l'idée originale des F.G.M a été proposée pour élaborer un nouveau composite profitant à la fois des propriétés des céramiques (côté haute températures) et des métaux (côté basse température).

À la fin de la première étape (1987-1989), les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales (1-10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) pouvant résister à des températures maximales de 2000K (température de surface) et à un gradient de température de 1000K.

Quatre techniques ont été utilisées pour fabriquer les matériaux présentant un gradient de composition et de structure ; les techniques utilisées dans la fabrication de tels matériaux sont les suivantes : le système SiC/C par C.V.D., le système PSZ/Mo par la technique de la compaction sèche des poudres, le système TiB₂/Cu par synthèse par auto-propagation à haute température, et enfin le système (Ni-Cr-Al-Y)/ (ZrO₂-Y₂O₃) par projection plasma à double torches (Okamura, 1991).

Dans la seconde étape (1990-1991), le but était de réaliser des pièces de tailles plus grandes et de forme plus complexes par rapport à celles réalisées dans la première étape. Pendant les années 90, non seulement les champs d'applications des FGM s'est développé pour

les matériaux de structure fonctionnant à haute température, mais s'est aussi élargi à d'autres applications: biomécaniques, technologie de capteur, optique, (Okamura, 1991).

Le concept des matériaux à gradient de propriétés est de l'intérêt non seulement dans la conception des matériaux réfractaires performants pour des utilisations pour les futures navettes spatiales, mais également dans le développement de divers matériaux fonctionnels, tels que les matériaux optiques et électroniques. A cet effet, un deuxième projet a été lancé pour la recherche et développement des matériaux FGM en tant que matériaux fonctionnels « Recherche sur les matériaux de conservation d'énergie avec la structure à gradient de propriétés ». Ce programme vise à s'appliquer la technologie des FGM dans le but d'améliorer l'efficacité de la conservation de l'énergie comme l'énergie solaire, nucléaire, photovoltaïque, thermoélectrique.

La figure I.1 montre les formes de conversion d'énergie visée par le présent projet de recherche. Les énergies solaire et nucléaire sont considérées comme les sources d'énergie en vue d'éventuelles applications extensives.

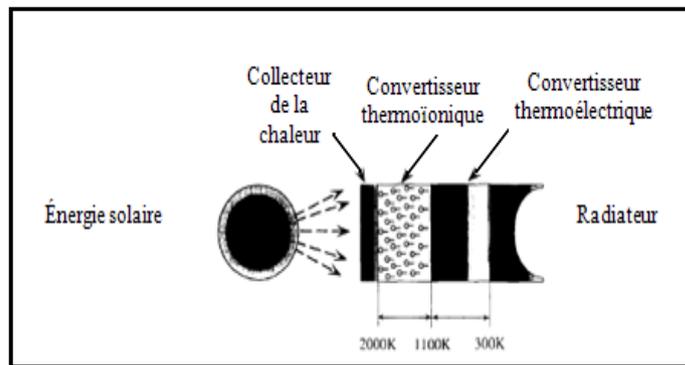


Figure I.1 : Formes de conversion d'énergies couvertes par la partie II du projet de FGM (Koizumi, 1992).

Les progrès de la recherche sur les matériaux FGM au Japon sont résumés dans le tableau I.1 :

Tableau I.1 : Progrès de la recherche sur les matériaux FGM au Japon.

Année	Progrès de recherche de FGM
1984	Concept initial par Dr Niino et d'autres scientifiques dans la région de Sendai, (Japon)
1986	Etude de faisabilité sur la technologie de base pour le développement des FGM sur la relaxation des contraintes thermiques sous l'auspice de la science et de l'agence de technologie (STA).

1987-1989	Recherche nationale de projet sur la technologie de base pour le développement des FGM sur la relaxation des contraintes thermique. FGM partie I-phase (1).
1988	Fonctionnellement gradient matériaux forum (FGMF) 1 ^{er} Colloque sur FGM organisé par FGMF.
1989	Conférence d'Allemagne-Japon (FGM) a Kôln, (Allemagne).
1990	1 ^{er} Colloque international sur FGM à Sendai, (Japon). Comité consultatif international de FGM (IACFGM).
1990-1991	FGM partie I-phase (2).
1992	étude de faisabilité sur la R & D de FGM en tant que matériaux fonctionnels sous l'auspice du STA. 2 ^{ème} colloque international sur FGM et atelier international Japon-Allemagne-USA à San Francisco, (USA).
1993	projet de recherche national sur les matériaux de conversion d'énergie avec une structure FGM. FGM partie II- phase(1).
1994	3ème colloque international sur FGM à Lausanne, (Suisse).
1995	Atelier : Japon-Russie-Ukraine sur des matériaux de conversion d'énergie (ENECOM-95),(Sendai).
1996	4ème colloque international sur FGM dans la ville de la science de Tsukuba, (Japon)

I.3. Définition des matériaux FGM

Un matériau a gradient de propriétés c'est un type de matériaux composites composé de deux ou plusieurs matériaux relatif a des fractions volumiques et microstructure qui sont conçus pour avoir une continuité spatiale des variables. Un FGM est produit en changeant sans interruption les fractions de volume dans la direction d'épaisseur pour obtenir un profil bien déterminé.

Le concept des matériaux à gradient de propriétés (Functionally Graded Materials :FGM) a pour développer des pièces capables de résister aux sollicitations thermiques et mécaniques dans les systèmes de propulsion et le fuselage des navettes spatiales (Niino et al., 1988). Les matériaux constituant les parois des engins spatiaux (navettes spatiales ou des avions hypersoniques) sont soumis à des températures élevées. Les pièces les plus exposées sont le cône d'entrée, les bords d'attaque des ailes ainsi que certaines surfaces inférieures. Pour cette raison les matériaux des parois, soumis sur une face à environ 1800°C en atmosphère,

doivent supporter dans leur épaisseur d'une dizaine de millimètres, un gradient thermique d'environ 1300°C. Il n'y a aucun matériaux monolithique capable de résister à une telle contrainte thermique (Koizumi, 1992).

La solution envisagée est la mise en œuvre de matériaux composites et notamment l'utilisation des matériaux à gradient de propriétés. On peut imaginer un matériau dont la face exposée à très haute température posséderait des propriétés de résistance aux fortes chaleurs et à l'oxydation, tel que la céramique, et dont la face intérieure serait très bonne conductrice de la chaleur et posséderait une bonne résistance mécanique et une meilleure ténacité, comme le métal. avoir un matériau blindé, léger avec une haute efficacité balistique et la résistance à des températures élevées.

Une pièce peut être appelée de matériau FG lorsqu'elle est composée d'au moins deux matériaux ou alliages primaires qui sont distribués continuellement ou discontinuellement à l'intérieur de la structure. Lorsque la distribution est continue, on parle alors de matériaux à gradient continu (Kawasaki and Watanabe, 1997). Dans ce cas, la composition et la microstructure du matériau changent graduellement à l'intérieur de la pièce, qui permet de décrire des propriétés mécanique, physique, chimique, etc.

Généralement, les FGM sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Les vides sont également considérés comme une composante des matériaux FGM (Kokini and Takeuchi, 1990). Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement inhomogènes.

Ces matériaux sont de plus en plus utilisés dans les industries aéronautiques, aérospatiale, biomécanique, automobile et dans bien d'autres applications technologiques.

La plupart des « FGM » sont constitués des céramiques et des métaux dont les propriétés mécaniques sont comparés dans la tableau I.2.

Tableau I.2: Une panoplie avantages et inconvénients des matériaux constituant les FGM.

Matériau		Céramique La face à haute température	Céramique- Métal (La couche intermédiaire)	Métal (La face à basse température)
Avantages	Bonne résistance thermique	✓		
	Bonne résistance à l'oxydation.	✓		
	Elimination des problèmes de l'interface.		✓	
	Relaxer les contraintes thermiques		✓	

	Bonne résistance mécanique			✓
	Conductivité thermique élevée			✓
	Très bonne ténacité.			✓
Inconvénient	Faible conductivité thermique	✓		
	Fabrication compliquée		✓	
	Faible résistance a la corrosion			✓

I.4 Concept des matériaux fonctionnellement gradués :

Le concept des matériaux à gradient de propriétés (FGM) caractérisé par une propriété sans interruption changeante due à un changement continu de la composition, dans la morphologie et effectivement dans la structure cristalline, représente un saut technologique rapide à travers les différents domaines d'application potentiels. Des recherches ont été établis afin de préparer des matériaux de barrière thermique performants à longue durée de vie, Leurs but principal est d'améliorer la résistance à l'usure ou à l'oxydation, et avoir un matériau blindé léger avec une haute efficacité balistique (navettes aérospatiales) et peut résister au milieu à haute température (turbomachines aéronautiques ou terrestres).

Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure d'un matériau FGM est illustré dans la figure I.2. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés des FGM. Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente.

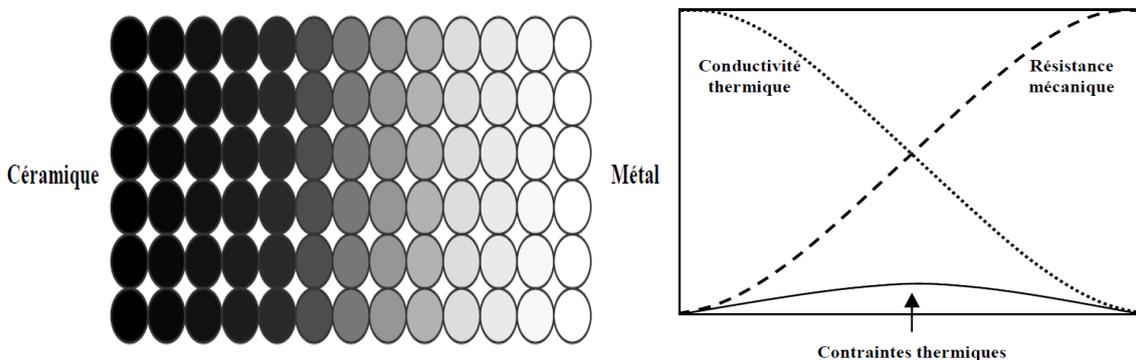


Figure I.2 : Concept des matériaux à gradient de propriétés (Houari, 2011).

La figure I.3 montre les concentrations de contraintes dans les panneaux de protection thermiques conventionnels au niveau des interfaces (changement brutale de composition). Il montre également comment un FGM peut alléger. Ces concentrations de contraintes en changeant graduellement les propriétés matérielles et assure toujours la protection thermique trouvée dans les barrières thermiques conventionnelles.

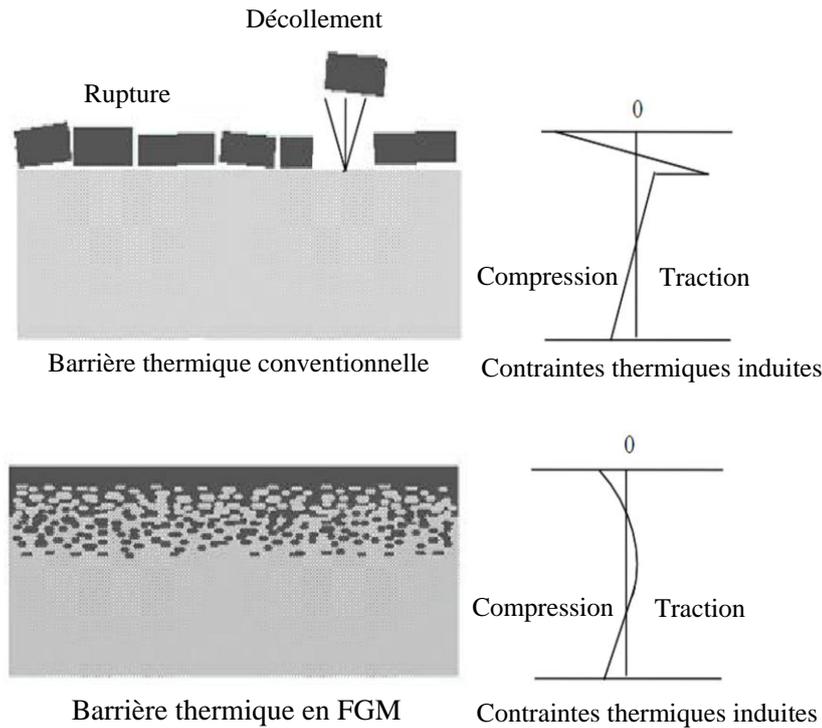


Figure I.3 : Protection thermique des Matériaux FGM et Non FGM (Houari, 2011).

I.5. Différences entre matériaux à gradient de propriétés et matériaux composites traditionnels :

Les matériaux à gradient de propriétés sont donc des matériaux composites avec un caractère au microscope non homogène. Les changements continus de leur microstructure distinguent le FGM des matériaux composites conventionnels. Le changement continu de la composition a comme conséquence les gradients dans les propriétés de FGM. Les différences dans la microstructure et les propriétés entre FGM et matériaux composites conventionnels sont illustrées schématiquement sur la figure I.4.

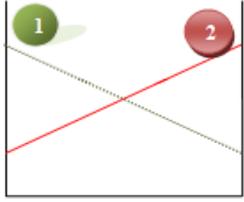
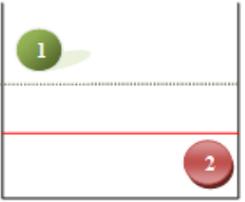
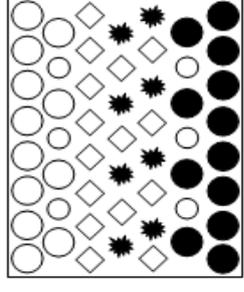
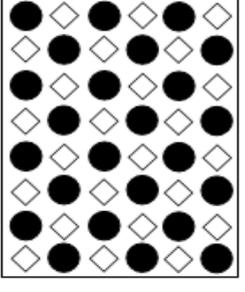
Propriétés	<p>1 Résistance mécanique 2 Conductivité thermique</p>		
Structure	Éléments constitutifs: Céramique ○ Métal ● Microporosité ○ Fibre ◇		
Matériaux	Exemple	FGM	NON-FGM

Figure I.4 : Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels (Koizumi et al., 1996).

Yoshihisa, (2004) a présenté un modèle simple illustrant les différences entre les matériaux à gradient de propriétés (FGM) et les matériaux conventionnels (figure I.5). Le matériau plan composé a une caractéristique plane, le matériau relié a une frontière au niveau de l'interface des deux matériaux, et les FGMs ont d'excellentes caractéristiques qui les diffèrent de ceux des matériaux plans composés et reliés. Par conséquent, les FGMs suscitent beaucoup d'attention en termes de leur application dans les domaines industriels.

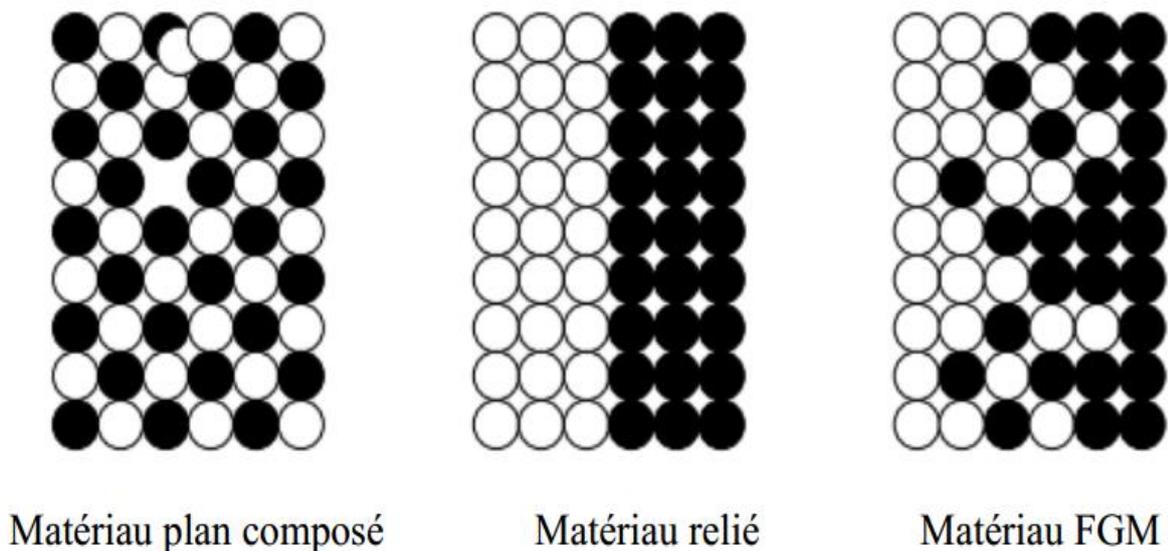


Figure I.5 : La distribution composante des matériaux. (Yoshihisa, 2004)

I.6 Propriétés effectives des FGMs

Les matériaux à gradient de propriétés sont généralement fabriqués par deux phases matérielles avec des propriétés différentes. Une description détaillée des microstructures graduée réelles n'est pas disponible, excepté peut-être pour l'information sur la distribution de fraction volumique. Puisque la fraction de volume de chaque phase varie graduellement dans la direction de la graduation, les propriétés effectives des FGM changent le long de cette direction.

Pour les modèles FGM nous avons deux approches :

Une variation par morceaux de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumée, et le FGM est pris pour être posé avec la même fraction volumique dans chaque région, c'est-à-dire une couche quasi-homogène de céramique-métal (fig. I.6-a)

Une variation continue de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumé (fig. I.6-b), et la fraction volumique du métal peut être représentée comme une fonction de coordonnée suivant l'épaisseur (z).

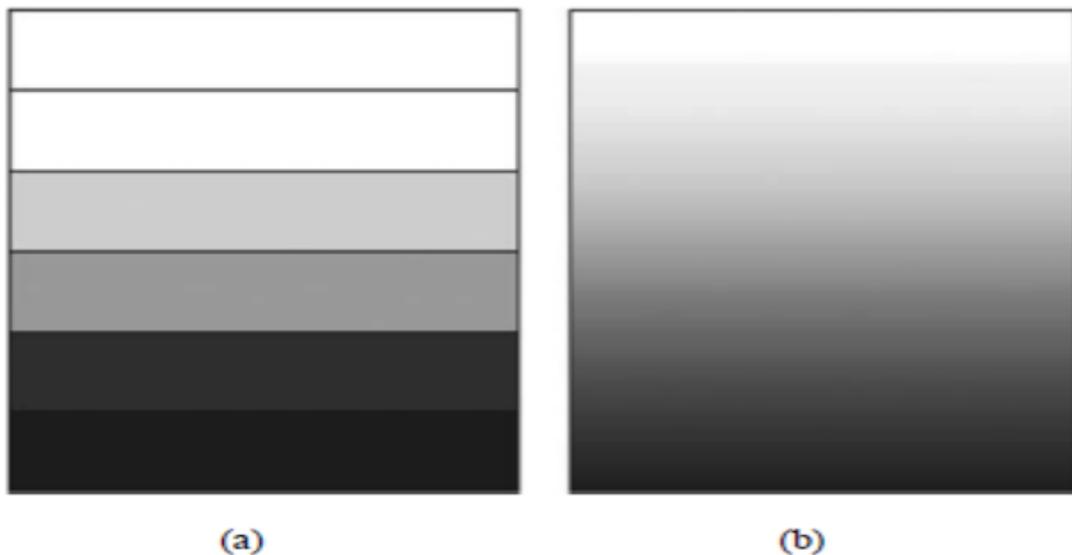


Figure I.6 : *Modèle analytique pour une couche d'un matériau FGM.*

La variation continue des propriétés trouve son application lorsque, par exemple, la face supérieure est exposée à une haute température alors que la face inférieure est exposée à une basse température. Dans ce cas, la face supérieure est à 100% céramique et la face inférieure est à 100% métal, avec une transition graduelle entre les deux.

La plupart des chercheurs emploient la fonction de loi de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume. Par conséquent, on considère dans notre travail des plaques FGM avec des variations de la fraction de volume qui suit des fonctions de lois de puissance et exponentielles.

I.7. Méthodes d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés

Le processus de fabrication des matériaux à gradient de propriétés peut être divisé en établissant la structure dans l'espace non homogène « gradation » et la transformation de cette structure en matériau en bloc « consolidation ». Il existe de nombreux procédés d'élaboration des FGM, les paragraphes suivants s'attachent à décrire les principales méthodes d'élaboration des FGM utilisées dans l'industrie.

I.7.1 Coulage en bande (Tape Casting)

Le processus de coulage en bande connu sous la dénomination anglaise (Tape Casting) il consiste à couler une barbotine de poudres fines en suspension aqueuse ou non-aqueuse (la plupart des travaux commerciaux utilisent le procédé non-aqueux) sur un support plan en couches minces et régulières. Selon les cas, c'est soit la lame (Doctor-Blade) qui est animée d'un mouvement de translation, soit le support qui se déplace sous la lame (figure I.7).

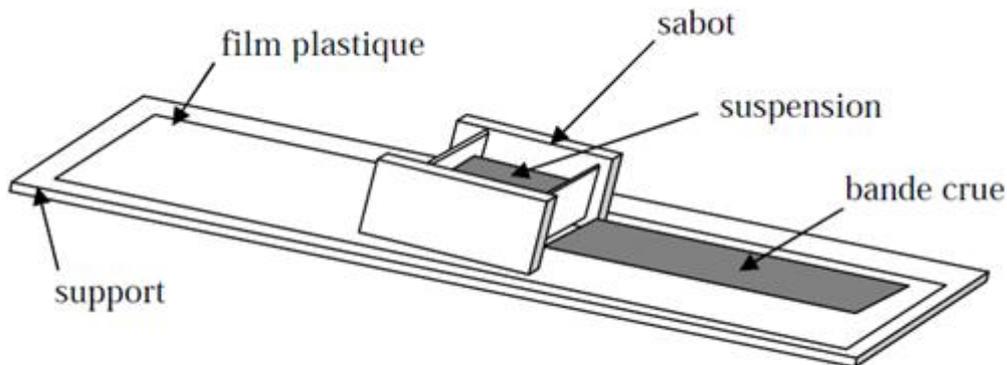


Figure I.7 : Principe de la méthode coulage en bande (Lostec, 1997).

Les produits obtenus sont des feuillets avec des épaisseurs contrôlées (25-1000 μ m). Après un raffermisssement de la pâte, les feuillets sont démoulés et ensuite découpés. Cette technique est économique pour la production des substrats céramiques de type Al_2O_3 et surtout pour les condensateurs à base de $BaTiO_3$.

Le procédé de coulage en bande est largement utilisé pour réaliser des matériaux composites laminaires suivant deux méthodes : soit par réalisation directe de bandes multicouches grâce à un système de lames multiples, c'est le cas des tri-couches élaborés par

Mistler (Mistler, 1973), soit par empilage de couches élaborées séparément, dont la cohésion est ensuite assurée par une étape de thermo-compression (Boch, 1986 et 1987).

I.7.2 Coulage Séquentiel en Barbotine (Slip Casting)

Le coulage en Barbotine (Slip Casting) consiste à couler une suspension dans un moule poreux qui va drainer le liquide grâce aux forces capillaires, laissant un tesson (couche de poudre compacte) sur la surface du moule. Après séchage, on obtient le corps en cru. Donc le coulage se effectuée en deux étapes essentielles (Moya, 1992):

- Formation du tesson ou « prise ».
- Consolidation du tesson « raffermissement ».

La filtration, c'est à dire la formation du tesson lors du coulage, peut être considéré comme un processus d'élimination d'une partie de l'eau de la barbotine; Cette eau migre à travers la couche de tesson déjà formée, sous l'effet :

- du pouvoir de succion du plâtre (coulage classique) ;
- ou d'une pression appliquée sur la barbotine (coulage sous pression).

Dans le cas de la fabrication de multicouches, après la formation du premier tesson, le dépôt de la deuxième couche s'effectue de manière telle que la barbotine ne pénètre pas dans le tesson formé. Ce procédé est successivement reproduit pour les autres couches.

I.7.3 Compaction sèche des Poudres

Dans cette technique les poudres sont successivement versées dans un moule en acier. Chaque fois qu'une poudre est versée, une faible compression est exercée. Ensuite, la compaction de l'ensemble des couches sera effectuée. Ce procédé est suivi, généralement, par une pression isostatique et un délainage. La densification sera enfin l'étape finale (Bishop et al., 1993).

Ce procédé peut être envisagé pour la fabrication de pièces de formes complexes. En effet il s'applique aussi avec la technique du pressage isostatique et de façon industrielle.

I.7.4 Dépôt par Electrophorèse

Le dépôt par électrophorèse est un procédé dans lequel une suspension colloïdale stable est placée dans une cellule contenant deux électrodes, le dépôt se fait par le mouvement des particules chargées au sein de la solution vers la cathode ou l'anode selon le signe de la charge des particules due à un champ électrique. L'élaboration des F.G.M peut se faire donc par le dépôt séquentiel des matériaux (Abdizadeh, 1997).

I.7.5 Projection plasma

Un gaz soumis à une forte température (par exemple celle d'un arc électrique), se transforme en un état ionisé (plasma). Cette transformation est accompagnée d'un dégagement de chaleur important. Si une particule de céramique se trouve dans cet environnement, elle se fond totalement ou superficiellement, ce qui permet de la situer sur un substrat.

La projection plasma des particules des divers matériaux est devenue une méthode très utilisée pour fabriquer des FGM. L'équipement relativement simple, le rendement élevé du dépôt des particules sur des substrats à géométrie compliquée, les performances des surfaces en fonctionnement et la compatibilité des céramiques avec les métaux sont les avantages essentiels de cette technique (Steffens et al., 1990).

I.7.6 C. V. D. et P. V. D.

Les dépôts chimique ou physique en phase vapeur sont des techniques dans lesquelles les atomes du matériau sont déposés sur la surface du substrat. Les techniques de C.V.D. et P. V. D. peuvent être utilisées pour façonner un F.G.M sur des substrats de formes compliquées .

I.7.7 Frittage et Infiltration

Cette technique est constituée de deux étapes et convient à la fabrication d'un composite à gradient de fonction composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes. La première étape est de fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité. La seconde est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration. Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique (Takahashi et al., 1990).

Cette technique peut être généralement appliquée pour plusieurs combinaisons de matériaux qui sont chimiquement inertes et qui ont des points de fusion bien différents les uns par rapport aux autres.

I.7.8 Frittage Laser Différentiel

Le rayonnement thermique du laser permet le contrôle de la température et la focalisation du point à chauffer. La différence de l'intensité de l'irradiation sur différents points du matériau, provoque un frittage différentiel le long de la pièce, ce qui résulte en des microstructures différentes, dépendant de la position du point irradié. Cette technique a été utilisée pour élaborer un F.G.M de PSZ/Mo.

La figure I.8 montre schématiquement la disposition du procédé utilisé par ces auteurs.

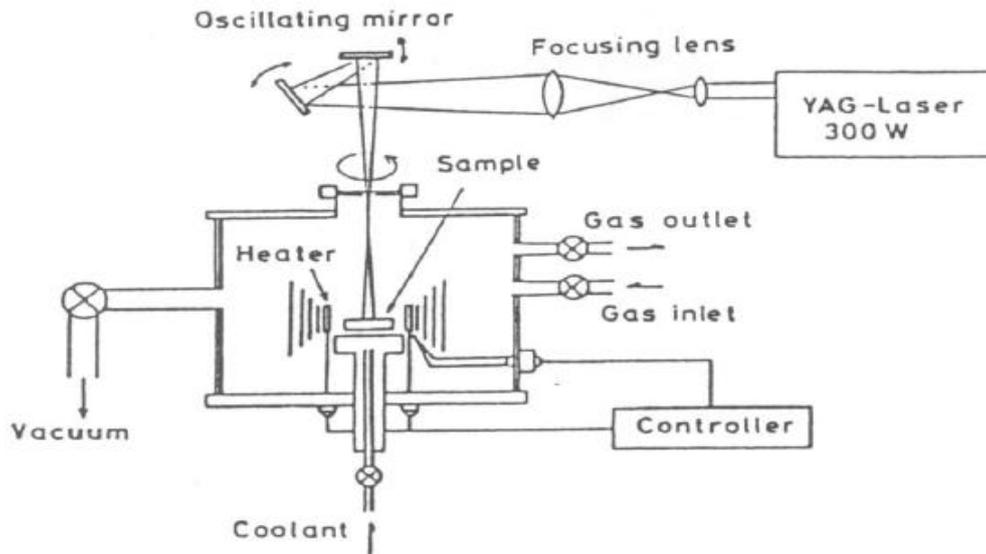


Figure I.8 : Disposition du procédé frittage laser différentiel (Ait Sidhoum, 2019).

I.7.9 Implantation Ionique (Sputtering)

C'est une technique avancée pour la fabrication des F.G.M permettant de réaliser seulement des épaisseurs fines ($<1\mu\text{m}$) sur différents substrats (plastiques, céramiques, et métaux). Le traitement s'effectue par les faisceaux énergétiques d'ions ou via des gaz réactifs. Les couches fabriquées présenteront un gradient de composition qui peut être très finement contrôlé (Abdizadeh, 1997).

I.7.10 Dépôt par Centrifugation

La technique consiste à verser une suspension colloïdale relativement diluée dans des flacons cylindriques, le tout est soumis à une centrifugation. La sédimentation s'opère et le liquide surnageant est retiré. Ce procédé est répété pour obtenir des multicouches (figure. I.9) .

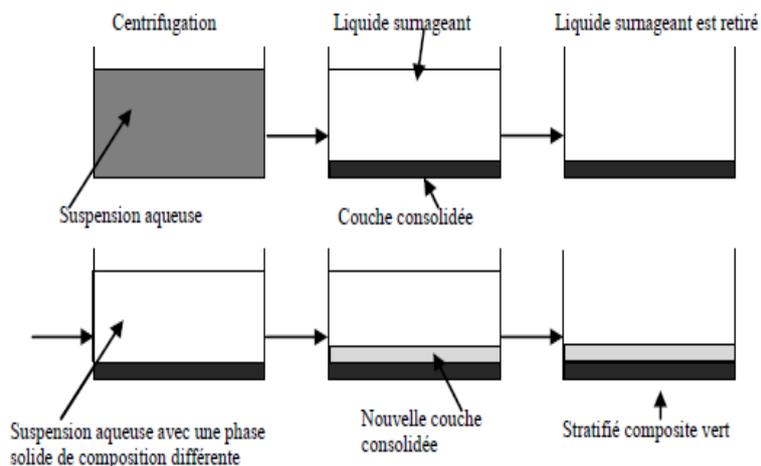


Figure I.9 : Schéma du procédé dépôt par centrifugation (Abdizadeh, 1997).

I.8 L'utilisation des FGM

La science des matériaux a fait de grands progrès au siècle dernier. Des matériaux révolutionnaires ont été conçus pour résister même aux environnements inhospitaliers.

Le concept des matériaux à gradient de propriétés est applicable dans des nombreux domaines. Il a été initialement conçu pour l'industrie de mécanique et d'aéronautique, où les FGM ont fournis deux propriétés contradictoires telles que la conductivité thermique et d'isolation thermique dans un matériau. Actuellement, elles permettent la production des matériaux légers, forts et durables, et elles sont applicables dans un large intervalle des domaines tels que les matériaux de construction, matériaux de conversion d'énergie, nucléaire et semi-conducteurs. Le potentiel d'exploitation commerciale touche un vaste éventail d'applications industrielles. Quelques-unes d'entre elles sont accentuées ci-dessous figure I.10.

I.8.1. Aéronautique

Le concept de FGM a été 44initialement conçu pour ce champ. Regardez deux propriétés contradictoires, comme la conductivité thermique et de propriété barrière thermique dans un matériau. À l'heure actuelle, il permet de produire le poids-léger, des matériaux solides et durables et est applicable à un large éventail de domaines tels que les matériaux de structure, le matériel de conversion d'énergie et d'autres. Surtout, ce sera une technologie indispensable pour la roquette et à la construction de station spatiale. FGMs sont également applicables à un mur externe d'avion spatial et des parties de moteur de fusée.

I.8.2. Matières industrielles

De nombreuses applications de FGM ont été récemment réalisées pour les matériaux industriels. Un exemple a la forme d'outils. Comme les produits récents sont s'intensifier en raison d'une résistance accrue et la résistance thermique et énergiques de réduction et de la forme, la demande d'un nouveau matériau pour l'outil industriel sont en pleine croissance.

Dans ce domaine, il est nécessaire d'avoir les deux résistances à l'usure et la ténacité; ainsi, nous pouvons dire que la demande de la FGM est une solution. D'ailleurs, comme les besoins n'pour la coupe à sec et ne pas utiliser de liquide de coupe augmenter en contrepartie de l'environnement, le développement d'une autolubrifiant et outil de haute résistance thermique est attendu. Une production à l'essai de l'outil industriel a été mené avec succès à l'aide de diamants (à l'extérieur) et l'acier (à l'intérieur), et le développement est maintenant prévu pour un outil à grande vitesse dans n'importe quelle taille ou forme.

I.8.3. Optoélectronique

Il y a tant de variations dans les moyens de communication. Maintenant, outils de communication utilisant les fibres optiques aux besoins de nouveaux progrès ainsi que de plus en plus de volume. Une idée est une lumière de longueur d'onde système multiplex de communication utilisant des filtres optiques, en particulier, en utilisant un indice de réfraction filer le classement. Il a une structure que l'indice de réfraction des ondes transmettant le sens varie avec la fréquence en continu le long de la longueur d'onde. Avec le filtre, la réfraction inutile peut être évitée dans une certaine mesure. Application de FGM aux fibres optiques plastiques peuvent assurer une transmission à haute vitesse. Par conséquent, il sera capable de se propager système de communication optique jusqu'au niveau des ménages.

I.8.4. Biomatériaux

Notre corps est soutenu par 206 os, et certains d'entre eux couvrent un cerveau et des organes. Si nous avons une douleur à un os ou une articulation, nous aurons des troubles dans notre vie. Pour résoudre ces problèmes, un nouveau matériau qui peut remplacer des os et des articulations et à une longue vie a été souhaité. Non seulement la dureté et une excellente résistance à la corrosion, de compatibilité, mais aussi biologiques et son innocuité sont souhaitées. Les FGM technologie est applicable aux os artificiels, des articulations et des dents. Technologie de classification de structure est utilisée dans la recherche pour la prévention du cancer, aussi. L'un d'eux est, par exemple, une étude sur le renforcement de collagène structure en utilisant la technologie de classement.

I.8.5. D'autres

Téléphone cellulaire est l'un des moyens d'outils de communication pratique. Il devient de plus mince et plus petit. FGM technologie est applicable dans ce domaine aussi. Pour la minimisation de la taille et efficace de transmission, une permittivité-technologie de classification peut être appliquée lors de la production des substrats. De même, dans d'autres domaines tels que le champ de l'électronique et domaine de la chimie, FGM sont également applicables. Les fibres optiques entièrement faite de polymères fluorés ont été développés. En outre, de nouvelles recherches mai également développer de nouveaux matériaux avec de nouvelles fonctions à l'aide de nanotechnologie de classification niveau.

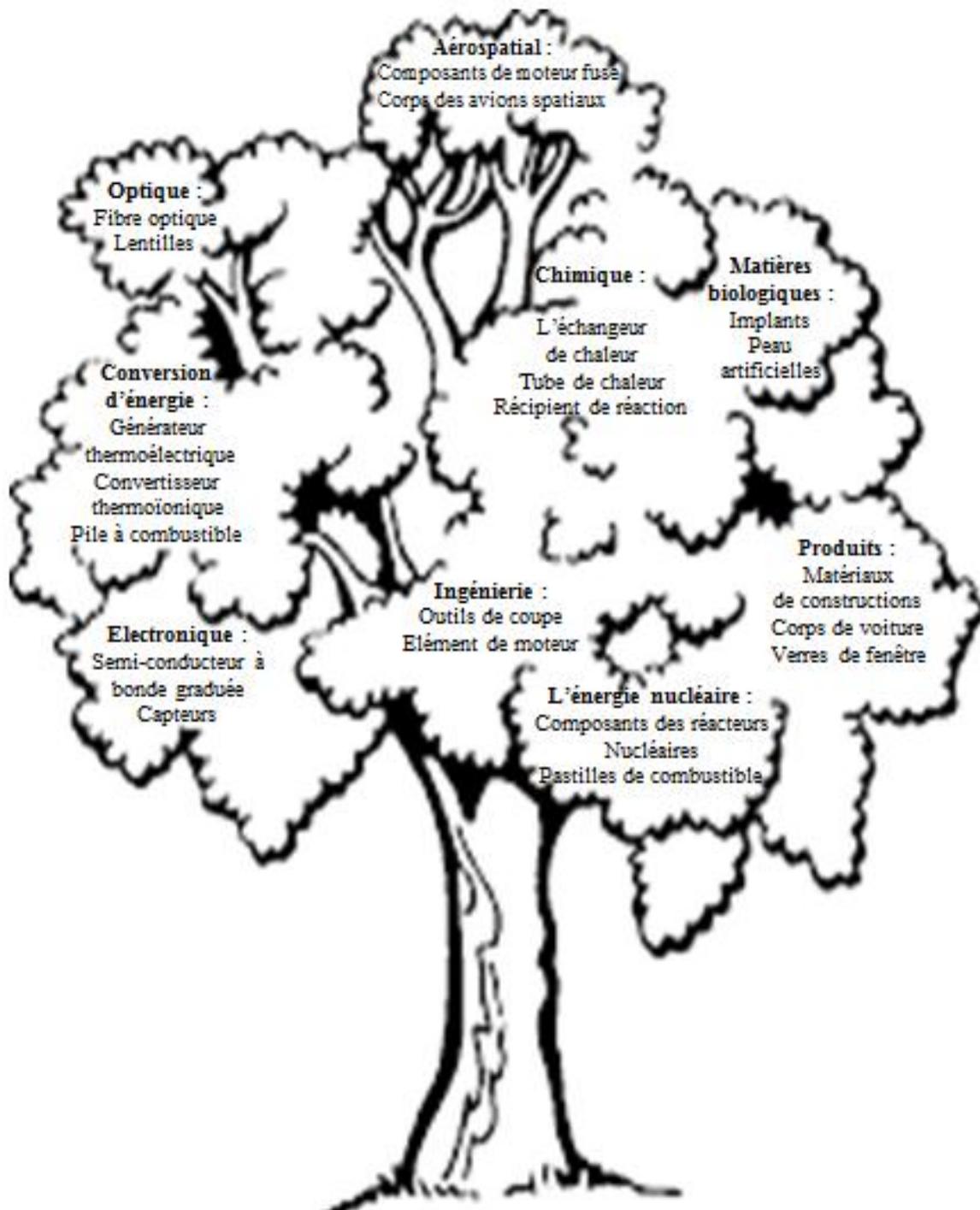


Figure I.10 : Les principaux domaines d'application des FGM (Ait Sidhoum, 2019).

I.9 Propriétés physiques et mécaniques des FGM

Pour ce travail le matériau FGM choisi est (Aluminium-Céramique).

I.9.1 Propriétés physiques de l'aluminium

➤ **Définition :**

L'Aluminium est un métal blanc qui après polissage peut devenir réfléchissant

➤ **Propriétés physiques :**

L'Aluminium a une température de fusion relativement basse d'environ 660°. Il en résulte une facilité de fusion qui présente un avantage certain pour les opérations de fonderie.

L'Aluminium est très ductile, on peut aisément le mettre en forme. La masse volumique de l'Aluminium est de 2700 kg/m³. L'utilisation de l'Aluminium s'impose donc dans les domaines aéronautiques et du transport.

➤ **Propriétés mécaniques :**

Les propriétés mécaniques des métaux présentent un grand intérêt dans la vie quotidienne, elles peuvent être classées en deux groupes :

- Celles qui se rapportent à la résistance mécanique du métal :

- Résistance à la traction.
- Résistance à la pénétration (dureté).

- Celles qui concernent les modifications de forme que le métal peut subir sans se briser :

- La malléabilité (mise en feuilles).
- La ductilité (mise en fils).

➤ **Propriétés des alliages d'aluminium :**

L'Aluminium a pour propriétés une :

- Température de travail élevée.
- Très bonne résistance à la corrosion.
- Légèreté.
- Très bonnes solidités, dureté et rigidité.
- Bon rapport force/poids.
- Bonnes propriétés de protection contre les interférences électromagnétiques.
- Bonne conductivité thermique.
- Conductivité électrique élevée.
- Bonnes caractéristiques de finition.
- Entièrement recyclable.

Résistance à la corrosion :

Grâce à la couche d'oxyde qui se forme en surface, les alliages d'Aluminium résistent à la corrosion. On peut rendre cette couche protectrice d'oxyde plus épaisse par galvanisation. L'Aluminium et ses alliages peuvent être utilisés sans protection supplémentaire comme revêtement extérieur de bâtiments. Par contre dans les milieux corrosifs, les alliages d'Aluminium peuvent subir les effets de la corrosion. Des piqûres, de la corrosion sous

contrainte, de la fatigue corrosion, voire de la corrosion généralisée peuvent se développer. Pour des conditions données, la sévérité de l'attaque dépend de l'alliage utilisé et de son état.

I.9.2 Propriétés physiques de la céramique

➤ **Définition :**

La céramique résulte des terres et des roches broyées (matériaux géologiques) ou bien d'une argile qui sera modelée puis cuite sous haute température (transformation irréversible) ce qui fait perdre au matériau sa plasticité donc il ne peut plus se réhydrater.

➤ **Propriétés physiques :**

La céramique a une facilité de fusion qui présente un avantage certain pour les opérations de fonderie. La masse volumique de la céramique est de 3800 kg/m^3 . L'utilisation de la céramique s'impose dans les domaines de l'habitat et du design, l'industrie céramique et métallurgique, aéronautique et spatial, médicale et dans les revêtements.

➤ **Propriétés mécaniques :**

Les propriétés mécaniques du céramique dépendent des :

- Matières première employées.
- Méthodes de fabrication qui fixent les microstructures finales et déterminent la répartition des différentes phases en présence.

Propriétés des céramiques :

Les propriétés de la céramique sont :

- Un module de YOUNG élevé (Liaisons, covalente, ioniques).
- Une dureté élevée (Abrasif, outils de coupe, surfaces de frottement qui doivent résister à l'usure, résistance mécanique élevée, bonne tenue à chaud, rigidité élevée).
- Une très bonne résistance à la compression non à la traction (Résistance à la compression = 200 MPa).

I.10 Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM :

Les matériaux fonctionnellement gradués « Functionally Graded Material » consistent en l'association de deux ou plusieurs matériaux non-miscible qui se complètent et qui ont des propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue et discrète de la composition de la structure.

Les caractéristiques les plus distinctes des matériaux FGM sont leurs microstructures non uniformes avec des macro-propriétés graduées dans l'espace.

Un des paramètres clé à déterminer lors de la fabrication de ces matériaux est la composition multi phase à travers l'épaisseur.

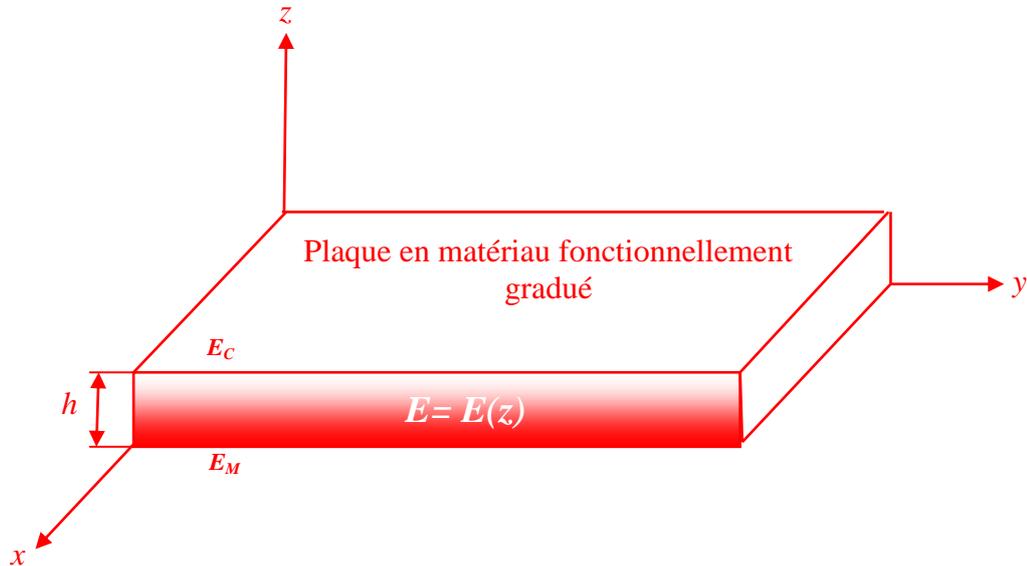


Figure I.11 : Géométrie d'une plaque en FGM

La dépendance des propriétés de la position se traduit par la prise en compte de la loi des mélanges correspondant au modèle de Voigt.

$$P = \sum_{i=1}^n P_i V_i \quad (\text{I.1})$$

Avec P_i et V_i sont respectivement la propriété mécanique et la fraction volumique du Constituant i , avec :

$$\sum_{i=1}^n V_i = 1 \quad (\text{I.2})$$

Dans la pratique, la plupart des structures FGM sont à deux constituants : de la céramique et du métal inoxydable en général. Dans ce cas, la loi de Voigt se réduit à :

$$\begin{aligned} P &= P_1 V_1 + P_2 V_2 \\ V_1 + V_2 &= 1 \end{aligned} \quad (\text{I.3})$$

Un FGM peut être définie par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume. Les liaisons entre les particules doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture, et également assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure.

Les coordonnées x et y définissent le plan de la plaque, tandis que l'axe Z est perpendiculaire à la surface moyenne de la plaque et dans la direction de l'épaisseur. Les propriétés du matériau dont le module de Young et le coefficient de Poisson sur les faces supérieures et inférieures sont différentes. Ils varient de façon continue, suivant l'épaisseur (l'axe) soit :

$$\begin{aligned} E &= E(z) \\ V &= V(z) \end{aligned} \tag{I.4}$$

Jin et Batra indiquent que l'effet du coefficient de poisson sur les déformations est négligeable comparativement à celui du module de Young. Par conséquent, le coefficient de Poisson peut être supposé comme constant. Cependant, Le module de Young dans la direction de l'épaisseur de la plaque FGM varie en fonction d'une

- Loi de puissance (P-FGM),
- Loi sigmoïde (S-FGM).
- Loi exponentielle (E-FGM),

I.10.1 Propriétés matérielles de la plaque P-FGM :

Les propriétés matérielles des plaques P-FGM sont liées directement à leur fraction volumique (obéit à une fonction en loi de puissance).

$$V(z) = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^P \tag{I.5}$$

Où P est un paramètre matériels et h est l'épaisseur de la plaque. Une fois la fraction volumique locale $v(z)$ à été définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges (Bao, 1995) :

$$E(z) = E_1 + (E_2 - E_1)V(z) \tag{I.6}$$

Où E_1 et E_2 sont respectivement les modules de Young de la surface inférieure ($z = -h/2$) et de la surface supérieure ($z = h/2$) de la plaque FGM, la variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la figure I.12, il apparait clairement que la fraction volumique change rapidement près de surface inférieure pour $p < 1$, et augmenté rapidement près de la surface supérieure pour $P > 1$.

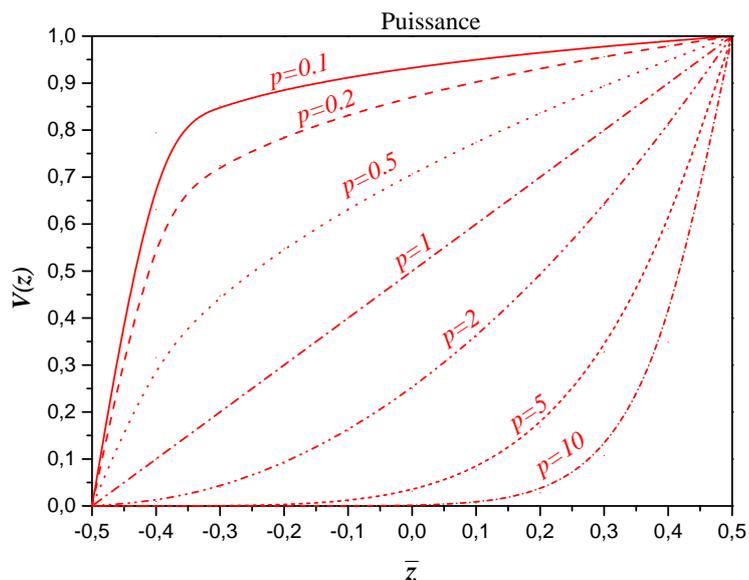


Figure I.12 : Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.

I.10.2 Propriétés matérielles de la plaque S-FGM :

En (2003) chi and Chung ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces, car Dans le cas d'ajouter une plaque P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une plaque composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interfaces où le matériau est continu mais change rapidement (Bao, 1995).

Les deux fonctions de loi de puissance sont définis par :

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 + z}{h/2} \right)^p \quad \text{pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.7.a})$$

$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 - z}{h/2} \right)^p \quad \text{pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.7.b})$$

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé par :

$$E(z) = V_1(z)E_1 + [1 - V_1(z)]E_2 \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.8.a})$$

$$E(z) = V_2(z)E_1 + [1 - V_2(z)]E_2 \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.8.b})$$

La figure I.13 illustre que la distribution de la fraction volumique $V(z)$ dans les équations (I.8.a) et (I.8.b) représente les courbes sigmoïdes, et cette plaque FGM est appelée (Plaque S-FGM).

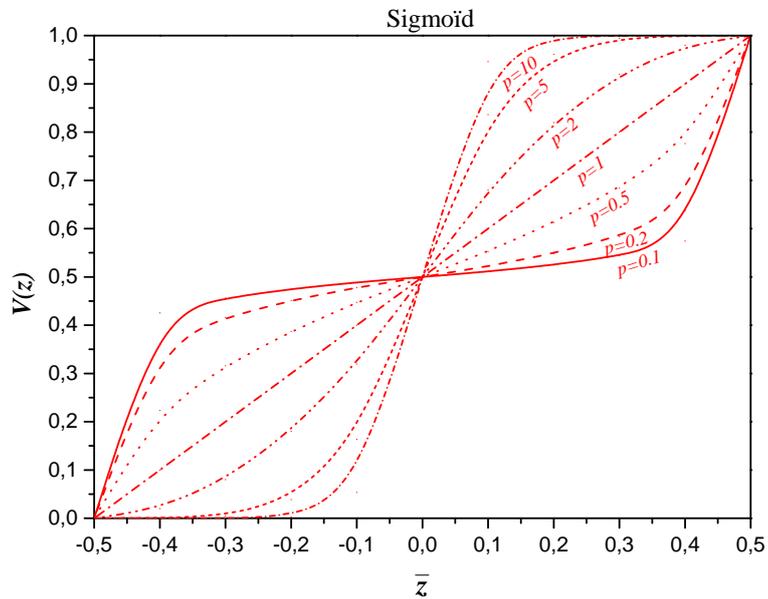


Figure I.13: Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.

I.10.3 Les propriétés matérielles de la poutre E-FGM :

Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, on peut utiliser la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme (Delale and Erdogan, 1983):

$$E(z) = E_2 e^{B(z+h/2)} \quad (I.9.a)$$

Avec

$$B = \frac{1}{h} \ln \left(\frac{E_1}{E_2} \right) \quad (I.9.b)$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée sur la figure I.14.

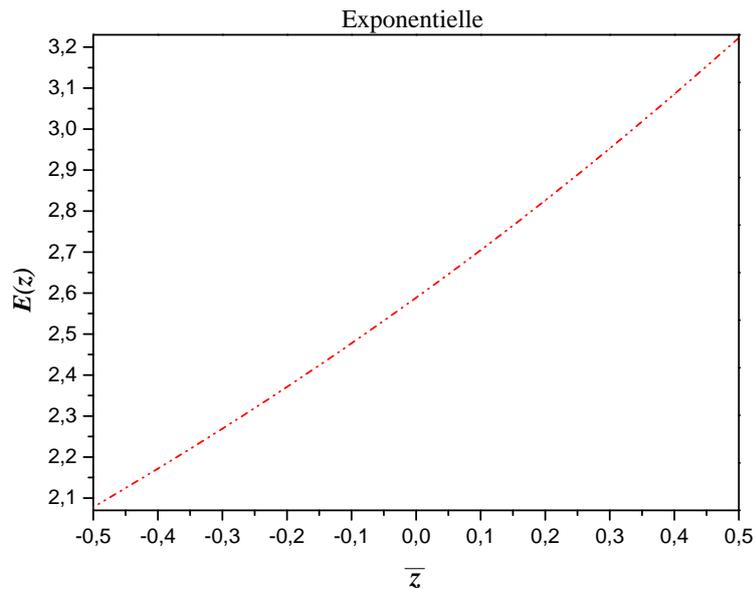


Figure I.14 : Variation du module de Young dans une plaque E-FGM.

I.11 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons défini les matériaux à gradient de propriétés « FGM », l'historique de leur développement, leurs propriétés, leurs principales méthodes de fabrication, leurs domaines d'application et les lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM.

La variation spatiale et progressive des propriétés des matériaux à gradient de propriétés permet de créer des structures innovantes qui peuvent être exploitées dans de nombreux domaines d'application dans les structures spéciales en génie civil.

Le chapitre suivant sera consacré à la revue bibliographique sur les différentes théories des poutres existantes dans la littérature.

Chapitre II:
Les théories des
poutres

Chapitre II : Les théories des poutres

II.1. Introduction

Les poutres représentent un élément très répandu pour modéliser les structures, soit en génie civil tel que les bâtiments, les ponts, les chemins de fer,...etc. soit en mécanique ou dans autres secteurs. Afin de résoudre les problèmes des structures ayant comme éléments structuraux des poutres et des plaques FGM dans le domaine élastique, il est nécessaire de choisir la bonne théorie décrivant correctement le comportement statique et dynamique de la structure ainsi que la méthode de résolution à appliquer.

Les **théories des poutres** les plus connues dans la littérature sont :

- la **théorie d'Euler-Bernoulli**, qui néglige l'influence du cisaillement ;
- la **théorie de Timoshenko** qui prend en compte l'effet du cisaillement, utilise le facteur de correction (le premier ordre).
- La **théorie d'ordre élevé** qui prend en compte l'effet du cisaillement.

II.2. La théories classique des poutres (EULER BERNOULLI)

La théorie classique des poutres (CBT) se base sur les hypothèses d'Euler-Bernoulli, selon lesquelles une section plane et normale au plan moyen de la poutre reste normale et perpendiculaire après déformation (figure II.1).

En se basant sur les hypothèses ci-dessus, le champ de déplacement est donné par :

$$\begin{cases} U(x, y) = u_0 - z \cdot \frac{dw}{dx} \\ W(x) = w_0(x) \end{cases} \quad (\text{II-1})$$

Avec :

U, W : Les déplacements suivant les directions x, z respectivement.

u_0, w_0 : Les déplacements de la fibre moyenne suivant les directions x, z respectivement.

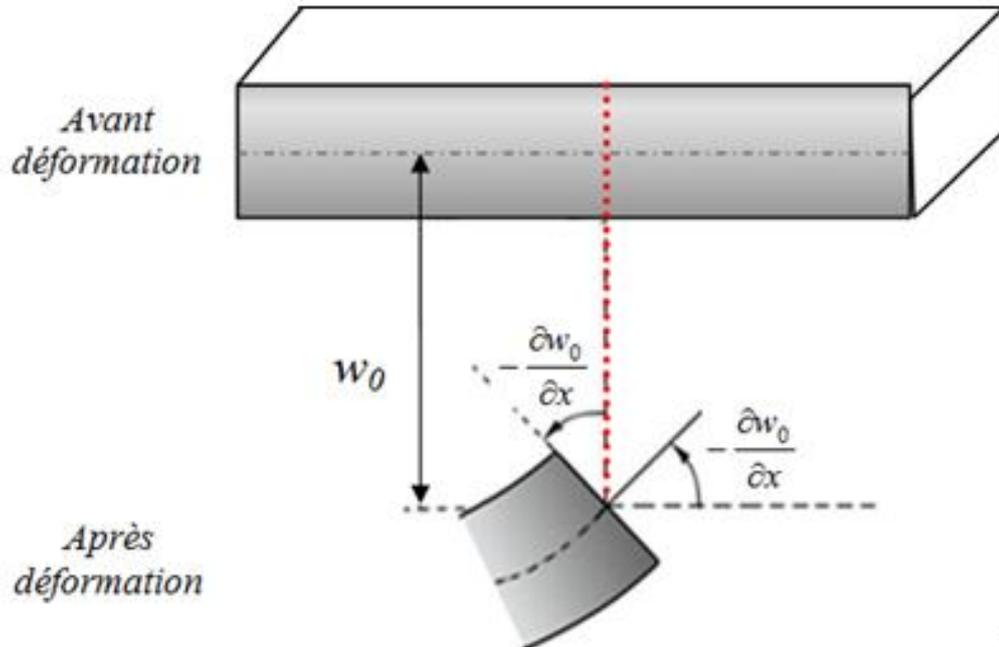


Figure II.1 Schéma de principe de la théorie classique des poutres

$\frac{\partial w}{\partial x}$ Est la rotation due à la flexion.

Sous ces hypothèses, les sections droites de la poutre ne subissent aucun glissement, en effet :

$$\gamma = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (\text{II-2})$$

Donc il en résulte que le cisaillement est négligeable par les hypothèses de cette théorie. Puisque ce modèle ne tient pas en compte l'effet de cisaillement transverse, il donne des résultats imprécis pour les poutres courtes.

Problème de cette théorie :

La négligence de la déformation transversale, ne peut plus résoudre les différents problèmes comme la vibration des poutres ou le flambage même aussi la flèche.

II.3. la théories de déformation en cisaillement en de premier ordre (TIMOSHENKO)

Les études sur la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) s'applique pour le cas des poutres courtes , elle est basée sur le principe; qu'après déformation, la section plane reste plane mais elle perte sa perpendicularité par rapport à la ligne moyenne de la poutre (figure II.2). Ceci est dû au cisaillement transverse, découvert par Timoshenko, sur l'épaisseur de la poutre. Cette théorie peuvent être référée dans

(Reissner, 1945 ; Mindlin, 1951) qui a mené au modèle de plaque de Reissner-Mindlin. Ainsi que Timoshenko et Woinowsky-Krieger (1959), Reddy (1997, 1999).

Dans ce cas, la fonction $f(z)$ est égale à z . Il existe un cisaillement uniforme et les déformations dues au cisaillement transversal ne sont pas négligées. C'est la théorie de premier ordre.

La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (théorie de Timoshenko) a prolongée la théorie classique des poutres en tenant compte de l'effet de cisaillement transverse, et cela à travers ces hypothèses. L'hypothèse de base porte sur une schématisation du champ de déplacement à l'intérieur du solide (hypothèse "cinématique") : le solide est assimilé à un milieu curviligne, le champ de déplacement du milieu continu étant ensuite évalué à partir de la solution trouvée en supposant qu'une section droite initialement plane et perpendiculaire à la "ligne moyenne" ainsi définie reste plane mais non perpendiculaire. En un point quelconque du milieu curviligne. Le champ de déplacement pour un point $M(x, z)$ quelconque s'exprime en fonction de ces inconnues :

$$\begin{cases} U(x, z) = u_0(x) + z \cdot \frac{dw}{dx} - z \cdot \varphi_y(x) \\ W(x, z) = w_0(x) \end{cases} \quad (\text{II-3})$$

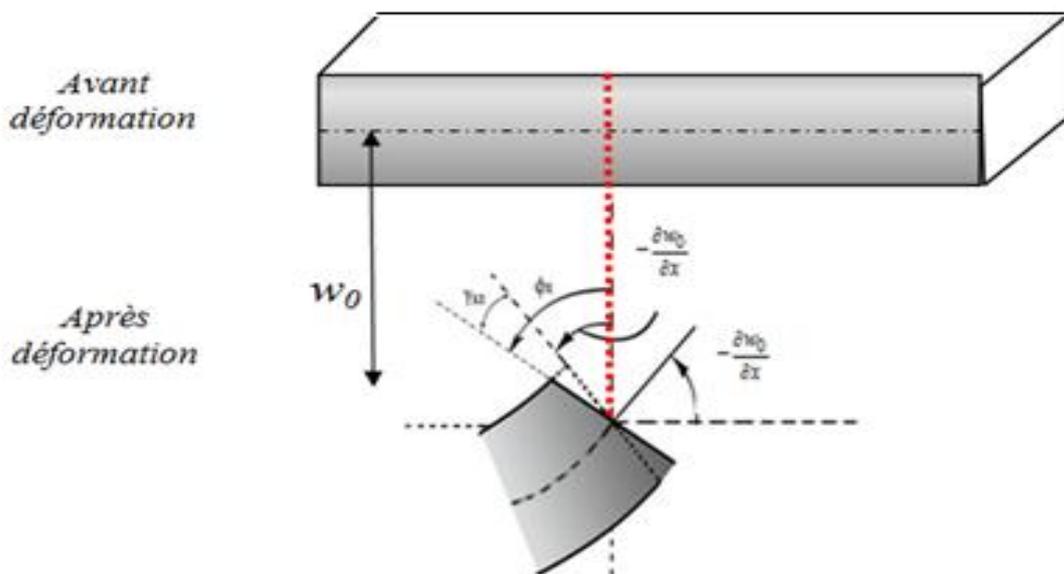


Figure II.2 schéma de principe de la théorie des poutres de Timoshenko (FSDT).

Où

φ_y : Etant la rotation totale de la section mesurée sur la ligne moyenne de la poutre.

Si on veut calculer la contrainte de cisaillement :

$$\begin{cases} \gamma = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \varphi_y \\ \tau = \gamma \cdot G \end{cases} \quad (\text{II-4})$$

Avec G : le module de cisaillement transverse.

Donc, cette théorie a corrigé le défaut de la théorie classique qui ne tient pas compte du cisaillement transverse, mais au même temps ces contraintes sont constantes à travers l'épaisseur, ce qui n'est pas la réalité. Pour cela, les chercheurs ont trouvé des coefficients correcteurs notés "k" pour régler ce problème. Ces coefficients dépendent de la forme géométrique de la poutre considérée (par exemple, pour une poutre de section rectangulaire $k=5/6$).

Les contraintes de cisaillement et les déformations sont uniformes et constantes à travers l'épaisseur (Figs II.4 et II.5).

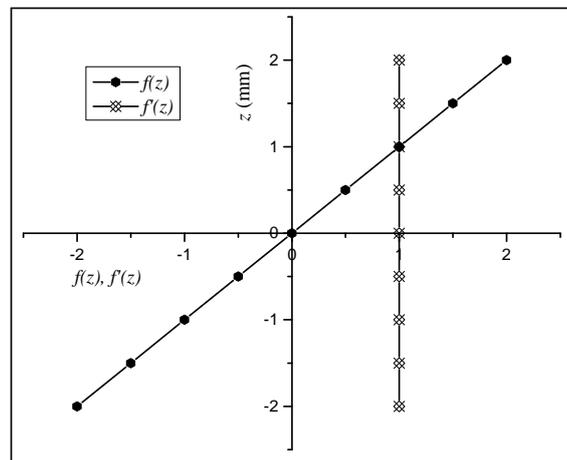


Figure II. 3: Variation de la fonction de gauchissement $f(z) = z$ et $f'(z)$ suivant l'épaisseur.

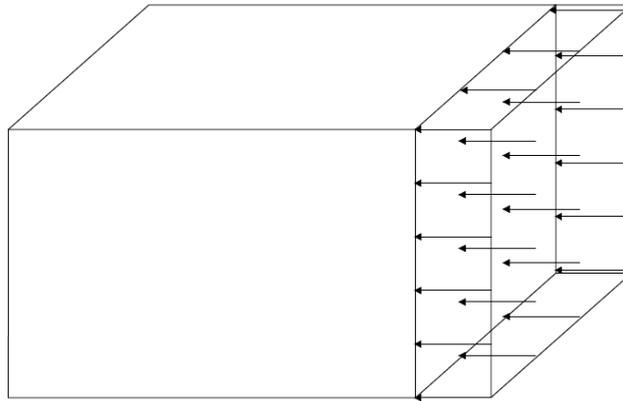


Figure II.4 la distribution (constante) des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur dans la théorie de Timoshenko.

Les facteurs de correction sont calculés par comparaison entre l'énergie de cisaillement transverse du 1er ordre et celle d'ordre supérieur (Shyang-Ho et Yen-Ling, 2006 ; Davoodinik, 2005 ; Ugural, 1981). Un calcul plus exact (Shyang-Ho et Yen-Ling, 2006 ; Nowinski, 1978 ; Zhong et Yu, 2007) des facteurs de correction est obtenu en comparant l'énergie de cisaillement du 1er ordre avec l'énergie de cisaillement par contraintes de cisaillement. Ces contraintes sont déduites des équations d'équilibre.

D'ailleurs pour éviter l'introduction d'un facteur de correction, des théories de déformation en cisaillement d'ordre élevé ont été développées.

- **Avantage de cette théorie :**

Cette théorie est plus améliorée que la théorie classique parce qu'elle a pris une fonction supplémentaire et ne néglige plus le cisaillement transversal.

- **Problème de cette théorie :**

Aux bords extrêmes de la poutre elle prédit des contraintes des cisaillements. l'introduction de coefficients de correction peut ramener des erreurs dans les solutions analytiques pour cela les chercheurs essayent de passer à une autre théorie.

II.4. la théorie de déformation en cisaillement en d'ordre élevé (REDDY)

À la différence de la théorie classique et la théorie de Timoshenko avec les acceptations de la distribution linéaire du déplacement par l'épaisseur, la théorie d'ordre élevé est basée sur une distribution non linéaire des champs dans l'épaisseur. Par conséquent, on tient compte des effets de la déformation transversale de cisaillement et/ou de la déformation normale transversale. Ces modèles n'exigent pas des facteurs de correction. Elle est plus précise que

la théorie du premier ordre puisqu'elle introduit une fonction qui tient compte du phénomène de "gauchissement". Par définition; le gauchissement apparaît lorsque la section transversale de la poutre perde sa planéité (figure II.4). La fonction $f(z)$ représente le gauchissement et sa dérivée $f'(z)$ le cisaillement.

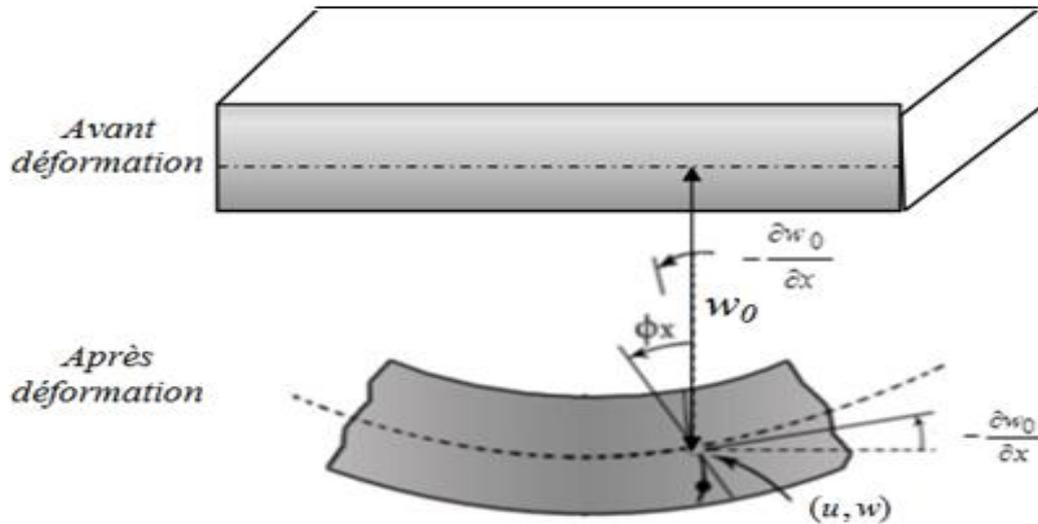


Figure II.5 Illustration de la poutre d'ordre élevé.

Le champ de déplacement est généralement écrit comme suite:

$$\begin{cases} u(x, z) = u_0(x) - z \frac{\partial w_0(x)}{\partial x} + f(z) \varphi_y(x), \\ w(x, z) = w_0(x), \end{cases} \quad (\text{II-5})$$

Avec : (u_0, w_0) et (φ_y) sont les déplacements en membrane et la rotation autour de l'axe y, respectivement, $f(z)$ est une fonction de cisaillement transverse caractérisant les théories correspondantes. En effet, les déplacements de la théorie classique de poutre (CBT) sont obtenus en prenant $f(z) = 0$, alors que la théorie de premier ordre (FSDT) peut être obtenue par $f(z) = z$.

Pour que les contraintes tangentielles soient nulles sur les bords extrêmes de la poutre,

On doit avoir:

$$f'(z) \Big|_{z = \pm \frac{h}{2}} = 0 \quad (\text{II-6})$$

C'est la condition qui nous permet d'avoir une répartition parabolique des contraintes de cisaillement sur l'épaisseur de la poutre d'une part et de choisir correctement des fonctions cubiques qui répondent à la condition (II-6). Selon l'expression de la fonction de gauchissement.

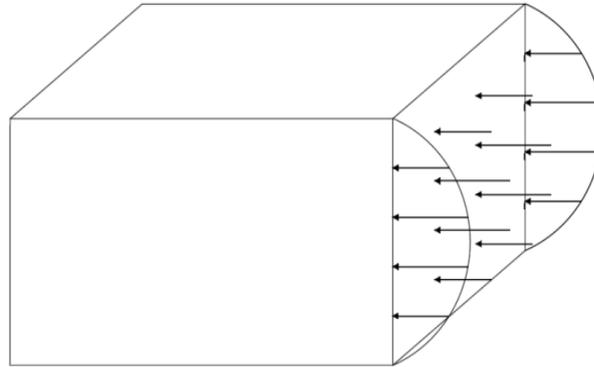


Figure II.6 la distribution (variable) des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur dans la théorie d'ordre élevé.

Voici quelques contributions importantes de développement de modèles d'ordre supérieur qui se sont distingués dans la littérature et qui diffèrent par la fonction de formes $f(z)$:

- L'approche d' (Ambartsumyan, 1969) avec ;

$$f(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \quad (\text{II-7})$$

- L'approche de (Reissner, 1945), avec ;

$$f(z) = \frac{5}{4} z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II-8})$$

- L'approche de (Reddy, 1984) avec ;

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II-9})$$

Dans le modèle de (Reddy, 1997), le champ de déplacement membranaire est cubique et le déplacement normal w est constant. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution élastique tridimensionnelle.

La distribution des contraintes de cisaillement transversal est parabolique suivant l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

-L'approche de (Touratier, 1991) avec ;

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{z}{h}\right) \quad (\text{II-10})$$

Touratier propose le modèle "sinus" qui est différent des autres modèles d'ordre supérieur puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement suivant l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{z}{h}\right) = \frac{h}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi z}{h}\right)^{2n+1} \\ &= z \left(1 - \frac{\pi^2 z^2}{3! h^2} + \frac{\pi^4 z^4}{5! h^4} - \frac{\pi^6 z^6}{7! h^6} + \dots \right) \end{aligned} \quad (\text{II-11})$$

Récemment, Afaq et al. (Afaq et al., 2003) propose un modèle exponentiel avec une cinématique plus riche.

La fonction de cisaillement transverse est de la forme suivante :

$$f(z) = z e^{-2(z/h)^2} \quad (\text{II-12})$$

Le choix de la fonction exponentielle permet un développement en puissance pair et impair de la variable z alors que la fonction "sinus" (Touratier) ne permet qu'un développement en puissances impaires.

-L'approche de (Aydogdu, 2005) avec ;

$$f(z) = z \alpha^{\frac{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}{\ln(\alpha)}} \quad (\text{II-13})$$

Le choix de la fonction exponentielle permet un développement en puissance pair et impair de la variable z alors que la fonction "sinus" de Touratier ne permet qu'un développement en puissance impair.

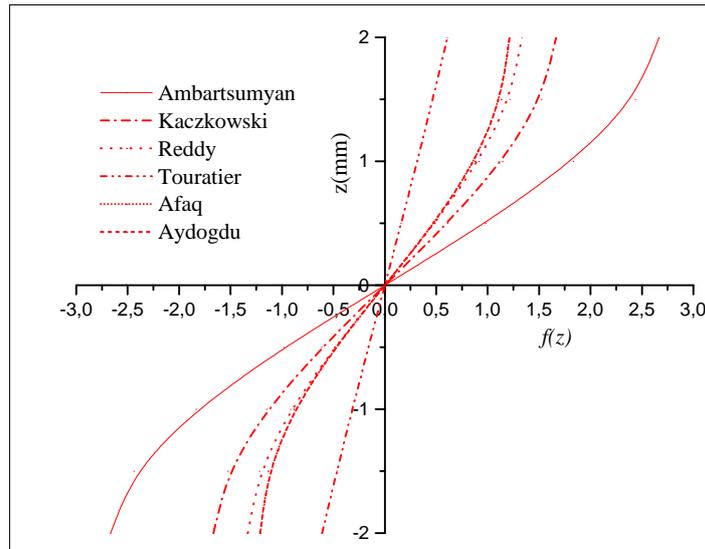


Figure II.7: Variation de la fonction de forme $f(z)$ des différents modèles en fonction de l'épaisseur.

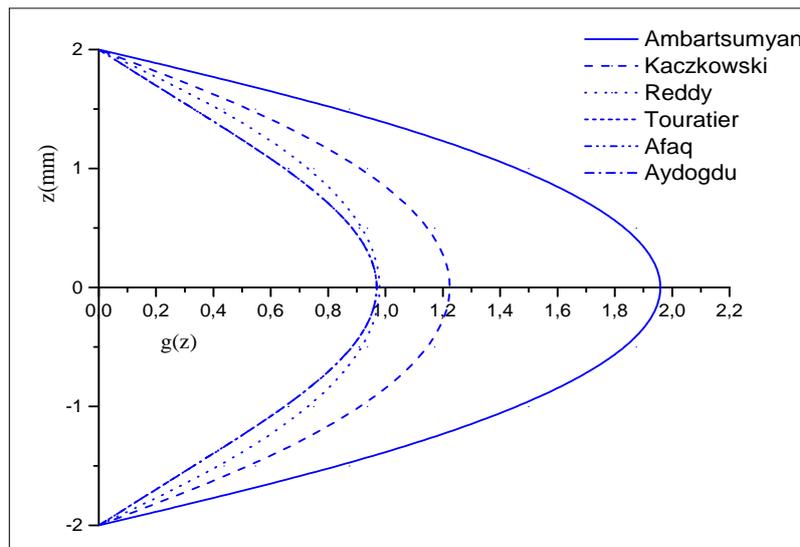


Figure II.8: Variation de la dérivée de la fonction de forme $f'(z)$ des différents modèles suivant l'épaisseur.

La figure ci-dessus (II-6), illustre la variation de la fonction de gauchissement $f(z)$ des différents modèles en fonction de l'épaisseur de la poutre. Cette fonction est symétrique par rapport au plan moyen de la poutre. On remarque que les deux approches d'Ambartsumyan et de Kaczkowski sont un peu loin des autres fonctions de forme ; elles ont servies comme éléments de base pour développer les autres fonctions qui sont plus proches de l'analyse 3D. Pour la (figure II-7), on remarque aussi la divergence des deux approches d'Ambartsumyan et de Kaczkowski par rapport aux autres approches.

Dans ce cas, à l'aide des fonctions de gauchissement les contraintes de cisaillement de la HSDT sont paraboliques à travers l'épaisseur comme est montrer dans la figure ci-dessous (Figure II.9).

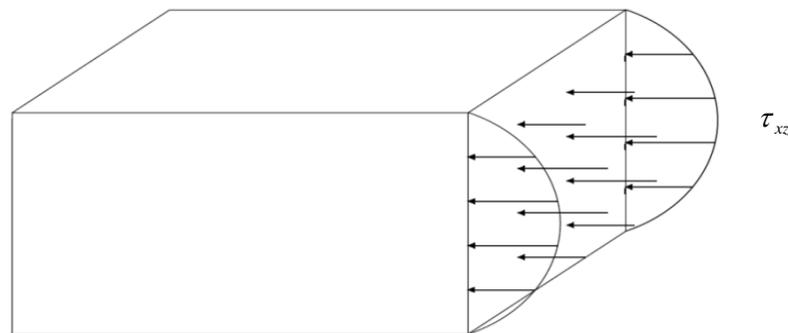


Figure II.9 la distribution (variable) des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur dans la théorie d'ordre élevé.

II.5.Conclusion

On note que ce chapitre a fait appel à différents type de théories ;

- 1- théorie classique des poutres (Euler-Bernoulli).
- 2- théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (Timoshenko).
- 3- théorie d'ordre élevé.

A travers notre lecture de la littérature en matière de théories d'ordre élevé, il apparaît que celles-ci sont certes intéressantes du point de vue précision, mais demeurent néanmoins coûteuses en temps de calcul et assez complexes en termes de formulations.

***Chapitre III: Modèle
Analytique de la
vibration libre des
poutres poreuses***

Chapitre III : Modèle Analytique de la vibration libre des poutres poreuses

III .1 .Introduction

Considérons une poutre FG simplement appuyées de longueur L , largeur b , est épaisseur h , la poutre examinée la figure (IV.1) occupe les intervalles suivants :

$$0 \leq x \leq L ; -b/2 \leq y \leq b/2 ; -h/2 \leq z \leq h/2 \quad (\text{III .1})$$

Où x, y, z sont des coordonnées cartésiennes.

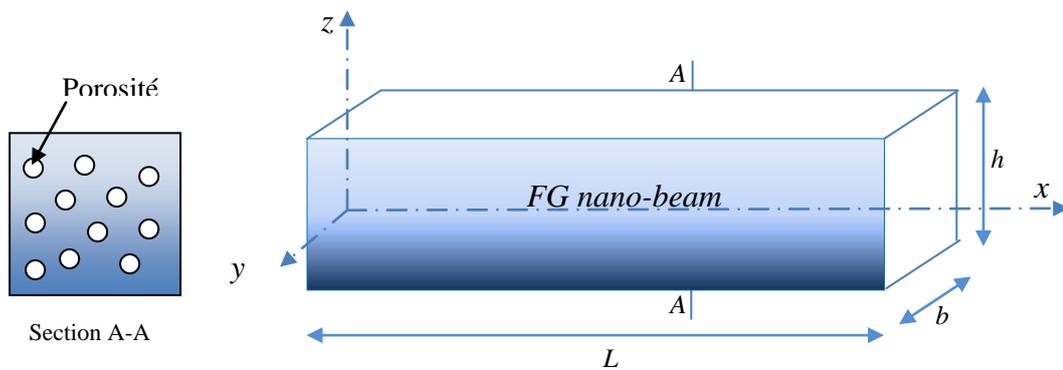


Figure III. 1: Géométrie d'une poutre.

Les formulations théoriques pour l'étude de la vibration libre des poutres fonctionnellement graduées simplement appuyées sont présentées dans ce qui suit.

III .2 .Propriétés matériel effectives des poutres FG

Une poutre FG fabriqué à partir d'un mélange de deux types de matériaux différents, par exemple le métal et la céramique. Les propriétés matérielles des poutres FG sont supposées variées d'une façon continue à travers l'épaisseur de la poutre.

III .2.1 . Poutres FG imparfaite (Type-I)

Dans ce travail, une poutre non parfaite est considéré avec la présence des pores à travers l'épaisseur à cause du défaut de fabrication. Une loi de mélange modifié en considérant la fraction volumique alpha ($\alpha \ll 1$), est utilisé selon Wattanasakulpong et Ungbhakorn (2014) comme suit :

$$P = P_m \left(V_m - \frac{\alpha}{2} \right) + P_c \left(V_c - \frac{\alpha}{2} \right) \quad (\text{III.2})$$

La fraction volumique totale du métal et de la céramique est $V_m + V_c = 1$, et la loi de puissance de la fraction volumique de la céramique est donné par :

$$V_c = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k \quad (\text{III.3})$$

Ainsi, les propriétés des poutres FG non parfaites peuvent être écrire par :

$$P = (P_c - P_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + P_m - (P_c + P_m) \frac{\alpha}{2} \quad (\text{III.4})$$

Il est montré que le nombre réel positif k ($0 < k < \infty$) est l'indice de loi de puissance ou l'indice de la fraction volumique, et z est la distance à partir de l'axe moyen de la poutre FG. La poutre FG devient une poutre entièrement en céramique lorsque $k = 0$ et entièrement en métal pour des grandes valeurs de k ($k \rightarrow \infty$).

Par conséquent, le module de Young (E) et la masse volumique (ρ) de la poutre FG non parfaite peut être exprimé par (**Type-I**) :

$$E(z) = (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + E_m - (E_c + E_m) \frac{\alpha}{2} \quad (\text{III.5})$$

$$\rho(z) = (\rho_c - \rho_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + \rho_m - (\rho_c + \rho_m) \frac{\alpha}{2} \quad (\text{III.6})$$

Cependant, le coefficient de poisson est supposé être constant dans cette étude. Les propriétés matérielles de la poutre FG parfaite peuvent être obtenus lorsque $\alpha = 0$.

III .2.2 . Poutres FG imparfaite (Type-II)

De plus, pour un autre scénario de la disposition de la porosité, il est possible d'obtenir des poutres FG non-parfaite qui ont une porosité variable à travers l'épaisseur (Wattanasakulpong et al 2012). Dans ce cas, le module de Young (E) et la masse volumique (ρ) des équations [(III.5) et (III.6)] sont remplacés par (**Type-II**) :

$$E(z) = (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + E_m - (E_c + E_m) \frac{\alpha}{2} \left(1 - \frac{2|z|}{h} \right) \quad (\text{III.7-a})$$

$$\rho(z) = (\rho_c - \rho_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + \rho_m - (\rho_c + \rho_m) \frac{\alpha}{2} \left(1 - \frac{2|z|}{h} \right) \quad (\text{III.7-b})$$

III .2.3 . Poutres FG imparfaite (Type-III)

Récemment, Gupta et Talha (2017) ont proposé une nouvelle distribution de la porosité qui sera utilisé pour (Type-III) :

$$E(z) = (E_c - E_m) \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^k - \log \left(1 + \frac{\alpha}{2} \right) (E_c + E_m) \left(1 - \frac{2|z|}{h} \right) + E_m \quad (\text{III.8-a})$$

$$\rho(z) = (\rho_c - \rho_m) \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^k - \log \left(1 + \frac{\alpha}{2} \right) (\rho_c + \rho_m) \left(1 - \frac{2|z|}{h} \right) + \rho_m \quad (\text{III.8-b})$$

III.3. Hypothèses de base

Les hypothèses de base considérées dans la présente formule sont :

- (i) Les déplacements sont petits par rapport à l'épaisseur de la poutre et par conséquent les déformations engendrées sont infinitésimales.
- (ii) Le déplacement transversale w introduit deux composantes : une composante de flexion w_b et une autre de cisaillement w_s tels que :

$$w(x, z) = w_b(x) + w_s(x) \quad (\text{III.9})$$

- (iii) La contrainte normale σ_z est négligeable.
- (iv) Le déplacement axial u est composé de trois parties : une composante de membrane u_0 , une composante de flexion u_b et une composante de cisaillement u_s tels que :

$$u = u_0 + u_b + u_s \quad (\text{III.10})$$

La composante de flexion u_b est supposé être similaire au déplacement donné par la théorie classique des poutres (ETB) comme :

$$u_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial x} \quad (\text{III.11})$$

La composante du cisaillement u_s donne en conjonction avec w_s une variation parabolique de la déformation de cisaillement γ_{xz} et de la contrainte de cisaillement τ_{xz} qui s'annule à la surface supérieure et inférieure de la poutre. L'expression u_s est donné par :

$$u_s = f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (\text{III.12})$$

III.4.cinématique et équations constitutives

En se basant sur les hypothèses du paragraphe précédente, le champ de déplacement de la présente théorie est donné par :

$$u(x, z, t) = u_0(x, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (\text{III.13a})$$

$$w(x, z, t) = w_b(x, t) + w_s(x, t) \quad (\text{III.13b})$$

La fonction de gauchissement de cisaillement $f(z)$ est présentée comme suit :

$$f(z) = z - \left(h \sinh\left(\frac{z}{h}\right) - z \cosh\left(\frac{1}{2}\right) \right) \quad (\text{III.13c})$$

Les déformations non nulle associées aux champs de déplacements de l'équation (III-13) sont obtenus comme suit :

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 + z k_x^b + f(z) k_x^s, \quad \gamma_{xz} = g \gamma_{xz}^s \quad (\text{III.14})$$

Où

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x}, k_x^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}, k_x^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}, \gamma_{xz}^s = \frac{\partial w_s}{\partial x}, g(z) = 1 - f'(z) \quad (\text{III.15})$$

Les relations contraintes-déformations exprimé par la loi de HOOKE sont donnée par :

$$\sigma_x = \frac{E(z)}{1-\nu^2} \varepsilon_x \quad \text{et} \quad \tau_{xz} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \gamma_{xz} \quad (\text{III.16})$$

III. 5.Principe d' Hamilton

Le Principe d'Hamilton est utilisé ici pour déterminer les équations de mouvement des poutre Fonctionnellement graduées. Le principe d'Hamilton est présenté sous la forme suivante ((Ait Sidhoum et al. 2017 and 2018; Zidi et al. 2017; Belabed et al. 2018; Zine et al. 2018; Bakhadda et al. 2018) :

$$\int_0^t (\delta U - \delta K) dt = 0 \quad (\text{III.17a})$$

Ou δU et δK sont la variation de l'énergie de déformation et l'énergie cinétique respectivement.

En utilisant les équations (III.14) et (III.16). le principe d'Hamilton peut être réécrit sous la forme suivante :

$$\int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx}) dz dx - \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} \rho \left[\ddot{u} \delta u + (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) \delta (w_b + w_s) \right] dz dx = 0 \quad (\text{III.17b})$$

En remplaçant les équations (III.15) et (III.16) dans l'équation (III.17b), en intégrant par partie et en rassemblant les coefficients δu_0 , δw_b et δw_s on obtient les équations du mouvement suivant :

$$\delta u_0 : \frac{\partial N}{\partial x} = I_0 \ddot{u}_0 - J_1 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial x} \quad (\text{III.18a})$$

$$\delta w_b : \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} = I_1 \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} - I_2 \frac{d^2 \ddot{w}_b}{dx^2} - J_2 \frac{d^2 \ddot{w}_s}{dx^2} + I_0 \left(\ddot{w}_b + \ddot{w}_s \right) \quad (\text{III.18b})$$

$$\delta w_s : \frac{\partial^2 Q_x}{\partial x^2} + \frac{\partial P_{xz}}{\partial x} = J_1 \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x^2} - J_2 \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2} - K_2 \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2} + I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) \quad (\text{III.18c})$$

Où N_x, M_x, Q_x et P_{xz} sont les efforts résultants défini par :

$$(N_x, M_x, Q_x) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, f) \sigma_x dz \quad \text{et} \quad P_{xz} = \int_{-h/2}^{h/2} g \tau_{xz} dz \quad (\text{III.19a})$$

Et $(I_0, I_1, J_1, J_2, I_2, K_2)$ sont :

$$(I_0, I_1, J_1, J_2, I_2, K_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, f(z), zf(z), z^2, f^2(z)) \rho(z) dz \quad (\text{III.19b})$$

L'équation (III.18) peut-être exprimé en terme de déplacement (u_0, w_b, w_s) en utilisant les équations (III.13, III.14, III.15 et III.19) par :

$$A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - B_{11} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} - B_{11}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3} = I_0 \ddot{u}_0 - J_1 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial x} \quad (\text{III.20a})$$

$$B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - D_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - D_{11}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} = I_1 \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} - I_2 \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x^2} - J_2 \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2} + I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) \quad (\text{III.20b})$$

$$B_{11}^s \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - D_{11}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - H_{11}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} + A_{55}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} = J_1 \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} - J_2 \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x^2} - K_2 \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2} + I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) \quad (\text{III.20c})$$

Ou les composantes de la rigidité sont donnée par :

$$\{ A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s \} = \int_{-h/2}^{h/2} \{ 1, z, z^2, f(z), zf(z), f^2(z) \} \frac{E(z)}{(1-\nu^2)} dz \quad (\text{III.21a})$$

$$\{ A_{44}^s, A_{55}^s \} = \int_{-h/2}^{h/2} \{ 1, g^2(z) \} \frac{E(z)}{(1-\nu^2)} dz \quad (\text{III.21b})$$

III. 6.La solution Analytique

Les équations de mouvement sont résolu par la solution Navier pour les poutres simplement appuyés, les variables u_0, w_b, w_s peuvent-être exprimé par:

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ w_b \\ w_s \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_m \cos(\lambda x) e^{i\omega t} \\ W_{bm} \sin(\lambda x) e^{i\omega t} \\ W_{sm} \sin(\lambda x) e^{i\omega t} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.22})$$

Où U_m, W_{bm}, W_{sm} sont les paramètres arbitraire à déterminer, ω est la fréquence associé pour « m » (mode) et $\lambda = m\pi/L$.

En substituant les équations (III.21) et (III.22) dans les équations de mouvement, on obtient le système matriciel suivant :

$$([K] - \omega^2 [M])\{\Delta\} = \{0\} \quad (\text{III.23})$$

Où $\{\Delta\}$ est le vecteur de composante :

$$\{\Delta\}^T = \{U_m, W_{bm}, W_{sm}\} \quad (\text{III.24})$$

Et

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} \end{bmatrix}, [M] = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{III.25})$$

Avec

$$\begin{aligned} k_{11} &= -A_{11} \lambda^2 & m_{11} &= I_0 \\ k_{12} &= B_{11} \lambda^3 & m_{13} &= -J_1 \lambda \\ k_{13} &= B_{11}^s \lambda^3 & m_{21} &= -I_1 \lambda \\ k_{22} &= -D_{11} \lambda^4 & m_{22} &= I_0 + (I_2 \lambda^2) \\ k_{23} &= -D_{11}^s \lambda^4 & m_{23} &= I_0 + (J_2 \lambda^2) \\ k_{33} &= -H_{11}^s \lambda^4 - A_{55}^s \lambda^2 & m_{33} &= I_0 + (K_2 \lambda^2) \end{aligned} \quad (\text{III.26})$$

III. 7. Conclusion

Dans le présent chapitre, nous avons présenté un modèle analytique basé sur la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevée hyperbolique pour l'étude de la vibration libre des poutres poreuses. Ce modèle n'exige pas un facteur de correction de cisaillement et donne une description parabolique des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur tout en satisfaisant les conditions de la nullité des contraintes de cisaillement sur les surfaces inférieure et supérieure de la poutre FG. Une série de résultats sont forme des tableaux et des graphes explicites sera présenté dans le chapitre suivant.

*Chapitre IV:
Résultats numérique
et discussions*

Chapitre IV : Résultats numérique et discussions

IV.1.Introduction

Dans ce chapitre, des résultats numériques de la fréquence fondamentale des poutres FG poreuse simplement appuyées sont présentés sous forme de tableaux et de graphes explicites. Une étude paramétrique sera présentée pour montrer les différents paramètres influençant le comportement dynamique des poutres FG parfait et imparfait simplement appuyée.

IV.2.Propriétés effectives

Les propriétés effectives des matériaux utilisés dans le présent travail sont résumées dans le tableau ci-dessous (tableau IV.1)

Tableau IV.1 : Les propriétés effectives d'Aluminium et d'Alumina.

Matériaux	Module de Young [GPa]	Densité [kg/m ³]	Coefficient de poisson
Aluminium (Al)	70.1	2700	0.3
Alumina (Al ₂ O ₃)	380	3800	

Pour des raisons de comparaison les fréquences fondamentales sont présentées par la forme adimensionnelle suivante :

$$\bar{\omega} = \left(\frac{\omega L^2}{h} \right) \sqrt{I_0 / \int_{-h/2}^{h/2} E(z) dz} \quad (IV.1)$$

IV. 3. Poutre homogène en céramique:

Dans cette partie, la variation de la fréquence fondamentale adimensionnelle ($\bar{\omega}$) des poutres homogène ($k = 0$) est présentée dans le tableau (IV.2). Les résultats obtenus en utilisant le modèle actuel sont comparés avec ceux des autres théories trouvés dans la littérature à savoir la théorie d'Euler Bernoulli (Reddy 1999), les théories de déformation du premier ordre et d'ordre élevé de troisième ordre de Koochaki (2011), la théorie raffinée de Ait Atmane et al (2015). A partir des résultats présentés une bonne concordance est confirmée entre les présents résultats en utilisant la HySDT et la FSDT avec un facteur de correction

$k_s = 5 / 6$ et ceux de la RBT de Ait Atmane et al. (2015). On peut observer à partir des résultats que les valeurs des fréquences fondamentale adimensionnelle ($\bar{\omega}$) sont en relation inverse avec le rapport d'élanement h / L .

Tableau IV.2: Comparaison des fréquences non-dimensionnelles fondamentales ($\bar{\omega}$) pour des poutres homogènes ($k = 0$).

h/L	ETB (Reddy1999)	FSDBT (Koochaki 2011)	TSDBT (Koochaki2011)	HSDBT (AIT Atmane et al 2015)	présente FSDT $K_s=5/6$	présente FSDT $K_s=1$	Présente HySDT
0.01	2.985526	2.986137	2.9861380	2.9861344	2.9861344	2.9862045	2.9861344
0.0125	2.985232	2.985827	2.9858280	2.9858287	2.9858287	2.9859382	2.9858287
0.0142	2.984340	2.985556	2.9855680	2.9855821	2.9855821	2.9857234	2.9855821
0.0166	2.984865	2.985155	2.9851680	2.9851807	2.9851807	2.9853737	2.9851807
0.02	2.983701	2.984505	2.9845054	2.9845054	2.9845053	2.9847854	2.9845054
0.025	2.982588	2.983285	2.9832858	2.9832858	2.9832857	2.9837227	2.9832858
0.033	2.979668	2.980657	2.9806572	2.9807765	2.9807764	2.9815358	2.9807765
0.04	2.976570	2.978020	2.9780220	2.9780222	2.9780219	2.9791343	2.9780222
0.05	2.971688	2.973193	2.9731941	2.9731941	2.9731933	2.9749222	2.9731941
0.066	2.962858	2.962858	2.9628610	2.9633287	2.9633261	2.9663062	2.9633287
0.1	2.931568	2.934044	2.9340570	2.9340576	2.9340444	2.9406690	2.9340576

IV. 4. Poutre fonctionnellement graduée parfaite:

Tableau IV.3: les fréquences fondamentales non-dimensionnelles ($\bar{\omega}$) des poutres FG simplement appuyées.

L/h	k	Ait Atmane et al. (2015)	Sina et al. (2009)	Présente FSDT $k_s = 5 / 6$	Présente FSDT $k_s = 1$	Présente HySDT
10	0	2.879	2.879	2.879	2.885	2.879
	0.3	2.774	2.774	2.774	2.780	2.775
30	0	2.922	2.922	2.922	2.923	2.922
	0.3	2.813	2.813	2.813	2.814	2.813
100	0	2.927	2.927	2.927	2.927	2.927
	0.3	2.817	2.817	2.817	2.817	2.817

Le tableau (IV.3) montre la comparaison des valeurs de la fréquence fondamentale non-dimensionnelles ($\bar{\omega}$) des poutres parfaites en matériaux fonctionnellement gradué pour les différentes valeurs de l'indice de puissance ($k = 0, 0.3$) et le rapport d'élanement ($L/h = 10, 30 \text{ et } 100$). Les résultats de la présente théorie sont comparés avec ceux donnée par Sina et al. (2009) en utilisant la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre et Ait Atmane et al. (2015) en utilisant la théorie raffinée. On peut constater à partir des résultats obtenues que l'augmentation de l'indice matériel (k) conduit à une réduction dans les valeurs de la fréquence fondamentale adimensionnelle ($\bar{\omega}$) et cela est due que la poutre devient moins rigide (métallique).

IV. 5. Poutre fonctionnellement graduée imparfaite:

Tableau IV.4: Les trois premières fréquences naturelles non-dimensionnelles ($\bar{\omega}$) pour des poutres (FG) parfaite (non-poreuse) et imparfaite (poreuse Type-I) simplement appuyées.

k	α	Théories	$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_2$	$\bar{\omega}_3$
0.5	0.0	Ait Atmane et al. (2015)	2.652071106	9.227581431	17.69478543
		Présente	2.650472647	9.195710407	17.54345443
	0.1	Ait Atmane et al. (2015)	2.629935615	9.163948853	17.59574226
		Présente	2.628048813	9.126309260	17.41682320
	0.2	Ait Atmane et al. (2015)	2.601215142	9.080767423	17.46517379
		Présente	2.598955994	9.035692512	17.25066644
1.0	0.0	Ait Atmane et al. (2015)	2.581070224	8.998837152	17.29734773
		Présente	2.578035938	8.938297345	17.01260978
	0.1	Ait Atmane et al. (2015)	2.527515127	8.838878481	17.03790125
		Présente	2.523900369	8.767016512	16.69957733
	0.2	Ait Atmane et al. (2015)	2.450084220	8.604783550	16.65295765
		Présente	2.445741996	8.518950939	16.24823045
2.0	0.0	Ait Atmane et al. (2015)	2.586406159	8.950808821	17.11088871
		Présente	2.582233842	8.868138900	16.73398177
	0.1	Ait Atmane et al. (2015)	2.487791307	8.651090665	16.61507660
		Présente	2.482737128	8.551870014	16.16222587
	0.2	Ait Atmane et al. (2015)	2.316541140	8.123771581	15.72853020
		Présente	2.310511483	8.007236471	15.19420521
5.0	0.0	Ait Atmane et al. (2015)	2.792915979	9.395559685	17.55065355
		Présente	2.789258101	9.323091967	17.23891216
	0.1	Ait Atmane et al. (2015)	2.694743432	9.069598562	16.96555175
		Présente	2.689856047	8.974831801	16.56330360
	0.2	Ait Atmane et al. (2015)	2.450980911	8.307099364	15.65914662
		Présente	2.444597351	8.186100042	15.14595051

Le tableau (IV.4) présente les trois premières fréquences naturelles non-dimensionnelles ($\bar{\omega}$) pour des poutres (FG) parfaite (non-poreuse) et imparfaite (poreuse) simplement appuyées avec ($L/h = 5$). Les poutres poreuses dans ce tableau sont calculées en utilisant la première configuration de la distribution des ports (Type-I). Les résultats actuels sont en bon accord avec ceux d'Ait Atmane et al. (2015) et cela pour les différentes valeurs de l'indice de porosité. On peut observer aussi que les fréquences adimensionnelles ($\bar{\omega}$) diminuent lorsque le paramètre de porosité augmente.

Le tableau (IV.5) montre l'effet des indices de porosité et matériel sur les six premières fréquences naturelles non-dimensionnelles ($\bar{\omega}$) des poutres (FG) simplement appuyées. Les poutres poreuses sont calculées en utilisant la formulation logarithmique de la distribution des pores (Type-III).

Tableau IV.5: Les six premières fréquences naturelles non-dimensionnelles ($\bar{\omega}$) pour des poutres (FG) parfaite (non-poreuse) et imparfaite (poreuse Type-III) simplement appuyées.

k	α	$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_2$	$\bar{\omega}_3$	$\bar{\omega}_4$	$\bar{\omega}_5$	$\bar{\omega}_6$
0.5	0.0	2.650472647	9.195710407	17.54345443	26.56534688	35.81409418	45.13520746
	0.05	2.658326127	9.210078503	17.54894120	26.54866881	35.76744788	45.05499476
	0.1	2.666156733	9.224042988	17.55324954	26.52988814	35.71780803	44.97101789
	0.2	2.681746162	9.250694505	17.55814138	26.48573052	35.60919079	44.79131661
	0.3	2.697231158	9.275514632	17.55773662	26.43223956	35.48741885	44.59517187
1.0	0.0	2.578035938	8.938297345	17.01260978	25.68675046	34.53859609	43.43889655
	0.05	2.582944780	8.941190342	16.99311705	25.62882652	34.43422998	43.28594058
	0.1	2.587627551	8.942914202	16.97091929	25.56655621	34.32410014	43.12613246
	0.2	2.596240597	8.942543825	16.91779546	25.42813350	34.08555029	42.78488235
	0.3	2.603705436	8.936490288	16.85189005	25.26962265	33.82078517	42.41286659
2.0	0.0	2.582233842	8.868138900	16.73398140	25.11200630	33.64115077	42.23493513
	0.05	2.583239921	8.852442278	16.67242560	24.98637281	33.44589730	41.97260992
	0.1	2.583353401	8.833114575	16.60355151	24.84993430	33.23711784	41.69495107
	0.2	2.580443847	8.782015944	16.44118599	24.54121551	32.77510966	41.08969546
	0.3	2.572407815	8.711204890	16.24074007	24.17794542	32.24631299	40.41029236
5.0	0.0	2.789258101	9.323091967	17.23891288	25.54204433	33.95301160	42.42578022
	0.05	2.796264890	9.298859726	17.12683005	25.31340456	33.60165905	41.95737614
	0.1	2.801422376	9.264224905	16.99191658	25.04980227	33.20503760	41.43547817
	0.2	2.804160232	9.154611104	16.63616012	24.39307344	32.24526527	40.19563004
	0.3	2.791753077	8.969048381	16.12416514	23.50533752	30.99193388	38.61282432

On peut observer à partir du tableau que les fréquences adimensionnelles ($\bar{\omega}$) augmente avec l'augmentation de l'indice de porosité et cela pour les trois premières fréquences avec ($k < 1$) et cela est inversé pour les trois modes qui reste avec ($k \geq 1$). On peut confirmer encore une fois que les fréquences naturelles non-dimensionnelles ($\bar{\omega}$) est en relation inverse avec l'indice de puissance (k).

IV. 6. Etude paramétrique:

Dans cette section, une étude paramétrique sera présenté pour illustré les différents paramètres géométriques et matériels influençant sur la réponse dynamique des poutres fonctionnellement graduée parfaites et imparfaites.

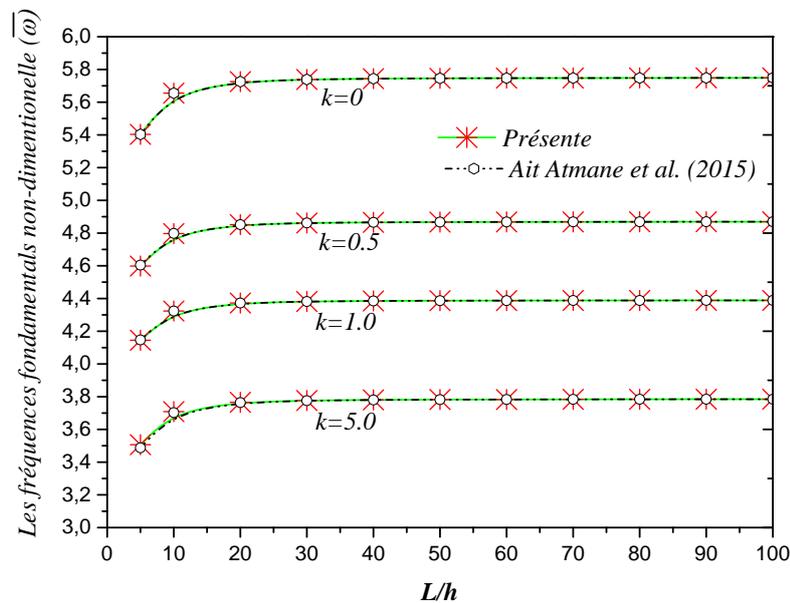


Figure. IV.1: Variation des fréquences fondamentales des poutres FG avec l'élancement pour différentes valeurs de l'indice matériel.

La figure (IV.1) présente la fréquence naturelle non-dimensionnelle en fonction de l'élancement (L/h) pour une poutre "FG" non-poreuse (parfaite), en utilisant la théorie proposé. A travers ces courbes tracées, on peut remarquer que l'augmentation de l'indice matériel " k " conduit à une diminution de la fréquence naturelle non-dimensionnelle ($\bar{\omega}$). On peut observer aussi que la fréquence naturelle est en relation de corrélation directe avec le

rapport d'élanement (L/h). Cependant, on constate que pour une poutre élancée, la fréquence reste constante. Cela est dû à l'effet du cisaillement qui devient négligeable dans ce cas.

L'effet de l'indice de porosité sur les fréquences fondamentales non-dimensionnelles ($\bar{\omega}$) des poutres (FG) est illustré dans les figures (IV.2), (IV.3) et (IV.3). Il est à noter que les figures sont tracé à partir des trois types de distribution de la porosité à travers l'épaisseur (constante, variable et logarithmique) correspond au modèles des poutres FG-Type-I, FG-Type-II et FG-Type-II, respectivement. On peut remarquer à travers la figure (IV.2) que l'augmentation de l'indice de porosité engendre une diminution de la fréquence non-dimensionnelle ($\bar{\omega}$), par contre les figures (IV.2) et (IV.3) montre le cas inverse. Par conséquent, la première distribution de la porosité (Type-I) rend la poutre flexible alors que pour les distributions de la porosité (Type II et III), la poutre devient rigide. On peut confirmer aussi encore une fois que la fréquence naturelle est en relation de corrélation directe avec le rapport d'élanement (L/h).

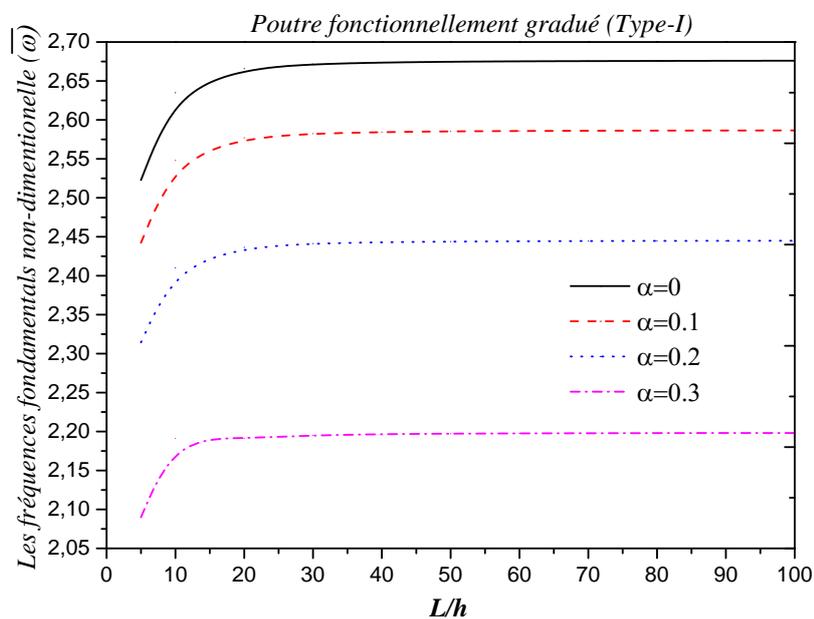


Figure. IV.2 : Variation des fréquences fondamentales des poutres FG ($k = 1.5$) avec l'élanement pour différentes valeurs du paramètre de la porosité (modèle I).

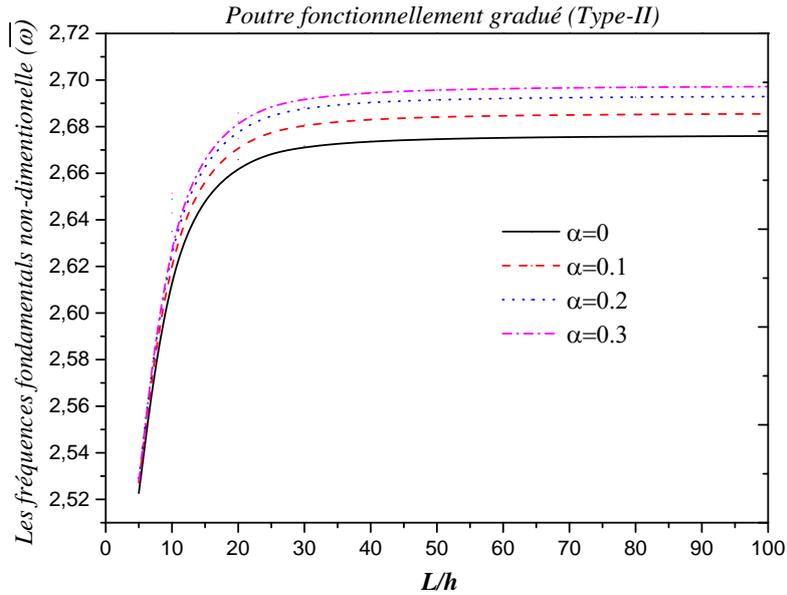


Figure. IV.3: Variation des fréquences fondamentales des poutres FG ($k = 1.5$) avec l'élancement pour différentes valeurs du paramètre de la porosité (modèle II).

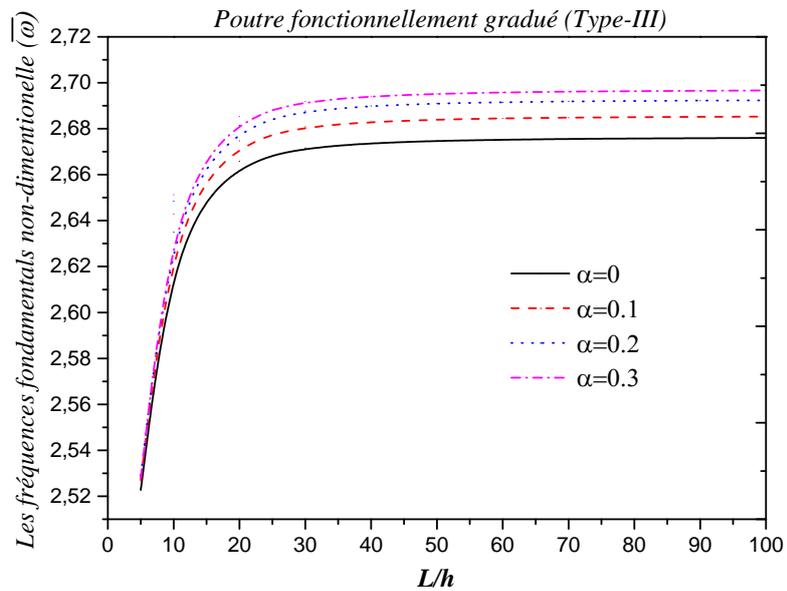


Figure. IV.4 : Variation des fréquences fondamentales des poutres FG ($k = 1.5$) avec l'élancement pour différentes valeurs du paramètre de la porosité (modèle III).

Une comparaison entre fréquences fondamentales des trois types de distribution de porosité à travers l'épaisseur de la poutre (constante de Type I ; variable de Type II et logarithmique de Type III) est présenté dans la figure (IV.4). On peut remarquer que le modèle de Type-II donne des fréquences élevées par rapport le modèle (I). Cependant, on

remarque que le modèle (III) donne des valeurs identiques à ceux déterminées par le modèle (II). De plus, les fréquences augmentent avec l'augmentation de l'indice matériel " k " lorsque ce dernier prend une valeur supérieur à 2.

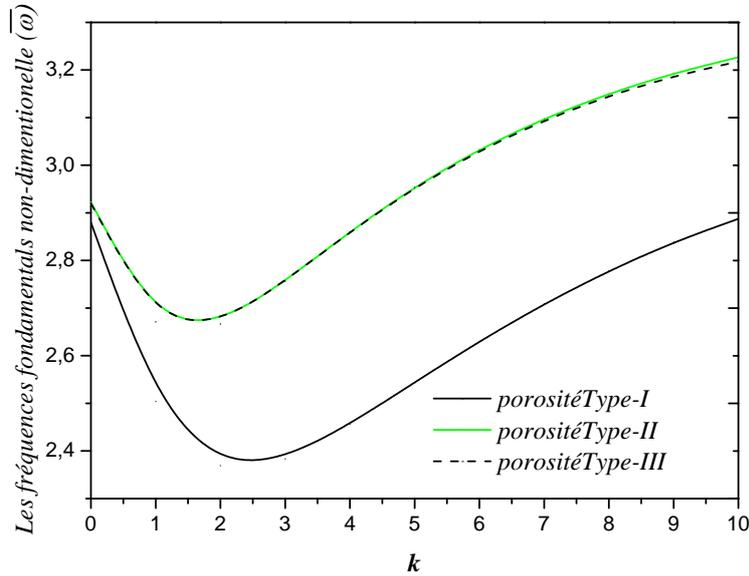


Figure. IV.5 : la variation de la fréquence naturelle non dimensionnelle avec l'indice matériel k en utilisant les trois modèles de distribution de porosité à travers l'épaisseur.

IV.7. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les résultats numériques de la réponse dynamique des poutres fonctionnellement graduée parfaite et poreuse simplement appuyées avec une variation selon une forme de puissance des propriétés matérielles P-FGM et différents modèles de distribution de la porosité (constante de Type I ; variable de Type II et logarithmique de Type III) à travers l'épaisseur en utilisant une nouvelle théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevée hyperbolique HySDT.

Conclusion générale

Conclusion générale

Dans ce travail de mémoire, une théorie de déformation du cisaillement hyperbolique est employée pour l'analyse du comportement vibratoire des poutres FG poreuses et non poreuses. La théorie considère une distribution parabolique de la déformation de cisaillement à travers l'épaisseur de la poutre et respecte les conditions de la nullité de la contrainte du cisaillement dans les faces supérieures et inférieures sans l'utilisation du coefficient de correction du cisaillement. Une loi de mélange modifiée a été utilisée pour introduire la porosité dans la matière. Plusieurs exemples numériques ont été présentés, pour montrer l'efficacité et l'exactitude du présent modèle.

A travers ce travail on peut conclure :

- ✓ les valeurs de la fréquence fondamentale adimensionnelle ($\bar{\omega}$) sont en relation inverse avec le rapport d'élanement h / L .
- ✓ l'augmentation de l'indice matériel (k) conduit à une réduction dans les valeurs de la fréquence fondamentale adimensionnelle ($\bar{\omega}$) et cela est due que la plaque devient moins rigide (métallique).
- ✓ les fréquences adimensionnelles ($\bar{\omega}$) diminuent lorsque le paramètre de porosité augmente.
- ✓ la fréquence naturelle est en relation de corrélation directe avec le rapport d'élanement (L / h)
- ✓ pour une poutre élancée, la fréquence reste constante. Cela est dû à l'effet du cisaillement qui devient négligeable dans ce cas.
- ✓ la première distribution de la porosité (Type-I) rend la poutre flexible alors que pour les distributions de la porosité (Type II et III), la poutre devient rigide.
- ✓ les fréquences augmentent avec l'augmentation de l'indice matériel " k " lorsque ce dernier prend une valeur supérieur à 2.

Finalement, on peut confirmer que la théorie utilisée donne des résultats presque identiques aux autres théories dans la littérature. L'influence de la porosité sur les fréquences naturelles et aussi discuter.

Le travail présenté dans le cadre de ce mémoire de fin d'étude peut être développé et enrichi. Nous envisageons, par exemple, en perspective, d'appliquer le présent modèle pour l'étude statique des différentes formes de structures épaisses et modérément épaisses avec des différentes conditions aux limites.

*Références
bibliographiques*

Références bibliographiques

- Abdizadeh.h., (1997), “Elaboration et caractérisation de composites «composites laminaires tricouches a base d'alumine “, *thèse de doctorat insa de lyon*.
- Afaq, K.S., Karama M. and Mistou S. (2003), “ Un nouveau modèle raffine pour les structures multicouches ”,*Comptes-rendus des 13 114 éméés Journées Nationales sur les Composites, Strasbourg, 289-292*.
- Ait Amar Meziane, M., Abdelaziz, H.H. and Tounsi, A. (2014), “An efficient and simple refined theory for buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates under various boundary conditions”, *J. Sandw. Struct. Mater.*, 16(3), 293-318.
- Ait Atmane, H., Tounsi, A., Bernard, F. and Mahmoud, S.R. (2015), “A computational shear displacement model for vibrational analysis of functionally graded beams with porosities”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 19(2), 369-384.
- Ait Sidhoum, I., Boutchicha, D., Benyoucef , S. and Tounsi, A., (2018), “A novel quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for vibration analysis of simply supported functionally graded plates”, *Smart Structures and Systems*, 22(3), 303-314.
- Ait Sidhoum, I., Boutchicha, D., Benyoucef, S. and Tounsi, A.(2017), “An original HSDT for free vibration analysis of functionally graded plates”, *Steel and Composite Structures.*, 25(6). 735-745.
- Ait Sidhoum,I, (2019), “Analyse de la Vibration Libre des Plaques Epaisses en Matériaux Fonctionnellement Gradués “, *thèse de doctorat , Université USTO oran*.
- Ait Yahia, S., Ait Atmane, H., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2015), “Wave propagation in functionally graded plates with porosities using various higher-order shear deformation plate theories”, *Struct. Eng. Mech, Int. J.*, 53(6), 1143-1165.
- Al-Basyouni, K.S., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2015), “Size dependent bending and vibration analysis of functionally graded micro beams based on modified couple stress theory and neutral surface position”, *Compos. Struct.*, 125, 621-630.
- Ambartsumyan, S A. (1969), “Theory of anisotropic plate”. *Technomic Publishing*.

- Attia, A, Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2015), “Free vibration analysis of functionally graded plates with temperature-dependent properties using various four variable refined plate theories”, *Steel Compos. Struct, Int. J.*, 18(1), 187-212.
- Aydogdu, M. (2005) , “Vibration analysis of cross-ply laminated beams with general boundary conditions by Ritz method”, *International Journal of Mechanical Sciences.*, 47 ,1740–1755.
- Bachir Bouiadjra, R., Adda Bedia, E.A. and Tounsi, A. (2013), “Nonlinear thermal buckling behavior of functionally graded plates using an efficient sinusoidal shear deformation theory”, *Struct. Eng. Mech, Int.* 381.J , 48(4), 547 567.
- Bakhadda, B., Bachir Bouiadjra, M., Bourada, F., Bousahla, A.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. (2018), "Dynamic and bending analysis of carbon nanotube-reinforced composite plates with elastic foundation", *Wind and Structures*, 27(5), 311-324.
- Bao. G., Wang, L., (1995), “Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings”, *Int. J; Solids Structures*, 32 (19): 2853–2871.
- Baron. C., Naili, S. (2008). “Propagation d’ondes élastiques au sein d’un guide d’ondes élastiques anisotrope à gradient unidirectionnel sous chargement fluide ”, *Compte Rendue Mécanique*, 336 (9) , 722–730,
- Bedjilili, Y.Tounsi, A., Berrabah, H.M., Mechab, I., Adda Bedia, E.A. and Benaissa, S. (2009),“Natural frequencies of composite beams with a variable fiber volume fraction including rotary inertia and shear deformation”, *Appl. Math. Mech. - Engl. Ed.*, 30(6), 1-10.
- Belabed, Z., Bousahla, A.A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. (2018), “A new 3 unknown hyperbolic shear deformation theory for vibration of functionally graded sandwich plate”, *Earthquakes and Structures*, 14(2), 103-115.
- Belabed, Z., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. and Anwar Bég, O. (2014), “An efficient and simple higher order shear and normal deformation theory for functionally graded material (FGM) plates”, *Compos.: Part B*, 60, 274-283.

- Benatta, M.A., Mechab, I., Tounsi, A. and Adda Bedia, E.A. (2008), "Static analysis of functionally graded short beams including warping and shear deformation effects", *Comput. Mater. Sci.*, **44**(2), 765-773.
- Benatta, M.A., Tounsi, A., Mechab, I. and Bachir Bouiadjra, M. (2009), "Mathematical solution for bending of short hybrid composite beams with variable fibers spacing", *Appl. Math. Comput.*, 212(2), 337-348.
- Bishop, A., Lin. C.Y., Navaratnam. M., Rawlings. R.D., McShane, H.B., (1993), "A functionally gradient material produced by a powder metallurgical process", *Journal of Materials Science Letters*; 12 (19), 1516-18.
- Boch. P., (1987) „tape casting of layered composites, in processing of advanced ceramics“ .*edited by moya and aza sociedad espanola de ceramica y vidrio .*
- Boch. P., Chartier. T., Huttepain, M., (1986), "Tape casting of Al₂O₃/ZrO₂ laminated Composites", *J. Am. Ceram. Soc*, 69 (8),191-192.
- Bouderba, B., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2013), "Thermomechanical bending response of FGM thick plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations", *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 14(1), 85-104.
- Bourada, M., Kaci, A., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2015), "A new simple shear and normal deformations theory for functionally graded beams", *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 18(2), 409-423.
- Bousahla, A.A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Adda Bedia, E.A. (2014), "A novel higher order shear and normal deformation theory based on neutral surface position for bending analysis of advanced composite plates", *Int. J. Comput. Method.*, 11(6), 1350082.
- Chakraverty, S. and Pradhan, K.K. (2014), "Free vibration of exponential functionally graded rectangular plates in thermal environment with general boundary conditions", *Aerosp. Sci. Technol.*, 36, 132-156.
- Chi. S.H., Chung ,Y.L. (2003), "Cracking in coatingsubstrate composites of multi layered and sigmoid FGM coatings".*Engineering Fracture Mechanics*, 70, 10, 1227 –1243.

- Davoodinik, A.R., (2005), "Mechanical Behavior Analysis of FGM Timoshenko's Beam", *Ph.D. dissertation, TarbiatModarres University, Tehran* .
- Delale. F., Erdogan, F., (1983), "The crack problem for a nonhomogeneous plane". *ASME Journal of Applied Mechanics*, 50 (3): 609-614.
- Duc, N.D. and Thang, P.T. (2015), "Nonlinear dynamic response and vibration of shear deformable imperfect eccentrically stiffened S-FGM circular cylindrical shells surrounded on elastic foundations", *Aerosp. Sci. Technol.*, 40, 115-127.
- Fekrar, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2014), "A new five-unknown refined theory based on neutral surface position for bending analysis of exponential graded plates", *Meccanica*, 49(4), 795-810.
- Gupta, A. and Talha, M. (2017), "Influence of porosity on the flexural and vibration response of gradient plate using nonpolynomial higher-order shear and normal deformation theory", *Int. J. Mech. Mater. Design*, 1-20.
- Hadji, L., Daouadji, T.H., Tounsi, A. and Adda Bedia, E.A. (2014), "A higher order shear deformation theory for static and free vibration of FGM beam", *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 16(5), 507-519.
- Hamidi, A., Houari, M.S.A., Mahmoud, S.R. and Tounsi, A. (2015), "A sinusoidal plate theory with 5-unknowns and stretching effect for thermomechanical bending of functionally graded sandwich plates", *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 18(1), 235-253.
- Hebali, H., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Bessaim, A. and Adda Bedia, E.A. (2014), "New quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates", *J. Eng. Mech., ASCE*, 140(2), 374-383.
- Houari M.S.A, (2011), "Analyse des contraintes thermo-élastiques : lois des puissances " , *thèse de doctorat , Université Djillali Liabes, Sidi Bel Abbes*.
- Kadoli, R., Akhtar, K. and Ganesan, N. (2008), "Static analysis of functionally graded beams using higher order shear deformation theory", *Appl. Math. Model.*, 32(12), 2509-2525.
- Kawasaki A., Watanabe R. (1997), "Concept and P/M fabrication of functionally gradient materials". *Ceramics International*, 8842(95),73–83.

- Khalfi, Y., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2014), “A refined and simple shear deformation theory for thermal buckling of solar functionally graded plates on elastic foundation”, *Int. J. Comput. Method.*, 11(5), 135007.
- Koizumi, M., (1992), “Recent Progress of functionally graded materials in Japan”. *Ceram. Eng. Sci. Proc*, 13 (7-8), 333-347.
- Koizumi, M., (1997), “FGM activities in Japan“. *Composites*; 28 (1-2):1– 4.
- Koizumi. M (1996) , “FGM activities in Japan, Department of Materials Chemistry”,*Ryukoku University Japan, Ohtsu*, 520-21.
- Kokini. K., Takeuchi, Y., (1990), “Multilayer ceramic thermal barrier coatings under transient thermal loads”. *In Proceeding of the First International Symposium on Functionally Gradient Materials FGM'90-Sendai-Japan*, 31-36.
- Koochaki, G.R. (2011), “Free vibration analysis of functionally graded beams”, *World Acad. Sci., Eng. Technol.*, 74, 366-369.
- Larbi Chaht, F., Kaci, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Anwar Bég, O. and Mahmoud, S.R. (2015), “Bending and buckling analyses of functionally graded material (FGM) size dependent nanoscale beams including the thickness stretching effect”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 18(2), 425-442.
- Li, X.F. (2008), “A unified approach for analyzing static and dynamic behaviors of functionally graded Timoshenko and Euler-Bernoulli beams”, *J. Sound Vib.*, 318(4-5), 1210 1229.
- Lostec L., (1997), “Elaboration par coulage en bande et caractérisation microstructurale et mécanique de composite SiC/MAS-L“, *Thèse de l'université de Limoges*.
- Mahi, A., Adda Bedia, E.A. and Tounsi, A. (2015), “A new hyperbolic shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic, functionally graded, sandwich and laminated composite plates”, *Appl. Math. Model.*, 39(9), 2489-2508.
- Mindlin, R.D. (1951), “Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates”, *J Appl Mech-T ASME*, 18(1), 31–38.

- Mistler R.E., (1973), “High strength alumina substrates produced by a multiplelayer Casting technique”, *Am. Ceram. Soc. Bull*,52 (11), 850-854.
- Moya, j. S., Sanchez-herencia, a. J., Requena, j. & Moreno, r., (1992). Functionally gradient ceramics by sequential slip casting materials letters. 14, 333-35.
- Najafov, A.M., Sofivev, A.H., Hui, D., Karaca, Z., Kalpakci, V. and Ozcelik, M. (2014), “Stability of EG cylindrical shells with shear stresses on a Pasternak foundation”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 17(4), 453-470.
- Navid Saeedi. (2012), “Une approche très efficace pour l’analyse du délaminage des plaques stratifiées infiniment longues “, *PhD thesis, Université de Paris Est, France*, 2012.
- Nguyen. T. K., Sab. K., Bonnet, G., (2007), “Shear correction factors of functionally graded plates”. *Mech. Advanced Mater. Struct*, 14 (8), 567-575.
- Niino M., Suzuki A., Hirai T., Watanabe R., Hirano T., Kuroishi N. (1988), “Method of producing a functionally gradient material”. *U.S. Patent*, 4571099.
- Nowinski, (1978) , “Theory of thermeolasticity with applications.mechanics of surface structures” .*alphen aan den Rijn ,noordhoff international publishing*.
- Okamura, H., (1991), “State of the art of material design projects for severe service applications”, *Mater. Sci. Eng :A*, 143 (1-2), 3-9.
- Ould Larbi, L., Kaci, A., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2013), “An efficient shear deformation beam theory based on neutral surface position for bending and free vibration of functionally graded beams”, *Mech. Based Des. Struct. Mach.*, 41(4), 421-433.
- Reddy J.N., (1984), “A simple higher-order theory for laminated composite plates”, *Journal of Applied Mechanics*, 51 (4),745-752.
- Reddy, J.N. (1999), *Theory and Anaslysis of Elastic Plates*, Taylor & Francis Publication, PA, USA.
- Reddy, JN. (1997), “Mechanics of laminated composite plate: theory and analysis”, *New York: CRC Press*.

- Reddy, J.N., Wang, C.M., Kitipornchai, S. (1999), "Axisymmetric bending of functionally graded circular and annular plates", *Eur J Mech A Solids.*, 18(2), 185–199.
- Reissner, E. (1945), "The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates", *J Appl Mech-TASME.*, 12(2), 69–77.
- Saidi, H., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Adda Bedia, E.A. (2013), "Thermo-mechanical bending response with stretching effect of functionally graded sandwich plates using a novel shear deformation theory", *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 15(2), 221-245.
- Sallai, B.O., Tounsi, A., Mechab, I., Bachir, B.M., Meradjah, M. and Adda, B.E.A. (2009), "A theoretical analysis of flexional bending of Al/Al₂O₃ S-FGM thick beams", *Comput. Mater. Sci.*, 44(4), 1344-1350
- Shyang, H., and Yen, L., (2006), "Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverseload part II numerical results ", *international journal of solids and structures*, 43,3675-3674.
- Sina, S.A., Navazi, H.M. and Haddadpour H. (2009), "An analytical method for free vibration analysis of functionally graded beams", *Mater. Des.*, 30(3), 741-747.
- Steffens, H.D., Dvorak, M., Wewel, M. (1990), "Plasma sprayed functionally gradient materials processing and applications", in *Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan*, 139-43.
- Swaminathan, K., Naveenkumar, D.T. (2014), "Higher order refined computational models for the stability analysis of FGM plates: Analytical solutions", *European Journal of Mechanics A/Solids.*, 47, 349 – 361.
- Takahashi, M., Itoh, Y., Kashiwaya, H., (1990), "Fabrication and Evaluation of W/Cu Gradient Material by Sintering and Infiltration Technique", in *Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan*, 129-34.
- Timoshenko, S.P., Woinowsky-Krieger, S. (1959), "Theory of plates and shells", *New York: McGraw Hill*.

- Tounsi, A., Houari, M.S.A., Benyoucef, S. and Adda Bedia, E.A., "A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates", *Aerosp. Sci. Technol.*, 24(1), 209-220.
- Touratier, M. (1991), "An efficient standard plate theory". *Engng Sci.*, 29(8),901-916.
- Ugural, A.C., (1981), "Stresses in Plates and Shells", *McGraw- Hill, New York*.
- Wattanasakulpong, N. and Ungbhakorn, V. (2014), "Linear and nonlinear vibration analysis of elastically restrained ends FGM beams with porosities", *Aerosp. Sci. Technol.*, 32(1), 111 120.
- Wattanasakulpong, N., Prusty, B.G., Kelly, D.W. and Hoffman, M. (2012), "Free vibration analysis of layered functionally graded beams with experimental validation", *Mater. Des.*, 36, 182-190.
- Yaghoobi, H., Valipour, M.S., Fereidoon, A. and Khoshnevisrad, P. (2014), "Analytical study on post-buckling and nonlinear free vibration analysis of FG beams resting on nonlinear elastic foundation under thermo-mechanical loading using VIM", *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 17(5), 753-776.
- Yoshihisa Uchida (2004), "Properties of functionally graded materials", *Manufactured by Progressive Lamination Method for Applications*, 39, 39-51.
- Zemri, A., Houari, M.S.A., Bousahla, A.A. and Tounsi, A. (2015), "A mechanical response of functionally graded nanoscale beam: an assessment of a refined nonlocal shear deformation theory beam theory", *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, 54(4), 693-710
- Zhong Z., T. Yu,(2007), "analytical solution of cantilever functionallygraded beam". *Composites science and technology*, 67 (3-4):481-488.
- Zhu, J., Lai, Z., Yin, Z., Jeon, J. and Lee, S. (2001), "Fabrication of ZrO₂-NiCr functionally graded material by powder metallurgy", *Mater. Chem. Phys.*, 68(1-3), 130-135
- Zidi, M., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Bessaim, A., Mahmoud, S.R. (2017),"A novel simple two-unknown hyperbolic shear deformation theory for functionally graded beams", *Struct. Eng. Mech.*, 64(2), 145-153.

Zidi, M., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Adda Bedia, E.A. and Anwar Bég, O. (2014), "Bending analysis of FGM plates under hygro-thermo-mechanical loading using a four variable refined plate theory", *Aerosp. Sci. Technol.*, 34, 24-34.

Zine, A., Tounsi, A., Draiche, K., Sekkal, M., Mahmoud, S.R. (2018), "A novel higher-order shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic and multilayered plates and shells", *Steel and Composite Structures*, 26(2), 125-137.

ملخص

في هذا البحث يتم دراسة السلوك الاهتزازي للعوارض بدعائم بسيطة باستخدام نظرية تشوه القص هيبربوليكية تأخذ بعين الاعتبار للعيوب الي تتمثل في شكل فراغات صغيرة التي يمكن ان تخلق في مرحلة التصنع يستخدم قانون خلط معدل لوصف الخصائص المادية الفعالة للعوارض المتدرجة وظيفيا مع وجود مسام بطريقة تقريبية يستخدم مبدأ هاملتون لاشتقاق المعدلات الحركية يتم الحصول على الحلول التحليلية باستخدام طريقة نافبي يتم تأكيد دقة وكفاءة نتائج هذا النموذج من خلال مقارنتها مع تلك التي استخرجها بنظريات اخرى المعرفة يتم تقديم دراسة معلميه لإظهار مختلف العوامل التي تؤثر على الاستجابة الديناميكية للعوارض المتدرجة وظيفيا

Abstract

In this research work, an analysis of the free vibration of the simply supported functionally graded beams is presented using an hyperbolic shear deformation theory, The imperfections in the form of micro-voids that can be introduced during the manufacturing phase are taken into account. The mixing law (P-FGM) is used after modifications to approximate the material properties of the functionally graduated beams with the presence of the pores. The Hamilton principle is employed here to derive the equations of motion. The analytical solutions are obtained using the Navier method. The accuracy and efficiency of the results of this model are confirmed by comparing them with those reported by other theories known in the literature. A parametric study is presented to demonstrate the different parameters influencing the dynamic response of the functionally graduated beams.

Résumé

Dans ce travail de recherche, l'étude du comportement vibratoire des poutres simplement appuyées est présentée en utilisant la théorie de déformation de cisaillement hyperbolique. Les imperfections sous forme des micro-vides qui peut être introduit durant la phase de fabrication sont prises en compte. La loi de mélange de puissance (P-FGM) est employée après des modifications pour décrire d'une façon approximative les propriétés matérielles effectives des poutres FG avec la présence des pores. Le principe d'Hamilton est utilisé pour dérivé les équations de mouvement. Les solutions analytiques sont obtenues en utilisant la méthode de Navier L'exactitude et l'efficacité des résultats du présent modèle sont confirmé en les comparants avec ceux reportés par d'autres théories connus dans la littérature. Une étude paramétrique est présentée pour démontrer les différents paramètres influençant la réponse dynamique des poutres fonctionnellement graduée.