



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la
Recherche Scientifique
Centre Universitaire El-wancharissi de Tissemsilt



Institut des Sciences et de la Technologie
Département des Sciences et de la Technologie

Mémoire de fin d'études pour l'obtention du diplôme
de Master académique en

Filière : **Génie civil**

Spécialité : **Structure**

Présentée par : **BACHA Chahrazad**

Thème

**Etude de la stabilité des dalles isotropes et
orthotropes.**

Soutenu le 23 Septembre 2020

Devant le Jury :

Djeffal Houcine	Président	M.A.A	CU-Tissemsilt
Bourada Fouad	Encadreur	M.C.B.	CU-Tissemsilt
Ouazir Mansour	Examineur	M.A.B.	CU-Tissemsilt

Année universitaire : 2019-2020



Remerciements

Remerciements

Je tiens d'abord à remercier ALLAH de m'avoir donné le courage et la capacité de terminer ce projet de fin d'études au cours de la pandémie COVID-19, à saluer également mes chers parents pour leurs encouragements, leur amour et leurs sacrifices ainsi ma chère sœur et mes deux adorables frères qui m'ont accordé un soutien moral sans limite.

Aussi, Je remercie très chaleureusement Dr. BOURADA Fouad pour son encadrement, aide et soutien tout au long du travail.

Enfin J'exprime toute ma reconnaissance à mes généreux enseignants qui m'ont dirigé et orienté durant toutes mes études, sans oublier de remercier sincèrement tous mes proches et amis qui m'ont toujours encouragé durant la réalisation de ce modeste travail.

Résumé

RESUME

Dans ce travail, on s'intéresse à l'étude du flambement des plaques isotropes et orthotropes en utilisant la théorie raffinée des plaques hyperbolique à deux variables. La présente théorie prend en compte les effets de cisaillement transversal ainsi que la distribution parabolique de la déformation de cisaillement transversal à travers l'épaisseur de la plaque. Par conséquent, il est donc inutile d'utiliser des facteurs de correction de cisaillement. Les équations d'équilibre sont déterminées en utilisant le principe des travaux virtuels. La solution analytique pour une plaque rectangulaire simplement appuyée soumise à un chargement axial, est obtenue en utilisant la méthode de Navier. Les résultats numériques obtenus par la présente théorie sont comparés avec ceux déterminés par la théorie classique des plaques et la théorie de déformation en cisaillement de premier ordre, la théorie RPT et la méthode des éléments finis. Il peut être conclu que la théorie actuelle qui n'exige pas les facteurs de correction de cisaillement, est non seulement simple mais aussi comparable à la théorie de déformation du cisaillement de premier ordre et d'ordre élevé.

Mots clés : théorie de déformation de cisaillement, Travaux virtuels, méthode de Navier, isotrope, orthotrope.

Abstract

ABSTRACT

Buckling analysis of isotropic and orthotropic plates using the two variable hyperbolic refined plate theory is presented in this work. The theory takes into account of transverse shear effects and parabolic distribution of the transverse shear strains through the thickness of the plate, hence it is unnecessary to use shear correction factors. The stability equations are derived from the virtual work principle. The closed-form solution of a simply supported rectangular plate subjected to in-plane loading has been obtained by using the Navier method. Numerical results obtained by the present theory are compared with classical plate theory solutions, first-order shear deformable theory solutions, RPT and finite element method. It can be concluded that the present theory, which does not require shear correction factor, is not only simple but also comparable to the first-order shear deformable and higher order theories.

Key words: shear deformation theory, Virtual works, Navier method, isotropic, orthotropic.

ملخص

ملخص

في هذا العمل، نهتم بدراسة التواء الصفائح موحدة و مختلفة الخواص باستخدام نظرية الصفائح المكررة القطعية بمتغيرين. تأخذ النظرية الحالية بعين الاعتبار تأثيرات القص العرضي وكذلك التوزيع استخدام القطعي المكافئ لتشوه القص العرضي عبر سمك الصفيحة. لذلك، ليس من الضروري عوامل تصحيح القص. يتم استخلاص معادلات التوازن باستخدام مبدأ الأعمال الافتراضية. يتم تحديد الحل التحليلي لصفيحة مستطيلة بدعائم بسيطة تحت تحميل محوري من خلال طريقة نافيه، تتم مقارنة النتائج الرقمية باستخدام النظرية المقترحة بعد عرضها مع تلك التي تحددها النظرية الكلاسيكية للصفائح، نظرية تشوه القص درجة أولى، نظرية الصفائح المكررة و طريقة العناصر المنتهية. يمكن استنتاج أن النظرية الحالية التي لا تتطلب عوامل تصحيح القص ليست بسيطة فحسب بل يمكن مقارنتها أيضا بنظرية تشوه القص من درجة أولى ودرجة أعلى.

، (موحدة الخواص) كلمات المفتاح : نظرية تشوه القص ، العمل الافتراضي ، طريقة نافيه، متناحية مختلفة الخواص.

Table des matières

Table des Matières

Remerciements	i
Résumé	ii
Abstract	iii
ملخص	iv
Table des matières	v
Liste des figures	viii
Liste des tableaux	xi
Liste des notations et symboles	xii
Introduction générale	1

Chapitre I : Le flambement des plaques isotropes et orthotropes.

I.1. Introduction	3
I.2. Définition de la stabilité	4
I.3. Généralité sur le flambement des plaques	4
I.3.1. Définition du phénomène de flambement	4
I.3.2. charge critique du flambement	5
I.3.3. Comment dériver l'équation de la charge critique	6
I.3.4. Contrainte critique du flambement	9
I.3.5. Les modes de flambement	9
I.4. Généralité sur les différents types des matériaux	10
I.4.1. les matériaux anisotropes	10
I.4.2. les matériaux isotropes	12
I.4.3. les matériaux orthotropes	13
I.5. Conclusion	15

Chapitre II: Les théories des plaques

II.1. Introduction	16
II.2. Définition d'une plaque	17

II.3. Les théories basées sur le déplacement	17
II.3.1. La théorie classique des plaques (CPT)	17
II.3.1.1. Les hypothèses de base de la CPT	18
II.3.1.2. Le champ de déplacement	18
II.3.2 La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT)	19
II.3.2.1. Les hypothèses de base de la FSDT	19
II.3.2.2. Le champ de déplacement	19
II.3.2.3. Les facteurs de correction	20
II.3.3 Théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSDT)	21
II.3.3.1. Les hypothèses de base de la HSDT	21
II.3.3.2. Le champ de déplacement	21
II.3.4 Théorie raffinée des plaques (RPT)	22
II.3.4.1. Les hypothèses de base de la RPT	23
II.3.4.2. Le champ de déplacement	24
II.4. Développement des théories des plaques	25
II.4.1. Méthode de Navier	25
II.5. Conclusion	25

Chapitre III : Formulations théoriques

III.1. Introduction	26
III.2. Les formulations théoriques	26
III.2.1. Le champ de déplacement	26
III.2.2. Les équations constitutives des plaques	27
III.2.3. Les équations d'équilibre	28
III.2.4. Solutions analytiques et conditions aux limites	30
III.3. Conclusion	32

Chapitre IV : Les résultats numériques et discussions

IV.1. Introduction	33
IV.2. Résultats numériques et discussion	33
IV.3. Conclusion	48

Conclusion générale	49
Références bibliographiques	50

Liste des Figures

Liste des figures

Chapitre I : Le flambement des plaques isotropes et orthotropes.

Figure. I.1 : <i>La canne de « Charlie Chaplin ».</i>	3
Figure. I.2 : <i>Flambement associé à une charge de compression.</i>	4
Figure. I.3 : <i>Flambement associé à deux forces de compression.</i>	5
Figure. I.4 : <i>Une colonne simplement appuyées en mode flambé.</i>	6
Figure. I.5 : <i>Diagramme corporel libre d'une section de colonne flambée.</i>	7
Figure. I.6 : <i>Diagramme corporel libre d'une poutre flambée.</i>	7
Figure. I.7 : <i>Trois premiers modes de flambement des colonnes.</i>	10
Figure. I.8 : <i>Matériau anisotrope.</i>	10
Figure. I.9 : <i>Matériau isotrope.</i>	12
Figure. I.10 : <i>Matériau orthotrope.</i>	14

Chapitre II : Les théories des plaques

Figure II.1 : <i>Schéma d'une plaque.</i>	17
Figure II.2 : <i>Illustration de la plaque de Love-Kirchhoff.</i>	19
Figure II.3 : <i>Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin.</i>	20
Figure II.4 : <i>Illustration de la plaque de Reddy.</i>	22

Chapitre III : Formulations théoriques

Figure III.1: <i>Plaque rectangulaire : (a) condition aux limites et (b) forces dans le plan.</i>	31
--	----

Chapitre IV : Résultats numériques et discussions

Figure. IV.1a : <i>Les conditions de chargement de la plaque carrée pour : la compression uniaxiale.</i>	33
Figure. IV.1b : <i>Les conditions de chargement de la plaque carrée pour : la</i>	34

compression biaxiale.

Figure. IV.1c : *Les conditions de chargement de la plaque carrée pour : la traction dans la direction x et la compression dans la direction y.* 34

Figure. IV.2a : *L'effet du rapport de géométrie et rapport des modules sur la charge critique de flambement d'une plaque carrée simplement appuyée soumise à une compression uniaxiale : isotrope.* 39

Figure. IV.2b : *L'effet du rapport de géométrie et rapport des modules sur la charge critique de flambement d'une plaque carrée simplement appuyée soumise à une compression uniaxiale : $E_1 / E_2 = 10$.* 9

Figure. IV.2c : *L'effet du rapport de géométrie et rapport des modules sur la charge critique de flambement d'une plaque carrée simplement appuyée soumise à une compression uniaxiale : $E_1 / E_2 = 25$.* 40

Figure. IV.2d : *L'effet du rapport de géométrie et rapport des modules sur la charge critique de flambement d'une plaque carrée simplement appuyée soumise à une compression uniaxiale : $E_1 / E_2 = 40$.* 40

Figure. IV.3a : *L'effet du rapport des modules sur la charge critique de flambement d'une plaque carrée simplement appuyée soumise à une compression uniaxiale : $a = 10h$.* 41

Figure. IV.3b : *L'effet du rapport des modules sur la charge critique de flambement d'une plaque carrée simplement appuyée soumise à une compression uniaxiale : $a = 25h$.* 41

Figure. IV.3c : *L'effet du rapport des modules sur la charge critique de flambement d'une plaque carrée simplement appuyée soumise à une compression uniaxiale : $a = 50h$.* 42

Figure. IV.3d : *L'effet du rapport des modules sur la charge critique de flambement d'une plaque carrée simplement appuyée soumise à une compression uniaxiale : $a = 100h$.* 42

Figure. IV.4a : *L'effet du rapport des modules sur la charge critique de flambement d'une plaque carrée simplement appuyée soumise à une compression biaxiale : $a = 10h$.* 43

Figure. IV.4b : *L'effet du rapport des modules sur la charge critique de flambement d'une plaque carrée simplement appuyée soumise à une compression biaxiale : $a = 25h$.* 43

Figure. IV.4c : *L'effet du rapport des modules sur la charge critique de* 44

flambement d'une plaque carrée simplement appuyée soumise à une compression biaxiale : $a= 50h$.

Figure. IV.4d : L'effet du rapport des modules sur la charge critique de flambement d'une plaque carrée simplement appuyée soumise à une compression biaxiale : $a= 100h$. 44

Figure. IV.5a : *Effet du rapport des modules sur la charge critique de flambage d'une plaque carrée simplement appuyée soumise à une traction dans la direction x et à une compression dans la direction y : $a = 10h$.* 45

Figure. IV.5b : *Effet du rapport des modules sur la charge critique de flambage d'une plaque carrée simplement appuyée soumise à une traction dans la direction x et à une compression dans la direction y : $a = 25h$.* 45

Figure. IV.5c : *Effet du rapport des modules sur la charge critique de flambage d'une plaque carrée simplement appuyée soumise à une traction dans la direction x et à une compression dans la direction y : $a= 50h$.* 46

Figure. IV.5d : *Effet du rapport des modules sur la charge critique de flambage d'une plaque carrée simplement appuyée soumise à une traction dans la direction x et à une compression dans la direction y : $a= 100h$.* 46

Liste des Tableaux

Liste des tableaux

Chapitre IV : Résultats numériques et discussions

Tableau IV.1: Comparaison de la charge critique non dimensionnelle du flambement d'une plaque carrée sous chargement uniaxial de compression.	35
Tableau IV.2: Comparaison de la charge critique non dimensionnelle du flambement d'une plaque carrée sous chargement biaxial de compression.	36
Tableau IV.3: Comparaison de la charge critique non dimensionnelle du flambement d'une plaque carrée soumise à une traction suivant l'axe x et une compression suivant l'axe y.	37
Tableau IV.4: Comparaison de la charge critique non dimensionnelle du flambement d'une plaque carrée isotrope sous chargement uniaxial de compression.	38

*Liste des notations
et symboles*

Liste des notations et symboles

G	Module de cisaillement dans le plan (x, z).
E	Module de Young.
ν	Coefficient de Poisson.
N_{cr}	Charge critique du flambement.
N	Effort de compression.
I	Moment quadratique de la poutre.
l	Longueur de flambement de la poutre.
λ	Elancement.
σ_{cr}	Contrainte critique du flambement.
ρ	Rayon de giration.
A	Aire de la section.
m	Mode longitudinal.
n	Mode transversal.
C_{ijkl}	Tenseur d'élasticité (ou de rigidité).
S_{ijkl}	Tenseur de souplesse.
ε_{kl}	Tenseur de déformation.
σ_{ij}	Tenseur de contrainte.
γ_{ij}	Distorsions angulaires.
C_{ij}	Coefficients élastiques indépendants.

a	Longueur de la plaque.
b	Largeur de la plaque.
h	Epaisseur de la plaque.
u, v, w	Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque.
u_0, v_0	Les déplacements dans les directions x, y .
w_0	La flèche ou déplacement transversal.
$\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$	Les rotations autour des axes x, y et z .
ϕ_x, ϕ_y, ϕ_z	Les rotations de la normale au plan moyen autour des axes x, y et z .
K	Facteur de correction.
w_b, w_s	Les composantes de flexion et de cisaillement du déplacement transversal.
u_b, v_b	Les composantes de flexion des déplacements u et v .
u_s, v_s	Les composantes de cisaillement des déplacements u et v .
$f(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse).
$g(z)$	Dérivée de la fonction de gauchissement.
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Contraintes normales.
τ_{xz}, τ_{yz}	Contraintes de cisaillement.
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Déformation dans la direction x, y et z .
γ_{xz}, γ_{yz}	Déformations de distorsion.
Q_{ij}	Les coefficients de rigidité (coefficients élastiques).

$\delta u, \delta v, \delta w$	Champ virtuel de déplacement.
δU	La variation de l'énergie de déformation.
δV	La variation du travail extérieur.
$\delta \varepsilon_x, \delta \varepsilon_y, \delta \varepsilon_z$	Champ de déformation longitudinal virtuel.
$\delta \gamma_{xz}, \delta \gamma_{yz}$	Champ de déformation transversal virtuel.
N_x, N_y, N_{xy}	Efforts normaux.
N_x^0, N_y^0, N_{xy}^0	Charges axiaux appliquées à la plaque.
\bar{N}	Charge critique du flambement non dimensionnelle.
M_x, M_y, M_{xy}	Moments de flexion.
M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b	Moments de flexion.
S_x, S_y, S_{xy}	Moment supplémentaire du au cisaillement transverse.
M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s	Moment supplémentaire du au cisaillement transverse.
Q_{xz}, Q_{yz}	Effort de cisaillement.
$d_{ij}, d_{ijl}, d_{ijlm}$	Les opérateurs différentielles.
∂	Dérivée partielle.
φ_{mn}, w_{0mn}	Des coefficients.
i et j	Des nombres naturels.

D_{ij}	Termes de rigidité de la matrice (flexion).
A_{ij}^s	Termes de rigidité de la matrice (cisaillement).
D_{ij}^s	Termes de rigidité de la matrice (cisaillement).
H_{ij}^s	Termes de rigidité de la matrice (cisaillement).
Q_{ij}	Coefficient de rigidité
t	temps.
φ, w_0	Les fonctions de déplacement.
$\{\Delta\}$	Le vecteur des déplacements généralisés.
$\{ \}$	Vecteur colonne.
$[]$	Matrice.
HySDT	Higher order hyperbolic shear deformation theory.
HSDT	Higher order shear deformation theory.
CPT	Classical plate theory.
RPT	Refined plate theory.
FSDT	First shear deformation theory.
FGM	Functionally graded material.

Introduction générale

Introduction générale

Le flambement des plaques rectangulaires a été un axe de recherche en mécanique du solide ça fait plus d'un siècle. Plusieurs solutions exactes pour les plaques isotropes et orthotropes ont été développées et la plupart d'entre eux pouvant être trouvée dans les travaux de (Timoshenko 1959, Timoshenko et Gere 1961, Kang et Leissa 2005, Aydogdu et Ece 2006 et Hwang et Lee 2006). Plusieurs théories des plaques ont été développées pour étudier le comportement du flambement de ce type de structure. La plus simple et la théorie classique des plaques (CPT) qui néglige la contrainte normale transversale et les contraintes de cisaillement. Cette théorie n'est pas appropriée pour les plaques épaisses et orthotropes ayant un rapport de modules important. Afin de surmonter ce problème, la théorie de déformation en cisaillement qui tient compte les effets de cisaillement transversal est recommandés. Les théories de Reissner(1945) et Mindlin(1951) sont connus comme la théorie de déformation du cisaillement du premier ordre (FSDT). Ces théories prennent en considération les effets de cisaillement transversal en supposant une variation linéaire des déplacements axiaux à travers l'épaisseur. Ce Pendant, ces modèles ne vérifient pas la nullité de la contrainte de cisaillement aux faces supérieur et inférieur de la plaque, et nécessitent aussi l'utilisation des facteurs de correction de cisaillement. Pour ces raisons, beaucoup de théories d'ordre élevé ont été développées pour améliorer la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT) telle que Levinson(1980) et Reddy(1984).

Shimpi et Patel (2006) ont présenté une théorie raffinée des plaques à deux variables pour les plaques orthotropes. Cette théorie qui ressemble à la théorie d'ordre élevé utilise seulement deux fonctions inconnues afin d'obtenir deux équations d'équilibre pour les plaques orthotropes. L'avantage principal de cette théorie est qu'elle ne nécessite pas le facteur de correction de cisaillement et elle présente de fortes similitudes avec la théorie classique des plaques (CPT) dans certains aspects comme les équations d'équilibre, les conditions aux limites et les expressions du moment. L'exactitude de cette théorie a été démontrée pour la flexion statique et la vibration libre des plaques par Shimpi et Patel (2006). Par conséquent, il semble important d'appliquer cette théorie au flambement statique des plaques.

Dans ce travail, une nouvelle théorie des plaques raffinée hyperbolique à deux variables est développée pour étudier la stabilité des plaques isotropes ou orthotropes sous des charges axiales. En utilisant la méthode de Navier, les solutions analytiques sont obtenues. Des exemples numériques impliquant le rapport des dimensions de la plaque et le rapport des modules sont présentés pour illustrer l'exactitude de la théorie actuelle dans l'estimation des

charges critiques de flambement des plaques isotropes et orthotropes. Les résultats numériques obtenus par la présente théorie sont comparés avec les solutions de la théorie classique (CPT) et les solutions de la théorie du premier ordre (FSDT) en utilisant des différentes valeurs de facteur de correction de cisaillement, la théorie d'ordre élevé (HSDT), la RPT et le modèle numérique par éléments finis.

Dans ce travail, on s'intéresse à la stabilité des dalles isotropes et orthotropes en utilisant la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé hyperbolique à deux variables.

Ce travail, s'articule autour de quatre chapitres.

Le premier chapitre présente le flambement des plaques isotropes et orthotropes.

Le deuxième chapitre se focalise sur les différentes théories des plaques.

Le troisième chapitre est consacré aux formulations théoriques.

Le quatrième chapitre présente les résultats numériques et discussion.

En fin, une conclusion générale sur l'ensemble de ces travaux permet de revenir sur les résultats importants mis en avant.

CHAPITRE I :
Le flambement des
plaques isotropes et
orthotropes.

I.1. Introduction :

Les plaques comprimées sont des éléments très répons dans les structures de génie civil. Avez-vous déjà pensé que dans tous les systèmes ou éléments soumis à des contraintes de compression, l'instabilité se manifeste ?

Nous connaissons tous les premiers films de Charlie Chaplin dans lesquels on le voyait souvent appuyé sur une canne constituée par une mince tige de bambou : chaque fois que le comédien pèse de tout son poids sur la canne, celle-ci se courbe. Tous les éléments de structure longs et minces ont un



comportement similaire en compression. Le phénomène de perte de stabilité sous un effort de compression porte le nom de flambement. Le

Figure.I.1: *La canne de « Charlie Chaplin ».*

flambement peut être observé sur toute une série d'exemple. Le cas le plus simple est la perte de stabilité d'une tige comprimée de manière axiale. Lorsque la charge de compression augmente lentement, on atteint un seuil de compression pour lequel l'élément aura un déséquilibre, par la suite une instabilité de structure. Ce seuil critique est appelé : la force critique d'Euler. Elle devient un facteur fondamental du phénomène du flambement pour déterminer un état d'équilibre stable en compression simple.

Une analyse sur le flambement d'une plaque carrée simplement appuyée isotrope ou orthotrope est une étape préliminaire essentielle à la compréhension du comportement de flambement des plaques, de la bifurcation d'équilibre et de la production de l'instabilité des structures.

I.2. Définition de la stabilité :

D'une manière générale, on peut définir la stabilité comme la capacité d'un système physique à revenir à l'équilibre lorsqu'il est perturbé légèrement.

Pour un système mécanique, on peut adopter la définition donnée par Dirichlet : « L'équilibre d'un système mécanique est stable si, lorsque l'on déplace les points du système de leur position d'équilibre d'une quantité infinitésimale et en leur donnant à chacun d'eux une faible vitesse initiale, les déplacements des différents points du système restent, pendant le déplacement, contenus dans des limites imposées faibles ».

I.3. Généralité sur le flambement des plaques :

I.3.1. Définition du phénomène de flambement :

Dans l'ingénierie, le flambage est le changement soudain de forme d'un composant structurel sous charge. Si une structure est soumise à une charge qui augmente progressivement, lorsque la charge atteint un niveau critique, un élément peut soudainement changer de forme et la structure et le composant se sont fléchis.

Par la suite, le phénomène de flambement peut être défini comme phénomène de perte de stabilité structurelle qui est généralement associé à une charge de compression élevée, de manière axiale (cas le plus simple), qui se traduit par un mode de boucle de l'élément structurel.

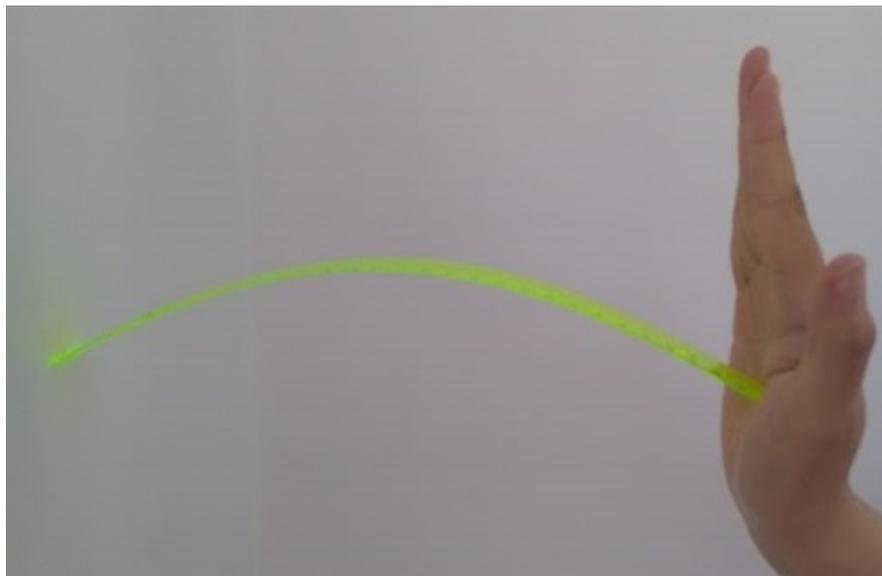


Figure.I.2 : *Flambement associé à une charge de compression.*

Exposant une barre rectiligne homogène à deux forces F égales et opposées. On note que la barre est en équilibre stable lorsque la force est inférieure à la valeur de F . Dépassant une certaine valeur, l'état d'équilibre sera instable.



Figure.I.3: *Flambement associé à deux forces de compression.*

Par la suite, le problème du flambement est de trouver le seuil de compression d'après lequel une bifurcation d'équilibre et une instabilité de structure se produisent. Ce seuil est nommé la force critique d'Euler A.U (2012/2013). Les contraintes de flambement sont obtenues à partir du concept de bifurcation d'une structure initialement parfaite.

I.3.2. Charge critique du flambement :

La charge critique de flambement N_{cr} ou la force critique d'Euler est le seuil de flambement, Et l'effort de compression est N , définit par l'équation suivante :

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (\text{I.1})$$

Cette formule a été dérivée en 1757 par le mathématicien suisse Leonhard Euler.

Avec :

E est le module de Young du matériau ;

I est le moment quadratique de la poutre ;

l est la longueur de flambement de la poutre.

- Si $N < N_{cr}$ la plaque est droite, en équilibre stable en compression simple.
- Si $N = N_{cr}$ la plaque est en équilibre instable, possibilité de bifurcation d'équilibre dans le but de toucher un état d'équilibre stable en flexion composée.
- Si $N > N_{cr}$ le seul état possible est instable, la plaque étant droite.

I.3.3. Comment dériver l'équation de la charge critique :

Cette section décrit comment calculer l'équation de la charge critique de flambement pour la condition aux limites support simple / support simple (simplement appuyées à chaque extrémité).

On considère une colonne simplement appuyées pour développer les équations de flambement. Cela signifie qu'il ne peut pas dévier au niveau de l'articulation, mais il peut tourner comme indique la figure.

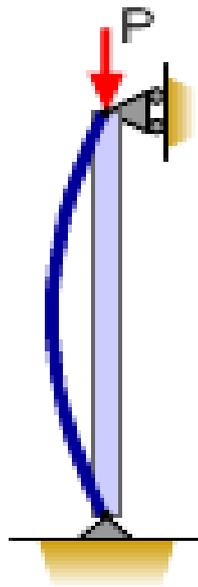


Figure.I.4: Une colonne simplement appuyées en mode flambé.

Tout d'abord, nous mettrons l'accent sur le fait qu'il n'y a pas de réactions aux extrémités articulées, nous n'avons donc également aucune force de cisaillement dans aucune section transversale de la colonne. La raison de l'absence de réactions peut être obtenue à partir de la symétrie (donc les réactions doivent être dans la même direction) et de l'équilibre des moments (donc les réactions doivent être dans des directions opposées).

Si la colonne est chargée et commence à dévier latéralement, alors le moment dans la colonne doit être égal au moment enfermé par la force P à chaque extrémité.

La première étape serait de dériver un diagramme corporel libre qui peut être vu ci-dessous.

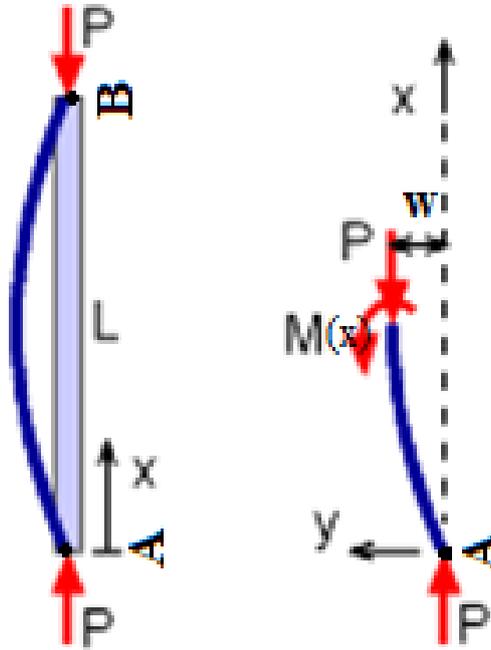


Figure.I.5: Diagramme corporel libre d'une section de colonne flambée.

En faisant une somme des moments autour du point A:

$$\sum M = 0 \Rightarrow M(x) + Pw = 0 \quad (I.2)$$

Selon la théorie des poutres d'Euler – Bernoulli, la flèche d'une poutre est liée à son moment de flexion par :

$$M = -EI \frac{d^2w}{dx^2} \quad (I.3)$$

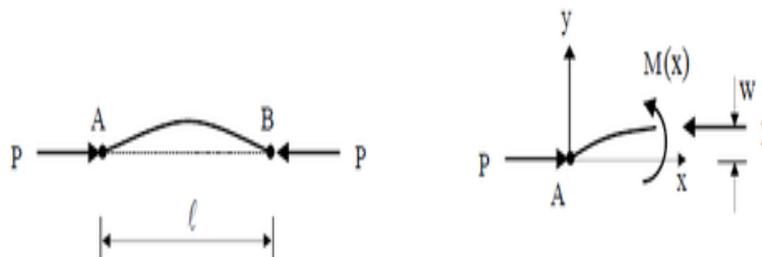


Fig I.6: Diagramme corporel libre d'une poutre flambée.

Alors :

$$EI \frac{d^2 w}{dx^2} + Pw = 0 \quad (I.4)$$

On pose $\lambda^2 = \frac{P}{EI}$, donc :

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \lambda^2 w = 0 \quad (I.5)$$

Nous obtenons une équation différentielle ordinaire homogène classique du second ordre.

Les solutions générales de cette équation sont:

$$w(x) = A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x) \quad (I.6)$$

où A et B sont des constantes à déterminer par les conditions aux limites, qui sont :

- Extrémité gauche fixée $\rightarrow w(0) = 0 \rightarrow A = 0$ (I.7a)

- Extrémité droite fixée $\rightarrow w(l) = 0 \rightarrow B \sin(\lambda l) = 0$ (I.7b)

Si B= 0, aucun moment de flexion n'existe et nous obtenons la solution triviale de $w(x) = 0$.

Cependant, de l'autre solution $\sin(\lambda l) = 0$ nous obtenons $\lambda_n l = n\pi$, (I.8)

pour $n = 0, 1, 2, \dots$

Avec
$$\lambda^2 = \frac{P}{EI} \quad (I.9)$$

Comme défini précédemment, les divers les charges critiques sont :

$$P_n = \frac{n^2 \pi^2 EI}{l^2}, n=1, 2, 3, \dots \quad (I.10)$$

La charge la plus faible est lorsque n est égal à 1, et est appelée la charge critique N_{cr} . La formule d'Euler pour une colonne simplement appuyée est donc :

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (I.11)$$

Et la forme obtenue de la colonne bouclée dans le premier mode est :

$$w(x) = B \sin\left(\frac{\pi}{l} x\right) \quad (\text{I.12})$$

I.3.4. Contrainte critique du flambement :

La contrainte critique est définie par le rapport entre la charge critique N_{cr} et l'aire de la section A , décrit par l'écriture suivante :

$$\sigma_{cr} = \frac{N_{cr}}{A} \quad (\text{I.13})$$

La contrainte critique du flambement est alors formulée comme suit :

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (\text{I.14})$$

L'élanement λ (sans unité) est donné selon l'expression :

$$\lambda = \frac{l}{\rho} \quad (\text{I.15})$$

Le rayon de giration ρ est le suivant :

$$\rho = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad (\text{I.16})$$

I.3.5. Les modes de flambement :

Un mode longitudinal d'une cavité résonante est un motif d'ondes stationnaires particulier formé par des ondes confinées dans la cavité. Les modes correspondent aux longueurs de la demi-onde qui sont renforcées par des interférences constructives après de nombreuses réflexions des surfaces réfléchissantes de la cavité.

Dans l'équation (I.10), vous avez peut-être remarqué une constante n , en fonction de la valeur de cette constante. Fondamentalement, si n est supérieur à un, un mode de flambement est décrit mais sont moins courants car il faut une plus grande charge pour produire cette configuration (tout mode de flambement est possible, mais dans le cas d'une charge appliquée

lentement, seule la première forme modale est susceptible d'être produite). Différents modes de flambement sont produits et les trois premiers modes sont illustrés dans la figure 4.

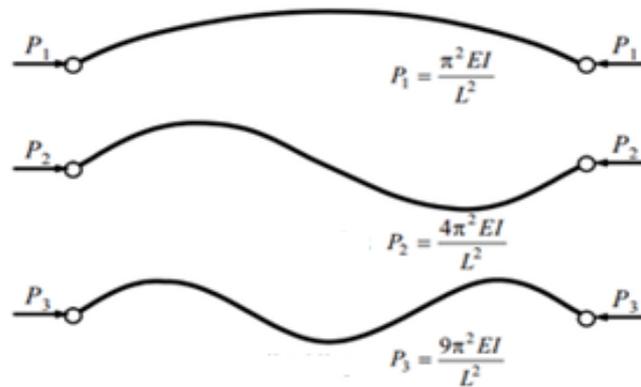


Figure.I.7 : Trois premiers modes de flambement.

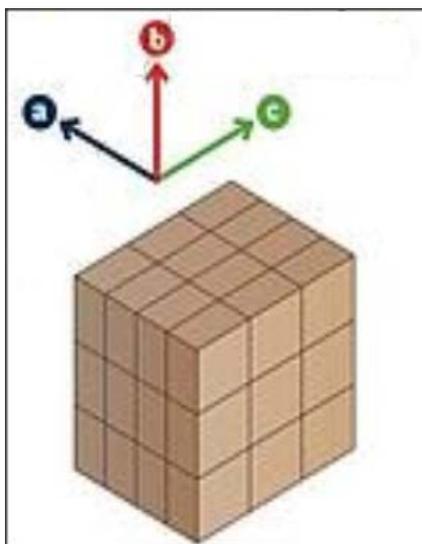
La charge et le mode pour $n = 0$ sont le mode non bouclé.

Un modèle de mode longitudinal a ses nœuds situés axialement sur la longueur de la cavité. Des modes transversaux, avec des nœuds situés perpendiculairement à l'axe de la cavité, peuvent également exister (m et n).

I.4. Généralité sur les différents types des matériaux :

I.4.1. Les matériaux anisotropes :

Sont des matériaux dont ses propriétés varient selon une direction considérée mais ils ne présentent pas de plans de symétrie. La loi de Hooke peut être exprimée par :



$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad i, j, k, l = 1, 2, 3 \quad (\text{I.17a})$$

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl} \quad i, j, k, l = 1, 2, 3 \quad (\text{I.17b})$$

C_{ijkl} : Tenseur d'élasticité (ou de rigidité).

S_{ijkl} : Tenseur de souplesse.

ε_{kl} : Tenseur de déformation.

σ_{ij} : Tenseur de contrainte.

Figure.I.8 : Matériau anisotrope.

Le tenseur de rigidité en a 81 coefficients de même pour le tenseur de souplesse, pour raison de la symétrie des contraintes σ_{ij} et de déformation, il y a une réduction des coefficients a 36 parmi ces derniers, 21 sont indépendants. Les distorsions angulaires sont exprimées en fonction des déplacements :

$$\gamma_{23} = 2\varepsilon_{23} \quad (\text{I.18a})$$

$$(\text{I.18b})$$

$$\gamma_{13} = 2\varepsilon_{13}$$

$$(\text{I.18c})$$

$$\gamma_{12} = 2\varepsilon_{12}$$

On écrit (1.2) sous la forme matricielle

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & \text{sym} & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \Rightarrow \quad (\text{I.19})$$

En inversant (1.2), on obtient :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ & & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ & & & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ & \text{sym} & & & S_{55} & S_{56} \\ & & & & & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \Rightarrow \quad (\text{I.20})$$

I.4.2. Les matériaux isotropes :

Un matériau est dit isotrope si ses propriétés mécaniques et physiques sont identiques dans toutes les directions. Les matériaux isotropes peuvent avoir des structures microscopiques homogènes ou non homogènes. Par exemple, l'acier a un comportement isotrope mais sa structure microscopique n'est pas homogène.

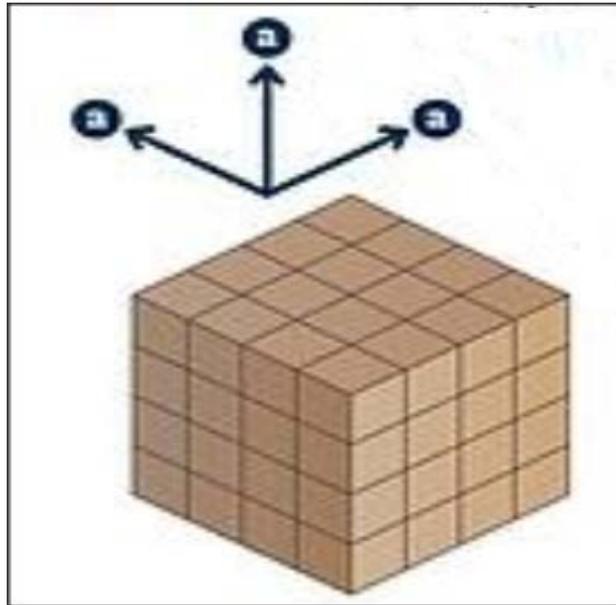


Figure.I.9 : Matériau isotrope.

Donc :

$$E_1 = E_2 = E_3 = E \quad (\text{I.21.a})$$

$$\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = \nu \quad (\text{I.21.b})$$

$$G_{12} = G_{13} = G_{23} = G \quad (\text{I.21.c})$$

Avec :

- E_{ij} et G_{ij} sont le module d'Young et Coulomb respectivement.
- ν_{ij} est le coefficient de Poisson.

Ce qui réduit le nombre des coefficients élastiques indépendants à 2 (C_{11} , C_{12}).

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 & 0 \\ & \text{sym} & & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 & \\ & & & & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & \\ & & & & & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \Rightarrow \text{(I.22)}$$

En termes de constantes techniques :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \Rightarrow \text{(I.23)}$$

Avec :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{(I.24)}$$

I.4.3. Les matériaux orthotropes :

Un matériau est dit orthotrope si ses propriétés mécaniques ou physiques sont différentes et indépendantes dans trois directions perpendiculaires les unes aux autres, autrement dit, sont des matériaux qui possèdent 3 plans de symétrie orthogonaux, ces derniers ont les mêmes propriétés ou caractéristiques mécanique. Le bois, un grand nombre de cristaux et les métaux laminés sont des exemples de matériaux orthotropes.

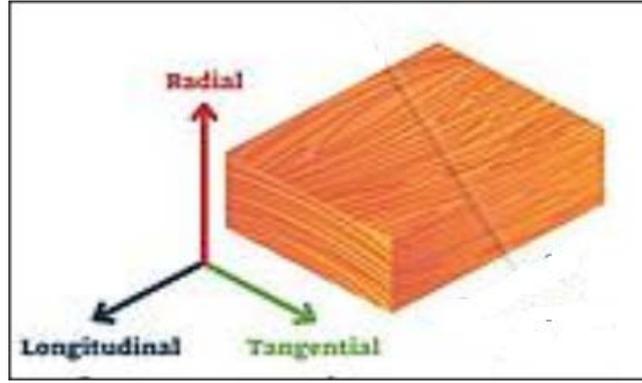


Figure.I.10 : matériau orthotrope.

Ce qui réduit le nombre des coefficients indépendants à 9, Donc :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & sym & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \quad (I.25)$$

En inversant le système (I.25) on obtient :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & S_{44} & 0 & 0 \\ & sym & & & S_{55} & 0 \\ & & & & & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \quad (I.26)$$

Les coefficients de souplesse sont définis par :

$$S_{11} = \frac{1}{E_1} ; S_{22} = \frac{1}{E_2} ; S_{33} = \frac{1}{E_3} ; S_{44} = \frac{1}{E_4} ; S_{55} = \frac{1}{G_{13}} ; S_{12} = \frac{-\nu_{21}}{E_2} ; S_{23} = \frac{-\nu_{32}}{E_3} ; S_{13} = \frac{-\nu_{31}}{E_3} ;$$

$$S_{66} = \frac{1}{G_{12}} . \quad (I.27)$$

A cause de la symétrie :

$$\frac{\nu_{21}}{E_{22}} = \frac{\nu_{12}}{E_{11}} \quad (\text{I.28.a})$$

$$\frac{\nu_{31}}{E_{33}} = \frac{\nu_{13}}{E_{11}} \quad (\text{I.28.b})$$

$$\frac{\nu_{23}}{E_{22}} = \frac{\nu_{32}}{E_{33}} \quad (\text{I.28.c})$$

I.5. Conclusion :

L'instabilité se manifeste dans les systèmes ou éléments, soumis à des contraintes de compression, sous le phénomène de perte de stabilité : le flambement.

Dans une structure, les plaques appartiennent aux éléments les plus exposés à ce type de risque, quelques soient les plaques isotropes ou orthotropes. Plus généralement, avec la compression des plaques, le flambement provoque un changement de forme par des grandes déformations dues au non linéarité géométrique, et par conséquent, cela modifie le cheminement des forces dans la structure et peut causer l'instabilité des autres éléments.

Afin de gérer le flambement et pour limiter ce risque d'instabilité on doit déterminer la force critique d'Euler qui représente le seuil de flambement à partir d'une théorie convenable.

Chapitre II :
Les théories des
plaques.

II.1. Introduction :

Les plaques sont des éléments de structures très répandus en génie civil, rencontrés dans de nombreuses structures, ils peuvent être un élément d'une structure complexe ou peuvent eux-mêmes constituer la partie majeure d'une structure, notamment, les dalles et les parois, les coupes, les réservoirs, les enceintes de réacteurs, les tours de refroidissement, les barrages, les ponts courbes et les couvertures.

Ces composants structurels, dans de nombreux cas, sont soumis à des efforts de compression et par la suite des contraintes de flambement. Il est maintenant bien connu que, pour l'analyse du flambement des plaques, les effets de déformation de cisaillement sont importants en particulier pour les plaques épaisses ou même pour les plaques minces vibrant à des modes plus élevés. Compte tenu de la complexité de la modélisation de ces éléments, de nombreuses théories ont été proposées sur le domaine élastique décrivant le comportement statique et dynamique de la structure.

La théorie classique des plaques, inspirée de la théorie des poutres qui est un modèle utilisé dans le domaine de la résistance des matériaux. En 1888, Love utilise les hypothèses de Gustav Kirchhoff, elles-mêmes inspirées des hypothèses d'Euler-Bernoulli pour les poutres, pour fonder une théorie des plaques minces.

En effet, la résistance de ces structures exige généralement une épaisseur des plaques relativement importante, donc une stabilité meilleure. Le comportement des plaques épaisses est fortement influencé par l'effet de l'effort tranchant. De ce fait, la théorie de Love-Kirchhoff n'est pas souvent convenable à l'étude de ce genre de structures.

La théorie des plaques épaisses a été consolidée par Raymond Mindlin en 1951 à partir des travaux de Rayleigh (1877), Timoshenko (1921), Reissner (1945) et Uflyand (1948). La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre ou bien la théorie de Mindlin-Reissner, qui prend en compte de manière approchée les déformations traversant l'épaisseur d'une plaque dues à l'effort tranchant, est une extension de la théorie de la plaque de Kirchhoff-Love.

Les limites du FSDT peuvent être surmontées en introduisant les théories de la plaque de déformation de cisaillement d'ordre supérieur, plusieurs théories d'ordre supérieur ont été proposées par (Reddy 1984), (Reddy et Phan 1985), (Reddy 1999,2000) ...etc. En addition, Shimpi (2002) a développé un modèle raffiné pour les plaques isotropes (RPT) dans le souci de réduire le nombre de variables utilisées dans les théories existantes.

II.2. Définition d'une plaque :

Une plaque est une feuille ou objet d'une matière rigide formant une surface peu épaisse. En construction, une plaque est une pièce délimitée par deux plans parallèles dont l'épaisseur est négligeable devant les autres dimensions. On appelle h l'épaisseur de la plaque ; le plan inférieur est donc le plan $z = -h/2$ et le plan supérieur est le plan $z = h/2$.

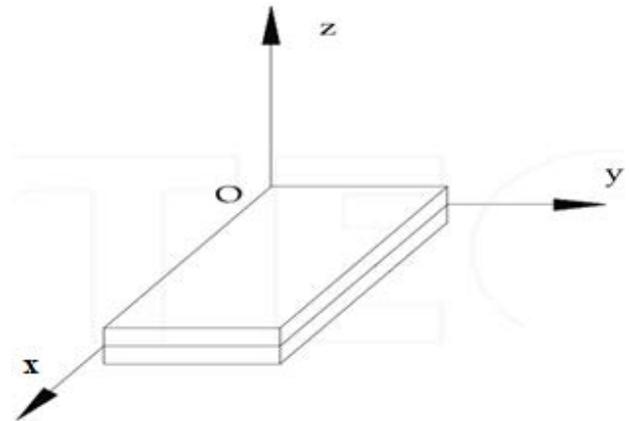


Figure.II.1 : schéma d'une plaque.

Ces plaques sont souvent suivies de l'adjectif mince ou épais suivant la grandeur de l'épaisseur h et de longueur a , nous admettons généralement :

- Pour les plaques minces $\frac{h}{a} \leq \frac{1}{20}$. (II.1)

- Pour les plaques épaisses $\frac{1}{20} < \frac{h}{a} < \frac{1}{4}$. (II.2)

II.3. Les théories basées sur le déplacement :

On peut noter les théories basées sur le déplacement comme suit :

- ✓ Théorie classique des plaques (CPT).
- ✓ Théorie de déformation de cisaillement de premier ordre (FSDT).
- ✓ Théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSDT).
- ✓ Théorie raffinée des plaques (RPT).

II.3.1. La théorie classique des plaques (CPT, Classical plate theory) :

En 1850, Kirchhoff a développé la plus connue des théories des plaques appelée « théorie classique des plaques ». Les structures planes minces et d'épaisseur faible par rapport aux autres dimensions du plan sont correctement modélisées par cette théorie de Love-Kirchhoff. Elle permet de décrire avec une bonne précision les champs des contraintes et déformation dans les plaques minces.

II.3.1.1. Les hypothèses de base de la CPT :

Les hypothèses cinématiques adoptées pour les plaques minces, par Kirchhoff, généralisant à deux dimensions celles adoptées pour les poutres sans déformations en cisaillement, appelées poutres d'Euler-Bernoulli. Les hypothèses de Kirchhoff reprises par Love sont les suivants :

- ✓ Applicable seulement pour les plaques minces qui possèdent un plan moyen également appelé plan neutre.
- ✓ Les sections droites, initialement normales au plan neutre, restent planes et normales à celui-ci après déformations. La déformation en cisaillement transverse est donc négligée.
- ✓ Les termes non linéaires du déplacement U et V sont négligés, et l'inertie de rotation est négligée. Seul le déplacement transversal W est considéré.
- ✓ L'épaisseur de la plaque ne change pas lors d'une déformation.
- ✓ La contrainte normale dans la direction transversale est petite, donc négligeable comparativement aux contraintes appartenant au plan de la plaque.

II.3.1.2. Le champ de déplacement :

Le champ de déplacement de Love-Kirchhoff s'écrit :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (\text{II.3a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (\text{II.3b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{II.3c})$$

Où u_0, v_0 sont les déplacements dans les directions x et y respectivement, et w_0 la flèche de la plaque.

$\frac{\partial w_0}{\partial x}, \frac{\partial w_0}{\partial y}$ sont les rotations dues à la flexion (sans cisaillement).

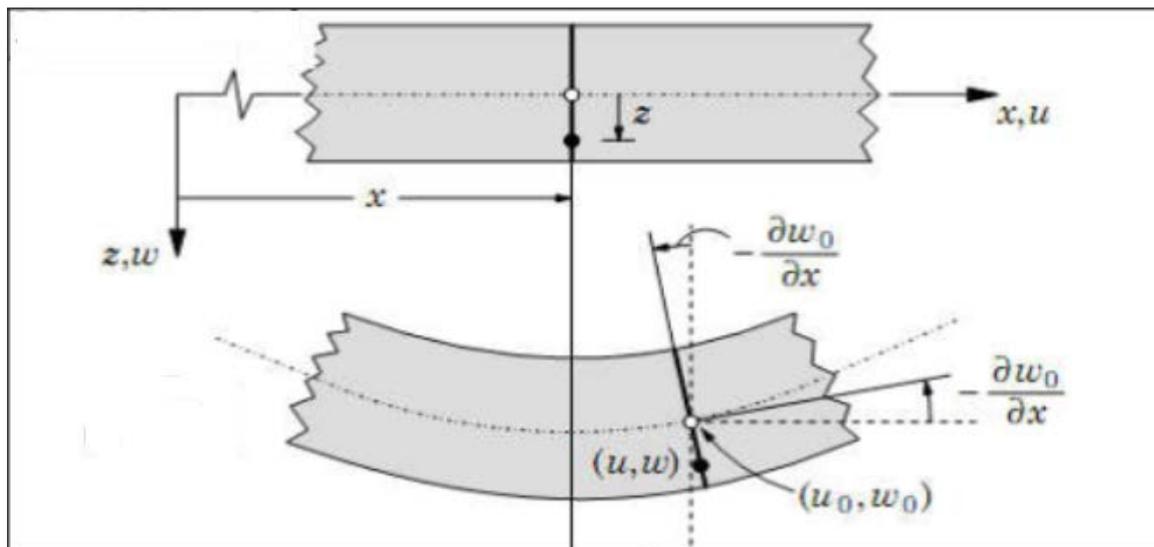


Figure.II.2 : *Illustration de la plaque de Love-Kirchhoff.*

II.3.2. La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT, First shear deformation theory) :

La théorie proposée en 1951 par Raymond Mindlin est, par la suite, la théorie des plaques Mindlin-Reissner (Reissner 1945 ; Mindlin 1951) souvent appelée théorie de la déformation par cisaillement du premier ordre des plaques, c'est une extension de la théorie des plaques Kirchhoff – Love, considérée comme une amélioration de cette dernière (la théorie classique des plaques minces). Elle est utilisée pour le calcul des déformations et des contraintes dans une plaque dont l'épaisseur est de l'ordre du dixième des dimensions planes et prend en compte les déformations de cisaillement à travers cette épaisseur.

II.3.2.1. Les hypothèses de base de la FSDT :

La théorie de Reissner-Mindlin suppose que :

- ✓ Les sections droites, initialement planes et normales au plan neutre, restent planes à celui-ci et perdent la normalité après déformations. La déformation en cisaillement transverse est donc disponible.
- ✓ L'épaisseur de la plaque ne change pas lors d'une déformation.
- ✓ Les contraintes transversales normales sont négligeables par rapport aux contraintes de flexion (la condition de contrainte plane).

II.3.2.2. Le champ de déplacement :

Le champ de déplacement de Reissner-Mindlin s'écrit :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z\phi_x \quad (\text{II.4a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z\phi_y \quad (\text{II.4b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{II.4c})$$

Où u_0, v_0 sont les déplacements dans les directions x et y respectivement, et w_0 la flèche de la plaque.

ϕ_x, ϕ_y sont les rotations de la normale au plan moyen autour des axes x et y respectivement.

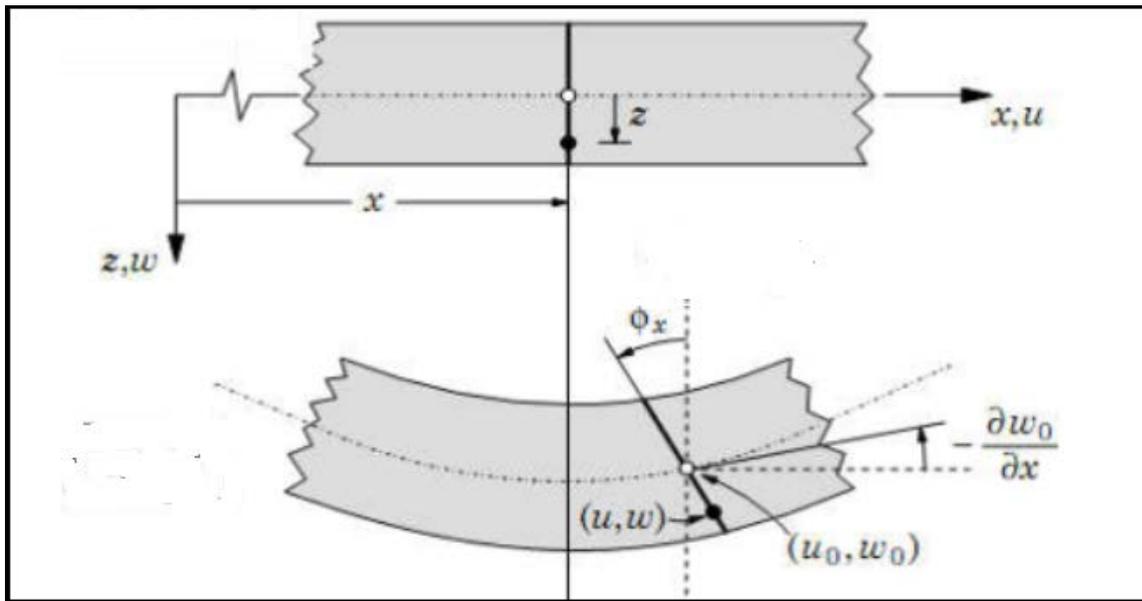


Figure.II.3 : Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin.

II.3.2.3. Les facteurs de correction :

Etant donné que la théorie des plaques de premier ordre (FSDT) ne satisfait pas les conditions de la nullité des contraintes de cisaillement au niveau des surfaces supérieures et inférieures de la plaque (contraintes de cisaillement non nulles), un facteur de correction en cisaillement à travers l'épaisseur est introduit par Mindlin (1951). La valeur de facteur correction dépend de la géométrie de la plaque, de la variation du coefficient de Poisson à travers l'épaisseur, du chargement appliqué et des conditions aux limites imposées.

✓ Pour un élément rectangulaire : $K = \frac{5}{6}$ (II.5)

✓ Pour un élément circulaire : $K = \frac{2}{3}$ (II.6)

II.3.3. Théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSDT, Higher order shear deformation theory) :

À la différence de la théorie classique des plaques (CPT) et la théorie du premier ordre (FSDT) avec les hypothèses de la distribution linéaire du déplacement à travers l'épaisseur, la théorie d'ordre élevé (Reddy 1984) est basée sur une distribution non linéaire des champs à travers l'épaisseur donc on tient compte des effets de la déformation transversale de cisaillement et/ou de la déformation normale transversale. Par conséquent, les modèles d'ordre supérieur sont plus précis que les modèles du premier ordre et la précision augmente avec l'ordre de développement. Ce modèle n'exige pas des facteurs de correction en cisaillement et tient compte d'hypothèses plus réalistes que celles de Kirchhoff.

II.3.3.1. Les hypothèses de base de la HSDT :

Les hypothèses qui sont à la base du développement de cette théorie sont :

- ✓ Les déplacements sont petits comparés à l'épaisseur de la plaque,
- ✓ Les sections transversales, initialement planes et normales au plan moyen avant déformations, perdent la planéité et la normalité après déformations.
- ✓ La déformation axiale dans la direction transversale n'est en général pas négligeable.
- ✓ Les contraintes normales dans la direction transversale ne sont en générale pas négligeables.
- ✓ Les normales ne changent pas de longueur.

II.3.3.2. Le champ de déplacement :

Pour les théories d'ordre élevé, le champ de déplacement est généralement écrit comme suit :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + f(z) \varphi_x(x, y) \quad (\text{II.7a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + f(z) \varphi_y(x, y) \quad (\text{II.7b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{II.7c})$$

Où u_0, v_0 sont les déplacements dans les directions x et y respectivement, et w_0 la flèche de la plaque.

ϕ_x, ϕ_y sont les rotations autour des axes x et y respectivement, avec

$$\phi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x, \phi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y, f(z) \text{ représente la fonction de cisaillement transverse le long de}$$

l'épaisseur contrairement à la théorie classique où $f(z) = 0$, alors que la théorie de premier ordre $f(z) = z$.

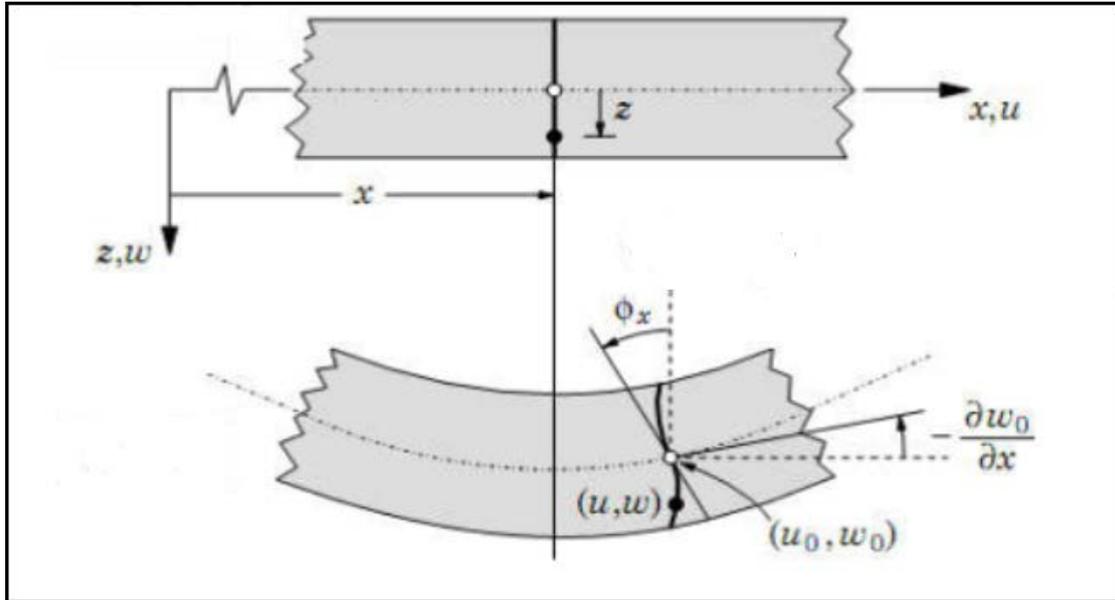


Figure.II.4 : Illustration de la plaque de Reddy.

II.3.4. Théorie raffinée des plaques (RPT, Refined plate theory) :

La théorie raffinée des plaques à deux variables (RPT) a d'abord été développée pour des plaques isotropes par Shimpi en 2002, et a été ensuite appliquée aux plaques orthotropes par (Shimpi et Patel 2006) et par (Kim, Thai et al. 2009) et à la flexion des plaques FGM par Atmane, (Tounsi et al. 2010). La fiabilité de cette méthode a été démontrée par (Kim, Thai et al. 2009) pour le cas de la flexion statique et pour le cas du flambage d'une plaque composite. Récemment (Thai et Kim 2010, 2011), et (Hadji, Atmane et al. 2011) ont adapté la RPT, avec succès, au flambage des plaques orthotropes, et à la vibration libre des plaques stratifiées et sandwichs respectivement.

La théorie tient compte d'une variation des déformations transversales de cisaillement à travers l'épaisseur et satisfait les conditions de la nullité des contraintes de cisaillement sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque sans utiliser de facteurs de correction de cisaillement et donne lieu à une telle variation de contrainte de cisaillement transversale que les contraintes de cisaillement transversales varient paraboliquement sur toute l'épaisseur et

satisfont des conditions de surface sans contrainte de cisaillement. Cette théorie qui ressemble à la théorie d'ordre supérieur utilise seulement deux fonctions inconnues afin d'obtenir deux équations gouvernantes pour les plaques, et a de fortes similitudes avec le CPT dans certains aspects tels que les équations régissant les conditions aux limites et des expressions en relation avec le temps.

II.3.4.1. Les hypothèses de base de la RPT :

Voici les hypothèses impliquées pour la théorie de la plaque raffinée (RPT) :

- 1) Les déplacements sont faibles par rapport à l'épaisseur de la plaque et, par conséquent, les déformations impliquées sont infinitésimales.
- 2) Le déplacement transversal w comprend deux composantes, de flexion w_b et de cisaillement w_s . Ces deux composantes sont des fonctions des coordonnées x , y et du temps t uniquement :

$$w(x, y, t) = w_b(x, y, t) + w_s(x, y, t) \quad (\text{II.8})$$

- 3) En général, la contrainte normale transversale σ_z est négligeable devant les contraintes dans le plan σ_x et σ_y .
- 4) Les déplacements u dans la direction x et v dans la direction y comprennent les composantes d'allongement, de flexion et de cisaillement :

$$u = u_0 + u_b + u_s \quad (\text{II.9a})$$

$$v = v_0 + v_b + v_s \quad (\text{II.9b})$$

- Les composantes de flexion u_b et v_b sont supposées être similaires aux déplacements donnés par la théorie classique des plaques. Par conséquent, l'expression de u_b et v_b peut être donnée comme :

$$u_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial x} \quad (\text{II.10a})$$

$$v_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial y} \quad (\text{II.10b})$$

- La composante de cisaillement u_s du déplacement u et la composante de cisaillement v_s du déplacement v donnent lieu, en liaison avec w_s , aux variations

paraboliques des déformations de cisaillement γ_{xz} , γ_{yz} et donc aux contraintes de cisaillement τ_{xz} , τ_{yz} à travers l'épaisseur de la plaque, h , de telle manière que les contraintes de cisaillement τ_{xz} , τ_{yz} sont nulles sur les faces supérieure et inférieure de la plaque. Par conséquent, l'expression pour u_s et v_s peut être donnée comme :

$$u_s = \left[\frac{1}{4}z - \frac{5}{3}z \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (\text{II.11a})$$

$$v_s = \left[\frac{1}{4}z - \frac{5}{3}z \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (\text{II.11b})$$

5) Les forces corporelles sont supposées nulles (les forces corporelles peuvent être traitées comme des forces externes sans beaucoup de perte de précision).

II.3.4.2. Le champ de déplacement :

Le champ de déplacement de cette théorie s'écrit :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (\text{II.12a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (\text{II.12b})$$

$$w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) \quad (\text{II.12c})$$

Où w_b, w_s sont les composantes de flexion et de cisaillement du déplacement, respectivement.

Parmi les fonctions proposées dans la littérature, nous pouvons citer :

$$\checkmark \quad \text{La fonction de Nedri et al. (2014) : } f(z) = \left[\frac{(h/\pi) \sin(hz/\pi) - z}{(\cosh(\pi/2) - 1)} \right] \quad (\text{II.13})$$

$$\checkmark \quad \text{La fonction d'Ait Atmane et al. (2015) : } f(z) = \left[\frac{\cosh(\pi/2)}{\cosh(\pi/2) - 1} z - \frac{(h/\pi) \sinh(\frac{\pi}{h} z)}{(\cosh(\pi/2) - 1)} \right] \quad (\text{II.14})$$

$$\checkmark \quad \text{La fonction de Reissner : } f(z) = h \left[\frac{1}{4} \left(\frac{z}{h} \right) - \frac{5}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^3 \right] \quad (\text{II.15})$$

II.4. Développement des théories des plaques :

II.4.1. Méthode de Navier :

Il existe plusieurs approches pour résoudre un problème de flambement. Dans cette étude, nous utilisons la méthode Navier. Selon Reddy, les solutions Navier peuvent être développées pour une plaque rectangulaire lorsque les quatre bords sont simplement pris en charge. D'autres méthodes fréquemment utilisées pour résoudre les problèmes de flambage des plaques sont celles de Levy et Rayleigh-Ritz.

Dans la méthode de Navier (1823), les déplacements généralisés sont développés dans une double série trigonométrique en termes de paramètres inconnus. Le choix des fonctions de la série se limite à celles qui satisfont aux conditions aux limites du problème. La substitution des expansions de déplacement dans les équations gouvernantes devrait se traduire par un ensemble unique et inversible d'équations algébriques parmi les paramètres de l'expansion. Sinon, la solution Navier ne peut pas être développée pour le problème.

II.5. Conclusion :

En conclusion, ce chapitre a montré un aperçu sur les théories des plaques, leurs hypothèses et leurs champs de déplacement à savoir la théorie classique des plaques (CPT), la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT), la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT) et la théorie raffinée des plaques (RPT) ainsi que la méthode de Navier, l'une des méthodes de développement des théories.

CHAPITRE III :

Formulations

théoriques.

III.1. Introduction :

Dans ce travail, une nouvelle théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé hyperbolique (HySDT) pour l'analyse du flambement des plaques isotropes et orthotropes est développée. Le présent modèle contient seulement deux variables inconnues contre quatre ou plus à toute autre théorie des plaques. Les plaques sont soumises à un chargement axial (uni axiale et bi axiale). Les solutions analytiques sont déterminées en utilisant la méthode de Navier.

III.2. Les Formulations théoriques :

III.2.1. Le champ de déplacement :

Dans cette étude, des hypothèses simplificatrices sont considéré aux théories HSdT conventionnelle afin de diminuer le nombre des variables inconnues. La cinématique des HSdT conventionnelle est exprimé par :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z) \varphi_x(x, y) \quad (\text{III.1a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z) \varphi_y(x, y) \quad (\text{III.1b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{III.1c})$$

Où $u_0, v_0, w_0, \varphi_x, \varphi_y$ sont les cinq inconnues des déplacements de la surface moyenne de la plaque, $f(z)$ présente la fonction de forme définissant la distribution des contraintes et des déformations de cisaillement transverse à travers l'épaisseur.

En éliminant les déplacements membranaires, Le champ de déplacement du présent modèle peut être écrit sous la forme plus simple comme suit :

$$u(x, y, z) = -z \frac{\partial w_0}{\partial x} - \left(h \sinh\left(\frac{z}{h}\right) - z \cosh\left(\frac{1}{2}\right) \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (\text{III.2a})$$

$$v(x, y, z) = -z \frac{\partial w_0}{\partial y} - \left(h \sinh\left(\frac{z}{h}\right) - z \cosh\left(\frac{1}{2}\right) \right) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (\text{III.2b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{III.2c})$$

Ce champ de déplacement satisfait les conditions de la nullité des contraintes de cisaillement sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque, et la variation des déformations transversales de cisaillement est hyperbolique à travers l'épaisseur sans l'introduction des facteurs de correction de cisaillement. Le champ de déformation est obtenu par l'utilisation des relations déformation-déplacement comme suit :

$$\varepsilon_x = zK_x^0 + f(z)\varphi_x \quad (\text{III.3a})$$

$$\varepsilon_y = zK_y^0 + f(z)\varphi_y \quad (\text{III.3b})$$

$$\varepsilon_z = 0 \quad (\text{III.3c})$$

$$\gamma_{xy} = zK_{xy}^0 + f(z)\varphi_{xy} \quad (\text{III.3d})$$

$$\gamma_{xz} = [g(z)] \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (\text{III.3e})$$

$$\gamma_{yz} = [g(z)] \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (\text{III.3f})$$

Où

$$K_x^0 = \frac{-\partial^2 w_0}{\partial x^2}, \varphi_x = \frac{-\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, K_y^0 = \frac{-\partial^2 w_0}{\partial y^2}, \varphi_y = \frac{-\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, K_{xy}^0 = -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial x}, \varphi_{xy} = -2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} \quad (\text{III.4})$$

Avec :

$$f(z) = \left(h \sinh\left(\frac{z}{h}\right) - z \cosh\left(\frac{1}{2}\right) \right) \quad (\text{III.5a})$$

$$(\text{III.5b})$$

$$g(z) = -df(z) / dz$$

III.2.2. Les équations constitutives des plaques :

Les équations constitutives d'une plaque orthotrope peuvent être écrites comme :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \Rightarrow \quad (\text{III.6})$$

Où Q_{ij} sont les coefficients de rigidité (coefficients élastiques) réduites des contraintes planes dans les axes du matériau de la plaque, et sont définies comme :

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad (\text{III.7})$$

$$Q_{66} = G_{12}, \quad Q_{44} = G_{23}, \quad Q_{55} = G_{13}$$

Où E_1, E_2 sont les modules de Young, G_{12}, G_{23}, G_{13} sont le module de cisaillement et ν_{12}, ν_{21} sont les coefficients de Poisson.

Pour la plaque isotrope, ces propriétés de matériau ci-dessus se réduisent à :

$$E_1 = E_2 = E \quad (\text{III.8a})$$

$$\nu_{12} = \nu_{21} = \nu \quad (\text{III.8b})$$

$$G_{12} = G_{13} = G_{23} = G \quad (\text{III.8c})$$

Les indices 1, 2, 3 correspondent respectivement aux directions x, y, z du système de coordonnées cartésiennes.

Pour les plaques orthotropes, on a utilisé des constantes d'ingénieur définie par (Reddy,1997) :

$$E_1 / E_2 \text{ varie, } G_{12} / E_2 = G_{13} / E_2 = 0.5, \quad G_{23} / E_2 = 0.2, \quad \nu_{12} = 0.25 \quad (\text{III.9})$$

III.2.3. Les équations d'équilibre :

Le principe des travaux virtuels est utilisé ici pour dériver les équations d'équilibre appropriées au champ de déplacement et l'équation constitutive. Il peut être énoncé sous forme analytique suivante :

$$0 = \int_V \delta(U + V) dV \quad (\text{III.10})$$

Où δU est la variation de l'énergie de déformation ; et δV est la variation du travail extérieur engendré par les charges extérieur appliqué à la plaque.

La variation de l'énergie de déformation de la plaque est donnée par :

$$\delta U = \int_A \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dA = \int_A (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_{xy} \gamma_{xy} + \sigma_{yz} \gamma_{yz} + \sigma_{xz} \gamma_{xz}) dA \quad (\text{III.11})$$

Substituant les Eqs. (III.3) et (III.6) dans l'Eq.(III.11) et intégrant par rapport à l'épaisseur de la plaque, l'énergie de déformation de la plaque peut être réécrite comme :

$$U = \int_A (M_x^b K_x^0 + M_y^b K_y^0 + M_{xy}^b K_{xy}^0) dx dy \quad (\text{III.14})$$

$$+ \int_A (Q_{xz} \gamma_{xz} + Q_{yz} \gamma_{yz} + M_x^s \varphi_x + M_y^s \varphi_y + M_{xy}^s \varphi_{xy}) dx dy$$

Où les résultantes des contraintes N, M et Q sont définies par :

$$(N_x, N_y, N_{xy}) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) dz \quad (\text{III.15a})$$

$$(M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) z dz \quad (\text{III.15b})$$

$$(M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) f dz \quad (\text{III.15c})$$

$$(Q_{yz}, Q_{xz}) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{yz}, \sigma_{xz}) g dz \quad (\text{III.15d})$$

La variation du travail extérieur peut être exprimé par :

$$\delta V = - \int_A \left(N_x^0 \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} + N_y^0 \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} \right) dA \quad (\text{III.16})$$

Où (N_x^0, N_y^0, N_{xy}^0) sont les charges axiaux appliqués à la plaque.

Substituant les Eqs. (III.3) et (III.6) dans l'Eq. (III.15) et en intégrant l'équation par parties, en collectant les coefficients de $\delta \varphi$ et δw_0 , les équations d'équilibre pour la plaque orthotrope sont obtenues comme suit:

$$\delta w_0 = \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \bar{N} = 0 \quad (\text{III.17a})$$

$$\delta \varphi = \frac{\partial Q_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} = 0 \quad (\text{III.17b})$$

Les résultantes de contraintes sont liées aux déplacements généralisés (w_0, φ) par les relations suivantes :

$$\begin{Bmatrix} M_x^b \\ M_y^b \\ M_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\partial^2 w_0 / \partial x^2 \\ -\partial^2 w_0 / \partial y^2 \\ -2\partial^2 w_0 / \partial x \partial y \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\partial^2 \varphi / \partial x^2 \\ -\partial^2 \varphi / \partial y^2 \\ -2\partial^2 \varphi / \partial x \partial y \end{Bmatrix} \Rightarrow \quad (\text{III.18a})$$

$$\begin{Bmatrix} M_x^s \\ M_y^s \\ M_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\partial^2 w_0 / \partial x^2 \\ -\partial^2 w_0 / \partial y^2 \\ -2\partial^2 w_0 / \partial x \partial y \end{Bmatrix} \Rightarrow \quad (\text{III.18b})$$

$$\begin{Bmatrix} Q_{yz} \\ Q_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial \varphi / \partial y \\ \partial \varphi / \partial x \end{Bmatrix} \Rightarrow \quad (\text{III.18c})$$

Où D_{ij}, D_{ij}^s et A_{ij}^s sont les termes de rigidité et sont définis par :

$$(D_{ij}, D_{ij}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}(z^2, z^s) dz \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (\text{III.19a})$$

$$A_{ij}^s = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} g^2(z) dz \quad (i, j = 4, 5) \quad (\text{III.19b})$$

III.2.4. Solutions analytiques et conditions aux limites :

On considère une plaque est soumise à des forces de compression dans le plan (Figure III.1), et que les forces sont suffisamment petites, l'équilibre de la plaque est stable et la plaque reste plate jusqu'à ce qu'une certaine charge soit atteinte. À cette charge, appelée force critique de flambement, l'état stable de la plaque est perturbé et la plaque cherche une configuration d'équilibre alternative accompagnée d'un changement dans le comportement de déflexion de la charge. La force critique de flambement d'une plaque rectangulaire simplement supportée est déterminée dans ce travail en utilisant la solution Navier.

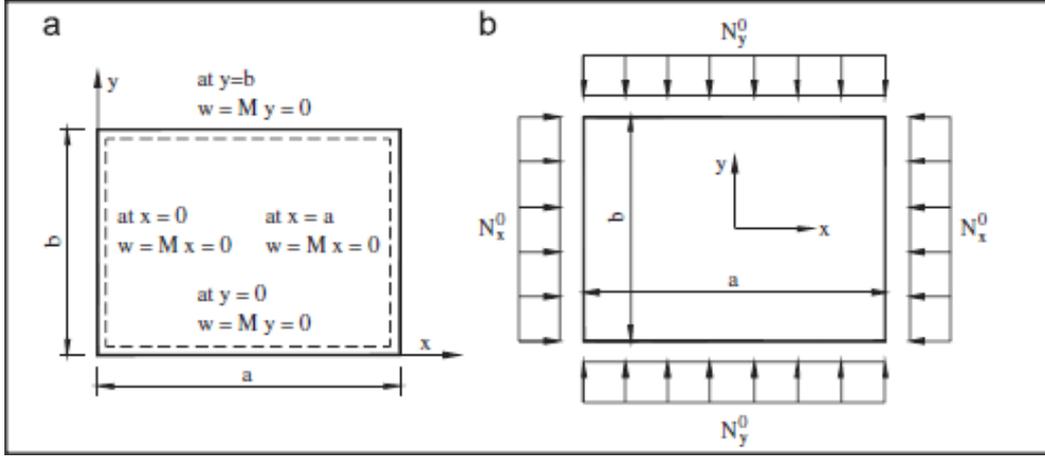


Figure III.1: *Plaque rectangulaire : (a) condition aux limites et (b) forces dans le plan.*

Les fonctions de déplacement suivantes w_0 et φ sont choisies pour satisfaire automatiquement les conditions aux limites. Les solutions sont données comme suit :

$$\varphi = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{mn} \sin \alpha x \sin \beta y \quad (\text{III.20a})$$

$$w_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{0mn} \sin \alpha x \sin \beta y \quad (\text{III.20b})$$

Où $\alpha = m\pi / a$, $\beta = n\pi / b$ et φ_{mn} , w_{0mn} sont des coefficients.

Remplaçant l'Eq. (III.20) dans l'Eq.(III.15), on obtient le système suivant:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_{mn} \\ w_{0mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.21})$$

Où

$$k_{11} = [D_{11}^s \alpha^4 + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \alpha^2 \beta^2 + D_{22}^s \beta^4] - N_0 (\alpha^2 + \gamma \beta^2) \quad (\text{III.22a})$$

$$k_{12} = D_{11}^s \alpha^4 + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \alpha^2 \beta^2 + D_{22}^s \beta^4 \quad (\text{III.22b})$$

$$k_{22} = H_{11}^s \alpha^4 + 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s) \alpha^2 \beta^2 + H_{22}^s \beta^4 + A_{55}^s \alpha^2 + A_{44}^s \beta^2 \quad (\text{III.22c})$$

Pour une solution non triviale, le déterminant de la matrice des coefficients dans l'Eq.(III.21) doit être nul.

III.3. Conclusion :

Dans le présent chapitre, nous avons présenté les différentes étapes de l'étude analytique sur la stabilité des plaques isotropes et orthotropes soumises à un chargement mécanique et ce, en utilisant une nouvelle théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé hyperbolique (HySDT) à seulement deux variables, au lieu de cinq ou plus dans le cas des autres théories de déformation de cisaillement. Ce modèle n'exige pas un facteur de correction de cisaillement et donne une description parabolique des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur tout en satisfaisant les conditions de la nullité des contraintes de cisaillement sur les surfaces inférieure et supérieure de la plaque. Les résultats présentés dans le chapitre suivant permettent d'apprécier clairement l'apport de cette théorie en les comparant avec ceux obtenus par les autres théories du premier ordre et d'ordre élevé.

CHAPITRE IV :
Résultats numériques
et discussions.

IV.1. Introduction :

Ce chapitre expose les résultats numériques obtenus par notre théorie sur la charge critique du flambement des plaques isotrope et orthotropes, quelque soient minces ou épaisses, dans des différentes conditions de chargement sous forme des tableaux et des figures explicites.

Généralement, Des résultats numériques nécessitent une discussion bien détaillée afin d'être compréhensifs et bien évidemment on s'intéresse par la suite à l'interprétation et la discussion des résultats numériques sur la charge critique du flambement, invoqués par la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé hyperbolique à deux variables seulement, en tenant compte à l'influence du rapport de géométrie et le rapport des modules qui servent à différencier entre les plaques minces ou épaisses et les plaques orthotropes respectivement, comme on touche les plaques isotropes aussi. Dans le but de voir les taux d'exactitude de ces résultats, ils seront comparés avec les résultats de la charge critique du flambement obtenus par d'autres théories : la théorie classique des plaques (CPT), la théorie raffinée des plaques (RPT) et la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT) et méthode des éléments finis.

Et d'après la discussion qui analyse les résultats, on peut évaluer le rendement de notre théorie et examiner l'exactitude, la justesse et la précision de cette théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé hyperbolique à deux variables seulement.

IV.2. Résultats numériques et discussion :

Afin de clarifier la précision de la présente théorie, on considère une plaque simplement appuyée soumise à des conditions de chargement (Figure IV.1) : une compression uniaxiale, une compression biaxiale et une traction dans la direction x et une compression dans la direction y, et dans le but de mieux comprendre le comportement de cette plaque au flambement qui mène par la suite à la vérification.

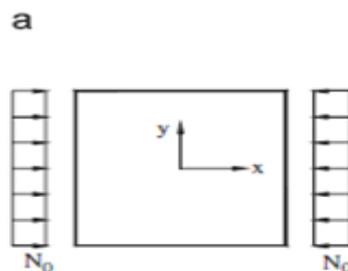


Figure IV.1a : Les conditions de chargement de la plaque carrée pour : (a) la compression uniaxiale.

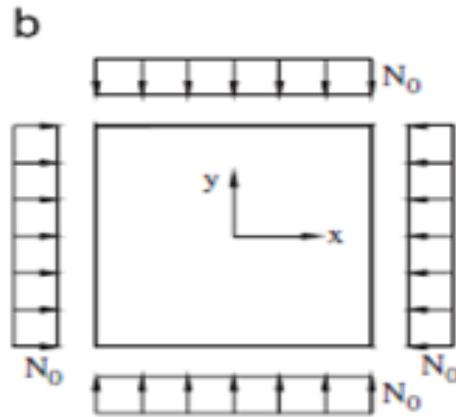


Figure IV.1b : Les conditions de chargement de la plaque carrée pour : (b) la compression biaxiale.

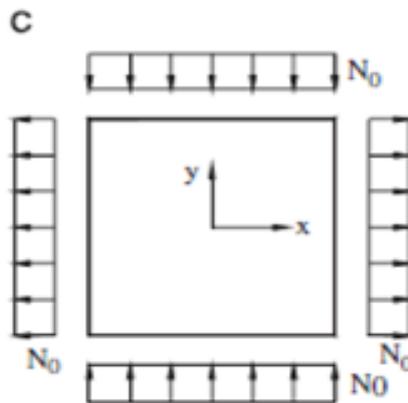


Figure IV.1c: Les conditions de chargement de la plaque carrée pour : (c) la traction dans la direction x et la compression dans la direction y.

On commence par un exemple appliqué sur les plaques carrées isotropes et orthotropes, pour observer l'influence du rapport de géométrie et le rapport des modules.

Le coefficient de poisson utilisé est :

$$\nu = 0.3 \quad (IV.1)$$

Le rapport des modules est variable ($E_1/E_2 = 10$, $E_1/E_2 = 25$, $E_1/E_2 = 40$), la FSDT utilise les trois facteurs de correction de cisaillement suivants : $k = 2/3$, $k = 5/6$ et $k = 1$ en comparaison avec la présente théorie.

Pour plus de commodité, la charge de flambement non dimensionnelle suivante est utilisée:

$$\bar{N} = \frac{N_{cr} a^2}{E_2 h^3} \quad (IV.2)$$

Où a est la longueur de la plaque carrée et h est l'épaisseur de la plaque.

Les résultats de la charge critique de flambement d'une plaque carrée simplement appuyée sont présentés dans les Tableaux IV.1, IV.2, IV.3 et IV.4 et les Fig. IV.2, IV.3, IV.4 et IV.5.

Tableau IV.1: Comparaison de la charge critique non dimensionnelle du flambement d'une plaque carrée sous chargement uniaxial de compression.

a/h	Theories	Isotrope $\nu = 0.3$	Orthotrope		
			$E_1/E_2 = 10$	$E_1/E_2 = 25$	$E_1/E_2 = 40$
5	Présente	2.9512	6.3473	9.1019	10.5744
	RPT ^(*)	2.9512	6.3478	9.1039	10.5785
	FSDT ^(*) ($k_s = 2/3$)	2.8200	5.5679	7.1122	7.7411
	FSDT ^(*) ($k_s = 5/6$)	2.9498	6.1804	8.2199	9.1085
	FSDT ^(*) ($k_s = 1$)	3.0432	6.6715	9.1841	10.3463
10	Présente	3.4224	9.3731	16.7715	22.2570
	RPT ^(*)	3.4224	9.3732	16.7719	22.2581
	FSDT ^(*) ($k_s = 2/3$)	3.3772	8.8988	14.7011	18.3575
	FSDT ^(*) ($k_s = 5/6$)	3.4222	9.2733	15.8736	20.3044
	FSDT ^(*) ($k_s = 1$)	3.4530	9.5415	16.7699	21.8602
20	Présente	3.5650	10.6534	21.3479	31.0684
	RPT ^(*)	3.5650	10.6534	21.3479	31.0685
	FSDT ^(*) ($k_s = 2/3$)	3.5526	10.4926	20.4034	28.85
	FSDT ^(*) ($k_s = 5/6$)	3.5650	10.6199	20.9528	30.0139
	FSDT ^(*) ($k_s = 1$)	3.5733	10.7066	21.3363	30.8451
50	Présente	3.6071	11.0780	23.1225	34.9717
	RPT ^(*)	3.6071	11.0780	23.1225	34.9717
	FSDT ^(*) ($k_s = 2/3$)	3.6051	11.0497	22.9366	34.4886
	FSDT ^(*) ($k_s = 5/6$)	3.6071	11.0721	23.0461	34.7487
	FSDT ^(*) ($k_s = 1$)	3.6085	11.0871	23.1197	34.9244
100	Présente	3.6132	11.1415	23.4007	35.6120
	RPT ^(*)	3.6132	11.1415	23.4007	35.6120
	FSDT ^(*) ($k_s = 2/3$)	3.6127	11.1343	23.3527	35.4852
	FSDT ^(*) ($k_s = 5/6$)	3.6132	11.1400	23.3810	35.5538
	FSDT ^(*) ($k_s = 1$)	3.6135	11.1438	23.3999	35.5996

(*) Pris à partir de Référence (Kim et al. 2009).

Tableau IV.2 : Comparaison de la charge critique non dimensionnelle du flambement d'une plaque carrée sous chargement biaxial de compression.

a/h	Theories	Isotrope $\nu = 0.3$	Orthotrope		
			$E_1 / E_2 = 10$	$E_1 / E_2 = 25$	$E_1 / E_2 = 40$
5	Présente	1.4756	2.8545 ^a	3.3302 ^a	3.4807 ^a
	RPT ^(*)	1.4756	2.8549 ^a	3.3309 ^a	3.4800 ^a
	FSDT ^(*) ($k_s = 2/3$)	1.4100	2.5042 ^a	2.7332 ^a	2.8303 ^a
	FSDT ^(*) ($k_s = 5/6$)	1.4749	2.8319 ^a	3.1422 ^a	3.2822 ^a
	FSDT ^(*) ($k_s = 1$)	1.5216	3.1027 ^a	3.4933 ^a	3.6793 ^a
10	Présente	1.7112	4.6718 ^a	6.0644 ^a	7.2533 ^a
	RPT ^(*)	1.7112	4.6718 ^a	6.0646 ^a	7.2536 ^a
	FSDT ^(*) ($k_s = 2/3$)	1.6886	4.4259	5.4351 ^a	6.0797 ^a
	FSDT ^(*) ($k_s = 5/6$)	1.7111	4.6367	5.8370 ^a	6.6325 ^a
	FSDT ^(*) ($k_s = 1$)	1.7265	4.7708	6.1425 ^a	7.0690 ^a
20	Présente	1.7825	5.3267 ^a	7.6643 ^a	9.6614 ^a
	RPT ^(*)	1.7825	5.3267	7.6643 ^a	9.6614 ^a
	FSDT ^(*) ($k_s = 2/3$)	1.7763	5.2463	7.3701 ^a	8.9895 ^a
	FSDT ^(*) ($k_s = 5/6$)	1.7825	5.3100	7.5546 ^a	9.3049 ^a
	FSDT ^(*) ($k_s = 1$)	1.7866	5.3533	7.6834 ^a	9.5297 ^a
50	Présente	1.8036	5.5390	8.2784 ^a	10.6576 ^a
	RPT ^(*)	1.8036	5.5390	8.2784 ^a	10.6576 ^a
	FSDT ^(*) ($k_s = 2/3$)	1.8025	5.5249	8.2199 ^a	10.5111 ^a
	FSDT ^(*) ($k_s = 5/6$)	1.8036	5.5361	8.2566 ^a	10.5810 ^a
	FSDT ^(*) ($k_s = 1$)	1.8042	5.5436	8.2812 ^a	10.6282 ^a
100	Présente	1.8066	5.5707	8.3744 ^a	10.8172 ^a
	RPT ^(*)	1.8066	5.5707	8.3744 ^a	10.8172 ^a
	FSDT ^(*) ($k_s = 2/3$)	1.8063	5.5672	8.3593 ^a	10.7788 ^a
	FSDT ^(*) ($k_s = 5/6$)	1.8066	5.5700	8.3687 ^a	10.7972 ^a
	FSDT ^(*) ($k_s = 1$)	1.8068	5.5719	8.3751 ^a	10.8095 ^a

^(*) Pris à partir de Référence (Kim et al. 2009).

^a Mode de la plaque est $(m, n) = (1, 2)$.

Tableau IV.3: Comparaison de la charge critique non dimensionnelle du flambement d'une plaque carrée soumise à une traction suivant l'axe x et une compression suivant l'axe y.

a/h	Theories	Isotrope $\nu = 0.3$	Orthotrope		
			$E_1 / E_2 = 10$	$E_1 / E_2 = 25$	$E_1 / E_2 = 40$
5	Présente	4.8272 ^a	4.0246 ^b	4.1019 ^c	4.1499 ^c
	RPT ^(*)	4.8274 ^a	4.0258 ^b	4.1044 ^c	4.1525 ^c
	FSDT ^(*) ($k_s = 2/3$)	4.4175 ^a	3.2849 ^d	3.3001 ^e	3.3053 ^e
	FSDT ^(*) ($k_s = 5/6$)	4.8158 ^a	3.9241 ^c	3.9794 ^c	4.0075 ^d
	FSDT ^(*) ($k_s = 1$)	5.1237 ^a	4.4488 ^b	4.5691 ^c	4.6073 ^c
10	Présente	6.6024 ^a	7.7863 ^a	8.5467 ^b	9.1633 ^b
	RPT ^(*)	6.6024 ^a	7.7863	8.5471 ^b	9.1638 ^b
	FSDT ^(*) ($k_s = 2/3$)	6.4032 ^a	7.2656	7.7820 ^b	8.1208 ^b
	FSDT ^(*) ($k_s = 5/6$)	6.6010 ^a	7.7748	8.4774 ^b	8.9039 ^b
	FSDT ^(*) ($k_s = 1$)	6.7398 ^a	8.0651	9.0153 ^b	9.5197 ^b
20	Présente	7.2754 ^a	9.2811 ^a	11.6346 ^b	12.8031 ^b
	RPT ^(*)	7.2754 ^a	9.2811	11.6347 ^b	12.8031 ^b
	FSDT ^(*) ($k_s = 2/3$)	7.2139 ^a	9.1310	11.2544 ^b	12.1990 ^b
	FSDT ^(*) ($k_s = 5/6$)	7.2753 ^a	9.2782	11.6015 ^b	12.6339 ^b
	FSDT ^(*) ($k_s = 1$)	7.3168 ^a	9.3790	11.8453 ^b	12.9428 ^b
50	Présente	7.4895 ^a	9.8101 ^a	12.9531 ^b	14.4177
	RPT ^(*)	7.4895 ^a	9.8101	12.9531 ^b	14.4177 ^b
	FSDT ^(*) ($k_s = 2/3$)	7.4790 ^a	9.7830	12.8751 ^b	14.2839 ^b
	FSDT ^(*) ($k_s = 5/6$)	7.4895 ^a	9.8097	12.9463 ^b	14.3789 ^b
	FSDT ^(*) ($k_s = 1$)	7.4965 ^a	9.8275	12.9942 ^b	14.4430 ^b
100	Présente	7.5211 ^a	9.8907 ^a	13.1666 ^b	14.6827 ^b
	RPT ^(*)	7.5211 ^a	9.8907 ^a	13.1666 ^b	14.6827 ^b
	FSDT ^(*) ($k_s = 2/3$)	7.5185 ^a	9.8838 ^a	16.1463 ^b	14.6474 ^b
	FSDT ^(*) ($k_s = 5/6$)	7.5211 ^a	9.8906 ^a	13.1648 ^b	14.6724 ^b
	FSDT ^(*) ($k_s = 1$)	7.5229 ^a	9.8951 ^a	13.1772 ^b	14.6891 ^b

^(*) Pris à partir de Référence (Kim et al. 2009).

^a Mode de la plaque est $(m, n) = (1, 2)$;

^b Mode de la plaque est $(m, n) = (1, 3)$;

^c Mode de la plaque est $(m, n) = (1, 4)$;

^d Mode de la plaque est $(m, n) = (1, 5)$;

^e Mode de la plaque est $(m, n) = (1, 6)$.

Les trois tableaux précédents (IV.1, IV.2 et IV.3) représentent les résultats de la charge critique du flambement d'une plaque carrée, isotrope ou orthotrope ($E_1 / E_2 = 10$, $E_1 / E_2 = 25$ et $E_1 / E_2 = 40$.), simplement appuyée et la comparaison avec la RPT et la FSDT ($k=1$, $k=2/3$ et $k=5/6$). Dans le premier tableau, la plaque est soumise à un chargement uniaxial de compression, par ailleurs le deuxième tableau représente le cas d'un chargement biaxial de compression et pour le troisième tableau, la plaque est soumise à une traction suivant l'axe x et une compression suivant l'axe y. Dont les résultats sont en excellent accord avec ceux des autres théories quelle que soit l'épaisseur de la plaque ($a/h=5$, $a/h=10$, $a/h=20$, $a/h=50$ et $a/h=100$), et qui atteint une supériorité de 0.04% (0.0041) comme indique le tableau (IV.1) pour la plaque orthotrope ($E_1 / E_2 = 40$) d'une épaisseur ($a/h=5$).

Tableau IV.4: Comparaison de la charge critique non dimensionnelle du flambement d'une plaque carrée isotrope sous chargement uniaxiale de compression (méthode des éléments finis).

mode	présente	Zhao et al. (2009)				Analytique (Timoshenko S, Gere J. en 1961)
		12x12	14x14	16x16	18x18	
1	39.4556	39.4891	39.3462	39.2387	39.204	39.4761
2	61.5962	59.631	59.9668	60.1913	60.3722	61.6814
3	109.3467	100.31	103.006	103.887	103.963	109.656
4	157.5500	147.678	149.481	150.572	151.987	157.904

Tableau IV.4 représente la comparaison de la charge critique du flambement d'une plaque isotrope carrée simplement appuyée soumise à un chargement uniaxial de compression. Les résultats en présente de mode 1 à 4 sont meilleurs par rapport aux résultats analytiques de Timoshenko S, Gere J. en 1961 (la méthode des éléments finis), avec une faveur qui arrive jusqu'à 0.22% (0.3540) en mode 4.

Parallèlement, on a la figure IV.2 qui représente l'effet du rapport de géométrie et rapport des modules sur la charge critique de flambement d'une plaque carrée simplement appuyée ((a) isotrope, (b) $E_1 / E_2 = 10$, (c) $E_1 / E_2 = 25$ et (d) $E_1 / E_2 = 40$.) et les figures IV.3, IV.4 et

IV.5 qui représentent l'effet du rapport des modules sur la charge critique de flambage d'une plaque carrée simplement appuyée ((a) $a = 10h$ et (b) $a = 25h$, (c) $a = 50h$ et (d) $a = 100h$), ces figures sont soumises à des différentes conditions de chargement dans le plan.

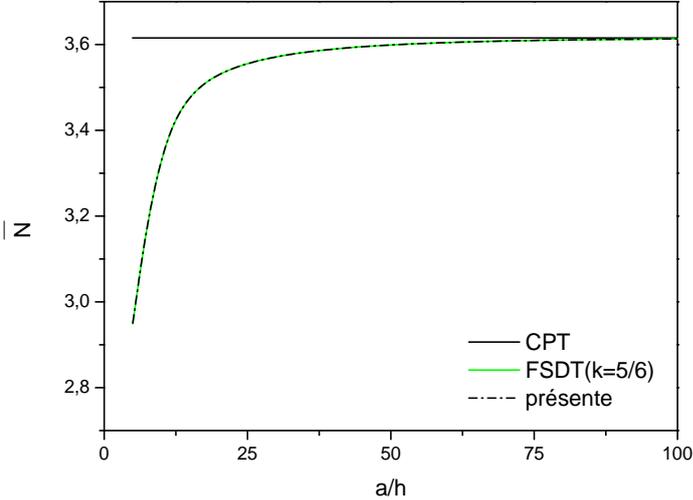


Fig. IV.2a : L'effet du rapport de géométrie et rapport des modules sur la charge critique de flambement d'une plaque carrée simplement appuyée soumise à une compression uniaxiale : isotrope.

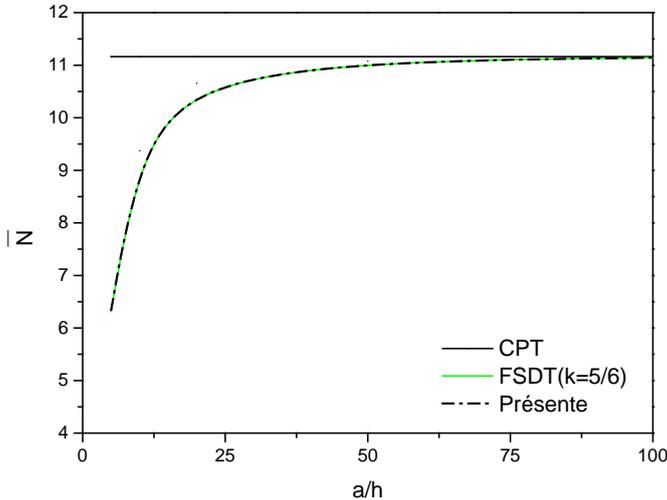


Fig. IV.2b : L'effet du rapport de géométrie et rapport des modules sur la charge critique de flambement d'une plaque carrée simplement appuyée soumise à une compression uniaxiale : $E_1 / E_2 = 10$.

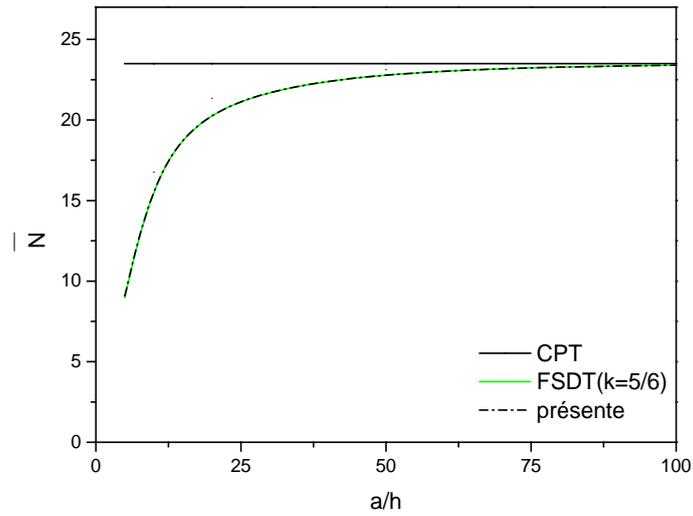


Fig. IV.2c : L'effet du rapport de géométrie et rapport des modules sur la charge critique de flambement d'une plaque carrée simplement appuyée soumise à une compression uniaxiale :

$$E_1 / E_2 = 25 .$$

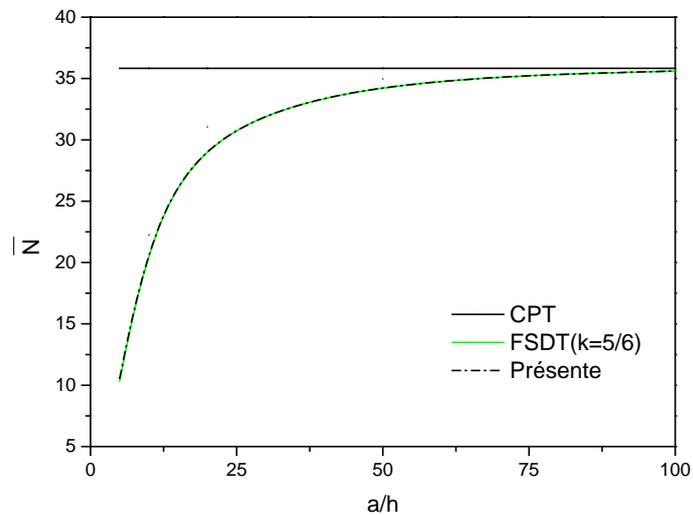


Fig. IV.2d : L'effet du rapport de géométrie et rapport des modules sur la charge critique de flambement d'une plaque carrée simplement appuyée soumise à une compression uniaxiale

$$: E_1 / E_2 = 40 .$$

Pour la figure IV.2, la plaque est soumise à une compression uniaxiale dont la présente théorie est en excellent accord avec la FSDT ($k=5/6$) quel que soit le rapport de géométrie

($a/h=5$, $a/h=10$, $a/h=20$, $a/h=50$ et $a/h=100$) et le rapport des modules ($E_1 / E_2 = 10$, $E_1 / E_2 = 25$ et $E_1 / E_2 = 40$.), et même pour la plaque isotrope, comme elle est semblable à la CPT pour les plaques minces (rapport de géométrie élevé: $a/h=100$).

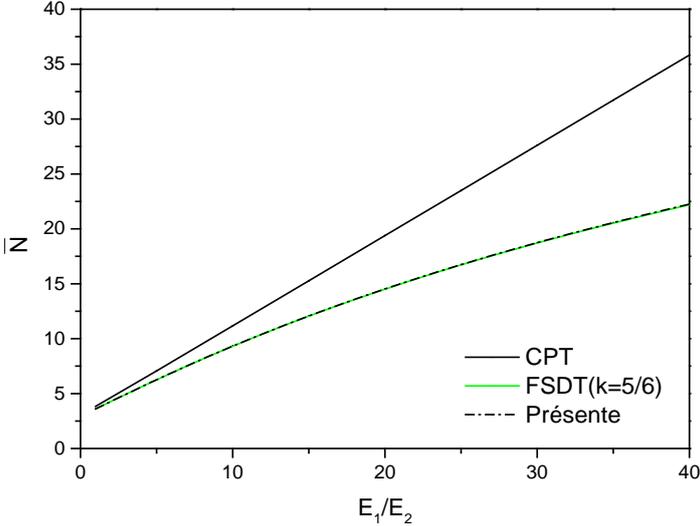


Fig. IV.3a : L'effet du rapport des modules sur la charge critique de flambement d'une plaque carrée simplement appuyée soumise à une compression uniaxiale : $a = 10h$.

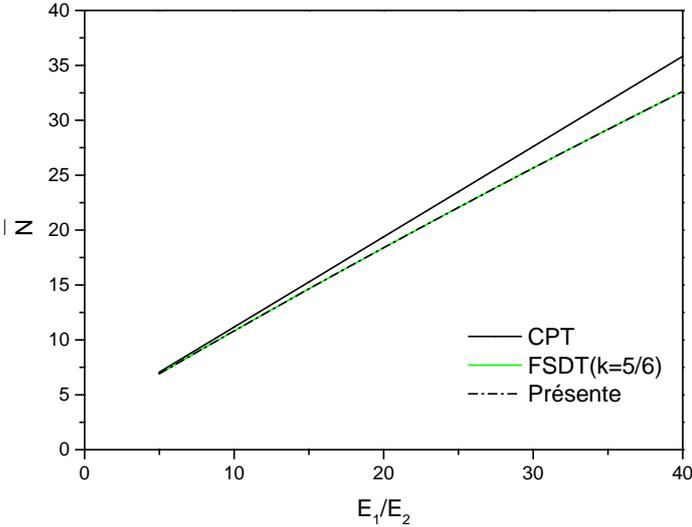


Fig. IV.3b : L'effet du rapport des modules sur la charge critique de flambement d'une plaque carrée simplement appuyée soumise à une compression uniaxiale : $a = 25h$.

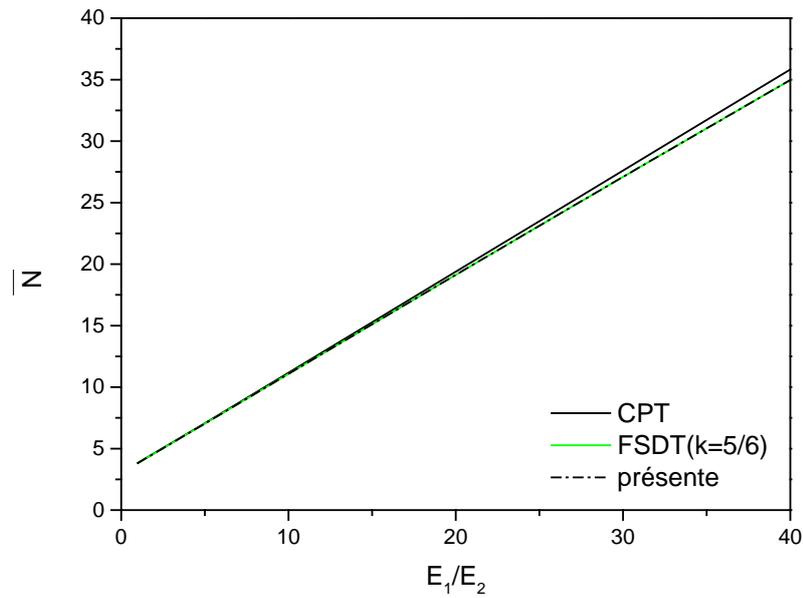


Fig. IV.3c : L'effet du rapport des modules sur la charge critique de flambement d'une plaque carrée simplement appuyée soumise à une compression uniaxiale : $a= 50h$.

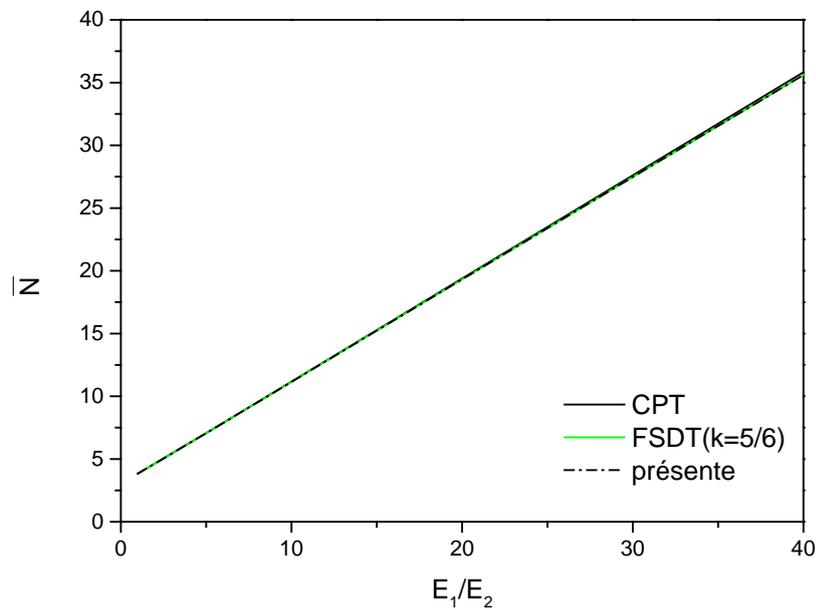


Fig. IV.3d : L'effet du rapport des modules sur la charge critique de flambement d'une plaque carrée simplement appuyée soumise à une compression uniaxiale : $a= 100h$.

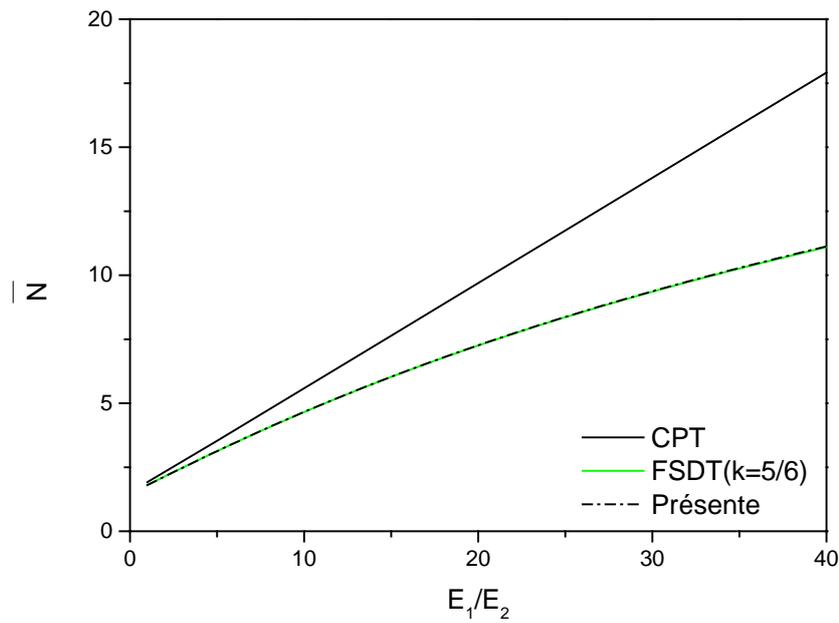


Fig. IV.4a : L'effet du rapport des modules sur la charge critique de flambement d'une plaque carrée simplement appuyée soumise à une compression biaxiale : $a = 10h$.

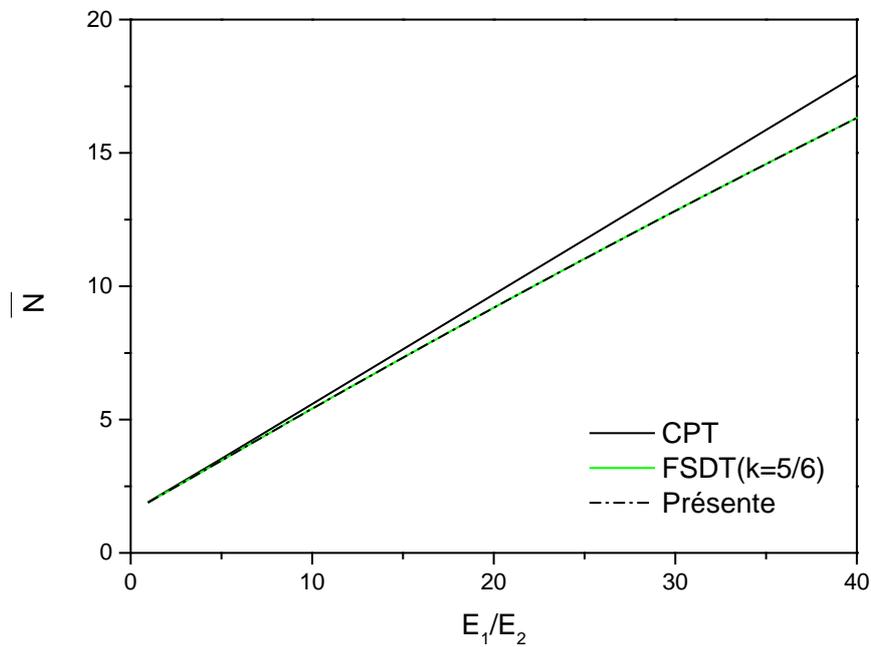


Fig. IV.4b : L'effet du rapport des modules sur la charge critique de flambement d'une plaque carrée simplement appuyée soumise à une compression biaxiale: $a = 25h$.

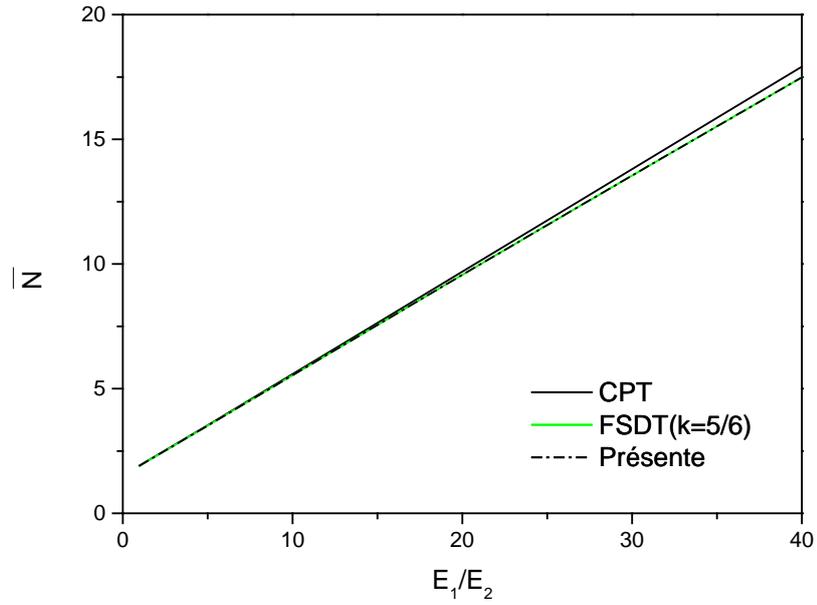


Fig. IV.4c : L'effet du rapport des modules sur la charge critique de flambement d'une plaque carrée simplement appuyée soumise à une compression biaxiale : $a= 50h$.

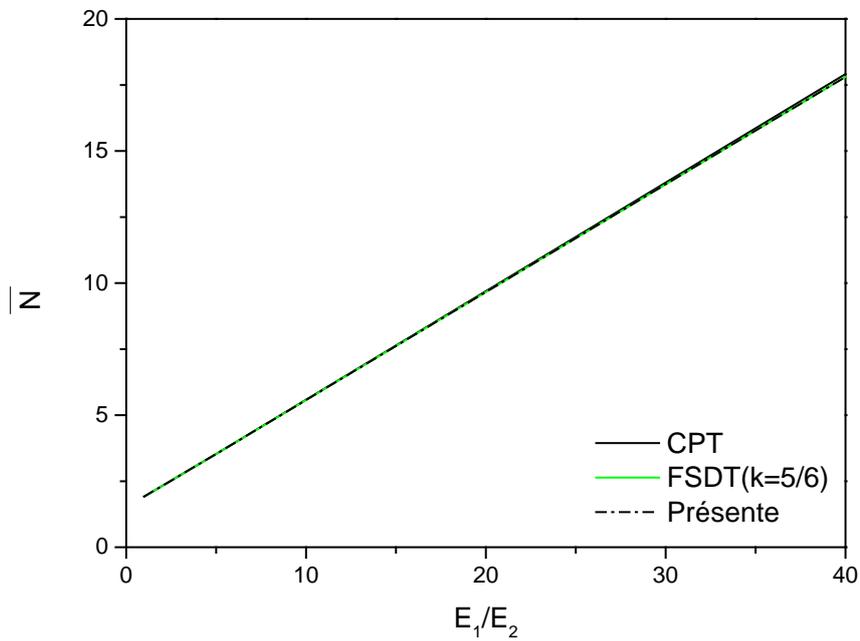


Fig. IV.4d : L'effet du rapport des modules sur la charge critique de flambement d'une plaque carrée simplement appuyée soumise à une compression biaxiale : $a= 100h$.

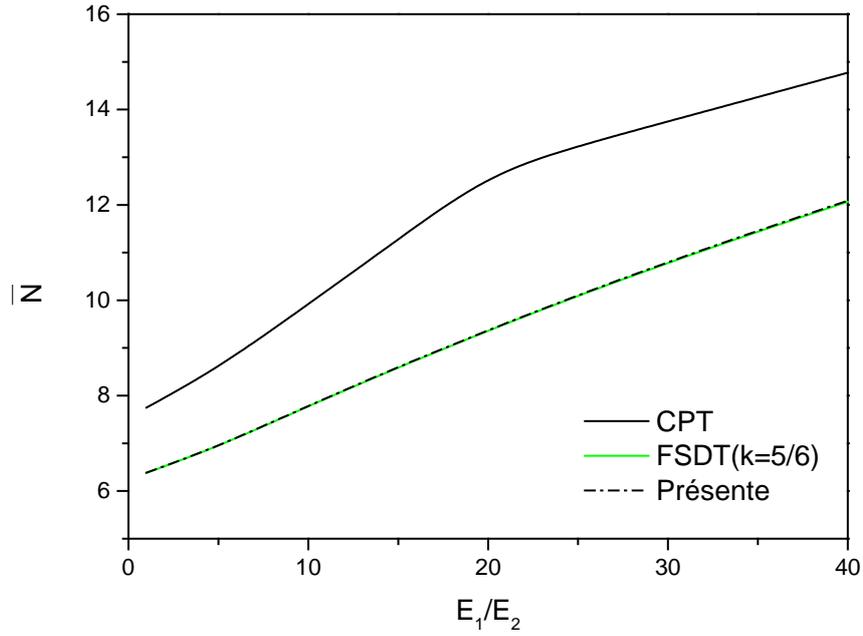


Fig. IV.5a : Effet du rapport des modules sur la charge critique de flambage d'une plaque carrée simplement appuyée soumise à une traction dans la direction x et à une compression dans la direction y: $a = 10h$.

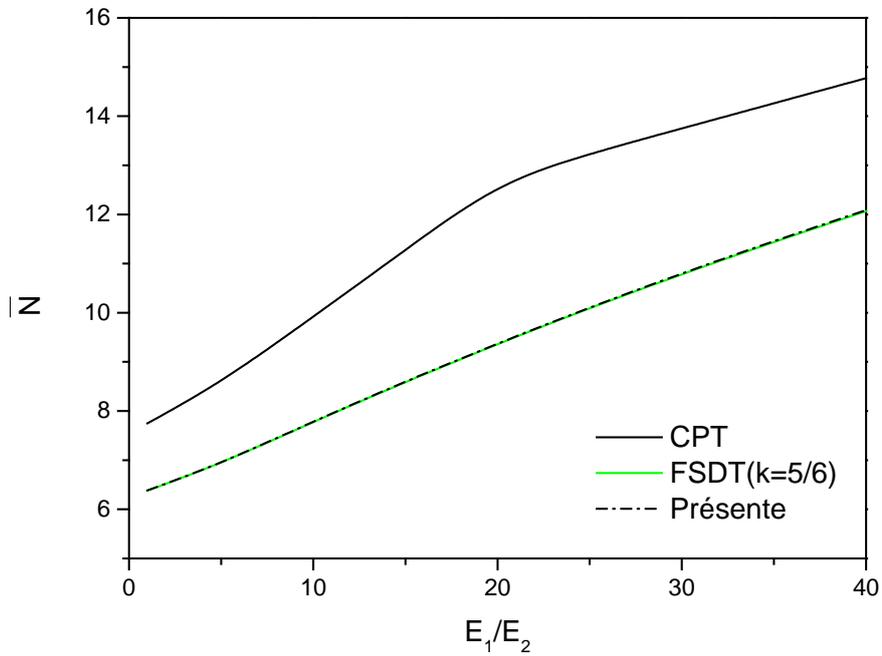


Fig. IV.5b : Effet du rapport des modules sur la charge critique de flambage d'une plaque carrée simplement appuyée soumise à une traction dans la direction x et à une compression dans la direction y: $a = 25h$.

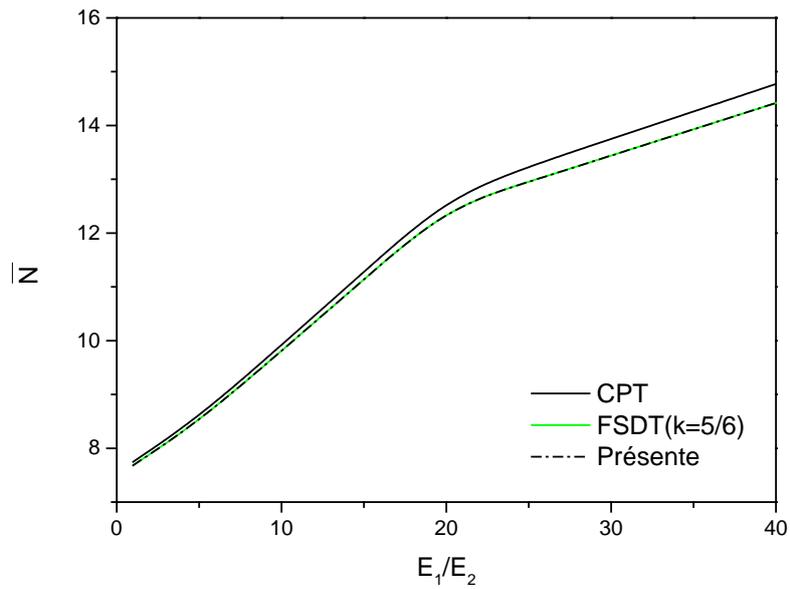


Fig. IV.5c : Effet du rapport des modules sur la charge critique de flambage d'une plaque carrée simplement appuyée soumise à une traction dans la direction x et à une compression dans la direction y: $a= 50h$.

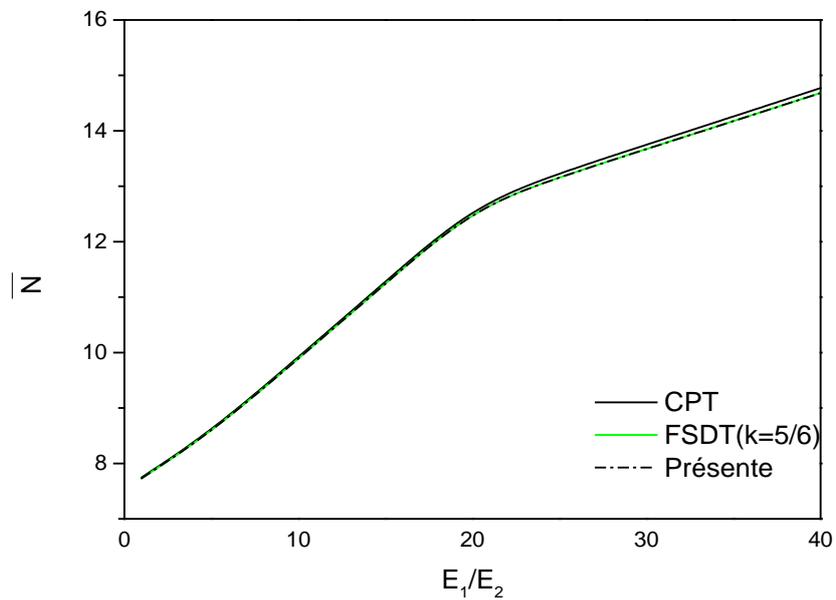


Fig. IV.5d : Effet du rapport des modules sur la charge critique de flambage d'une plaque carrée simplement appuyée soumise à une traction dans la direction x et à une compression dans la direction y: $a= 100h$.

On se qui concerne les figures IV.3, IV.4 et IV.5 la plaque est soumise à un chargement de compression uniaxial, de compression biaxial et de traction dans la direction x et compression dans la direction y respectivement, où les résultats de la présente théorie sont extrêmement similaires à ceux de la FSDT puisqu'on a une concomitance des courbes et plus précis que ceux de la CPT puisque la courbe de la présente est au-dessous de la courbe de la CPT, pour les différents rapports des modules ($E_1/E_2 = 10$, $E_1/E_2 = 25$ et $E_1/E_2 = 40$.) et les différents rapports de géométrie ($a/h=5$, $a/h=10$, $a/h=20$, $a/h=50$ et $a/h=100$).

Pour clôturer et suite au travail précédent, les résultats numériques étaient justes et précis pour les plaques isotropes et orthotropes quelque soient minces ou épaisses, par conséquent on garantit que la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé hyperbolique (HySDT) à deux variables à deux variables seulement pour les différentes conditions de chargement dans le plan, est exacte, juste et précise avec un bon rendement.

IV.3. Conclusion :

Afin d'évaluer la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé hyperbolique (HySDT) à deux variables, le départ de notre travail était de considérer une plaque simplement appuyée soumise à des conditions de chargement pour voir le comportement des plaques au flambement par cette théorie.

D'après la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé hyperbolique à deux variables on a trouvé les résultats numériques sur la charge critique du flambement des plaques isotropes ou orthotropes et minces ou épaisses dans des différentes conditions de chargement. Puis, ces résultats numériques ont été comparés avec les résultats de la CPT, la FSDT, la RPT et la méthode des éléments finis et suite à la discussion et l'interprétation, on a confirmé qu'ils sont corrects et favorables puisqu'ils étaient en bon accord et similaires aux autres résultats.

On sait que les meilleurs résultats exigent la bonne théorie, donc à l'arrivée, les résultats numériques de la présente théorie sont meilleurs alors on assure que la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé hyperbolique (HySDT) à deux variables pour les plaques isotropes et orthotropes est exacte, juste et précise avec un excellent rendement.

Conclusion générale

Conclusion générale

Le travail présent vise à développer une théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé hyperbolique (HySDT) avec seulement deux variables, crucial dans la fiabilité de la prédiction de ce phénomène d'instabilité : le flambement des plaques isotropes et orthotropes sous les différents types de chargement (uniaxial et biaxial).

La théorie (HySDT à deux variables) tient compte des effets de cisaillement transverse et de la distribution hyperbolique de déformation de cisaillement transverse selon l'épaisseur de la plaque, il n'est donc pas nécessaire d'utiliser des facteurs de correction de cisaillement et les conditions de la nullité des contraintes de cisaillement sur les surfaces inférieure et supérieure de la plaque sont satisfaites. Les équations d'équilibre sont obtenues à partir du principe des travaux virtuels. Dans le cadre de ce travail, les solutions analytiques d'une plaque rectangulaire simplement appuyée soumise à un chargement dans les deux directions x et y (uni axial et bi axial) ont été obtenues en utilisant la méthode Navier. Puis, ces résultats numériques ont été comparés avec les résultats de la CPT, la FSDT, la RPT et la méthode des éléments finis et suite à la discussion, on a confirmé qu'ils sont justes et corrects puisqu'ils étaient en bon accord et similaires aux autres résultats.

Enfin, nous concluons que la présente théorie est exacte pour résoudre les problèmes du flambement sous chargement mécanique des plaques isotropes et orthotropes.

Le travail présenté dans le cadre de ce mémoire peut être développé et enrichi. Il est également envisageable d'appliquer le présent modèle afin d'étendre l'analyse du flambement des éléments structuraux à sections variables et d'élargir l'étude aux coques qui sont des éléments très utilisées et très présents dans les structures spatiales, terrestres et marines. Il sera aussi très intéressant d'étudier des plaques sandwiches et des plaques fonctionnellement graduées sous chargement mécanique et thermique.

*Références
bibliographiques*

Références bibliographiques

Adim, B., Daouadji, T.H. And Rabahi, A., (2016). “A simple higher order shear deformation theory for mechanical behavior of laminated composite plates”. Algérie : Springer. Publiée le : 06 May 2016. Disponible sur : <<https://link.springer.com/article/10.1007/s40091-016-0109-x> >

Ait Atmane, H., Tounsi, A., Bernard, F. And Mahmoud, S.R. (2015), “A computational shear displacement model for vibrational analysis of functionally graded beams with porosities”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, **19**(2), 369-384.

Akavci, Ss. (2010), “Two new hyperbolic shear displacement models for orthotropic laminated composite plates”, *Mech Compos Mater.*, **46**(2), 215–626.

Amabili, M. And Reddy, J., (2016). “New non-linear higher-order shear deformation theory for large amplitude vibrations of laminated doubly curved shells”, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Elsevier, 2010. 10p.

Attia, A., (2015). “Contribution à l’étude de la vibration libre des plaques FGM dans un champ thermique“. Thèse de Doctorat en Génie Civil (structure & matériaux) : Université Djillali Liabes Sidi Bel Abbès (Algérie). 82 p.

Aydogdu, M. (2008), “Conditions for functionally graded plates to remain flat under inplane loads by classical plate theory”. *Compos Struct.*, **82**(1), 155–157.

Bank, L., Yin, J. (1996), "Buckling of orthotropic plates with free and rotationally restrained unloaded edges", *Thin Wall Struct.*, **24**(1), 83–96.

Ben Henni, M.A., (2019). "Contribution à l’étude de la vibration des plaques en matériaux composites sous chargements mécanique et thermomécanique". Thèse en Cotutelle pour obtenir le grade de Docteur de l’Université Ibn Khaldoun de Tiaret (Algérie) en Modélisation des Matériaux et des Structures : Université de Reims Champagne-Ardenne (France). 134p.

Benaissa, A. Et Khadraoui, M., (2017). “Flambement des barres comprimées et comprimées fléchies-effet de déformation initial et l’excentricité du chargement“. Mémoire

pour l'Obtention du Diplôme de Master en Génie Civil Construction Métallique : Université de Tlemcen (Algérie). 73 p.

Benselama, K., (2016). "Détermination des charges critiques de flambement des plaques composites". Thèse de Doctorat L.M.D 3ème Cycle en Génie Civil (Structures et Matériaux) : Université Djillali Liabes Sidi Bel Abbes (Algérie). 148p.

Bettoumi, A. Et Menia, F., (2019). "Analyse du comportement vibratoire des poutres poreuses en FGM". Mémoire de fin d'études pour l'obtention du diplôme de master académique en génie civil (structure) : Centre Universitaire De Tissemsilt (Algérie).

Bhimaraddi, A, Stevens, L.K. (1984), "A higher order theory for free vibration of orthotropic, homogeneous and laminated rectangular plates", *J Appl Mech-T ASME.*, **51**(1), 195–198.

Chen, Y., (2003). "Buckling of rectangular plates under intermediate and loads". A thesis submitted for the degree of master of civil engineering: National university of Singapore. 95p

Chorfi, S., (2010). "Analyse des plaques orthotropes minces sous l'effet des conditions extérieures". Mémoire de Magister en Génie Mécanique : Université Mentouri Constantine (Algérie). 202 p.

Daghia, F. Et Gendre, L., (2011). "Modélisation du comportement des composites : l'élasticité anisotrope" : École normale supérieure Paris-Saclay. 10 p.

Derradji, M.A. Et Bousalem, M., (2018). "Solutions analytiques de flexion et de flambage d'une plaque composite semi-épaisse à gradient fonctionnel renforcée par des nanotubes en carbone". Mémoire de Master en aéronautique structures aéronautiques : Université Blida 1 (Algérie). 111p.

Dima, I., (2015). "Buckling of Flat Thin Plates under Combined Loading", Volume 7. Bucharest, Romania. 96p.

Djafour Née Benkelfat, N., (2015). "Proposition d'une méthode de classification des modes d'instabilité des colonnes en acier formées à froid". Thèse de Doctorat en sciences : Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen (Algérie). 127p.

Fagerberg, L., (2003). “Wrinkling of Sandwich Panels for Marine Applications”. Stockholm, Sweden. KTH Aeronautical and Vehicle Engineering. 18 p. SE-100 44.

Fahsi, A., (2018). “Analyse du flambement des plaques FGM sous différents chargements”. Thèse de Doctorat en Génie Civil (Structures & Matériaux) : Université Djillali Liabes Sidi Bel Abbes (Algérie). 98p.

Gornet, L., (2008). “Généralités sur les matériaux composites”. Nantes (France). Engineering school. cel-00470296v1.

Harouna Amadou, A., (2017). “Etude de la flexion statique des plaques FGM”. Projet de fin d’études de Master en Génie Civil (Structure) : Centre Universitaire Belhadj Bouchaib d’Ain-Temouchent. 74p.

Hwang, I., Lee, J.S. (2006), “Buckling of orthotropic plates under various in-plane loads”, *KSCE J Civ Eng*, **10**(5), 349–356.

Ikhenazen, G., (2010). “Analyse numériques de la stabilité des plaques minces non-uniformément comprimées”. Thèse de Doctorat d’état en Génie Civil Structures : Université des sciences et de la technologie Houari Boumediene (Algérie). 88 p.

Itterbeek, R., (2019). “Résistance des matériaux [cours dispensé aux Bacheliers en Construction de l’EPS St-Luc]. Belgique”: Webmaster Administration. Mise à jour : 15/06/2020. Disponible sur : <<https://www.itterbeek.org/fr/index/cours-resistance-materiaux>>.

Kaddah, F., (1995). “Etude numérique d’éléments de plaques et coques minces et épaisses pour les applications en génie civil”. Thèse de Doctorat Mécanique : Université des Sciences et Technologies de Lille (France). 86 p.

Kang, J.H., Leissa, A.W. (2005), “Exact solutions for the buckling of rectangular plates having linearly varying in-plane loading on two opposite simply supported edges”, *Int J Solids Struct.*, **42**(14), 4220–4238.

Kim, S.-E., Thai, H.-T., & Lee, J. (2009). “Buckling analysis of plates using the two variable refined plate theory”. *Thin-Walled Structures*, **47**(4), 455–462.

Kolvik, G.M., 2012. “Higher Order Shear Deformation Plate Theory”. Thesis for the degree of Master of science: Faculty of Mathematics and Natural Sciences University of Oslo (Norway). 72p.

Levinson, M., (1980), “An accurate simple theory of the statics and dynamics of elastic plates”, *Mech Res Commun.*, **7**(6), 343–350.

Mebarek, H., 2018. “Analyse de la vibration libre des plaques et coques en matériaux composites par la méthode des éléments finis”. Thèse de Doctorat en sciences : Université Aboubakr Belkaid Tlemcen (Algérie). 130 p.

Merazi, M., 2015. “Analyse mécanique des structures composites : Etude comparative entre les différentes théories des plaques”. Thèse de Doctorat en 3^{ème} Cycle en Génie Civil (Structures & Matériaux) : Université Djillali Liabes Sidi Bel Abbes (Algérie). 65p.

Mindlin, R.D. (1951), “Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates”, *J Appl Mech-TASME*, **18**(1), 31–38.

Nelson, Rb. And Lorch, Dr. (1974), “ A refined theory for laminated orthotropic plates”, *Journal of Applied Mechanics.*, **41**,177–183.

Nguyen, T.K., 2014. “A higher-order hyperbolic shear deformation plate model for analysis of functionally graded materials”. Netherlands: Springer Science+Business Media Dordrecht. 17p.

Pouladkhan, A., Emadi, J. And Safamehr, M., 2011. “Numerical Study of Buckling of Thin Plates”. World Academy of Science, Engineering and Technology (Turkey). 157p.

Pouria, H. Et Baru, A.M., 2018. “An Investigation of Buckling Phenomenon in Steel Elements”. United Arab Emirates. Date de consultation : 11/2018. Disponible sur : <https://www.researchgate.net/publication/329267500>

Reddy, Jn. (1984), “A simple higher-order theory for laminated composite plates”, *J Appl Mech.*, **51**(4), 745–752.

Rees, David W. A., 2009. “Mechanics of Optimal Structural Design: Minimum Weight Structures”. London (Royaume Uni) : John Wiley & Sons, Ltd. 582p. ISBN: 978-0-470-74623-3.

Reissner, E. (1945), "The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates", *J Appl Mech-T ASME.*, **12**(2), 69–77.

Sayad, Y., (2012). "Modélisation des plaques de formes géométriques irrégulières par la méthode des éléments finis". Thèse de Master : Université Mohamed Khider – Biskra (Algérie).

Shimpi, Rp., Patel, Hg. (2006), "Free vibrations of plate using two variable refined plate theory", *J Sound Vib.*, **296**(4),979–999.

Siens, J., (2012). "Applied Mathematical Modelling". United Kingdom: Elsevier Ltd. 5677p. 0307-904X

Srinivas, S., Rao, Ak.(1970), "Bending, vibration and buckling of simply supported thick orthotropic rectangular plates and laminates" , *International Journal of Solids and Structures* ., **6**,1463–1481.

Thai, Ht. Et Kim, Se. (2011), "Levy-type solution for buckling analysis of orthotropic plates based on two variable refined plate theory", *Composite Structures*, 1738–1746.

Timoshenko, Sp., Gere, Jm. (1961), "Theory of elastic stability", *New York: McGraw-Hill*.

Whitney, Jm. (1973), "Shear correction factors for orthotropic laminates under static load", *Journal of Applied Mechanics.*, **40**,302–304.

Wierzbicki, T., (2013). "Structural mechanics". Lecture 11 Buckling of Plates and Sections. 81p. Disponible sur : < <https://ocw.mit.edu/courses/mechanical-engineering/2-080j-structural-mechanics-fall-2013/course-notes/>>.

Wikipedia, (2020), "The encyclopedia. Mindlin–Reissner plate theory". last edited on 10 April 2020, at 21:30 (UTC). Disponible sur : <https://en.wikipedia.org/wiki/Mindlin%E2%80%93Reissner_plate_theory>

Zara, F., (2017). "Modèle mécanique d'une plaque mince". France. Doctorat.pp.20. cel-01520287.

Zemani, K. Et Sebakhi, F., (2015). "Etude des vibrations libres des plaques épaisses en matériaux à gradient fonctionnel (FGM) reposant sur un support élastique de Winkler-

Pasternak” . Projet de fin d'études : Institut d'aéronautique et des études spatiales Blida (Algérie). 98p.

Zhao, X., Lee, Y.Y. And Liew, K.M., (2009). “Mechanical and thermal buckling analysis of functionally graded plates”. In: A. J. M. FERREIRA. Composite Structures. Hong Kong, China: Elsevier Ltd. 171 p. 0263-8223.