



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la
Recherche Scientifique
Centre Universitaire El-wancharissi de Tissemsilt



Institut de Sciences et de la Technologie
Département de Sciences et de la Technologie

Mémoire de fin d'études pour l'obtention du diplôme
de Master académique en

Filière : Génie civil

Spécialité : Structure

Présentée par : Ait Hamou Nora

Draouche Khayra

Thème

Analyse statique des plaques FG simplement appuyées

Soutenu le,

Devant le Jury :

Benceur Raouf	Président	M.A.A.	CU-Tissemsilt
Bourada Fouad	Encadreur	M.C.B.	CU-Tissemsilt
Ouazir Mansour	Examineur	M.A.B.	CU-Tissemsilt

Année universitaire : 2019-2020



Remerciements

Remerciements

Tout d'abord, nous tenons à remercier Dieu,

De nous avoir donné la santé, la volonté et la patience pour mener à terme notre formation de master et pouvoir réaliser ce travail de recherche.

Nous tenons à exprimer nos profonds remerciements à notre encadreur Dr Bourada Fouad qui nous a fourni le sujet de ce mémoire et nous a guidés de ses précieux conseils et suggestions, et la confiance qu'il nous a témoignés tout au long de ce travail.

Nous tenons à gratifier aussi les membres de jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre recherche en acceptant d'examiner notre travail.

J'adresse aussi nos remerciements au chef de département de science technologie Dr Hallal Nouria et à tous les enseignants de la filière de science technologie.

Enfin, on adresse nos sincères sentiments de gratitude et de reconnaissance à toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.



Résumé

Résumé

Dans ce travail, une nouvelle théorie de déformation de cisaillement hyperbolique-exponentielle raffiné (ordre élevé) est développée pour l'analyse statique des plaques fonctionnellement graduées reposant sur une fondation élastique de type Winkler–Pasternak et Kerr. Dans le modèle, les contraintes de cisaillement transversal représentent une distribution parabolique et satisfont les conditions aux limites sans traction sur les surfaces supérieures et inférieures de la plaque. En faisant une autre hypothèse, la présente théorie ne contient que quatre inconnues et ses équations gouvernantes sont donc réduites. Les propriétés effectives du matériau sont continuées à travers l'épaisseur de la plaque selon les lois de puissance, exponentielle et sigmoïde symétrique.

Les équations gouvernantes sont dérivées par le principe des travaux virtuels et résolues par les solutions de Navier. La validité du présent modèle est vérifiée par la comparaison des résultats obtenus avec ceux trouvés dans la littérature. Plusieurs études paramétriques sont présentées pour examiner les effets de l'indice de puissance, le rapport de géométrie et de dimension, le paramètre de la fondation élastique sur les contraintes et les déplacements des plaques FG simplement appuyées.

Mots clés : plaques FG, flexion, théorie de déformation de cisaillement, fondation élastique.

Abstract

Abstract

In this work, a new refined hyperbolic-exponential shear deformation theory (higher order) is developed for a static analysis of functionally graded plates resting on Winkler – Pasternak and Kerr elastic foundation. In the current model, the transverse shear stresses represent a parabolic distribution and satisfy the boundary conditions without traction on the upper and lower surfaces of the plate. By making another hypothesis, the present theory contains only four unknowns and its governing equations are therefore reduced. The effective properties of the material are continuous through the thickness of the plate according to the power law, exponential and symmetric sigmoid functions.

The governing equations are derived by the principle of virtual works and resolved by Navier solutions. The validity of this model is verified by comparing the obtained results with those found in the literature. Several parametric studies are presented to examine the effects of the power index, geometry and dimension ratios and the elastic foundation parameters on the stresses and displacements of the simply supported FG plates.

Keywords: FG plate, bending, shear deformation theory, elastic foundation.

ملخص

ملخص

في هذا العمل ، تم تطوير نظرية جديدة لتشوّه القص (هيباربوليكية -أسية) مكررة (ترتيب عالي) للتحليل انحناء الصفائح المتدرجة وظيفياً التي تستند إلى أساس مرن من نوع وينكلار، باسترناك و كار. في هذا النموذج ، تمثل إجهادات القص العرضية توزيع مكافئ وتفي بشروط الحدود دون تمدد على الأسطح العلوية والسفلية للوحة. من خلال فرض فرضية أخرى ، تحتوي النظرية الحالية على أربعة مجاهيل فقط وبالتالي يتم تقليل معادلاتها الحاكمة. الخواص الفعالة للمادة مستمرة من خلال سمك اللوحة وفقاً لقوانين الاسية ، السينية و المتماثلة. تُستمد المعادلات الحاكمة من خلال مبدأ الاعمال الافتراضية ويتم حلها بواسطة حلول نافيي ، ويتم التحقق من صحة هذا النموذج من خلال مقارنة النتائج التي تم الحصول عليها مع تلك الموجودة من قبل. يتم تقديم العديد من الدراسات لفحص تاثير مؤشر الاس ، ونسبة الهندسة والأبعاد ، وعوامل الأساس المرن على الضغوط والنزوح لصفائح المتدرجة وظيفياً المدعومة ببساطة

كلمات مفتاحية : الصفيحة المتدرجة وظيفياً ، الانحناء ، نظرية تشوّه القص ، أساس مرن.

Table des matières

Sommaire

Remerciements	i
Résumé	ii
Abstract	iii
ملخص	iv
Sommaire	v
Table des matières	v
Liste des figures	viii
Liste des tableaux	xi
Liste des notations et symboles	xii
Introduction générale	1

Table des matières

Chapitre I : Généralités sur les matériaux (FGM).

I.1 Introduction	4
I.2 Matériau composite	4
I.2.1 Définition de matériau composite	4
I.2.2 Composition de matériau composite	5
I.2.3 Classification de matériaux composites	6
I.2.4 Les Avantages et les inconvénients du matériau composite	6
I.2.5 Comment le choisir ?	7
I.2.6 Architecture des matériaux composites	8
I.3 Matériaux à gradient fonctionnel (FGM)	9
I.3.1 Historique	9
I.3.2 Le concept de matériaux fonctionnellement gradués	9
I.3.3 Propriétés effectives des matériaux FGM	13
I.3.4 Les matériaux composites traditionnels et matériaux FGM	13
I.3.5 L'utilisation des FGM	15
I.3.6 L'application de FGM dans le domaine de génie civil	16
I.3.6.1 Le Béton à gradient de propriétés	17
I.3.6.2 Autres matériaux à gradient de propriétés	18

I.3.6.3	Utilisation prévisionnelle des matériaux FGM dans le domaine du génie civil	19
I.3.7	Procédés de fabrications FGM	21
I.3.7.1	Coulage en bande (Tape casting or Doctor-Blade)	22
I.3.7.2	Coulage séquentiel en barbotine (slip casting)	23
I.3.7.3	Compaction sèche des poudres	23
I.3.7.4	Dépôt par électro-sphère	24
I.3.7.5	Projection plasma	24
I.3.7.6	Technique de dépôt à la vapeur	25
I.3.7.7	Frittage et infiltration	25
I.3.7.8	Implantation ionique (sputtering)	26
I.3.7.9	Frittage laser différentiel	26
I.3.7.10	Dépôt par centrifugation	26
I.3.8	Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM	27
I.3.9	Propriétés matérielles de la plaque P-FGM	29
I.3.10	Propriétés matérielles de la plaque S-FGM	30
I.3.11	Les propriétés matérielles de la plaque E-FGM	32
I.4	Conclusion	32

Chapitre II: Revus sur les théories des plaques.

II.1	Introduction	34
II.2	Définition d'une plaque	34
II.3	Domaine de l'utilisation des plaques	35
II.4	Les catégories des théories des plaques	35
II.4.1	Les théories basées sur la contrainte	36
II.4.2	Les théories basées sur le déplacement	36
II.5	Les différents modelés des structures composites dans l'élasticité bidimensionnelles	36
II.5.1	La théorie des plaques minces, ou la théorie de love-Kirchhoff, la théorie classique des plaques (CPT)	36
II.5.2	La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre, la théorie de Reissner-Mindlin (FSDT)	38
II.5.2.1	Les coefficients de corrections K	39
II.5.3	Synthèse bibliographique sur les modèles d'ordre supérieur(HSDT)	40

II.5.4 Les théories d'élasticité tridimensionnelle (3D)	44
II.6 Théories raffinées d'ordre élevé à quatre variables	44
II.7 Conclusion	45

Chapitre III : Formulations théorique.

III.1 Introduction	46
III.2 Analyse du comportement mécanique des plaques FGM	46
III.2.1 Propriétés des matériaux	46
III.2.1.1 Plaque P-FGM	46
III.2.1.2 Plaque E-FGM	47
III.2.1.3 Plaque S-FGM symétrique	47
III.3 Théories raffinées d'ordre élevé à quatre variables	47
III.3.1 Hypothèses de base	47
III.3.2 Champs de déplacement	48
III.3.3 Champs de déformation	48
III.3.4 Relations constitutives	49
III.3.5 Les équations gouvernantes	49
III.3.5.1 Modèles de fondations	51
III.3.6 Les équations gouvernantes de la plaque	53
III.4 Solution analytique pour les plaques FG simplement appuyées	55
III.5 Conclusion	56

Chapitre IV : Présentation et discussions des résultats.

IV.1 Introduction	57
IV.2 Résultats numériques et discussions	57
IV.2.1 Plaque simplement appuyées en FGM	57
IV.2.2 Plaque simplement appuyées en FGM sur fondation élastique	65
IV.3 Conclusion	67
Conclusion générale	68
Références bibliographiques	71

Liste des figures

Liste des figures

Chapitre I : Généralité sur les matériaux (FGM).

Figure .I.1 : Schéma illustratif d'un matériau composite	5
Figure. I.2 : Type de renfort	5
Figure. I.3 : Type de matrice	6
Figure. I.4 : Matériau composite monocouche	8
Figure. I.5 : Matériau composite stratifiés	8
Figure. I.6 : Matériau Sandwichs a âme pleine	8
Figure. I.7 : Illustration de la hiérarchie de FGM	9
Figure. I.8 : Montre les concentrations de contraintes dans les panneaux de protection thermiques	10
Figure. I.9 : Protection thermique	11
Figure. I.10 : Variation continue la microstructure (schématisée)	12
Figure. I.11 : Variation continues la microstructure (photo)	12
Figure. I.12 : Variation continue des propriétés (a)	13
Figure. I.13 : Variation discrète des propriétés (b)	13
Figure. I.14 : la distribution des composantes des matériaux	15
Figure. I.15 : Les principaux domaines d'application des FGM	16
Figure. I.16 : Structure d'une paroi à gradient de propriétés, source: ILEK	17
Figure. I.17 : En haut: texture en fibre de verre avec des éléments de silicium à perméabilité graduée; En bas: essai de l'étanchéité à l'eau, source: ILEK	18
Figure. I.18 : Infiltration graduelle de mousse de polyuréthane réticulée avec la colle de ciment en vue de la variation de rigidité, source: ILEK	19
Figure. I.19 : Transition matérielle continue (bois à l'aluminium), Photomontage, source: ILEK	19
Figure. I.20 : La variation de la fraction volumique des fibres dans la chaussée rigides	20
Figure. I.21 : La variation de la fraction volumique des constituants entre la couche : la couche de la Grave Bitume et la couche de roulement	20
Figure. I.22 : Techniques d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés	22
Figure. I.23 : Principe de la méthode coulage en bande	23
Figure. I.24 : Projection par plasma pour former un matériau thermoélectrique	25

Figure. I.25 : Disposition du procédé frittage laser différentiel	26
Figure. I.26 : Schéma du procédé dépôt par centrifugation	27
Figure. I.27 : Géométrie d'une plaque FGM	28
Figure. I.28 : La variation de la fraction volumique dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM	29
Figure. I.29 : Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM	30
Figure. I.30 : Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM	31
Figure. I.31 : Distribution de module de Young à travers l'épaisseur d'E-FGM	32

Chapitre II : Revus sur les théories des plaques

Figure. II.1 : Schéma d'une plaque	34
Figure. II.2 : Des exemples d'utilisation des FGM en génie civil	35
Figure. II.3: Illustration de la plaque de love-Kirchhoff	37
Figure. II.4 : Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin	39
Figure. II.5: Approximations de la contrainte du CT : constante (théorie du premier ordre) et quadratique (ordre supérieur)	40
Figure. II.6 : Comparaison de la théorie d'ordre élevé (HSDT) avec (CPT) et (FSDT).	41
Figure. II.7: Variation de la fonction de forme $f(z)$ des différents modèles en fonction de l'épaisseur	43
Figure. II.8: Variation de la dérivée de la fonction de forme $f(z)$ des différents modèles suivant l'épaisseur	43

Chapitre III : Formulation théorique.

Figure. III.1 Model de Winkler	51
Figure. III.2 Modèle de Pasternak	52
Figure. III.3 Modèle de Kerr	53

Chapitre IV: Présentation et discussions des résultats.

Figure. IV. 1 : Géométrie d'une plaque FGM	57
Figure. IV. 2 : La variation du déplacement axiale \bar{u} à travers l'épaisseur de Al/Al ₂ O ₃ (plaques carrées a / h = 10)	59
Figure. IV. 3 : La variation de la contrainte axiale $\bar{\sigma}_x$ à travers l'épaisseur de Al/Al ₂ O ₃ (plaques carrées a / h = 10)	60
Figure. IV. 4 : La variation de la contrainte plane $\bar{\tau}_{xy}$ à travers l'épaisseur de Al/Al ₂ O ₃ (plaques carrées a / h = 10)	60
Figure. IV .5 : La variation la contrainte de cisaillement transverse $\bar{\tau}_{xz}$ à travers l'épaisseur de Al/Al ₂ O ₃ (plaques carrées a / h = 10)	61
Figure. IV .6 : La variation de déflexion \bar{w} des plaques S-FGM symétrique en fonction du rapport de géométrie a/h avec (p=1.5)	64
Figure. IV .7 : La variation de déflexion \bar{w} des plaques S-FGM symétrique en fonction du rapport de géométrie a/h et de l'indice p avec (a=b)	64
Figure. IV .8: Plaque FG reposé sur fondation élastique	65
Figure. IV .9 : La variation de la déflexion adimensionnelle (\bar{w}) des plaque carrée E-FGM en fonction des paramètres de la fondation élastique type Winkler-Pasternak avec (p=0.1)	66
Figure. IV.10 : La variation de la déflexion adimensionnelle (\bar{w}) des plaque carrée E-FGM en fonction des paramètres de la fondation élastique type Kerr avec (p=0.1).	67

Liste des Tableaux

Liste des tableaux

Chapitre I : Généralité sur les matériaux (FGM)

Tableau I.1 : Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels	14
--	----

Chapitre IV: Présentation et discussions des résultats.

Tableau IV.1: Propriétés du céramique et métal	57
Tableau IV.2: Comparaison des contraintes et des déplacements non dimensionnelle des plaques carrées P-FG avec $a/h = 10$	58
Tableau IV.3: Comparaison de la déflexion adimensionnelle (\bar{w}) des plaque carrée E-FGM (Al/Al_2O_3)	62
Tableau IV.4: Les contraintes et des déplacements nondimensionnelle des plaques carrées S-FGM symétrique avec $a/h = 10$	63
Tableau IV.5 : La déflexion adimensionnelle (\bar{w}) des plaque carrée S-FGM symétrique en fonction de l'indice matériel p et les rapports a/h et b/a	63
Tableau IV.6 : La déflexion adimensionnelle (\bar{w}) des plaque carrée S-FGM symétrique en fonction des paramètres de la fondation élastique type Winkler-Pasternak	65
Tableau IV.7 : La déflexion adimensionnelle (\bar{w}) des plaque carrée S-FGM symétrique en fonction des paramètres de la fondation élastique type Kerr	66

*Liste des notations
et symboles*

Liste des notations et symboles

$\{ \}$	Vecteur colonne.
$[]$	Matrice.
Σ	Sommation.
\int	Intégrale.
V_c	Fraction volumique.
a, b	La longueur et largeur de la plaque.
h	L'épaisseur de la plaque.
k	Indice de fraction volumique.
P_m	Propriété du métal.
P_c	Propriété de la céramique.
ν	Le coefficient de Poisson.
E_1, E_2	Module de Young.
$E(z), E_c, E_m$	Les modules d'élasticité du FGM, céramique, métal.
$\alpha(z), \alpha_c, \alpha_m$	Les coefficients d'expansion thermique du FGM, céramique, métal.
$\gamma_{xz}, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}$	Composantes de déformation.
$\tau_{xz}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$	Contrainte de cisaillement.
σ_{xx}, σ_{yy}	Contrainte normale.
ε	Contrainte de déformation.
q	La charge transversale appliquée.
q_0	L'intensité de la charge au centre de la plaque.
M	Le moment de flexion.

N	L'effort normal.
$f(z)$	Fonction de forme.
u, v, w	Les composantes du déplacement.
x, y, z	Les coordonnées cartésiennes rectangulaires.
w_b	Déplacement dû à la flexion.
w_s	Déplacement dû au cisaillement.
u_0, v_0, w_0	Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque.
ϕ_x, ϕ_y	Les rotations autour des axes x, y et z .
Q_x, Q_y	Moment supplémentaire du au cisaillement transverse.
θ_x, θ_y	Les rotations autour des axes x et y .
$u_{mn}^0, v_{mn}^0, w_{bmn}^0$ et w_{smn}^0	Les coefficients de déplacement maximum inconnus.
A, B, D, B^S, D^S et H^S	Les composantes de rigidité.
$g(z)$	Dérivée de la fonction de cisaillement.
k^b	La courbure due à la flexion.
k^s	La courbure due au cisaillement.
k_w	Le module de réaction du sol Winkler.
k_p	Le module de réaction du sol Pasternak.
δU	L'énergie de déformation virtuelle.
δV	Le travail virtuel externe.
∂	Dérivée partielle.
i, j	Des nombres naturels.

$\omega\lambda, \mu$	Fréquence naturelle.
A	L'aire de la plaque.
$\Psi(z)$	Fonction de cisaillement (Hyperbolique).
$\delta u, \delta v, \delta w$	Champ virtuel de déplacement.
λ, μ	Les pulsations.
K	Facteur de correction.
$\varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z$	Déformation dans la direction x,y et z
C_{mn}	L'amplitude de chacune des termes dans la série pour Navier
K_u	Paramètres des ressorts supérieurs
K_l	Paramètres des ressorts inférieurs
K_s	La couche de cisaillement
f_e	Les paramètres de la fondation élastique.

Abréviations

<i>FGM</i>	Matériau fonctionnellement graduée.
<i>Al</i> :	L'aluminium.
<i>Al₂O₃</i>	Oxyde d'aluminium.
<i>CLP</i>	La théorie classique de la plaque laminée.
<i>FSDT</i>	La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre.
<i>HSDT</i>	Théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé.
P.V.D	en anglais «Powder Vapor Deposition ».
C.V.D	en anglais « Chemical Vapor Deposition ».
S.H.S	en anglais « Self-propagating High-temperature Synthesis».
EBD	Le dépôt par faisceau d'électrons.
IBD	Le dépôt par faisceau ionique.
3D	Tridimensionnelle.
2D	Bidimensionnelle.

Introduction générale

Introduction générale

Ces dernières années, le monde industriel a connu une évolution remarquable grâce à l'avancement de la science. Cette évolution et cette perfection ne peuvent se concrétiser sans l'avancée de la science qui met à la disposition de l'industrie les résultats d'une recherche scientifique permettant de concevoir des procédés novateurs et porteurs de développements industriels. Les matériaux sont considérés comme un axe de recherche très porteur car toute pièce, tout composant, toute structure est à la base un matériau, et innover dans cette discipline c'est révolutionner le monde de la construction.

Selon les besoins de la récente technologie, tenant en compte l'évolution de l'industrie avec toutes ses spécialités et les recherches scientifiques expérimentales sur ce sujet. Une nouvelle classe des matériaux apparaît sous le nom « matériaux composites » qui offrent un grand challenge vis-à-vis des matériaux classiques.

L'emploi des matériaux classiques ne satisfait pas les inévitables de la récente technologie avec toutes ses disciplines à cause de leurs inconvénients balancés devant leurs avantages offerts. Ces matériaux ont impliqués dans de nombreux secteurs : génie civil, bâtiment, aéronautique, automobiles, ...etc.

Le développement des matériaux composites a permis d'associer des propriétés spécifiques à différents matériaux au sein d'une même pièce. L'optimisation locale de ces propriétés, par association d'un matériau de haute dureté à la surface d'un matériau tenace, par exemple, pose alors le problème de l'interface. Cette transition brutale de compositions peut générer localement de fortes concentrations de contraintes. La solution d'une transition continue des propriétés recherchées, par un gradient de composition, permet d'atténuer cette singularité par l'utilisation des matériaux à gradient de propriétés (en anglais : *Functionally Graded Materials " F.G.M "*).

En 1984, les Japonais ont introduit pour la première fois cette nouvelle philosophie de matériaux intelligents capables de résister à des gradients de température très importants. Depuis, des recherches dans le domaine des FGM sont activement menées dans différents pays du monde.

Ces types de matériaux, ont suscité beaucoup d'attention récemment en raison des avantages de diminuer la disparité dans les propriétés matérielles et de réduire les contraintes

thermiques, leur utilisation et leur progression croissante dans plusieurs domaines où ils peuvent servir de barrières thermiques vus leur composition riche en céramique. Cependant les FGM touchent un large éventail d'applications dans de multiples secteurs.

Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) sont une classe des composites qui possède des propriétés matérielles variantes d'une surface à une autre de façon à éliminer la concentration des contraintes trouvée dans les composites stratifiés. Le concept des FGM a été largement explorée dans plusieurs applications industrielles telles que le génie civil, la mécanique, l'industrie aérospatiale et nucléaire. L'évolution des applications des FGM exige des modèles précis pour prédire leurs réponses. Puisque la déformation de cisaillement a des effets significatifs sur les réponses des plaques FGM, des théories de déformation de cisaillement sont utilisées ainsi pour capturer ces effets. La théorie de déformation de cisaillement du premier ordre Mindlin (1951), Reissner (1945) prend en considération l'effet de déformation de cisaillement, mais elle ne satisfait pas la condition de nullité des contraintes de cisaillement aux bords libres de la plaque, par conséquent, un facteur de correction est exigé Yaghoobi (2013). Les théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé HSDTs (Reddy 1984, Reddy 2000, Ren 1986, Touratier 1991, Soldatos 1992, Xiang 2009, Akavci 2010, Grover 2013, Karama 2003, Pradyumna and Bandyopadhyay 2008, Ait Atmane 2010, Shahrjerdi 2011, Mantari 2012) prennent en considération une variation non linéaire d'ordre supérieur dans les déplacements axiaux à travers l'épaisseur de la plaque et satisfont les conditions d'équilibre aux bords libres de la plaque sans introduire les facteurs de correction de cisaillement. Certaines théories d'ordre élevé citées ci-dessus exigent un temps de calcul important car pour chaque degré (puissance) supplémentaire de la coordonnée de l'épaisseur, un inconnu additionnel est introduit dans ces théories. Bien que certaines théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé (par exemple : La théorie de déformation de cisaillement de troisième ordre de Reddy (1984 and 2000), la théorie de déformation de cisaillement sinusoïdale de Touratier (1991), les théorie de déformation de cisaillement hyperbolique (Xiang 2009, Akavci 2010, Grover 2013), la théorie de déformation de cisaillement exponentielle de Karama (2003), la théorie de déformation de cisaillement de second ordre de Shahrjerdi (2011), et la théorie trigonométrique de Mantari (2012) aient le même nombre d'inconnus comme la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre, leurs équations gouvernantes sont plus compliquées que celles de la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre. Récemment, des nouvelles théories raffinées de plaque sont développées pour la réponse en flexion, flambement, et en vibration libre des plaques FG avec

quatre inconnus seulement (Bourada 2012, Fekrar 2012, Bouderba 2013, Kettaf 2013, Ait Amar Meziane 2014).

Dans ce travail, le développement d'une nouvelle théorie raffinée hyperbolique est présenté pour étudier la réponse statique des plaques P-FG, E-FG et S-FG symétrique simplement appuyées. Le présent modèle n'exige pas l'introduction des facteurs de correction de cisaillement. La validité du modèle actuel est vérifiée par sa comparaison des résultats obtenus avec ceux trouvés dans la littérature. Aussi, plusieurs études paramétriques sont examinées et discutées en détail.

La présente mémoire sera donc présentée selon l'organisation suivante :

Après une introduction générale sur le thème des matériaux composites et à gradient fonctionnel, le premier chapitre présente les matériaux à gradient de propriétés, leurs propriétés, l'histoire de leur développement, leurs méthodes de fabrication, ainsi que leurs domaines d'application.

Le deuxième chapitre présente une revue sur les théories des plaques.

Dans le troisième chapitre, nous présentons une modélisation des plaques reposées sur la fondation élastique type élastique (Winkler- Pasternak et Kerr) en utilisant la théorie raffinée hyperbolique.

Le quatrième chapitre est réservé pour comparer, valider et commenter les résultats numériques élaborés pour les plaques précitées.

Enfin, le travail s'achèvera par une conclusion générale relative à l'étude effectuée incluant des perspectives pour des travaux futurs.

Chapitre I
Généralités sur les
matériaux FGM

I.1 Introduction

Le développement de nouveaux matériaux est soumis aux besoins des utilisateurs ceux-ci veulent toujours des matériaux plus performants, plus économiques et qui durent plus longtemps. Les chercheurs sont le plus souvent amenés à optimiser les solutions déjà utilisées, mais dans certains cas, ils doivent complètement repenser le problème et envisager de "nouveaux matériaux ", on crée plutôt des nouvelles associations de matériaux qui appelé matériau composite. Ces matériaux présentent un problème de l'interface entre deux couches différents cars il est généré localement de fortes concentrations de contraintes.

Donc pour éviter tout risque de décollement ou rupture de composite, les chercheurs ont innové le concept des matériaux fonctionnellement gradué.

Ils sont une nouvelle classe des matériaux composites dont la microstructure et la composition varient graduellement et continûment ils possèdent de multiples avantages qui peuvent les rendre attractifs du point de vue de leur potentiel d'application. Il peut s'agir de l'amélioration de la rigidité, de la tenue à la fatigue, de la résistance à la corrosion ou de la conductivité thermique en plus d'avoir une gradation des propriétés permettant ainsi d'augmenter ou de moduler des performances telles que la réduction des contraintes locales ou encore l'amélioration du transfert de chaleur.

I.2 Matériau composite**I.2.1 Définition de matériau composite**

Matériau composite est constitué de l'assemblage de deux ou plusieurs matériaux non miscibles de natures différentes et des propriétés supplémentaires que chaque élément seul ne possède pas.

Ce mécanisme permet d'améliorer la qualité de la matière et présente de nombreux avantages (légère, rigide, etc...) Leur association est complémentaire et permettant d'aboutir à un matériau hétérogène et anisotrope la matière devient ainsi plus.

En utiliser ces matériaux dans différents secteurs industriels nautique, automobile, aéronautique, spatiale et génie civil.

Un matériau composite est constitué dans le cas le plus général de différentes phases d'une ou plusieurs phases discontinues réparties dans une phase continue. La phase discontinue, appelée renfort. Lorsque le matériau composite est non endommagé, les renforts et la matrice sont parfaitement liés et il ne peut pas y avoir ni glissement ni séparation entre les différentes phases pour obtenir des bonnes caractéristiques mécaniques élastiques. Entre le renfort et la matrice, existe une zone de liaison appelée interface les propriétés mécaniques de l'interface entre fibres et matrices sont très importantes dans la réalisation d'une structure composite.

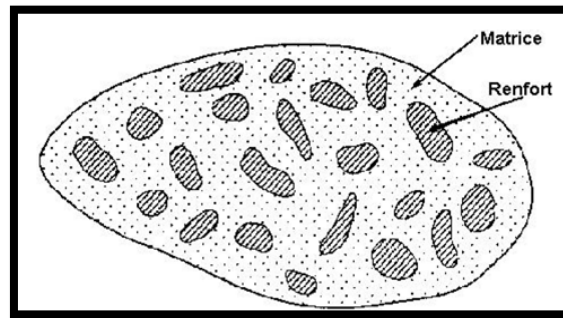


Figure .I.1 : Schéma illustratif d'un matériau composite Djebbloun (2004).

I.2.2 Composition de matériau composite

Un matériau composite est constitué :

- d'une ossature appelée renfort qui assure la fonction de résistance mécanique aux efforts. Le renfort permet aux matériaux composites d'avoir des propriétés isotropes, anisotropes ou orthotropes.

La classification des types de renforts couramment rencontrés est indiquée sur la figure I.2:

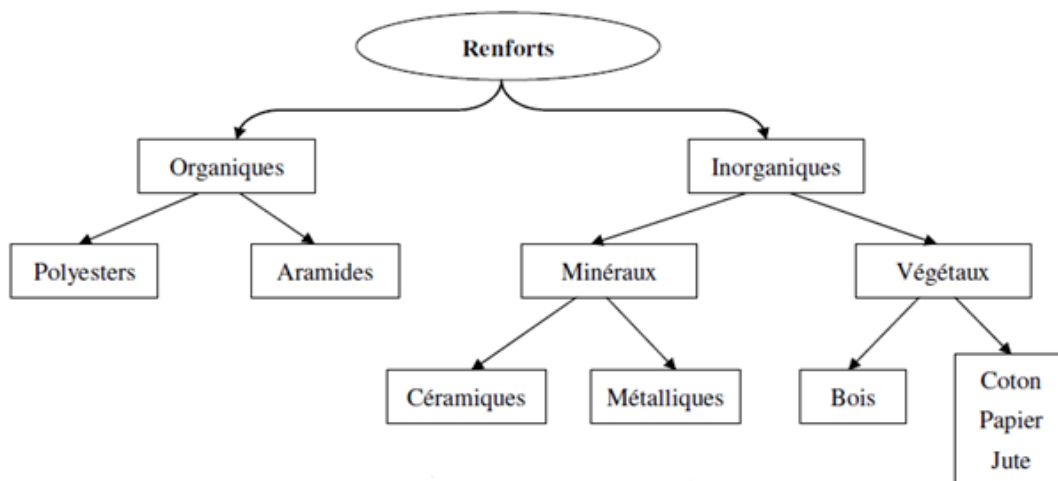


Figure .I.2 : Type de renfort.

- d'une matrice : qui assure quant à elle la cohésion entre les renforts de manière à répartir les sollicitations mécaniques Djebbloun (2004) (efforts) et la retransmission des efforts vers le renfort, il est généralement matière de plastique (Thermodurcissable ou Thermoplastique), métal ou céramique.

La classification des types de matrices couramment rencontrées est donnée sur la figure I.3 :

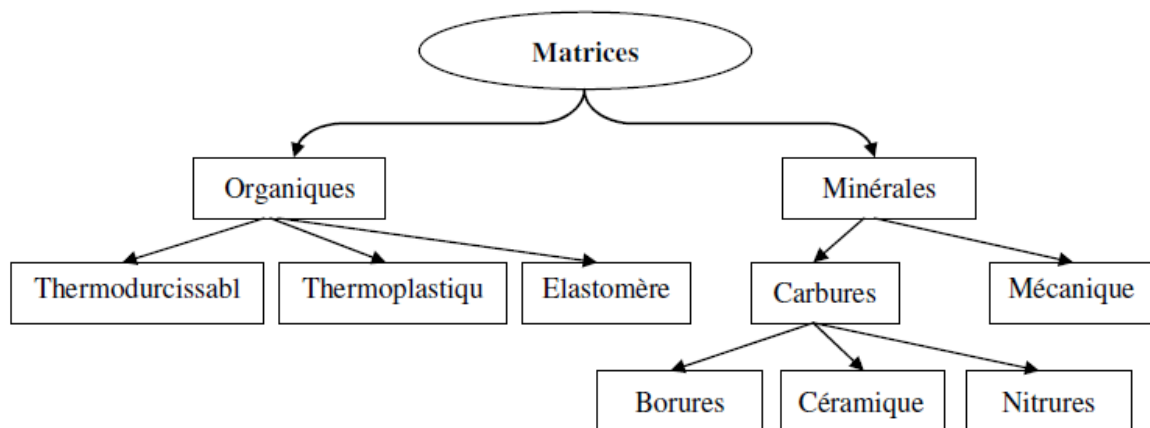


Figure I.3 : Type de matrice.

I.2.3 Classification de matériaux composites

Il existe aujourd'hui un grand nombre de matériaux composites que l'on classe généralement en trois familles en fonction de la nature de la matrice :

- **les composites à matrices organiques (CMO)** : qui est le plus utilisé aujourd'hui à son coût plus bas permettant une production en série, qui constitue de loin les volumes les plus importants aujourd'hui à l'échelle industrielle;
- **les composites à matrices céramiques (CMC)** : réservés aux applications de très haute technicité et travaillant à haute température comme le spatial, le nucléaire et le militaire;
- **les composites à matrices métalliques (CMM)** : qui est composé d'aluminium, zinc ou magnésium par exemple qui peut être utilisé pour diverses applications comme l'automobile, les loisirs ou encore l'électronique.

I.2.4 Les Avantages et les inconvénients du matériau composite

a) Les Avantages

- Légèreté;

- Grande résistance à la fatigue;
- Liberté de formes;
- Possibilité de concevoir le matériau selon le besoin (pour les sandwichs et les stratifiés);
- Réduction des coûts de fabrication;
- Réduction du poids et du coût des jonctions;
- Ils sont bien sur insensibles aux produits chimiques tels que les huiles et les liquides;
- Une bonne isolation électrique;
- Meilleure durée de vie.

b) Les inconvénients

- Ils sont beaucoup plus sensibles à tous les impacts ;
- Une petite faille peut engendrer de grosses déformations ;
- La détection de ces problèmes est difficile ce qui entraîne une rigueur extrême dans leur fabrication et leur assemblage ;
- La mise en œuvre des réparations est beaucoup plus complexe ;
- Coût élevé.

I.2.5 Comment le choisir ?

En fonction de votre secteur d'activité et du produit que vous souhaitez fabriquer, des matériaux en composite seront prédestinés. Ensuite, les renforts et matrices utilisés dépendront de plusieurs critères souhaités:

- La forme ;
- La résistance aux chocs ;
- La résistance à la chaleur ;
- L'imperméabilité / isolation ;
- La couleur et la matière ;
- L'aération.

Les professionnels du composite sont les plus à même à analyser les besoins de l'entreprise et choisir le composite adéquat.

I.2.6 Architecture des matériaux composites

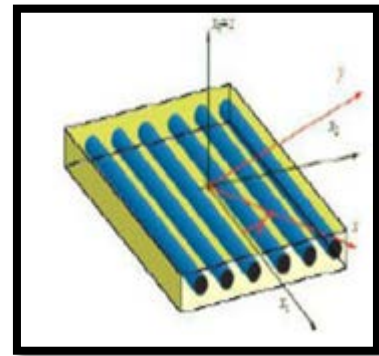
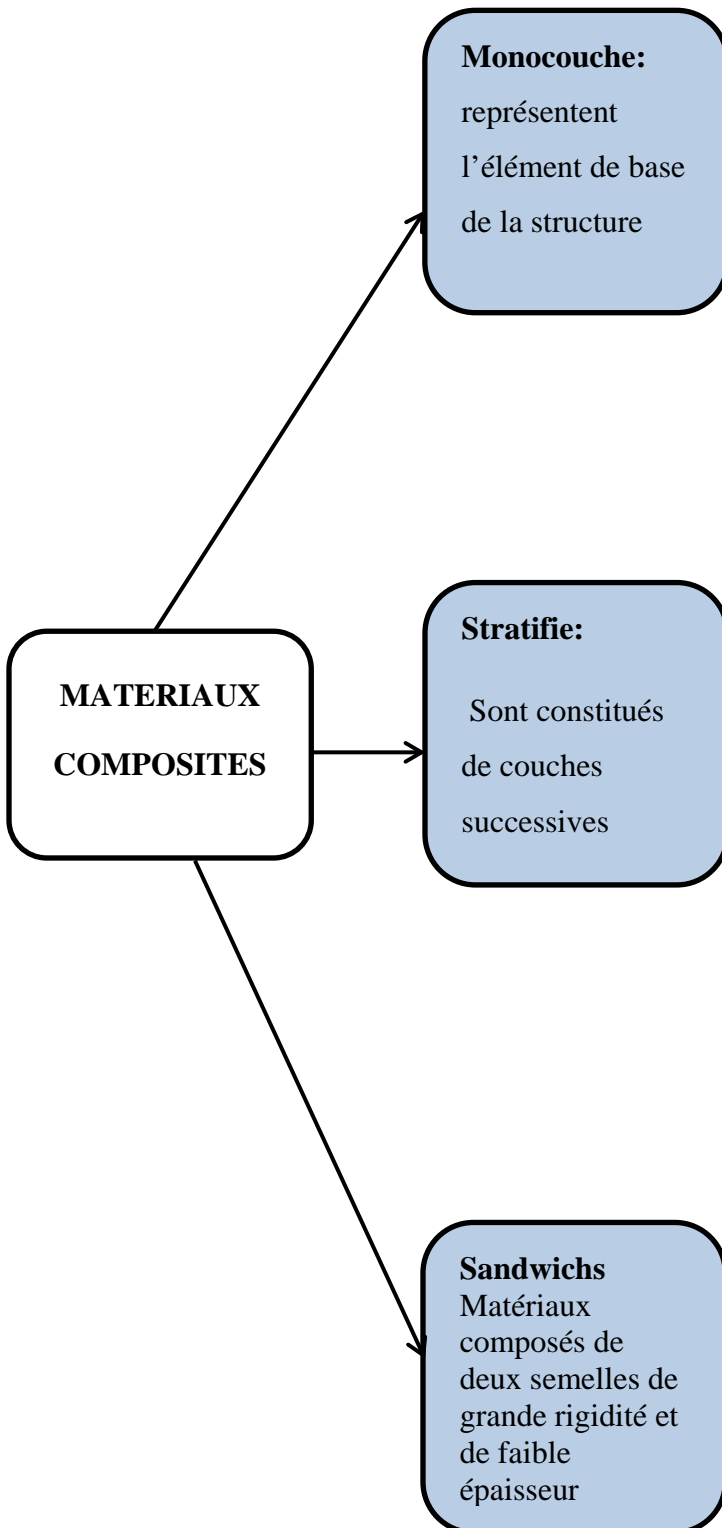


Figure .I.4 : Matériau composite monocouche.

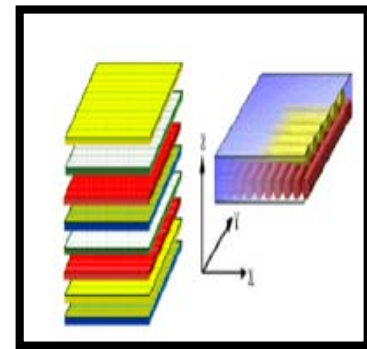


Figure .I.5 : Matériau composite stratifiés.

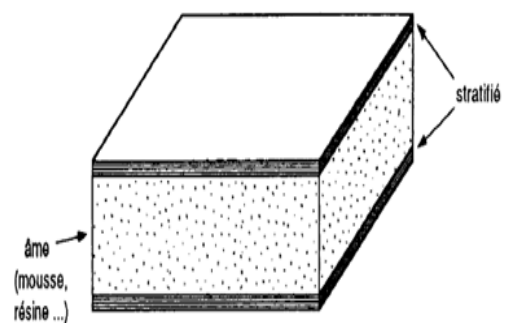


Figure .I.6 : Matériau Sandwichs a âme pleine.

I.3 Matériaux à gradient fonctionnel (FGM)

I.3.1 Historique

A la fin de la première étape (1987-1989), les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales (1-10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) pouvant résister à des températures maximales de 2000 K (Température de surface) et à un gradient de température de 1000 K.

Dans la seconde étape (1990-1991), le but était de réaliser des pièces de tailles plus grandes et de forme plus complexes par rapport à celles réalisées dans la première étape. Pendant les années 90, non seulement les champs d'application des FGM se sont développés pour les matériaux de structure fonctionnant à haute température, mais se sont aussi élargis à d'autres applications : biomécaniques, technologie de capteur, optique, etc...Okamura (1991).

On trouve une littérature très importante sur l'utilisation de ce matériau. Cependant, l'utilisation des structures en FGM dans les environnements avec de grands changements de température exige la connaissance des déformations Kaddouri (2014).

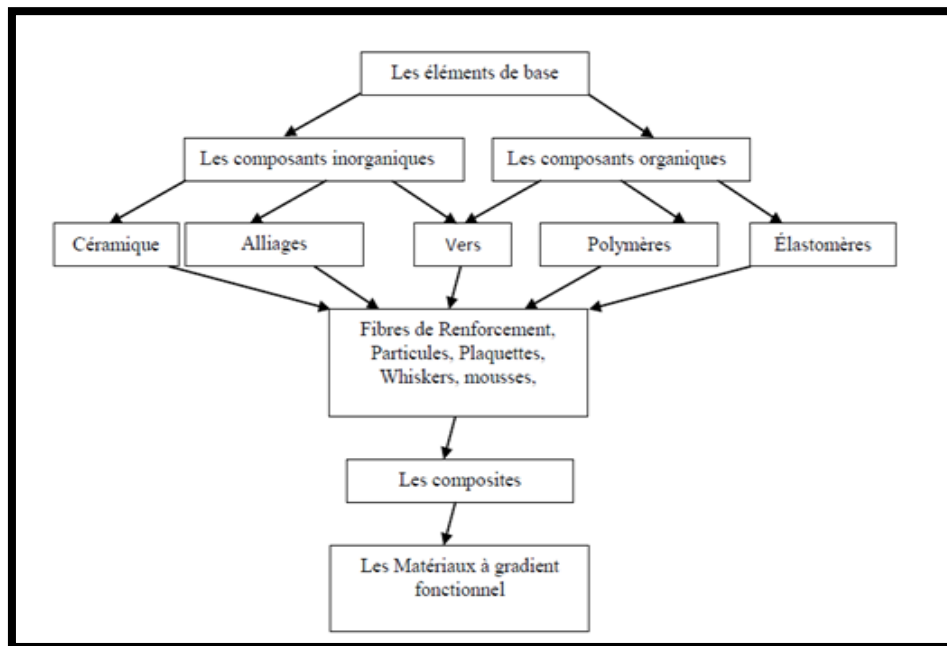


Figure I.7 : Illustration de la hiérarchie de FGM.

I.3.2 Le concept de matériaux fonctionnellement gradués

Le concept des "Matériaux fonctionnellement gradués" a été développé dans le laboratoire national d'aérospatial de Sendai sur l'île d'Honshū au Japon en 1984 par M. Niino et ses collègues. L'idée est de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les

structures spatiales et les réacteurs à fusion Koizumi (1992). Les changements continus de la composition dans la microstructure et même dans la porosité de ces matériaux à comme conséquences des gradients des propriétés matérielles telles que la résistance mécanique et la conductivité thermique Koizumi (1997). Cette nouvelle classe de matériaux composites peut être utilisée pour différentes applications telles que les enduits des barrières thermiques pour les moteurs en céramique, turbines à gaz, couches minces optiques Nguyen (2007).

En 1987, le gouvernement Japonais a lancé un vaste projet intitulé "la recherche sur la technique de base pour développement des matériaux fonctionnellement gradués et l'étude de la relaxation des contraintes thermiques". L'intérêt du projet est de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrières thermiques dans les programmes aérospatiaux. 17 laboratoires nationaux de recherche, des universités et des entreprises ont été engagées dans ce projet Koizumi (1997).

Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure d'un matériau « FGM » est illustrée dans la figure 1.8. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés des « FGM ». Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente (Boch 1986, Attia 2015).

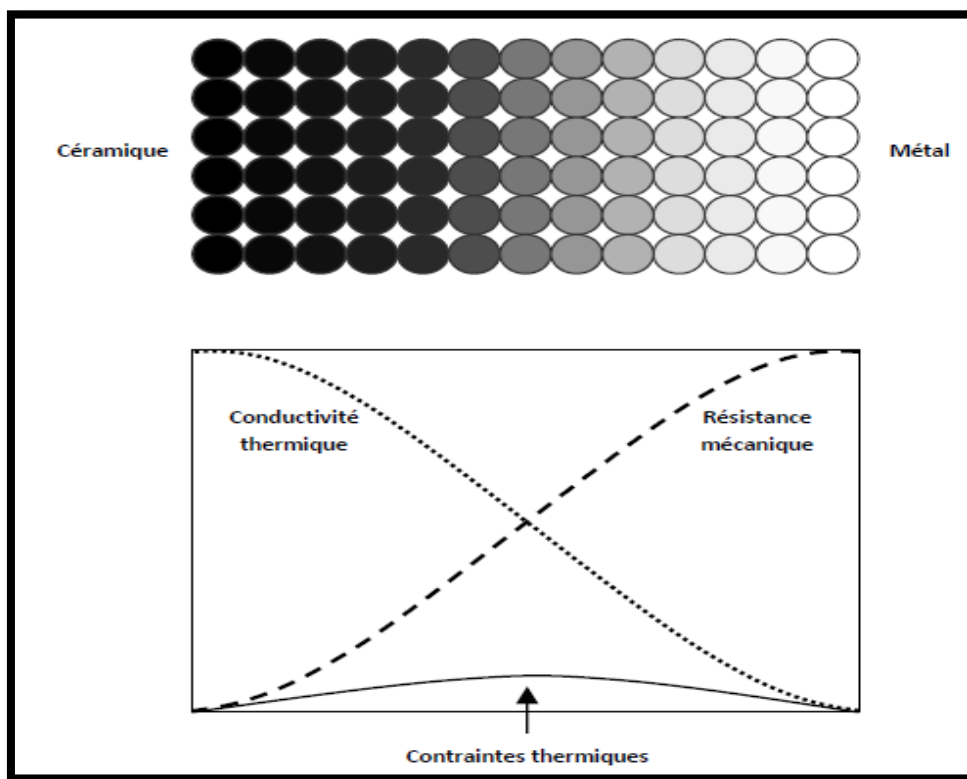


Figure .I.8 : Montre les concentrations de contraintes dans les panneaux de protection thermiques.

Conventionnels au niveau des interfaces (changement brutal de composition). Il montre également comment un FGM peut alléger. Ces concentrations de contraintes en changeant graduellement les propriétés matérielles et assure toujours la protection thermique trouvée dans les barrières thermiques conventionnelles Attia (2015).

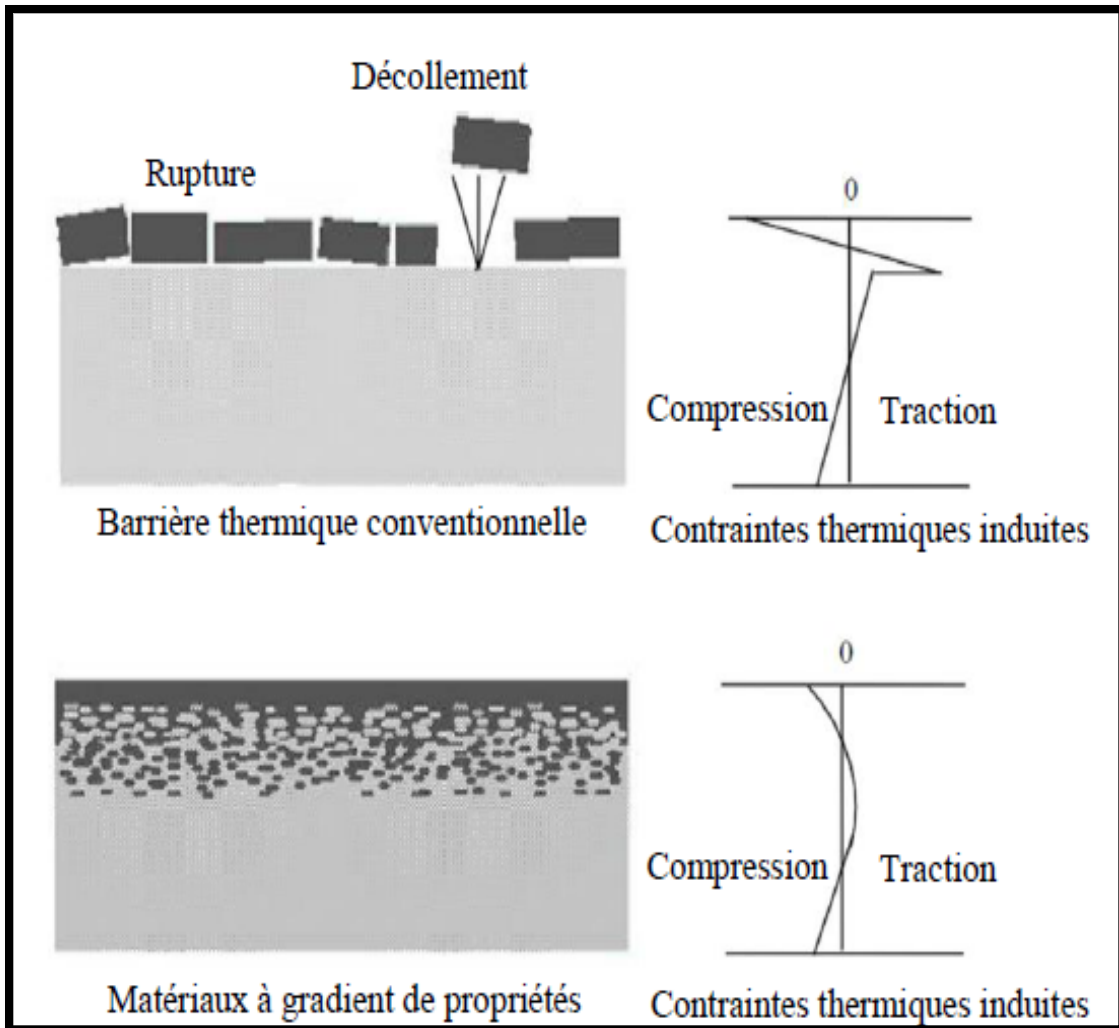


Figure .I.9 : *Protection thermique.*

La variation continue des propriétés (figures I.10et I.11) trouve son application lorsque, par exemple, la face supérieure est exposée à une haute température alors que la face inférieure est exposée à une basse température. Dans ce cas, la face supérieure est à 100% céramique et la face inférieure est à 100% métal, avec une transition graduelle entre les deux.

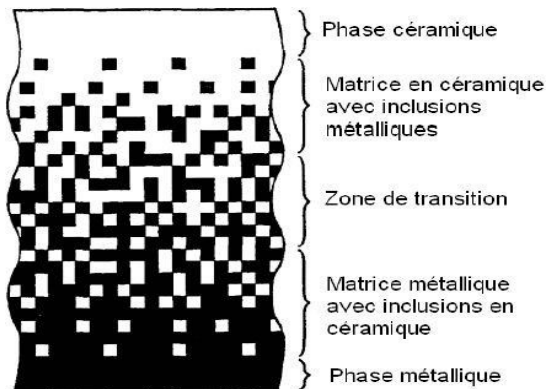


Figure .I.10 : *Variation continue la microstructure (schématisée) Yin(2004).*

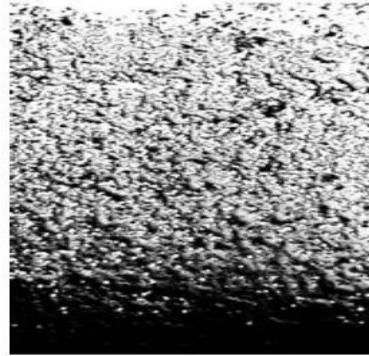


Figure .I.11 : *Variation continues la microstructure (photo).*

Ce matériau est choisi grâce à ses caractéristiques exceptionnelles qui sont énumérées comme suit:

- Faible réactivité chimique (bonne tenue à la corrosion) ;
- Haute température de fusion ou de décomposition ;
- Haut module d'élasticité et haute dureté ;
- Charge à la rupture élevée ;
- Bas coefficient de frottement (bonne résistance à l'usure) ;
- Conservation des propriétés à haute température ;
- Faible coefficient de dilatation thermique (bonne résistance aux chocs thermiques) ;
- Faible conductivité thermique (bonne résistance à la température).

Cependant, les céramiques sont réputées être fragiles et très vulnérables aux défauts de petite taille.

Les caractéristiques du métal sont données comme suit :

- Bonne résistance mécanique ;
- Conductivité thermique élevée ;
- Très bonne ténacité.

I.3.3 Propriétés effectives des matériaux FGM

Généralement les FGM sont fabriqués par deux matériaux avec différentes propriétés classés par leur microstructure variable dans l'espace conçue pour optimiser l'exécution des éléments de structures par la distribution de propriétés correspondantes. Une description détaillée d'une microstructure graduée réelle et généralement non disponible, sauf peut-être pour des informations sur la distribution de la fraction volumique.

Tandis que la fraction volumique de chaque phase varie graduellement dans la direction de dégradation, les propriétés effectives des FGM changent le long de cette direction. Par conséquent, nous avons deux approches possibles pour les modèles FGM:

- ✓ Une variation par morceaux de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumée et le FGM est pris pour être posé avec la même fraction volumique dans chaque région. c'est-à-dire couche quasi homogène de céramique-métal (figure 1.13);
- ✓ Une variation continue de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumée (figure 1.12) et la fraction volumique du métal peut être représentée comme une fonction de coordonnées suivant l'épaisseur (z) (Kaddouri 2014, Vel SS, Batra RC 2002).

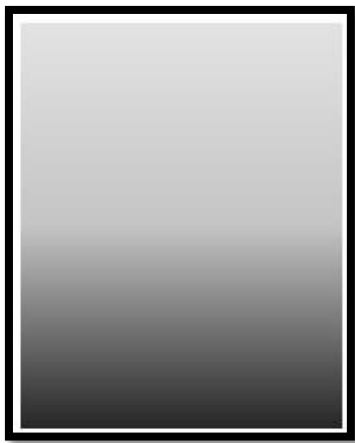


Figure .I.12 : *Variation continue des propriétés (a).*



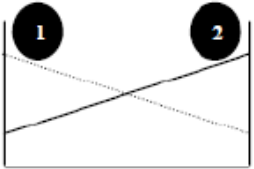
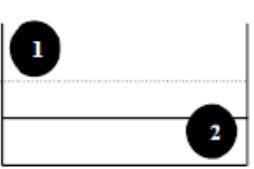
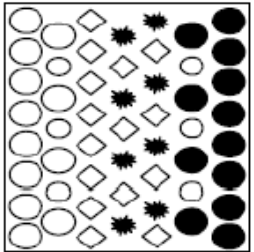
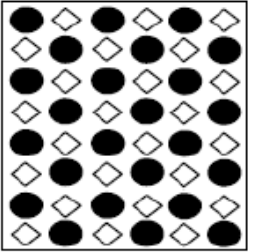
Figure .I.13 : *Variation discrète des propriétés (b).*

I.3.4 Les matériaux composites traditionnels et matériaux FGM

Généralement, les FGM sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement inhomogènes. Le changement continu

dans la composition et donc dans la microstructure du matériau distingue, les FGM des matériaux composites conventionnels comme illustré sur le tableau (I-1) Koizumi (1996). Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés matérielles des FGM. Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente (Boch 1986, Said 2016).

Tableau .I.1 : caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels Koizumi (1996).

Propriétés	<p>1 Résistance mécanique</p> <p>2 Conductivité thermique</p>		
Structure	<p>Eléments constitutifs:</p> <p>céramique ○</p> <p>métal ●</p> <p>microporosité ◊</p> <p>fibre *</p>		
Matériaux	exemple	FGM	NON-FGM

Le modèle le plus simple illustrant les différences entre les matériaux à gradient de propriétés (FGM) et les matériaux plus conventionnels sont représentées dans la figure (I.14) Yoshihisa (2004). Le matériau plan figure (I.14.a).

Posé à une caractéristique plane, et le matériau relié (figure I.14.b) à une frontière sur l'interface de deux matériaux. Les FGM ont d'excellentes caractéristiques qui diffèrent de ceux des matériaux plans composés et reliés. Par conséquent, les FGM attirent l'attention en matière de leur application dans les domaines industriels puisqu' ils ont une double propriété des deux matières premières qui sont mélangées ensemble et la distribution composante est graduée sans interruption.

Par exemple, l'un des FGM qui se compose du métal et de la céramique a la caractéristique de la conductivité thermique et de la force métallique dans le côté en métal et la résistivité aux hautes températures dans le côté en céramique.

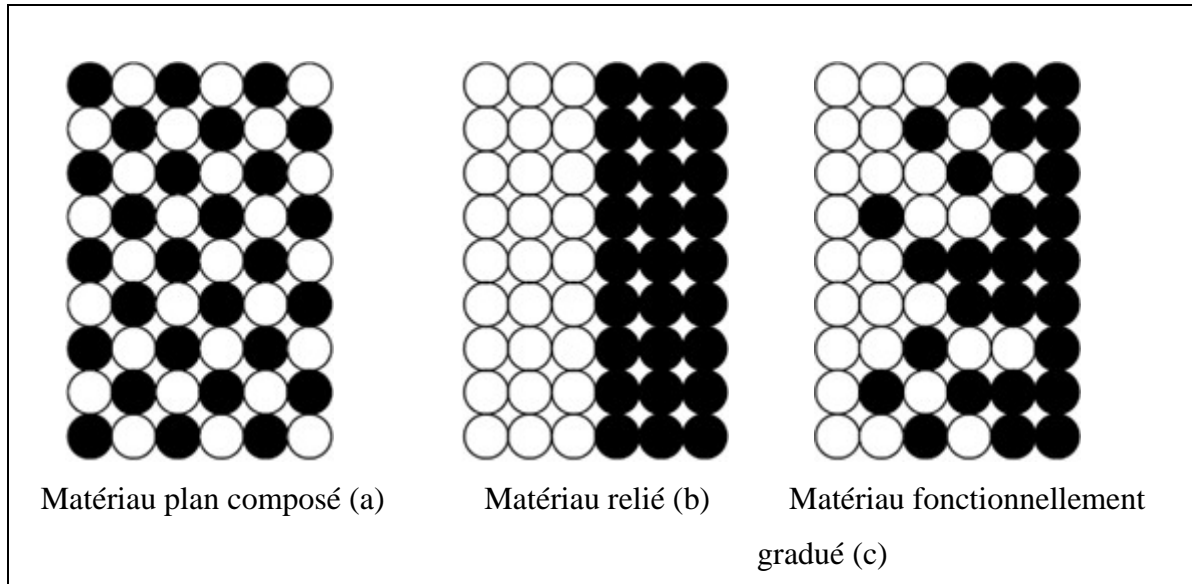


Figure .I.14 : *La distribution des composantes des matériaux Yoshihisa (2004).*

Les matériaux à gradient de propriété offrent des caractéristiques performantes pour plusieurs utilisations dans l'industrie et la technique qui exigent une conception optimale de leurs structures. Les matériaux FGM présentent aussi une bonne résistance aux phénomènes de dégradations matérielles telles que l'usure, la fatigue et la corrosion. En comparaison aux matériaux classiques qui nécessitent une maintenance et un suivi régulier, dans des cas de service, le gradient de température peut être important.

I.3.5 L'utilisation des FGM

L'utilisation des matériaux FGM (céramique-métal) est sans aucun doute la solution adéquate, d'une part pour éliminer la concentration des contraintes thermiques, et l'autre part pour des raisons fonctionnelles telles que l'isolation thermique et l'hygrothermique dans le matériau. La figure I.15 illustre les différents domaines d'application des matériaux à gradient de propriété.

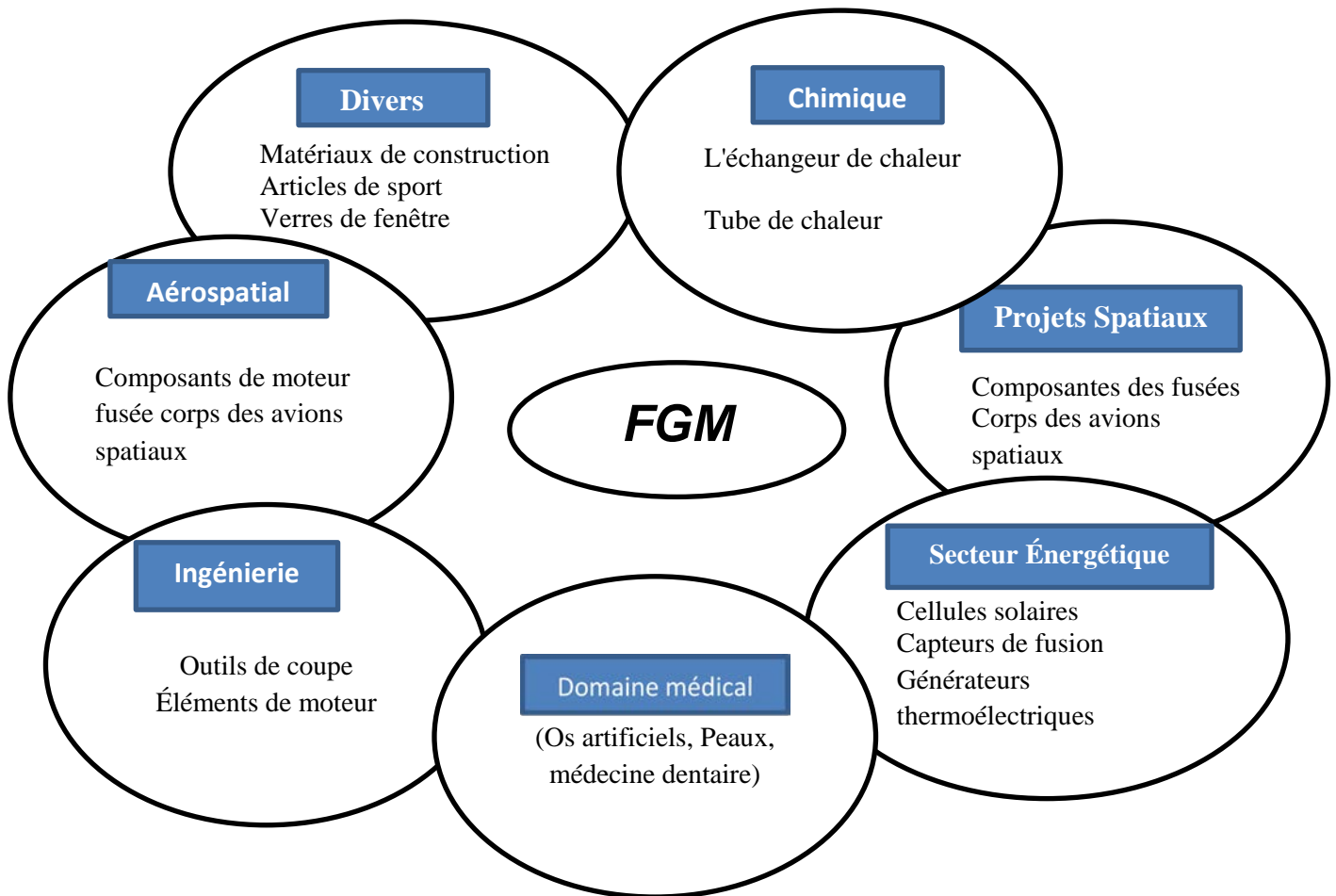


Figure .I.15 : Les principaux domaines d'application des FGM.

I.3.6 L'application de FGM dans le domaine du génie civil

Le développement des éléments de constructions plus légers et recyclables en fonction de leur nature, pourrait avoir un impact positif sur le plan environnemental et économique du pays. La gradation des propriétés des matériaux constitue une étape importante dans le développement des structures innovantes dans le domaine du génie civil. L'exemple du béton met clairement en relief les possibilités et les potentiels offerts par la gradation.

Sous les auspices des projets de recherche effectués à l'université de Stuttgart, différentes classes de matériaux de construction (béton, textile, bois, métaux et polymères), des méthodes de production et des domaines d'application (structure porteuse, enveloppe du bâtiment, technique de mélange) ont été étudiés et évalués pour certains éléments du bâtiment basés sur le concept du FGM.

L'objectif de ces projets est d'évaluer les nouvelles possibilités de conception offertes par les matériaux gradués, en voyant aussi sous l'angle architectural, et d'élaborer des propositions pour leur utilisation dans divers domaines. Ci-dessous, nous passons en revue, quelques études relatives à l'utilisation du concept des matériaux à gradient de propriété en génie civil.

I.3.6.1 Le Béton à gradient de propriétés

Werner Sobek a été le premier à formuler le concept des bétons à gradients de propriétés Sobek et al. Les travaux de développement ont lieu à l'*institut für Leichtbau Entwerfen und Konstruieren* (ILEK, Institut de la conception et la construction de structures légères) de l'Université allemande de Stuttgart, dans le cadre des projets de recherche « Matériaux à gradient dans le bâtiment et le génie civil » et « planchers préfabriqués à gradient de propriété » Heinz et al (2011). La fabrication l'automatisation, l'optimisation et la technologie du béton sont actuellement examinées à l'Université de Stuttgart.

L'optimisation des structures en béton suivant le concept du FGM est actuellement en étude et en développement dans plusieurs projets de recherche. Le but principal est de satisfaire un ajustement continu des propriétés du béton, telles que la densité, la porosité, la conductivité thermique et la résistance à l'intérieur de l'élément conformément aux spécifications et profils des efforts déterminées pour l'élément (figure I.16) Said(2016).

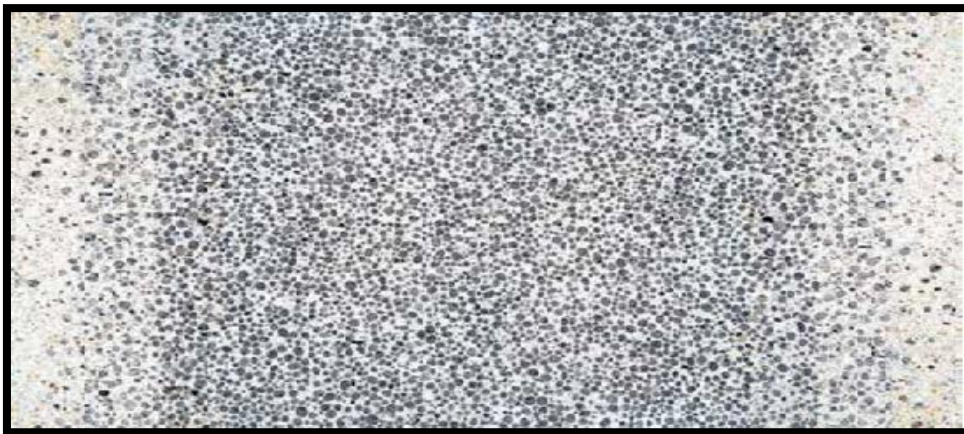


Figure .I.16 : Structure d'une paroi à gradient de propriétés, source: ILEK.

Il est à noter que l'idée du béton à gradient de propriétés, a permis de réaliser des murs extérieurs moins épais par rapport aux systèmes composites d'isolation thermique comparable, avec une conductivité thermique bien inférieure à celle du polystyrène. Cette invention conduit à l'amélioration de la recyclabilité et la sauvegarde des ressources économiques.

Les essais et les calculs de planchers à gradient de propriété se sont révélés d'une réduction de poids de plus de 60% et d'une réduction des émissions de carbone dépassant 35% par rapport aux planchers minces classiques, sans aucune perte de résistance (Eyerer et al 2000, Said 2016).

I.3.6.2 Autres matériaux à gradient de propriétés

Les textiles avec des propriétés variables de couches superposées permettent de doter au matériau une perméabilité et une rigidité graduelle (figure I.17), ce qui peut augmenter l'efficacité de systèmes d'isolation vis-à-vis des effets de chaleur et d'humidité. En plus, la variation graduelle des propriétés de rigidité permettent de surmonter le changement brusque entre les composantes rigides et flexibles des éléments, ce qui pourrait complètement servir de base à des nouvelles solutions architecturales à l'avenir.



Figure .I.17 : *En haut: texture en fibre de verre avec des éléments de silicium à perméabilité graduelle; En bas: essai de l'étanchéité à l'eau, source: ILEK*

À l'aide d'un processus progressif, il a été possible de produire des éléments de mousse à cellules ouvertes avec des motifs de porosité variable. Ces mousses peuvent ensuite être traitées pour fabriquer des composants avec une variation de distribution de rigidité afin de répondre aux exigences de certains cas (FigureI.18).

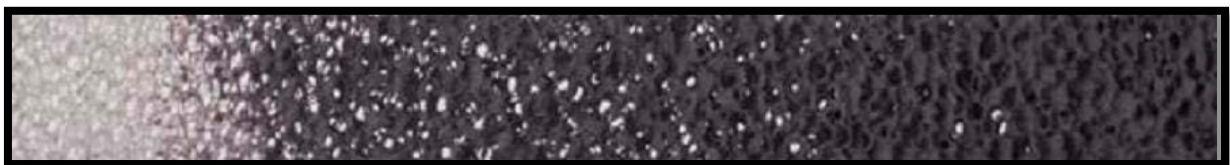


Figure .I.18 : *Infiltration graduelle de mousse de polyuréthane réticulée avec la colle de ciment en vue de la variation de rigidité, source: ILEK*

Un autre aspect de cette technique impliquant des matériaux à gradient de propriété sert à rassembler des différents matériaux suivant une transition graduelle et continue (figure I.19). Cela représente une nouvelle approche dans la technique d'assemblage avant tout, même si cela signifie que la variation de dilatation thermique ne peut plus être définie de manière précise au niveau local en vue de la transition continue en cause, ou la transmission de charge évité à certains endroits. Sous les auspices du projet, les investigations préliminaires sont effectuées dans le cadre de la construction des classes pertinentes de matériaux, des domaines potentiels d'application et des méthodes appropriées de production Said(2016).

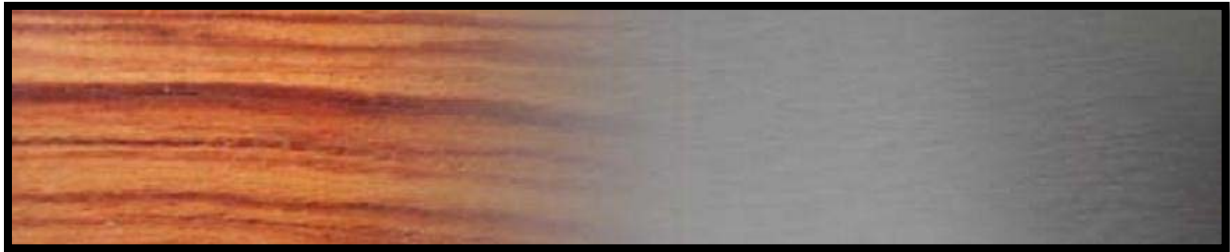


Figure .I.19 : Transition matérielle continue (bois à l'aluminium), Photomontage, source: ILEK.

I.3.6.3 Utilisations prévisionnelles des matériaux FGM dans le domaine du génie civil

a) Dans les chaussées rigides (Functionally Graded Concrete Materials for Rigid Pavements)

Les FGM peuvent être utilisés dans les chaussées rigides en béton avec une gradation obtenue par la variation de la fraction volumique des fibres, cette technique est visée d'être utilisée dans les autoroutes et les routes à très fort trafic où l'utilisation d'une chaussée souple en béton bitumineux est déconseillée, tels que les dallages industriels, les pistes des aéroports, car elles offrent une résistance et une durabilité élevées, le but est d'optimiser l'épaisseur de la chaussée afin d'avoir un matériau rigide sur la surface de roulement et un matériau moins rigide sur la couche de fondation.

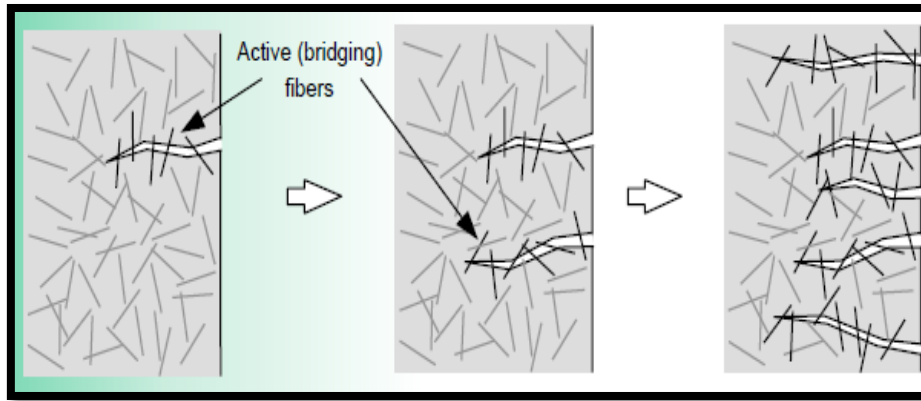


Figure .I.20 : *La variation de la fraction volumique des fibres dans la chaussée rigides.*

b) Les chaussées souples

Les FGM peuvent être utilisés dans les chaussées souples pour supprimer les couches d'accrochage entre la couche de la Grave Bitume et la couche de roulement en béton bitumineux et éviter le glissement entre les deux couches et économiser les épaisseurs des couches tout en obtenant un comportement optimisé et augmentant la capacité portante de la chaussée et par la suite sa durabilité.

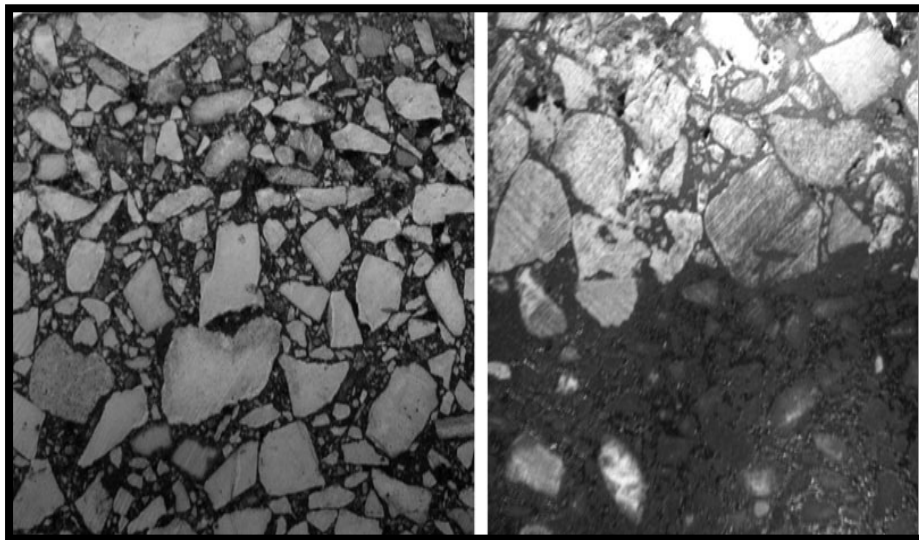


Figure .I.21 : *La variation de la fraction volumique des constituants entre la couche : la couche de la Grave Bitume et la couche de roulement.*

c) Les grands vitrages dans les zones chaudes

Les vitres sont en FGM pour contrôler la température dans les zones chaudes et éviter les vitrages multiples.

d) Les tunnels (functionally graded concrete segment in tunnel)

Les parois intérieures des tunnels doivent être réalisées en matériau réfractaire et rigide dans la surface exposée et d'un matériau imperméable dans la surface en contact avec le sol et les roches. L'utilisation des FGM est une solution efficace.

e) les joints dans la charpente métallique

Dans certains cas de la charpente métallique, lors de l'assemblage des éléments, on est obligé de réaliser des soudures entre les éléments de nature différente : l'un lourd et l'autre souple (acier/aluminium). Dans ce cas on utilise des joints ordinaires en acier. L'inconvénient de ce type de joint est la rupture et la durabilité. L'utilisation des joints en FGM est une solution optimale.

I.3.7 Procédés de fabrications FGM

Le processus de fabrication des matériaux à gradient de propriété peut être divisé en établissant la structure dans l'espace non homogène « gradation » et la transformation de cette structure en matériau en bloc « consolidation ». Il existe de nombreux procédés d'élaboration des FGM, les paragraphes suivants s'attachent à décrire les principales méthodes d'élaboration des FGM utilisées dans l'industrie Benammar (2017).

Pour plus d'informations, Kieback (2003) font une synthèse détaillée sur les techniques et les méthodes d'élaboration des matériaux à gradient de propriété.

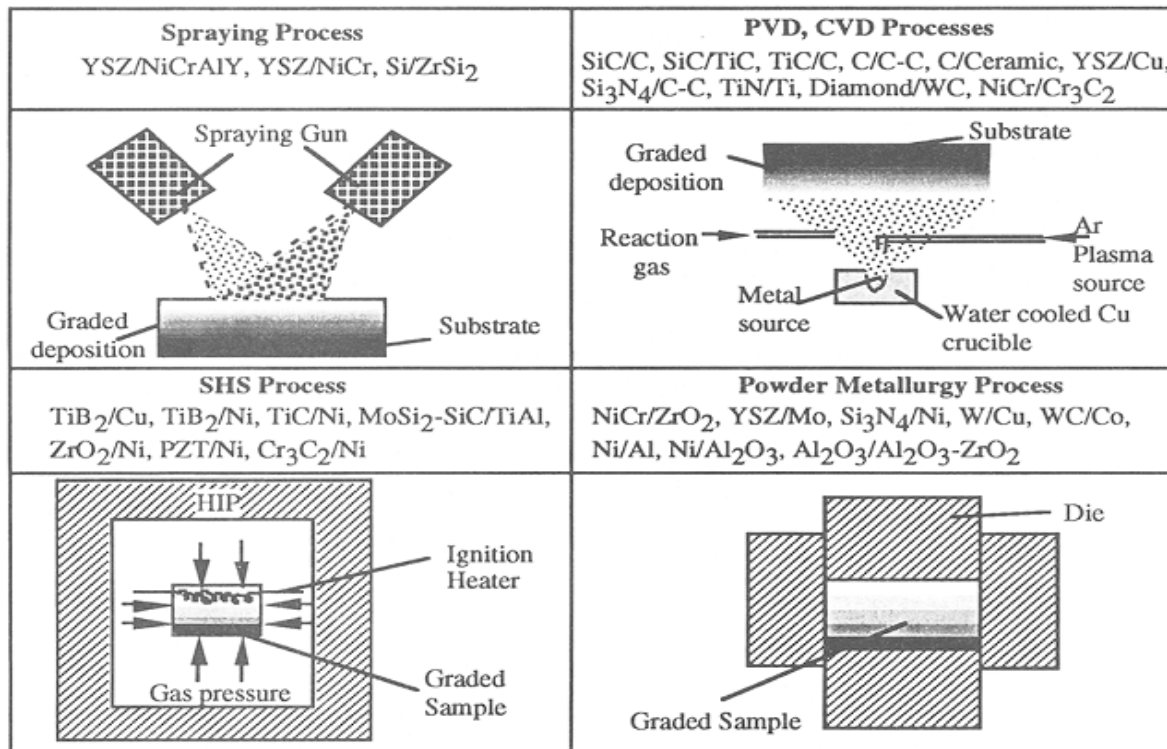


Figure .I.22 : Techniques d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés.

I.3.7.1 Coulage en bande (Tape casting or Doctor-Blade)

Le coulage en bande est une technique de mise en forme par voie liquide qui consiste à étaler une barbotine de poudres fines en suspension sur une surface plane en couches minces et régulières. L'étalement de la bande est obtenu par le mouvement relatif d'un réservoir ou sabot.

La suspension est ainsi laminée par son passage entre la lame du réservoir et le support (figure I.23), ce qui confère à la bande déposée une épaisseur uniforme sur toute sa longueur. La hauteur du couteau du réservoir par rapport au support détermine l'épaisseur de la bande Lostec (1997). Les produits obtenus sont des feuillets avec des épaisseurs contrôlées (25-1000 μm). Après un raffermissement de la pâte, les feuillets sont démoulés et ensuite découpés (Benammar 2017, Groves 1997).

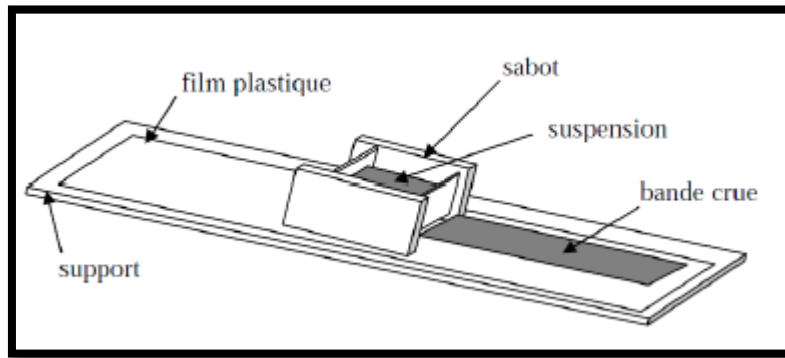


Figure I.23 : Principe de la méthode coulage en bande Lostec(1997).

I.3.7.2 Coupages séquentiels en barbotine (slip casting)

Le coulage en barbotine (slip casting) consiste à couler une suspension dans un moule poreux qui va drainer le liquide grâce aux forces capillaires, laissant un tesson (couche de poudre compacte) sur la surface du moule. Après séchage, on obtient le corps en cru. Donc le coulage se décompose en deux étapes essentielles:

- formation du tesson ou "prise";
- consolidation du tesson ou "raffermissement".

La filtration, c'est-à-dire la formation du tesson lors du coulage, peut être considérée comme un processus d'élimination d'une partie de l'eau de la barbotine; cette eau migre à travers la couche de tesson déjà formée, sous l'effet:

- du pouvoir de succion du plâtre (coulage classique) Moya(1992);
- ou d'une pression appliquée sur la barbotine (coulage sous pression).

Dans le cas de la fabrication de multicouches, après la formation du premier tesson, le dépôt de la deuxième couche s'effectue de manière telle que la barbotine ne pénètre pas dans le tesson formé. Ce procédé est successivement reproduit pour les autres couches Attia (2015).

I.3.7.3 Compactations sèche des poudres

Dans cette technique les poudres sont successivement versées dans un moule en acier. Chaque fois qu'une poudre est versée, une faible compression est exercée. Ensuite, la compaction de l'ensemble des couches sera effectuée. Ce procédé est suivi généralement, par une pression isostatique et un délainage. La densification sera enfin l'étape finale Bishop(1993)

Ce procédé peut être envisagé pour la fabrication de pièces de formes complexes. En effet il s'applique aussi avec la technique du pressage isostatique, et de façon industrielle Benammar (2017).

I.3.7.4 Dépôts par électro-sphère

Le dépôt par électro-sphère est un procédé dans lequel une suspension colloïdale stable est placée dans une cellule contenant deux électrodes, le dépôt se fait par le mouvement des particules chargées au sein de la solution vers la cathode ou l'anode selon le signe de la charge des particules due à un champ électrique Sark (1996).

I.3.7.5 Projections plasma

La projection plasma consiste à introduire des particules solides (de taille inférieure à 100 μm , environ) dans un jet de gaz, dont la température atteint couramment 11000 °C et la vitesse 1000-1500 m/s. Le dépôt est ainsi formé par l'empilement des lamelles solidifiées obtenues par l'impact des particules sur le substrat préalablement préparé Watremetz (2006).

Ce procédé est utilisé en particulier pour déposer des matériaux à haute température de fusion telle que des alliages réfractaires ou des céramiques. Les caractéristiques des dépôts réalisés par projection plasma sont les résistances à l'usure et à la corrosion et l'isolation thermique et électrique.

Une recherche détaillée a été effectuée sur la microstructure et le contrôle de propriété des fines particules pulvérisées par plasma. La projection par plasma est un processus rapide et fournit la formation du film sur une large zone, mais a habituellement un inconvénient avec sa microstructure approximative Omori et al (1998). Ichikawa (2000) a employé les poudres mécaniquement alliées des matériaux thermoélectriques, et a réussi à bien contrôler la teneur en dépôt dans le SiC pour former un matériau thermoélectrique transporteur concentration graduée avec une microstructure homogène. Sa configuration de pulvérisation est schématiquement montrée sur la (figure I.24) Said(2016).

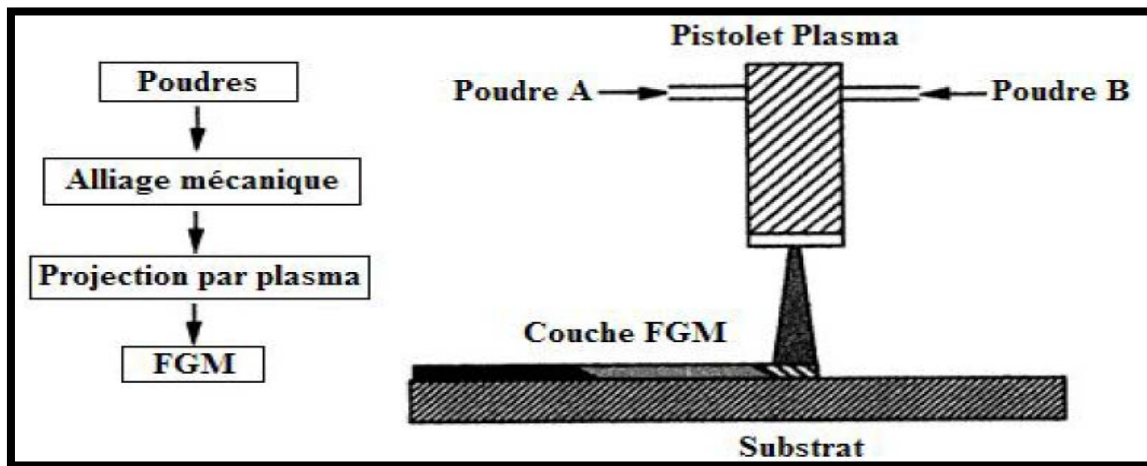


Figure .I.24 : Projection par plasma pour former un matériau thermoélectrique Ichikawa (2000).

I.3.7.6 Techniques de dépôt à la vapeur

Les techniques de dépôt à la vapeur décrivent une variété de méthodes de dépôt sous vide qui peuvent être utilisées pour produire des films minces sur les matériaux de base. Toutes ces techniques peuvent être utilisées pour produire des FGM minces uniquement.

Différents types de techniques de dépôt en phase vapeur comprennent le dépôt physique en phase vapeur (PVD) et le dépôt chimique en phase vapeur (CVD). Ils consomment beaucoup d'énergie et produisent des jauges toxiques comme sous-produits Groves (1997).

D'autres techniques basées sur le dépôt qui peuvent déposer des revêtements minces fonctionnellement dégradés sont le dépôt par faisceau d'électrons (EBD), le dépôt par faisceau ionique (IBD) et la synthèse à haute température auto-propagatrice (SHS) Knoppers. Toutes les méthodes mentionnées ci-dessus ne sont pas économiques pour produire des FGM de type en vrac.

I.3.7.7 Frittages et infiltration

Cette technique est constituée de deux étapes et convient à la fabrication d'un composite à gradient de fonction composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes. La première étape est de fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité. La seconde étape est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration. Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique Takahashi (1990). Cette technique peut être généralement appliquée pour plusieurs combinaisons de matériaux qui sont chimiquement inertes et qui ont des points de fusion bien différents les uns par rapport aux autres Attia (2015).

I.3.7.8 Implantations ioniques (sputtering)

C'est une technique avancée pour la fabrication des F.G.M permettant de réaliser seulement des épaisseurs fines ($<1\mu\text{m}$) sur différents substrats (plastiques, céramiques, et métaux). Le traitement s'effectue par les faisceaux énergétiques d'ions ou via des gaz réactifs. Les couches fabriquées présenteront un gradient de composition qui peut être très finement contrôlé (Said 2016, Abdizadeh 1997).

I.3.7.9 Frittages laser différentiel

Le rayonnement thermique du laser permet le contrôle de la température et la focalisation du point à chauffer. La différence de l'intensité de l'irradiation sur différents points du matériau, provoque un frittage différentiel le long de la pièce, ce qui résulte en des microstructures différentes, dépendant de la position du point irradié Said(2016).

Yuki et al. Yuki (1991) Ont utilisé cette technique pour élaborer un FGM de PSZ/Mo.

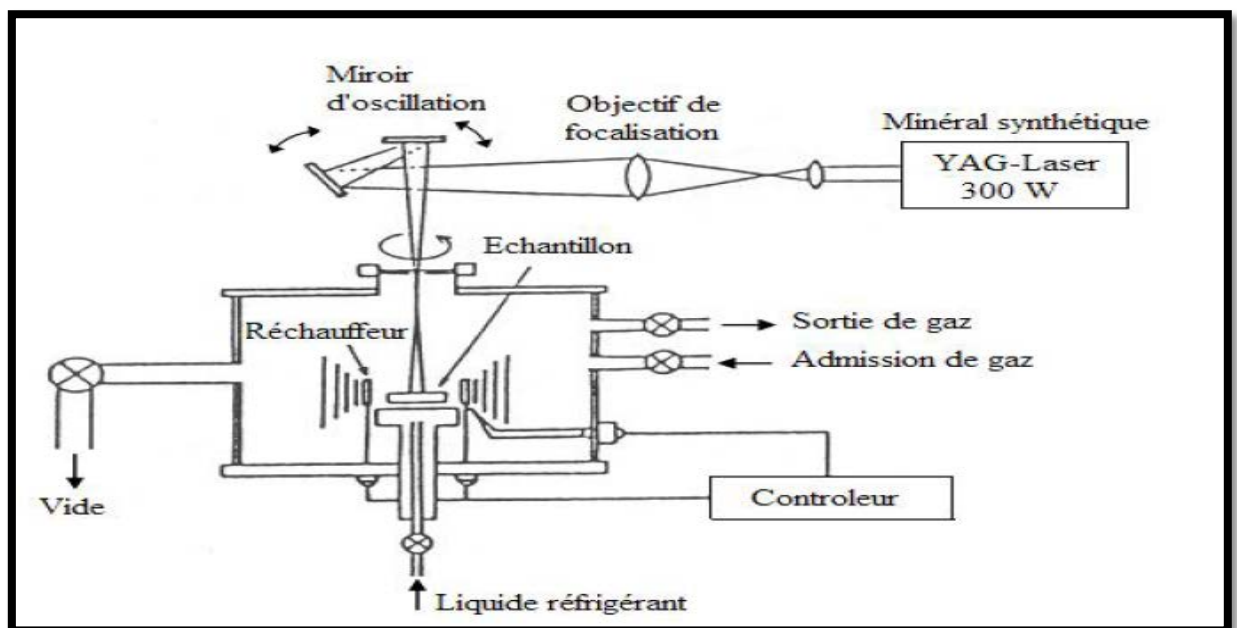


Figure .I.25 : Disposition du procédé frittage laser différentiel Yuki (1991).

I.3.7.10 Dépôts par centrifugation

La technique consiste à verser une suspension colloïdale relativement diluée dans des flacons cylindriques, le tout est soumise à une centrifugation. La sédimentation s'opère et le liquide est retiré. Ce procédé est répété pour obtenir des multicouches (figure I.26) (Said 2016, Abdizadeh 1997).

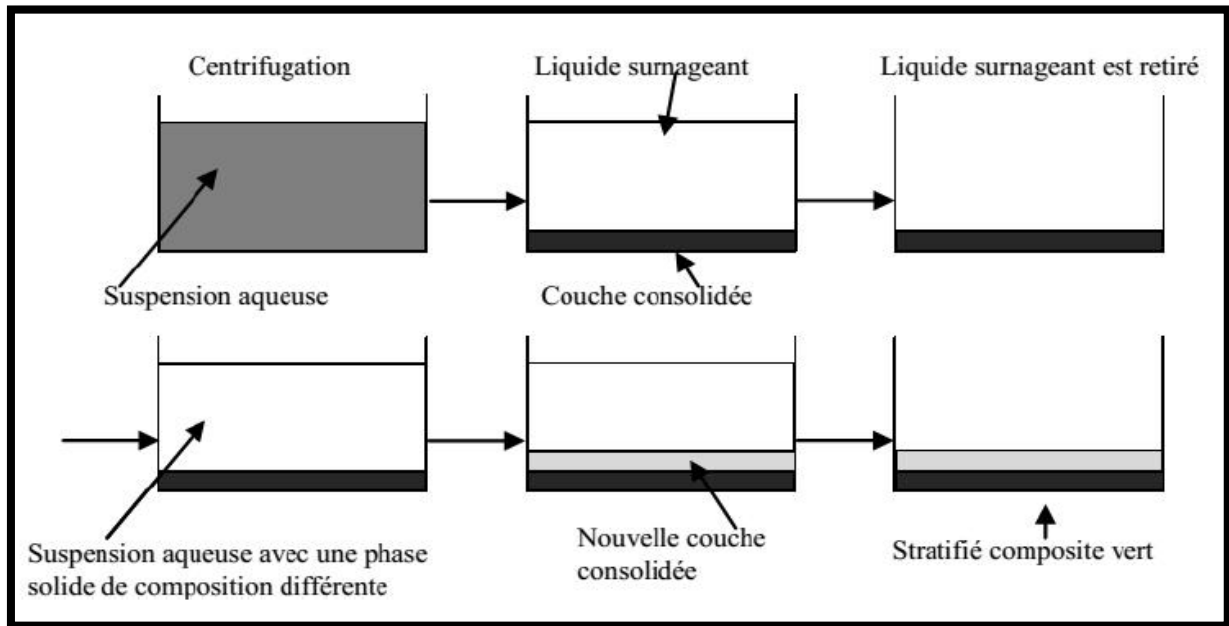


Figure .I.26 : Schéma du procédé dépôt par centrifugation Abdizadeh (1997).

I.3.8 Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM

Les matériaux à gradient fonctionnel « FGM » consistent en l'association de deux ou plusieurs matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux de manière à optimiser les performances de la structure qu'ils constituent.

Les caractéristiques les plus distinctes des matériaux FGM sont leurs microstructures non-uniformes avec des macros-propriétés graduées dans l'espace. Un des paramètres clés à déterminer lors de la fabrication de ces matériaux est la composition multi-phase à travers l'épaisseur.

La dépendance des propriétés de la position se traduit par la prise en compte de la loi des mélanges correspondant au modèle de Voigt :

$$P = \sum_{i=1}^n P_i V_i \quad (\text{I.1})$$

Avec P_i et V_i sont respectivement la propriété mécanique et la fraction volumique du constituant i , avec :

$$\sum_{i=1}^n V_i = 1 \quad (\text{I.2})$$

Dans la pratique, la plupart des structures FGM sont à deux constituants : de la céramique et du métal inoxydable en général. Dans ce cas, la loi de Voigt se réduit à :

$$P = P_1V_1 + P_2V_2 \quad (\text{I.3})$$

$$V_1 + V_2 = 1 \quad (\text{I.4})$$

P : Propriété le long de l'axe z ;

P_m : La propriété mécanique du métal ;

P_c : La propriété mécanique de la céramique ;

V_m : La fraction volumique du métal ;

V_m : La fraction volumique de la céramique.

Avec :

$$V_m + V_c = 1 \quad (\text{I.5})$$

Un FGM peut être définie par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume. Les liaisons entre les particules doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture, et également assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure Ziou (2017).

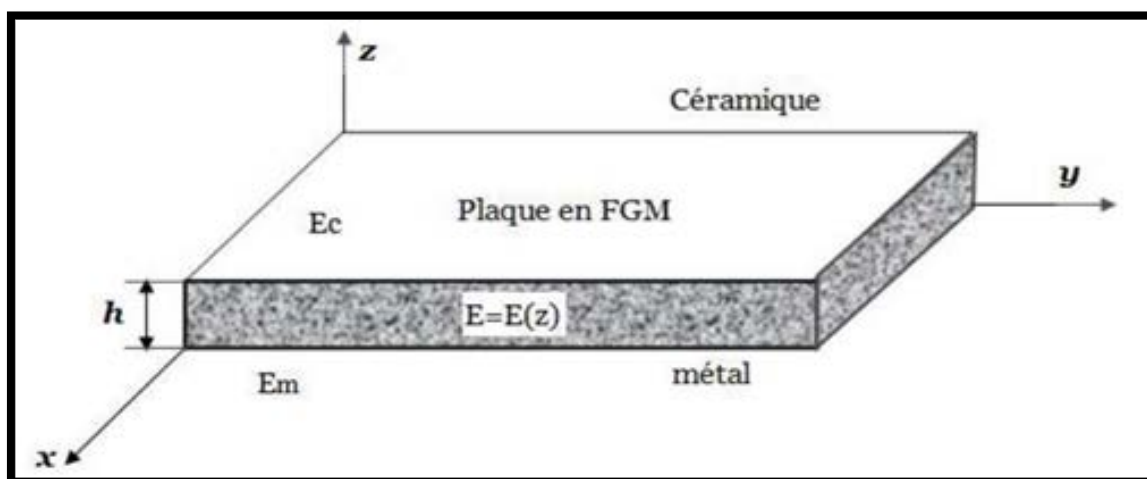


Figure .I.27 : Géométrie d'une plaque FGM.

Les coordonnées x et y définissent le plan de la plaque, tandis que l'axe z est perpendiculaire à la surface moyenne de la plaque et dans la direction de l'épaisseur. Les propriétés du matériau dont le module d'Young et le coefficient de Poisson sur les faces supérieures et inférieures sont différents. Ils varient de façon continue suivant l'épaisseur (l'axe z), soit : $E = E(z)$ et $\nu = \nu(z)$.

L'effet du coefficient de poisson sur les déformations est négligeable comparativement à celui du module d'Young. Par conséquent, le coefficient de Poisson peut être supposé comme constant. Cependant, le module d'Young dans la direction de l'épaisseur de la plaque FGM varie en fonction de la loi de puissance (P-FGM), la fonction exponentielle (E-FGM) ou avec la fonction sigmoïde (S-FGM) Ziou (2017).

I.3.9 Propriétés matérielles de la plaque P-FGM

La fraction volumique dans les P-FGM est assurée par une loi de puissance sous la forme :

$$\nu(z) = \left(\frac{z + h/2}{h} \right)^k \quad (\text{I.6})$$

Où k est un paramètre matériel et h est l'épaisseur de la plaque. Une fois que la fraction de volume local $\nu(z)$ est définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges Bao (1995):

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m)\nu_c(z) \quad (\text{I.7})$$

Où E_c et E_m sont les modules d'Young de la surface supérieure ($z = +h/2$) et de la surface inférieure ($z = -h/2$) de la poutre FGM.

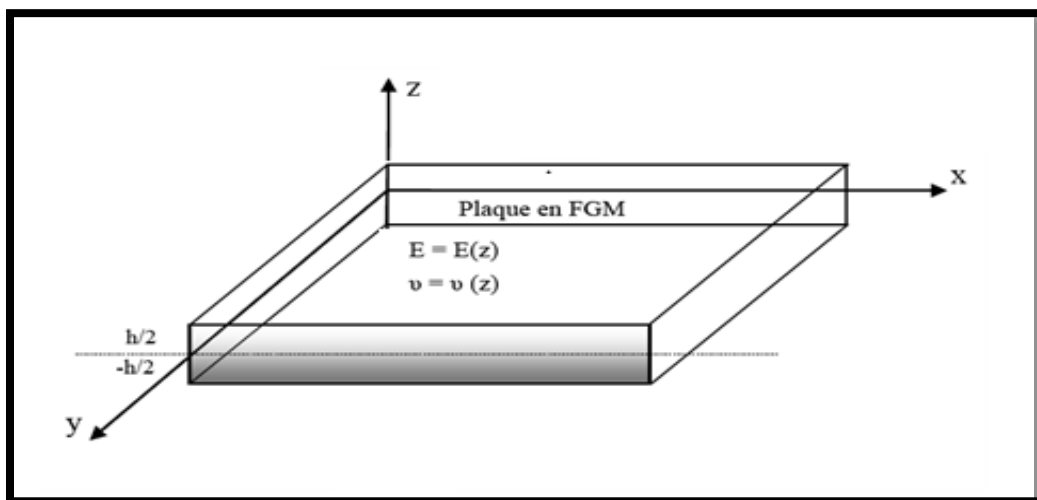


Figure I.28 : La variation de la fraction volumique dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM.

La variation du module d'Young dans la direction d'épaisseur de la surface supérieure ($z = h/2$) plaque P-FGM (composée de deux matériaux différents: céramique et métal), (z) étant la fraction volumique du P-FGM défini par la relation (I.6) La variation de la fraction volumique dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la figure (I.29).

Il apparaît clairement que la fraction volumique change rapidement près de surface inférieure pour $k < 1$ est augmentée rapidement près de la surface supérieure pour $k >$

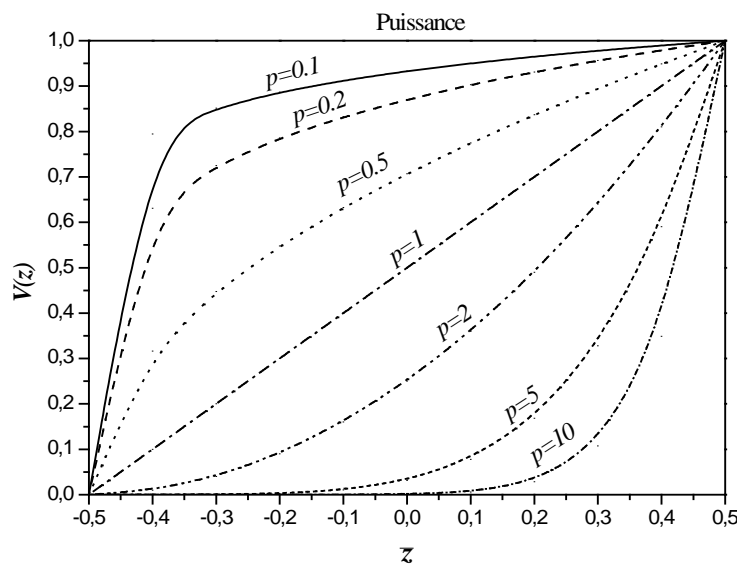


Figure I.29 : Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.

Lorsque $k = 1$, la variation du module d'Young devient linéaire.

On constate que la plaque devient plus résistante en raison de l'augmentation de la valeur de son module de résistance, si on augmente bien sûr le pourcentage de la céramique dans la plaque.

Et l'inverse est vrai, la plaque devient de faible résistance si son module d'Young est faible c'est le résultat de la diminution de la quantité de la céramique et l'augmentation de celle du métal Attia (2015).

I.3.10 Propriétés matérielles de la plaque S-FGM

Dans le cas de l'ajout à la plaque FGM, une fonction singulière simple aux composites multicouches, les concentrations de contraintes apparaissent sur l'une des interfaces où la matière est continue mais change rapidement (Bao 1995, Benammar 2017).

Par conséquent, Chung and Chi (2003) définissent la fraction volumique de puissance en utilisant deux fonctions afin d'assurer la bonne distribution des contraintes de toutes les interfaces. Les deux fonctions sont définies par:

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2+z}{h/2} \right)^k \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.8a})$$

$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2-z}{h/2} \right)^k \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.8b})$$

En utilisant la loi des mélanges, le module d'Young de la plaque S-FGM peut être calculé par :

$$E(z) = V_1(z)E_1 + [1-V_1(z)]E_2 \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.9a})$$

$$E(z) = V_2(z)E_2 + [1-V_2(z)]E_1 \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.9b})$$

$$\alpha(z) = V_1(z)\alpha_c + [1-V_1(z)]\alpha_m \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.10a})$$

$$\alpha(z) = V_2(z)\alpha_c + [1-V_1(z)]\alpha_m \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.10b})$$

La figure (I.30) montre que la variation de la fraction volumique définie par les équations (I.8.a) et (I.8.b) représente les distributions sigmoïdes, et cette plaque FGM est appelée (Plaque S-FGM).

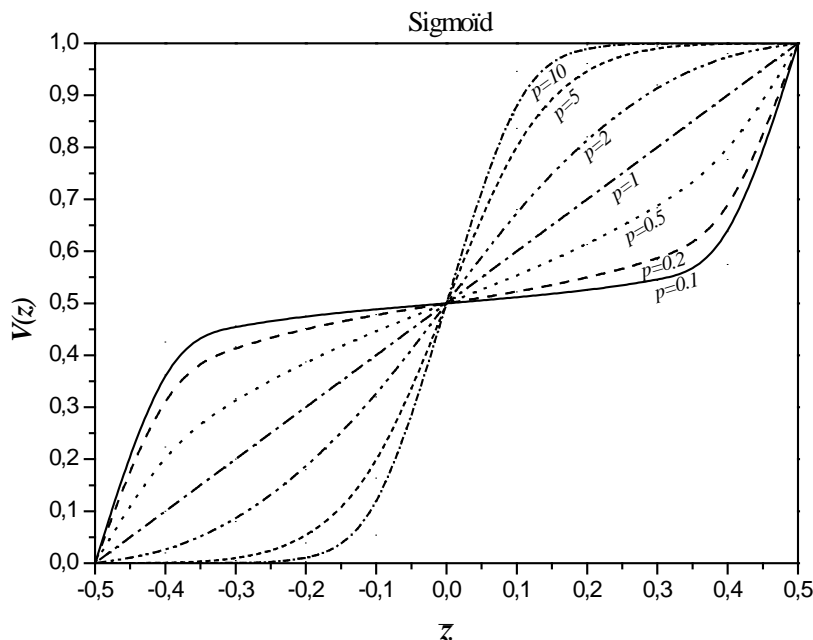


Figure I.30 : Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.

I.3.11 Les propriétés matérielles de la plaque E-FGM

Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme Delale and Erdogan (1983) :

$$E(z) = E_2 e^{B(z+h/2)} \quad (\text{I.11})$$

Avec :

$$B = \frac{1}{h} \ln \left(\frac{E_1}{E_2} \right) \quad (\text{I.12})$$

Cette méthode est utilisée généralement pour les plaques épaisses ou avec forte épaisseur elle est représentée sur la figure (I.31).

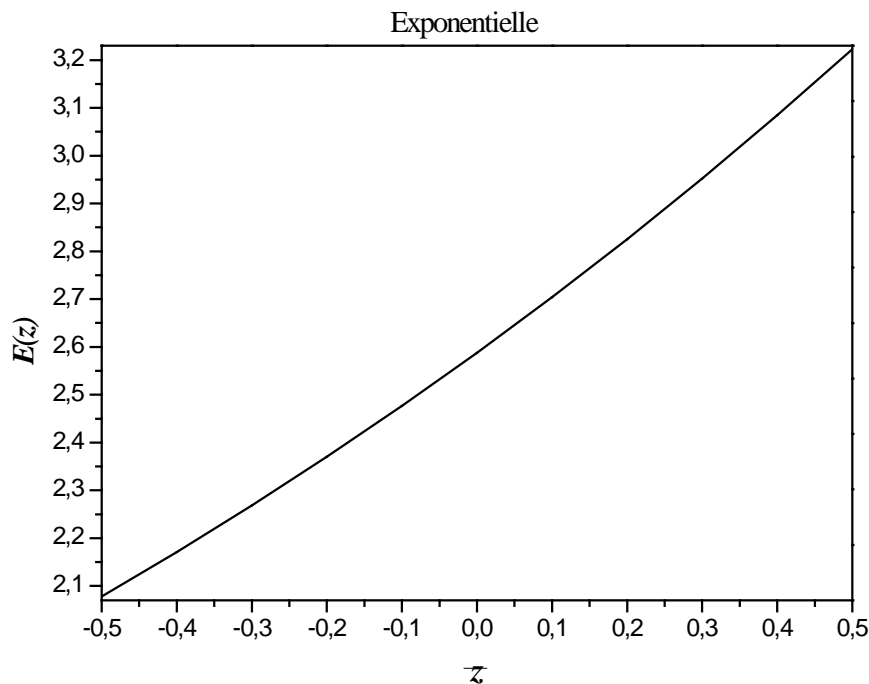


Figure .I.31 : Distribution de module de Young à travers l'épaisseur d'E-FGM.

I.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les matériaux composites et à gradient de propriétés « FGM », les notions fondamentales et puis on est passé à décrire les différentes méthodes

modernes d'usinage des FGM, leurs propriétés, les avantages et leurs inconvénients ainsi leurs domaines d'application

La variation spatiale et progressive des propriétés des matériaux à gradient de propriété permet de créer des structures innovantes qui peuvent être exploitées dans de nombreux domaines d'application.

Chapitre II Revus
sur les théories
des plaques

II.1 Introduction

Dans le but de résoudre les problèmes des structures ayant comme éléments structuraux des poutres et des plaques FGM dans le domaine élastique, il est important de choisir la bonne théorie décrivant correctement le comportement statique et dynamique de la structure ainsi que la méthode de résolution à appliquer. C'est en 1888 que Love utilisa les hypothèses de Gustav Kirchhoff, elles-mêmes inspiraient des hypothèses d'Euler-Bernoulli pour fonder une théorie des plaques minces, appelée théorie classique ou théorie de Love Kirchhoff.

La théorie des plaques semi-épaisses ou la théorie des déformations du premier ordre a été consolidée par Mindlin à partir des travaux de (Rayleigh 1877, Timoshenko 1921, Reissner 1945). Ensuite, des théories d'ordre supérieur sont venues améliorer les hypothèses des théories classiques et du premier ordre lorsque l'épaisseur de la plaque devient importante.

Nous présentons dans ce chapitre quelques modèles sur les théories des plaques développées dans la littérature pour améliorer l'évolution de la variation du champ des déplacements à travers l'épaisseur des plaques.

L'application intensive des plaques isotropes et des plaques composites dans diverses industries, particulièrement dans les domaines de l'aéronautique, de l'automobile, et de la construction navale, a stimulé les chercheurs à développer des théories capables de décrire correctement leur comportement structural.

II.2 Définition d'une plaque

Une plaque FG est un solide tridimensionnel rectangulaire simplement appuyé dont une des dimensions, appelée «épaisseur» est petite par rapport aux autres dimensions caractéristiques (longueur a et largeur b) et soumis à des charges qui provoquent la déformation de flexion, en plus celle de membrane.

Les plaques peuvent être classées en trois groupes : les plaques minces à petites déformations, les plaques minces à grandes déformations et les plaques épaisses.

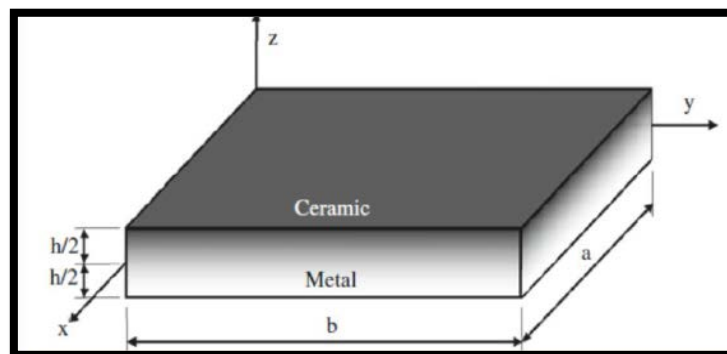


Figure .II.1 : Schéma d'une plaque.

II.3 Domaine de l'utilisation des plaques

Le domaine de l'utilisation des plaques est très répandue dans tous les domaines, en particulier dans le domaine du génie civil, on les utilise dans les constructions simples (habitation) où les ouvrages d'art et elle existe sous formes différentes, y compris les circulaires et rectangulaires et d'autres formes selon la qualité de l'ouvrage, comme celle-ci représentée dans les photos ci-dessous.

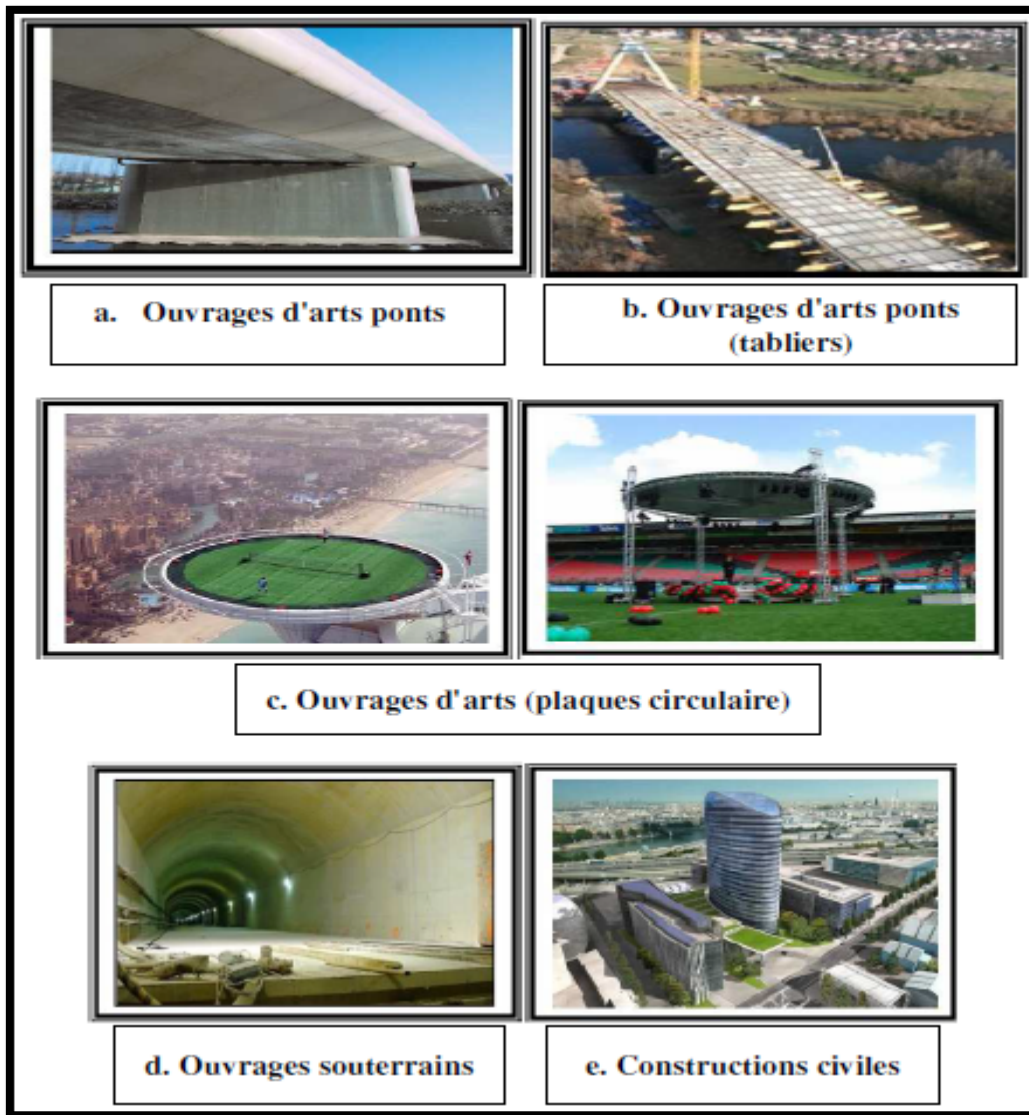


Figure .II.2 : Des exemples d'utilisation des FGM en génie civil.

II.4 Les catégories des théories des plaques

Les théories de déformation de cisaillement peuvent être classées en deux catégories majeures sur la base des champs supposés:

- Théories basées sur la contrainte ;

- Théories basées sur le déplacement.

II.4.1 Les théories basées sur la contrainte

Les théories basées sur la contrainte sont déterminées du champ de contraintes supposé des contraintes axial, qui sont censées être variées linéairement à travers l'épaisseur de la plaque. Les contraintes normales transversales et les contraintes de cisaillement sont ensuite obtenues à partir des équations d'équilibre de la théorie d'élasticité tridimensionnelle. Les équations d'équilibre de la théorie sont déterminées en utilisant le théorème de stationnarité variationnelle.

II.4.2 Les théories basées sur le déplacement

Les théories basées sur le déplacement sont comme suit :

- Théorie classique des plaques (CPT) ;
- Théorie de déformation de cisaillement de premier ordre (FSDT) ;
- Théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSDT).

II.5 Les différents modèles des structures composites dans l'élasticité bidimensionnelle

II.5.1 La théorie des plaques minces, ou la théorie de love-Kirchhoff, la théorie classique des plaques (CPT)

La théorie CPT classique des plaques (Classical Laminated Plate Theory) se présente comme la plus simple des approches et basée essentiellement sur les hypothèses suivantes:

Hypothèse 1 : aucune déformation ne se produit dans le plan moyen de la plaque ;

Hypothèse 2 : la plaque est d'épaisseur petite devant les autres dimensions (rapport d'élanement h/a ou $h/b < 0.05$). Elle possède un plan moyen, également appelé plan neutre ;

Hypothèse 3 : la contrainte normale dans la direction transversale est petite, donc négligeable comparativement aux contraintes appartenant au plan de la plaque ;

Hypothèse 4 : les sections droites initialement normales au plan neutre restent planes et normales à celui-ci après déformation. La déformation en cisaillement transverse est donc négligeable ;

Hypothèse 5 : une normale au plan moyen avant déformation reste normale au plan après déformation ;

Hypothèse 6 : les termes non linéaires du déplacement sont négligés. L'effet de l'inertie de rotation est négligeable.

Ces hypothèses imposent la cinématique suivante:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \tag{II.1a}$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \tag{II.1b}$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \tag{II.1c}$$

Où, u_0, v_0, w_0 sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque ($z = 0$).

La principale limitation de la théorie classique de Kirchhoff et que l'on néglige les effets dus aux efforts tranchants et à l'inertie de rotation, or dans la pratique les plaques ont des épaisseurs significatives et il devient nécessaire de tenir compte de ces effets pour décrire leur comportement dynamique Kaddouri (2014).

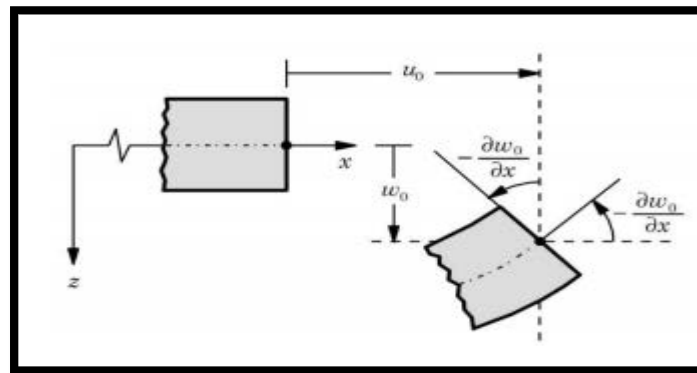


Figure .II.3: Illustration de la plaque de love-Kirchhoff Reddy(1997).

Les théories classiques, dites théories des plaques minces, où la contrainte normale transversale est négligeable, due à faible épaisseur de la plaque. Cette hypothèse n'est pas valable et incorrecte dans le cas des plaques modérément épaisses ou avec forte épaisseur.

II.5.2 La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre, la théorie de Reissner-Mindlin (FSDT)

La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre dans des plaques moyennement épaisses, les déformations dues au cisaillement transverse doivent être pris en compte. Il est prolongé la théorie classique des plaques en tenant compte de l'effet de cisaillement transverse dans ce cas les contraintes et les déformations sont constantes à travers l'épaisseur de la plaque.

Les études sur la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) peuvent être référées dans (Reissner (1945), Mindlin (1951) qui a mené au modèle de plaque de Reissner-Mindlin.

Pour introduire l'effet de cisaillement transverse l'hypothèse cinématique de Mindlin adoptée est la suivante : la normale reste droite mais non perpendiculaire à la surface moyenne (à cause de l'effet du cisaillement transverse) dans la configuration déformée (Figure II.4). Le champ de déplacement de Reissner-Mindlin (1951) s'écrit:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + z \phi_x(x, y) \tag{II.2a}$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + z \phi_y(x, y) \tag{II.2b}$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \tag{II.2c}$$

Avec :

$$\phi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x}, \quad \phi_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y}$$

Où (u_0, v_0, w_0) et (ϕ_x, ϕ_y) sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes x et y, respectivement. Le plan principal de la plaque est le plan (Oxy) et l'épaisseur est orientée selon l'axe $z \in [-h/2; h/2]$. Comme ce modèle ne tient pas en compte l'effet de cisaillement transverse, il ne donne pas des résultats précis pour les plaques épaisses.

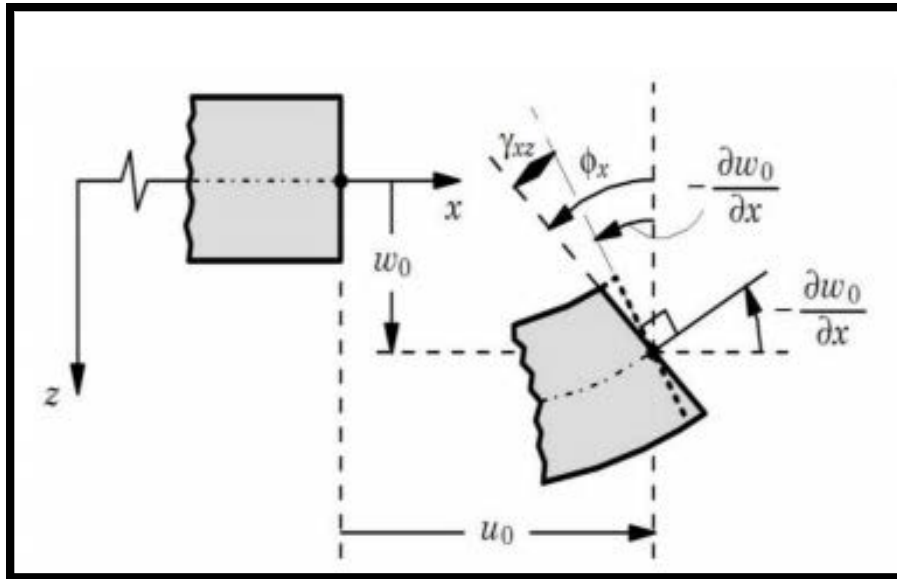


Figure .II.4 : Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin Reddy(1997).

Ce choix de la forme des champs de déplacements, les déformations transversales sont constantes en z . Les contraintes de cisaillement sont donc uniformes à n'importe quel point suivant l'épaisseur et ça évite la discontinuité entre les couches dans les composites conventionnels. Cette mauvaise description d'uniformité de distribution des contraintes oblige à introduire des coefficients correcteurs pour mieux prendre en compte, dans l'écriture de l'énergie, les effets du cisaillement transversal Whitney (1973). Les résultats obtenus dépendent essentiellement du choix empirique dans des situations complexes des coefficients correcteurs et l'étude des plaques épaisses reste aléatoire par ce type d'approche cinématique Attia (2015).

II.5.2.1 Le coefficient de correction K

Le champ de déplacement est basé sur la théorie du premier ordre, les auteurs considèrent que les contraintes et les déformations de cisaillement sont constantes à travers l'épaisseur d'une structure. Dans le cas réel, ceci n'est pas vrai. En effet, les contraintes de cisaillement sont quadratiques à travers l'épaisseur (Figure.II.4). Pour corriger les contraintes de cisaillement transversal dont l'expression est issue de la théorie du premier ordre des facteurs de corrections doivent être introduits figure.II.5 Kaddouri (2014):

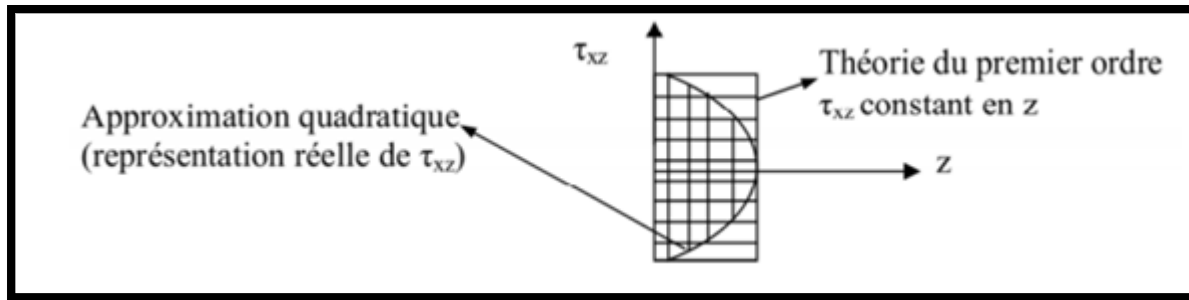


Figure II.5 : Approximations de la contrainte du CT : constante (théorie du premier ordre) et quadratique (ordre supérieur).

K est un facteur corrigeant l’hypothèse de contraintes de cisaillement constantes sur l’épaisseur de la plaque dans la théorie de Mindlin, en contradiction avec la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les surfaces libres, qui est le rapport entre l’énergie de déformation de cisaillement de la distribution parabolique et celle uniforme :

$$w(x, y, z) = \frac{\int_{v_2} \tau_{xz} \gamma_{xy} dv}{\int_{v_1} \tau_{xz} \gamma_{xy} dv} \tag{II.3}$$

Ce coefficient dépend de la forme géométrique de la poutre ou la plaque :

- Pour un élément rectangulaire : $K = \frac{5}{6}$
- Pour un élément circulaire : $K = \frac{2}{3}$

II.5.3 Synthèse bibliographique sur les modèles d’ordre supérieur (HSDT)

Théories de déformation en cisaillement d’ordre élevé (HSDT) ces théories sont une évolution de la théorie classique des plaques (CPT) et de la théorie du premier ordre (FSDT). Elles ont pour base un développement du déplacement dans l’épaisseur à l’ordre deux ou plus.

Contrairement aux précédentes théories, les HSDT sont basées sur une distribution non linéaire des champs à travers l’épaisseur (figure II.5). Ces modèles n’exigent pas de facteurs de correction en tenant compte l’effet de cisaillement Hildebrand et al(1949), Naghdi (1957). Les théories d’ordre élevé sont applicables à certains types de problèmes (statique, dynamique, flambement,...). Kapania et Raciti ont réalisé une revue détaillée des théories de déformation de cisaillements utilisés en statique, en vibration et en flambement des poutres et des plaques composites.

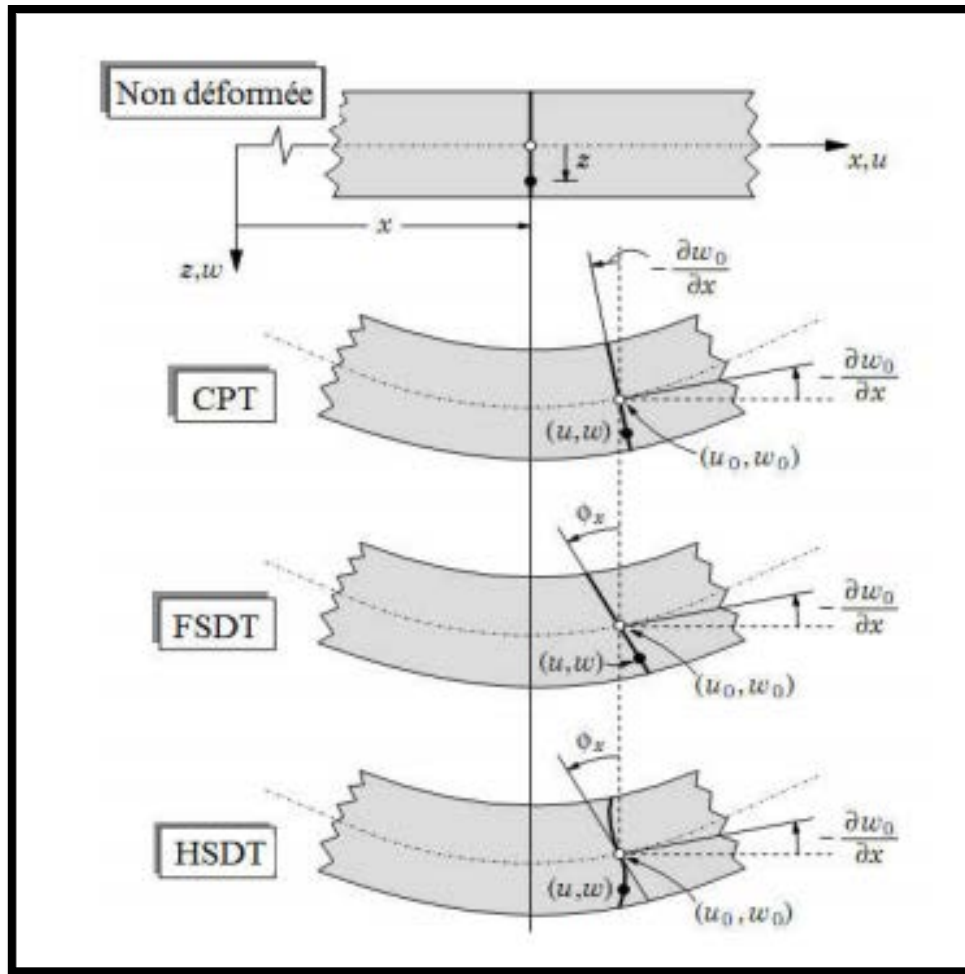


Figure II.6 : Comparaison de la théorie d'ordre élevé (HSDT) avec (CPT) et (FSDT).

Ont utilisé des théories d'ordre élevé pour étudier le comportement des structures (poutres et plaques) en matériaux composites et en matériaux à gradients de propriétés FGM. Pour les théories d'ordre élevé, le champ de déplacement est généralement écrit comme suit :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + \psi(z)\phi_x(x, y) \tag{II.4a}$$

$$u(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + \psi(z)\phi_y(x, y) \tag{II.4b}$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \tag{II.4c}$$

Où : $(u_0, v_0 \text{ et } w_0)$ et (ϕ_x, ϕ_y) sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes x et y, respectivement. $\psi(z)$ est une fonction de cisaillement transverse caractérisant les théories correspondantes. En effet, les déplacements de la théorie classique des plaques (CPT)

sont obtenus en mettant $\psi(z) = 0$, alors que la théorie de premier ordre (FSDT) est obtenue en mettant $\psi(z) = z$.

Plusieurs auteurs ont proposé des fonctions de cisaillement $\psi(z)$ pour les modèles d'ordre élevé qui sont basés sur une distribution non linéaire des champs de déplacement dans l'épaisseur. La distribution des contraintes de cisaillement transversales dans l'épaisseur peut prendre une forme parabolique, sinusoidale comme le modèle de Touratier, sous forme hyperbolique comme proposée par Ait Atmane et al. Ou exponentielle comme proposée par Karama et al (2003). Citons :

L'approche d'Ambartsumyan (1969) avec : $f(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right)$

L'approche de Reissner(1945), Panc (1975) et Kaczkowski avec : $f(z) = \frac{5}{4} z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$

L'approche de Levinson (1980), Murthy (1981) et Reddy (1984) avec : $f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$

L'approche de Touratier (1991) avec : $f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{z}{h}\right)$

L'approche d'Afaq et al(2003) avec : $f(z) = z e^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}$

L'approche de Aydogdu (2005) avec : $f(z) = z \alpha^{\frac{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}{\ln(\alpha)}} \quad \text{si } \alpha > 0$

L'approche de Mantari avec : $f(z) = \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) e^{\frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right)} + \frac{1}{2} \frac{\pi z}{h}$

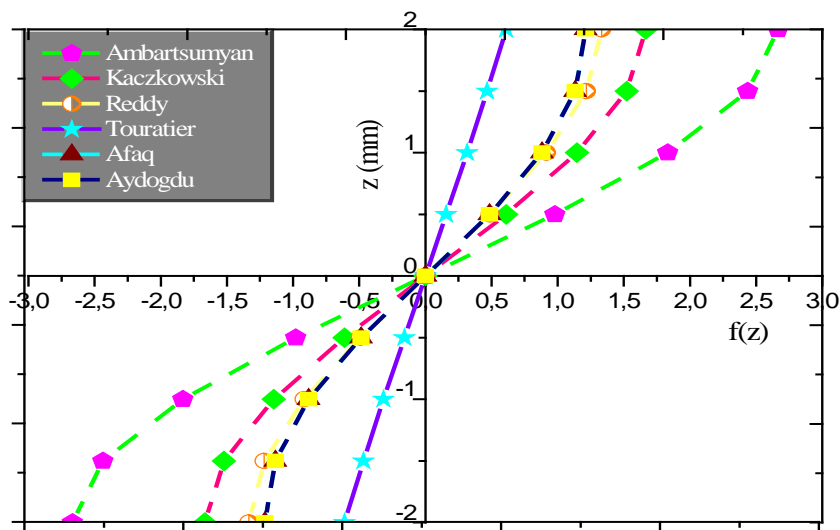


Figure .II.7 : Variation de la fonction de forme $f(z)$ des différents modèles en fonction de l'épaisseur.

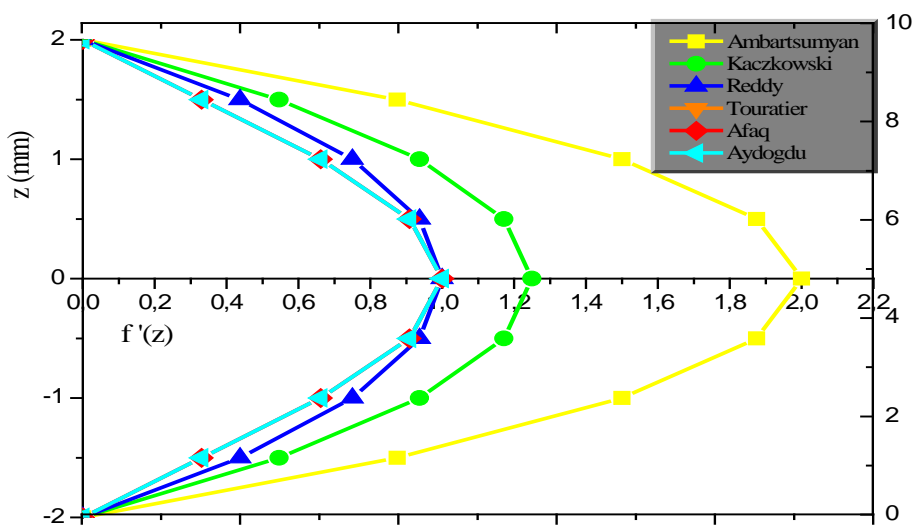


Figure .II.8 : Variation de la dérivée de la fonction de forme $f(z)$ des différents modèles suivant l'épaisseur.

II.5.4 Les théories d'élasticité tridimensionnelle (3D)

La reconversion vers les matériaux fonctionnellement gradués devient de plus en plus fréquente dans divers domaines et particulièrement l'aéronautique et aérospatial. Ce qui a incité les chercheurs à développer des théories capables de décrire correctement leur comportement structural. L'étude du comportement des plaques fonctionnellement graduées vis-à-vis des chargements mécaniques et thermiques reste un problème tridimensionnel de ce fait l'utilisation des théories d'élasticité tridimensionnelle (3-D) peut s'avérer très utile.

Au cours des vingt dernières années beaucoup de chercheurs se sont intéressés aux théories de l'élasticité 3-D pour pouvoir développer des solutions plus exactes des comportements mécaniques et thermiques des plaques FGM et valider les résultats des modèles ESL.

En 1999 Ootao and Tanigawa (1999). Ont développé des solutions exactes pour des problèmes de contraintes thermiques des plaques FGM simplement appuyées. Reddy and Cheng (2001) ont étudié l'analyse de la flexion des plaques carrées en FGM simplement appuyées sous un chargement thermique. Vel and Batra(2002) se sont aussi intéressés à l'étude thermo-élastique des plaques carrées en FGM en adoptant une méthode de série de puissance une année après ils ont développé leurs travaux pour analyser les problèmes de conduction de chaleur transitoire des plaques FGM simplement supportées soumises à une variation de température graduelle (Vel and Batra2003,Benbakhti 2017).

II.6 Théories raffinées d'ordre élevé à quatre variables

La formulation est limitée au comportement élastique linéaire. Le champ de déplacement des théories de déformation de cisaillement est choisi en se basant sur les hypothèses suivantes :

- Le déplacement transversal est décomposé en une composante de flexion et une composante de cisaillement ;
- Les déplacements axiaux sont décomposés en trois termes : à savoir : extension, flexion et cisaillement ;
- Les déplacements axiaux dus à la flexion sont similaires aux ceux donnés par la théorie classique des plaques (CPT) ;
- Le déplacement axial dû au cisaillement engendre une variation non linéaire de la déformation et la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur de la plaque de telle sorte que cette dernière s'annule au niveau des surfaces supérieure et inférieure.

En se basant sur ces hypothèses, le champ de déplacement est donné sous la forme générale suivante :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} + \psi(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (\text{II.5a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} + \psi(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (\text{II.5b})$$

$$w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) \quad (\text{II.5c})$$

Où u_0 et v_0 sont les déplacements suivant les directions x et y d'un point sur le plan moyen de la plaque w_b et w_s sont les déplacements transversaux dus à la flexion et au cisaillement, respectivement, $\psi(z)$ est une fonction de forme qui détermine la distribution des déformations et des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur.

La fonction de forme $\psi(z)$ est choisie de telle façon que la condition de nullité de la contrainte de cisaillement transversale aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque est respectée, et par conséquent, le facteur de correction de cisaillement n'est pas nécessaire.

II.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons donné un aperçu sur les théories des plaques ainsi que les modèles analytiques des plaques à savoir la théorie classique des plaques (CPT), la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) et la théorie de déformation en cisaillement.

Nous avons utilisé une nouvelle théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé raffiné avec un nouveau champ de déplacement qui présente des intégrales variables.

Chapitre III
Formulations
théorique

III.1 Introduction

L'objet de toutes théories précédentes est de calcul approché des grandeurs généralisées sur la base du système d'équations d'équilibre, de compatibilité et de conditions aux limites sur les bords, complété par une loi de comportement reliant les contraintes et les déformations généralisées.

Dans ce chapitre, nous allons présenter le modèle analytique pour l'étude du comportement mécanique de la flexion des plaques fonctionnellement graduées FG, supposant une théorie hyperbolique raffinée qui utilise seulement quatre variables. Contrairement aux autres théories, le nombre de fonctions inconnues cinq ou plus.

III.2 Analyse du comportement mécanique des plaques FGM

III.2.1 Propriétés des matériaux

Les FGM sont des matériaux composites constitués de la céramique et du métal. Il y'a quelque modèles dans la littérature qui expriment la variation des propriétés matérielles dans les FGM Chi and Chung (2006ab). Le plus couramment utilisé est la distribution de la loi de puissance en terme de fraction volumique des constituants.

Les propriétés des matériaux de la poutre FG sont supposées varier de façon continue à travers l'épaisseur. La plaque FG est composée de céramique et de métal, Trois types de plaques sont considérés :

III.2.1.1 Plaque P-FGM

Les propriétés du matériau sont considérées comme variant selon l'épaisseur de la plaque selon la distribution de la loi de puissance comme suit:

$$E(z) = (E_c - E_m)V_c + E_m \quad (\text{III.1})$$

Où E est les paramètres du matériau (E_m et E_c sont les propriétés du métal et de céramique successivement), et les indices m et c représentent respectivement les composants métalliques et céramiques.

La fraction volumique de la céramique est décrite comme suit:

$$V_c(z) = \left(\frac{2z + h}{2h} \right)^p \quad (\text{III.2})$$

Avec : $V_m + V_c = 1$.

III.2.1.2 Plaque E-FGM

Les propriétés du matériau varient selon une loi exponentielle comme suit :

$$E(z) = E_0 e^{p(z/h+1/2)} \quad (III.3)$$

Tel que E_0 est le module d'Young de céramique $E_0 = E_c$.

III.2.1.3 Plaque S-FGM symétrique

Les propriétés du matériau varient selon une loi sigmoïde avec deux fractions volumiques symétriques comme suit :

$$E(z) = (E_c - E_m) \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^p + E_m \quad (III.4a)$$

$$V_m(z) = \begin{cases} \left(\frac{2z+h}{h} \right)^p & \text{for } -h/2 \leq z \leq 0 \\ \left(\frac{-2z+h}{h} \right)^p & \text{for } 0 \leq z \leq h/2 \end{cases} \quad (III.4b)$$

Avec :

$$V_c(z) = 1 - V_m(z) \quad (III.5)$$

Où $E(z)$, E_c , E_m sont les module de Young de la plaque céramique et métal respectivement, p est l'indice matériel, $V_c(z)$, $V_m(z)$ sont les fractions volumiques du céramique et du métal.

III.3 Théories raffinées d'ordre élevé à quatre variables

III.3.1 Hypothèses de base

- 1) L'origine du système de coordonnées cartésiennes est prise à la surface neutre de la plaque de FGM ;
- 2) les déplacements axiaux sont décomposés en trois termes à savoir : extension, flexion et cisaillement ;
- 3) Les déplacements (u) dans la direction x et (v) dans la direction y se composent d'un déplacement en membrane, d'un déplacement en flexion et d'un déplacement dû au cisaillement ;
- 4) Le déplacement transversal w comprend deux composantes de flexion et de cisaillement w_b et w_s :

$$w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) \quad (III.6)$$

- 5) Les déplacements sont petits par rapport à l'épaisseur de la plaque, et par conséquent, les déformations engendrées sont infinitésimales ;

- 6) La contrainte normale transversale σ_{zz} est négligeable en comparaison avec des contraintes normales dans le plan σ_{xx} et σ_{yy} .

III.3.2 Champs de déplacement

Sur la base des hypothèses formulées dans la section précédente, le champ de déplacement est obtenu sous la forme analytique suivante :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ w(x, y, z) &= w_b(x, y) + w_s(x, y) \end{aligned} \quad \text{..(III.7)}$$

Où :

$$f(z) = z - \left(h \times \sinh\left(\frac{z}{h}\right) \times e^{(-2 \times (z/h)^2)} \right) \quad \text{(III.8)}$$

u_0 et v_0 sont les déplacements membranaires plans dans les directions (x) et (y) respectivement, w_b et w_s sont les composantes de déplacement transversal en terme de flexion et de cisaillement et $f(z)$ est basé sur la fonction combiné hyperbolique-exponentielle.

III.3.3 Champs de déformation

Le champ de déformation associé au champ de déplacement précédent est obtenu comme suit :

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{xx}^0 + z k_{xx}^b + f(z) k_{xx}^s \quad \text{(III.9a)}$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_{yy}^0 + z k_{yy}^b + f(z) k_{yy}^s \quad \text{(III.9b)}$$

$$\varepsilon_z = 0 \quad \text{(III.9c)}$$

$$\gamma_{xy} = \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - 2z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} - 2f(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \quad \text{(III.10a)}$$

$$\gamma_{xz} = \left(1 - \frac{\partial f(z)}{\partial z} \right) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad \text{(III.10b)}$$

$$\gamma_{yz} = \left(1 - \frac{\partial f(z)}{\partial z} \right) \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad \text{(III.10c)}$$

Avec :

$$\varepsilon_{xx}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x} \quad k_{xx}^b = - \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \quad k_{xx}^s = - \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \quad \text{(III.11a)}$$

$$\varepsilon_{yy}^0 = \frac{\partial v_0}{\partial y} \quad k_{yy}^b = - \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \quad k_{yy}^s = - \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \quad \text{(III.11b)}$$

$$\gamma^0 = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{yz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ \frac{\partial w_s}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.11c})$$

avec $(\varepsilon^0, k^0, k^s$ et $\gamma^0)$ sont respectivement des déformations et les distorsions .

III.3.4 Relations constitutives

Pour les plaques élastiques, les relations constitutives peuvent être écrites comme suit:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.12a})$$

Et

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{55} & 0 \\ 0 & C_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.12b})$$

Où $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz})$ et $(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz})$ sont les composantes de contrainte et de déformation. En utilisant les propriétés matérielles définies dans l'Eq.(1), les coefficients de rigidité peuvent être exprimés comme suit :

$$C_{11}(z) = C_{22}(z) = \frac{E(z)}{1 - \nu(z)^2} \quad (\text{III.13a})$$

$$C_{12}(z) = \nu(z)C_{11}(z) \quad (\text{III.13b})$$

$$C_{44}(z) = C_{55}(z) = C_{66}(z) = \frac{E(z)}{2(1 + \nu(z))} \quad (\text{III.13c})$$

Où $\nu(z)$ est le coefficient de Poisson.

III.3.5 Les équations gouvernantes

Les équations gouvernantes sont obtenues à partir du principe des travaux virtuels et sont exprimées par la forme suivante :

$$0 = \int_V (\delta U + \delta V) dV \quad (\text{III.14})$$

Où : δU est l'énergie de déformation et δV est le travail virtuel externe sous l'effet de la charge externe appliquée à la plaque.

La variation de l'énergie de déformation de la plaque est calculée comme suite :

$$\delta U = \int_A \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + \sigma_{xy} \delta \gamma_{xy} + \sigma_{xz} \delta \gamma_{xz} + \sigma_{yz} \delta \gamma_{yz}) dA dz \quad (III.15)$$

Alors, l'expression finale de la variation de l'énergie de déformation s'exprime à l'aide de variables des contraintes et des déformations :

$$\delta U = \int_A \left[\begin{array}{l} N_{xx} \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} - M_{xx}^b \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2} - M_{xx}^s \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial x^2} + N_{yy} \frac{\partial \delta v_0}{\partial y} \\ - M_{yy}^b \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial y^2} - M_{yy}^s \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial y^2} + N_{xy} \left(\frac{\partial \delta u_0}{\partial y} + \frac{\partial \delta v_0}{\partial x} \right) \\ - 2M_{xy}^b \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial x \partial y} - 2M_{xy}^s \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial x \partial y} + Q_x \frac{\partial \delta w_s}{\partial x} + Q_y \frac{\partial \delta w_s}{\partial y} \end{array} \right] dA \quad (III.16)$$

Tel que $(N_{xx}, N_{yy}$ et $N_{xy})$ sont les résultantes des efforts et moments, et sont exprimé par :

$$(N_{xx}, N_{yy}, N_{xy}) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}) dz \quad (III.17a)$$

Et les résultantes des moments en plan $(M_{xx}, M_{yy}$ et $M_{xy})$ sont définies par l'intégrale des moments créés par les contraintes en plan et le plan moyen de la plaque sur l'épaisseur :

$$(M_{xx}^b, M_{yy}^b, M_{xy}^b) = \int_{-h/2}^{h/2} z (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}) dz \quad (III.17b)$$

$$(M_{xx}^s, M_{yy}^s, M_{xy}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} f (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}) dz \quad (III.17c)$$

Les résultantes des charges du cisaillement $(Q_x$ et $Q_y)$ sont définies par:

$$(Q_x, Q_y) = \int_{-h/2}^{h/2} g (\sigma_{xz}, \sigma_{yz}) dz \quad (III.17d)$$

Le travail virtuel externe sous l'effet de la charge externe appliquée à la plaque est donnée par :

$$\delta V = - \int_A [q(\delta w_b + \delta w_s) + fe] dA \quad (III.18)$$

Ou q et fe sont les charges dues au chargement transversal et les paramètres de la fondation élastique respectivement.

III.3.5.1 Modèles de fondations

Les plaques reposant sur les fondations élastiques présentent des problèmes techniques très courant dans le génie civil. Toutes les charges de la structure doivent être transférées au sol, et l'ensemble structure et sol doivent agir l'ensemble pour supporter les charges.

Le développement des modèles plus réalistes de fondation et des méthodes simplifiées pour résoudre ce problème complexe d'interaction sol-structure est très important pour arriver à des conceptions sûres et économiques.

➤ Model de Winkler

Depuis 1887, le modèle de Winkler reste le plus simple et le plus couramment utilisé pour modéliser le sol dans les calculs de fondations et d'ouvrages géotechniques. L'hypothèse fondamentale du modèle de Winkler est la proportionnalité entre les déformations et les contraintes, le coefficient de proportionnalité est le module de réaction du sol noté k_w .

L'idéalisation de Winkler représente le sol comme un système de ressorts identiques, ils sont indépendants et ont un comportement élastique linéaire. Winkler suppose également que la déformation du terrain sous les charges appliquées est limitée uniquement aux zones de chargement, L'équation différentielle qui régit ce modèle peut-être exprimé comme suit :

$$f_e = k_w(w_b + w_s) \quad (\text{III.19})$$

La modélisation du sol proposée par Winkler (1867) consiste à discrétiser le sol dans la direction longitudinale par une série de ressorts indépendants (figure.III.1). La principale difficulté consiste en l'appréciation de la rigidité des ressorts de façon réaliste.

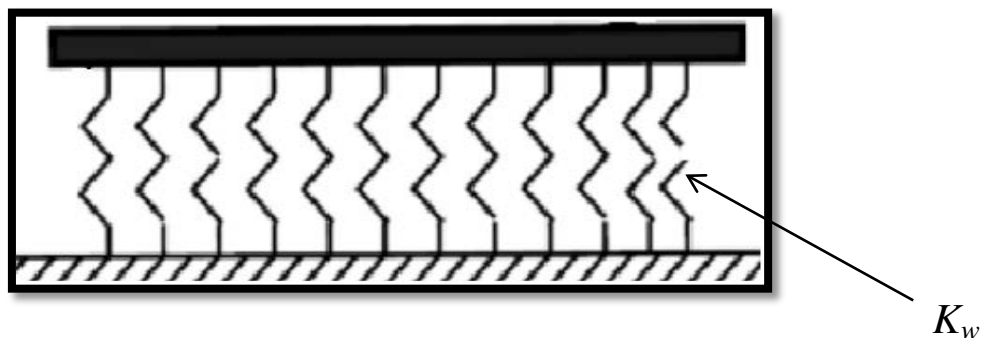


Figure. III. 1: *Modèle de Winkler.*

Ceci a été amélioré plus tard par Pasternak qui a tenu compte des interactions entre les ressorts séparés dans le modèle de Winkler en présentant un nouveau paramètre dépendant. Dès lors, le modèle de Pasternak était largement employé pour décrire le comportement mécanique des interactions (structures-bases).

➤ **Model de Pasternak**

Le modèle de comportement du sol proposé par Pasternak (1954), suppose l'existence d'une interaction de cisaillement entre les ressorts. Ceci se fait en reliant les ressorts à une couche d'éléments verticaux incompressibles qui peuvent subir uniquement des déformations tangentielles dues au cisaillement Khemis (2018).

Deux différences essentielles sont observées entre le modèle de Winkler et celui de Pasternak : un tassement uniforme du terrain est observé sous le bâti et aucun déplacement en dehors de la zone de chargement dans le cas de Winkler, alors qu'une continuité de déplacement du terrain sous et hors du bâti est bien notée dans le cas du modèle de Pasternak :

$$f_e = k_w(w_b + w_s) - k_p \nabla^2(w_b + w_s) \tag{III.20}$$

Avec : $\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$

Avec : k_p le module de réaction du sol [Pa/m].

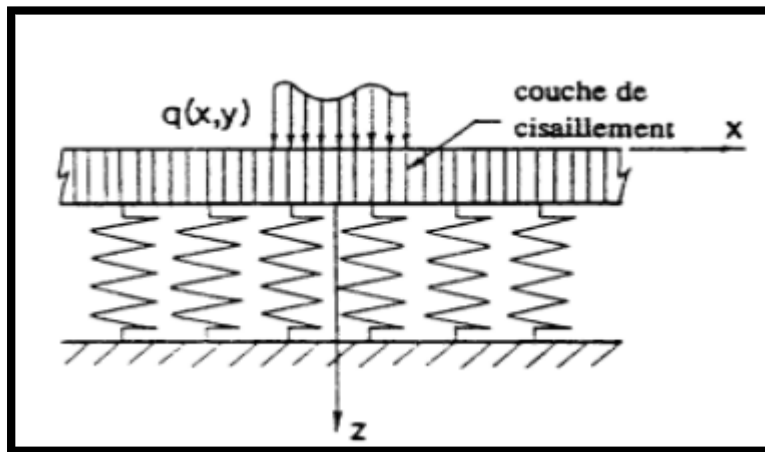


Figure. III. 2 : Modèle de Pasternak.

➤ **Model de Kerr**

Une couche de cisaillement est introduite dans la fondation Winkler et les constantes de ressort au-dessus et au-dessous de cette couche sont supposées être différentes selon cette formulation (Kerr 1964, Khemis 2018). Les formulations de Kerr sont présentées comme suit :

$$f_e - \left(\frac{K_s K_u}{K_l + K_u} \right) \nabla^2 f_e = \left(\frac{K_l K_u}{K_l + K_u} \right) w_0 - \left(\frac{K_s K_u}{K_l + K_u} \right) \nabla^2 w_0 \tag{III.21}$$

Tel que K_u, K_l et K_s sont les paramètres des ressorts supérieurs, inférieurs et la couche de cisaillement respectivement.

La Figure III.3: montre la représentation physique de ce modèle mécanique :

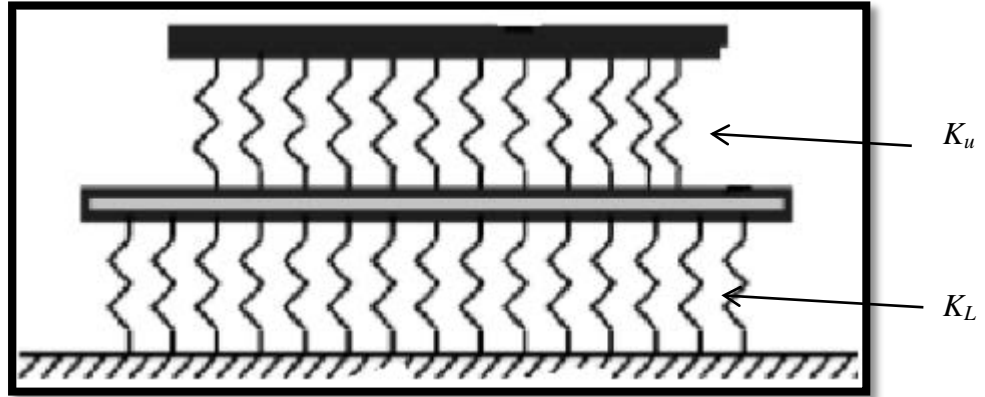


Figure. III. 3: Modèle de Kerr Gorbunov-Posadov(1949).

III.3.6 Les équations gouvernantes de la plaque

En utilisant les expressions de déplacement-déformation généralisées en remplaçant l'Eq.(III.16) et(III.18) dans l'Eq.(III.14), intégrant par parties et en recueillant des coefficients de δu_0 , δv_0 , δw_b et δw_s on obtient l'Eq.(III.22), peut être réécrite sous la forme :

$$\delta u_0 : \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (III.22a)$$

$$\delta v_0 : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} = 0 \quad (III.22b)$$

$$\delta w_b : \frac{\partial^2 M_{xx}^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial M_{yy}^b}{\partial y^2} + q + fe = 0 \quad (III.22c)$$

$$\delta w_s : \frac{\partial^2 M_{xx}^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial M_{yy}^s}{\partial y^2} + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q + fe = 0 \quad (III.22d)$$

En substituant l'Eq.(III.9a- III.9c), dans l'Eq.(III.12a), et les résultats subséquents en l'Eq.(III.17a-III.17c), les contraintes résultantes d'une plaque FGM peuvent être liées aux déformations totales :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ B & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon^0 \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix} \quad (III.23)$$

où A, B, D, B^S, D^S et H^S sont les rigidités de la plaque de FG données par:

$$(A, B, D, B^s, D^s, H^s) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2, f, zf, f^2)C(z)dz \quad (III.24)$$

De même, en utilisant l'Eq.(III.10a- III.10c), (III.12b) et (III.17d), les forces transversales de cisaillement peuvent être calculées à partir des équations constitutives comme suit :

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{55}^s & 0 \\ 0 & A_{44}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{yz}^0 \end{Bmatrix} \quad (III.25)$$

Ou bien sous une forme compacte en tant que:

$$Q = A^s \gamma^0 \quad (III.26)$$

Ou les rigidités de cisaillement A^s de la plaque FGM sont définies par :

$$A_{44}^s = A_{55}^s = \int_{-h/2}^{h/2} g^2(z) C_{44}(z) dz = \int_{-h/2}^{h/2} g^2(z) C_{55}(z) dz \quad (III.27)$$

En remplaçant l'Eq.(III.23)et(III.26) dans l'Eq.(III.22a- III.22d), les équations gouvernantes peuvent être exprimées en termes de déplacements (δu_0 , δv_0 , δw_b et δw_s) comme suit:

$$\begin{aligned} \delta u_0 : & A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - B_{11} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial y^2} \\ & - B_{11}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3} - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x \partial y^2} = 0 \end{aligned} \quad (III.28a)$$

$$\begin{aligned} \delta v_0 : & A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} - B_{22} \frac{\partial^3 w_b}{\partial y^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^2 \partial y} - B_{22}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial y^3} \\ & - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^2 \partial y} = 0 \end{aligned} \quad (III.28b)$$

$$\begin{aligned} \delta w_b : & B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} \\ & + B_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} - D_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - D_{22} \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} - 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} \\ & - D_{11}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - D_{22}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} + q + fe = 0 \end{aligned} \quad (III.28c)$$

$$\begin{aligned} \delta w_s : & B_{11}^s \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + B_{22}^s \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} \\ & - D_{11}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - D_{22}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} + A_{55}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + A_{44}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\ & - 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} - H_{11}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - H_{22}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} + q + fe = 0 \end{aligned} \quad (III.28d)$$

III.4 Solution analytique pour les plaques FG simplement appuyées

La solution de Navier est utilisé ici pour assurer les conditions aux limite simplement appuyées, les coefficients de déplacement sont présenté sous la forme de série de Fourier comme suit :

$$u_0(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn}^0 \cos(\lambda x) \sin(\mu y) \quad (\text{III.29a})$$

$$v_0(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{mn}^0 \sin(\lambda x) \cos(\mu y) \quad (\text{III.29b})$$

$$w_b(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{bmn}^0 \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \quad (\text{III.29c})$$

$$w_s(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{smn}^0 \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \quad (\text{III.29d})$$

La charge transversale q est également étendue dans la série sinus de Fourier comme suite :

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin \lambda x \sin \mu y \quad (\text{III.30})$$

avec $(u_{mn}^0, v_{mn}^0, w_{bmn}^0$ et $w_{smn}^0)$ sont les coefficients de déplacement maximum inconnu. et $\lambda = m\pi / a$ et $\mu = n\pi / b$ sont les pulsations, m et n sont les numéros des modes.

En remplaçant l'Eq.(III.29a- III.29d), et (III.30) dans l'Eq.(III.28a- III.28d). On obtient le système matriciel suivant :

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} & k_{34} \\ k_{14} & k_{24} & k_{34} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{mn}^0 \\ v_{mn}^0 \\ w_{bmn}^0 \\ w_{smn}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_{mn} \\ q_{mn} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.31})$$

Avec :

$$\begin{aligned} k_{11} &= A_{11}\lambda^2 + A_{66}\mu^2 \\ k_{12} &= (A_{12} + A_{66})\lambda\mu \\ k_{13} &= -B_{11}\lambda^3 - (B_{12} + 2B_{66})\lambda\mu^2 \\ k_{14} &= -B_{11}^s\lambda^3 - (B_{12}^s + 2B_{66}^s)\lambda\mu^2 \\ k_{22} &= A_{66}\lambda^2 + A_{22}\mu^2 \\ k_{23} &= -B_{22}\mu^3 - (B_{12} + 2B_{66})\lambda^2\mu \\ k_{24} &= -B_{22}^s\mu^3 - (B_{12}^s + 2B_{66}^s)\lambda^2\mu \\ k_{33} &= D_{11}\lambda^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\lambda^2\mu^2 + D_{22}\mu^4 \\ k_{34} &= D_{11}^s\lambda^4 + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)\lambda^2\mu^2 + D_{22}^s\mu^4 \\ k_{44} &= H_{11}^s\lambda^4 + 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s)\lambda^2\mu^2 + H_{22}^s\mu^4 + A_{55}^s\lambda^2 + A_{44}^s\mu^2 \end{aligned} \quad (\text{III.32})$$

III.5 Conclusion

Dans ce chapitre, le modèle analytique de l'analyse de la flexion statique des plaques FGM fonctionnellement graduées simplement appuyées reposant sur fondation élastique types Winkler-Pasternak et Kerr est présenté. La plaque est modélisée par une théorie de déformation de cisaillement raffinée combiné (hyperbolique-exponentielle) à quatre variables qui tient compte de l'effet de cisaillement transverse sans l'exigence des facteurs de correction de cisaillement. Les équations gouvernantes dans la plaque FG sont dérivées en utilisant le principe des travaux virtuels, et résolus par la méthode de Navier.

Les résultats présentés dans le chapitre suivant permettant d'apprécier clairement l'apport de cette théorie en les comparants avec ceux obtenus par les autres théories existantes dans la littérature.

Chapitre IV
Présentation et
discussions des
résultats

IV.1 Introduction

Dans ce chapitre, divers exemples numériques sont présentés de l’analyse de la flexion des plaques en matériaux à gradient de propriété simplement appuyées sur la fondation élastique en utilisant une nouvelle théorie déformation de cisaillement combiné (hyperbolique-exponentielle) à quatre variables. À des fins de vérification, les résultats obtenus sont comparés à ceux rapportés dans la littérature.

Nous avons effectué le calcul paramétrique sur les effets des rapports de géométrie et de dimension, l’indice matériel et autres paramètres sur le comportement de la flexion des plaques FG.

Tous les résultats présentés sont sous la forme adimensionnelle suivante :

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \frac{100E_c h^3}{q_0 a^4} u\left(0, \frac{b}{2}, z\right), \bar{w} = \frac{10E_c h^3}{q_0 a^4} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right), \\ \bar{\sigma}_x &= \frac{h}{q_0 a} \sigma_x\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z\right), \bar{\tau}_{xz} = \frac{h}{q_0 a} \tau_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, z\right), \bar{\tau}_{xy} = \frac{h}{q_0 a} \tau_{xy}(0, 0, z) \end{aligned} \tag{IV.1}$$

IV.2 Résultats numériques et discussions

IV.2. 1 Plaque simplement appuyées en FGM

Dans cette section, la plaque est considérée simplement appuyée avec des propriétés variables à travers l’épaisseur (voir figure IV.1).

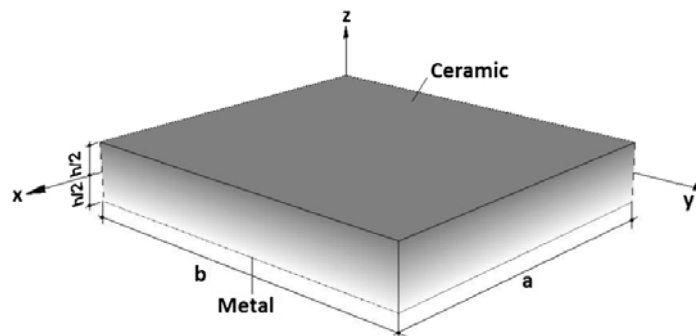


Figure. IV .1 : Géométrie d’une plaque FGM.

Les propriétés des matériaux utilisés sont résumées dans le tableau IV.1 :

Tableau IV.1: propriétés du céramique et métal.

Matériaux	Module de Young (GPa)	Coefficient de Poisson
Aluminum (Al)	70	0.3
céramique (Al ₂ O ₃)	380	0.3

Le tableau IV.2 présente des comparaisons des différents résultats des contraintes et de déplacements des plaques P-FG simplement appuyées sous un chargement sinusoïdal transversal en matériau à gradient de propriétés de type Al/Al₂O₃.

Tableau IV.2: Comparaison des contraintes et des déplacements non dimensionnelle des plaques carrées P-FG avec $a/h = 10$.

p	Théorie	\bar{u}	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\tau}_{xy}$	$\bar{\tau}_{xz}$
1	Quasi-3D Carrera et al (2008)	0.6436	0.5875	1.5062	0.6081	0.2510
	Quasi-3D Wu et Chiu (2011)	0.6436	0.5876	1.5061	0.6112	0.2511
	SSDT Zenkour (2006)	0.6626	0.5889	1.4894	0.6110	0.2622
	HSDT Mantari et al. (2012a)	0.6398	0.5880	1.4888	0.6109	0.2566
	TSDT Wu and Li (2010)	0.6414	0.5890	1.4898	0.6111	0.2599
	HSDT Thai and Kim (2013)	0.6414	0.5891	1.4898	0.6111	0.2608
	HSDT Nguyen (2014)	0.6401	0.5883	1.4892	0.6110	0.2552
	Présente	0,6409	0,5889	1,4897	0,6111	0,2612
2	Quasi-3D Carrera et al (2008)	0.9012	0.7570	1.4147	0.5421	0.2496
	Quasi-3D Wu et Chiu (2011)	0.9013	0.7571	1.4133	0.5436	0.2495
	SSDT Zenkour (2006)	0.9281	0.7573	1.3954	0.5441	0.2763
	HSDT Mantari et al. (2012a)	0.8957	0.7564	1.3940	0.5438	0.2741
	TSDT Wu and Li (2010)	0.8984	0.7573	1.3960	0.54420	0.2721
	HSDT Thai and Kim (2013)	0.8984	0.7573	1.3960	0.5442	0.2721
	HSDT Nguyen (2014)	0.8961	0.7567	1.3947	0.5439	0.2721
	Présente	0,8977	0,7573	1,3957	0,5441	0,2754
4	Quasi-3D Carrera et al (2008)	1.0541	0.8823	1.1985	0.5666	0.2362
	Quasi-3D Wu et Chiu (2011)	1.0541	0.8823	1.1841	0.5671	0.2362
	SSDT Zenkour (2006)	1.0941	0.8819	1.1783	0.5667	0.2580
	HSDT Mantari et al. (2012a)	1.0457	0.8814	1.1755	0.5662	0.2623
	TSDT Wu and Li (2010)	1.0502	0.8815	1.1794	0.5669	0.2519
	HSDT Thai and Kim (2013)	1.0502	0.8815	1.1794	0.5669	0.2537
	HSDT Nguyen (2014)	1.0466	0.8818	1.1766	0.5664	0.2593
	Présente	1,0491	0,8819	1,1786	0,5668	0,2574
8	Quasi-3D Carrera et al (2008)	1.0830	0.9739	0.9687	0.5879	0.2262
	Quasi-3D Wu et Chiu (2011)	1.0830	0.9739	0.9687	0.5879	0.2261
	SSDT Zenkour (2006)	1.1340	0.9750	0.9466	0.5856	0.2121
	HSDT Mantari et al. (2012a)	1.0709	0.9737	0.9431	0.5850	0.2140
	TSDT Wu and Li (2010)	1.0763	0.9747	0.9477	0.5858	0.2087
	HSDT Thai and Kim (2013)	1.0763	0.9746	0.9477	0.5858	0.2088
	HSDT Nguyen (2014)	1.0719	0.9744	0.9444	0.5852	0.2117
	Présente	1,0750	0,9749	0,9469	0,5857	0,2112

Les résultats obtenus sont comparés avec ceux trouvés dans les littératures en utilisant les différentes théories de déformation de cisaillement tel que les théories Quasi-3D (Carrera et al. 2008, Wu and Chiu 2011), les théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé HSSTs (Zenkour 2006, Wu and Li 2010, Mantari et al. 2012a, Thai and Kim 2013, Nguyen et al. 2014). à partir du tableau, une bonne concordance est confirmée entre les présentes résultats en utilisant la théorie de déformation de cisaillement hyperbolique raffiné et ceux de la littérature. Il est clair aussi que la déflexion " \bar{w} " est en relation de corrélation directe avec l'indice matériel " p ".

Les variations des contraintes ($\bar{\sigma}_x, \bar{\tau}_{xy}, \bar{\tau}_{xz}$) et le déplacement axial (\bar{u}) à travers l'épaisseur de la plaque P-FG en fonction de l'indice matériel p sont présentés dans les figures (IV-2)-(IV-5). à partir des graphes tracés, on peut conclure que l'indice matériel p a un rôle important sur la variation des valeurs des contraintes ($\bar{\sigma}_x, \bar{\tau}_{xy}, \bar{\tau}_{xz}$) et le déplacement axiale (\bar{u}).

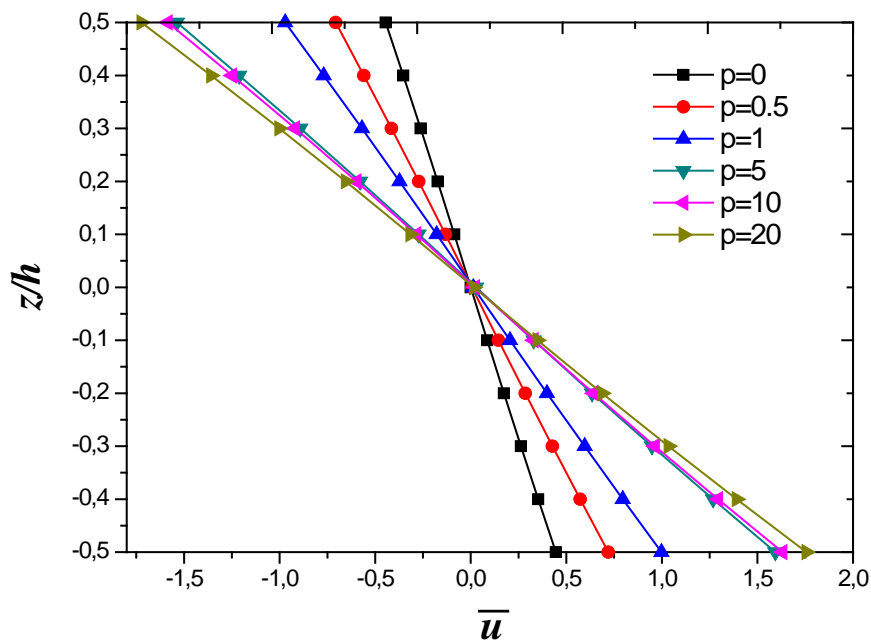


Figure. IV .2 : La variation du déplacement axiale \bar{u} à travers l'épaisseur de Al/Al_2O_3 (plaques carrées $a/h = 10$).

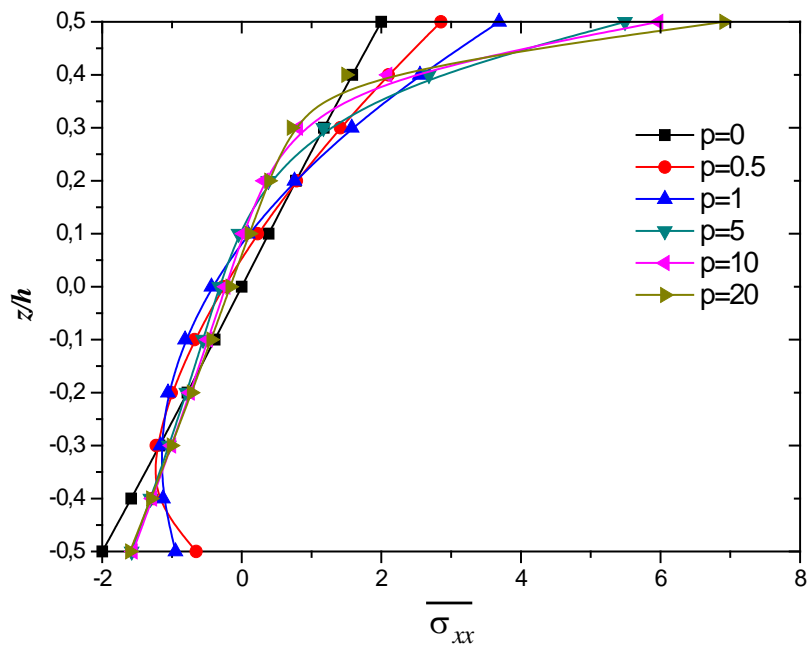


Figure. IV .3 : La variation de la contrainte axiale $\overline{\sigma_x}$ à travers l'épaisseur de Al/Al_2O_3 (plaques carrées $a / h = 10$).

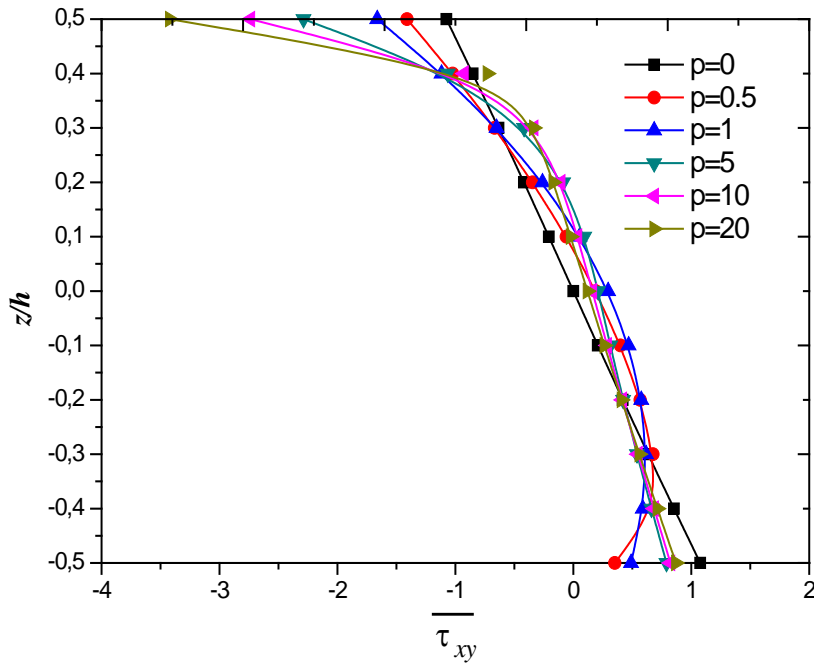


Figure. IV .4 : La variation de la contrainte plane $\overline{\tau_{xy}}$ à travers l'épaisseur de Al/Al_2O_3 (plaques carrées $a / h = 10$).

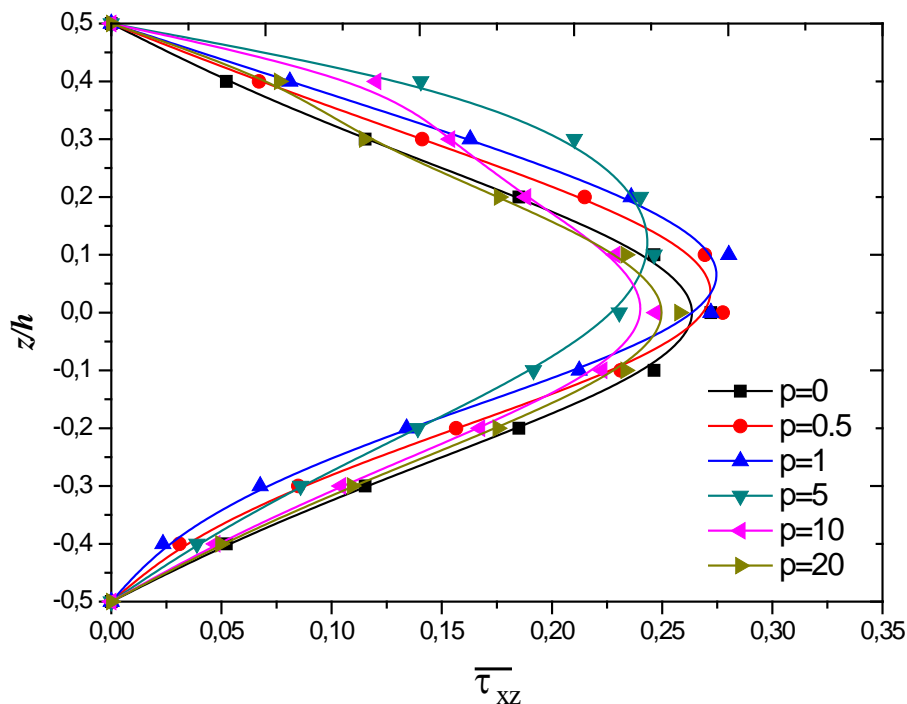


Figure. IV .5 : La variation la contrainte de cisaillement transverse $\bar{\tau}_{xz}$ à travers l'épaisseur de Al/Al₂O₃ (plaques carrées $a/h = 10$).

Le tableau IV.3 montre l'effet de l'indice matériel p sur la déflexion " \bar{w} " de la plaque E-FG simplement appuyées carrées AL/AL₂O₃ avec différents rapports a/h et b/a . Les résultats obtenus sont comparés avec ceux trouvés dans la littérature en utilisant les différentes théories de déformation de cisaillement tel que les théories Quasi-3D (Mantari and Soares 2012, Zenkour 2007) les théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé HSDTs (Mantari and al. 2012b, Thai and Kim 2013 et Nguyen 2014). A partir du tableau, une bonne concordance est confirmée entre les présents résultats en utilisant la théorie de déformation de cisaillement combiné et ceux de la littérature.

Il est clair aussi que la déflexion " \bar{w} " est en relation inverse avec l'indice matériel " p " et le rapport de géométrie " a/h ". On peut remarquer aussi que l'augmentation du rapport de dimension " b/a " conduit à une augmentation des valeurs de la déflexion adimensionnelle " \bar{w} ".

Tableau IV.3: Comparaison de la déflexion adimensionnelle (\bar{w}) des plaque carrée E-FGM (Al/Al_2O_3).

a/h	b/a	Théorie	indice de loi de puissance					
			0.1	0.3	0.5	0.7	1	1.5
2	1	3D Zenkour (2007)	0.5769	0.5247	0.4766	0.4324	0.3727	0.2890
		Quasi-3D Zenkour (2007)	0.5731	0.5181	0.4679	0.4222	0.3612	0.2771
		Quasi-3D Mantari et Soares (2012)	0.5776	0.5222	0.4716	0.4255	0.3640	0.2792
		HSDT Mantari et al. (2012b)	0.6363	0.5752	0.5195	0.4687	0.4018	0.3079
		HSDT Thai and Kim (2013)	0.6362	0.5751	0.5194	0.4687	0.4011	0.3079
		HSDT Nguyen (2014)	0.6211	0.5615	0.5073	0.4579	0.3921	0.3014
		Présente	0.6338	0.5730	0.5176	0.4671	0.3997	0.3070
	2	3D Zenkour (2007)	1.1944	1.0859	0.9864	0.8952	0.7727	0.6017
		Quasi-3D Zenkour (2007)	1.1880	1.0740	0.9701	0.8755	0.7494	0.5758
		Quasi-3D Mantari et Soares (2012)	1.1938	1.0790	0.9748	0.8797	0.7530	0.5785
		HSDT Mantari et al. (2012b)	1.2776	1.1553	1.0441	0.9431	0.8093	0.6238
		HSDT Thai and Kim (2013)	1.2775	1.1553	1.0441	0.9431	0.8086	0.6238
		HSDT Nguyen (2014)	1.2569	1.1367	1.0275	0.9284	0.7965	0.6153
		Présente	1.2747	1.1527	1.0418	0.9411	0.8070	0.6228
	3	3D Zenkour (2007)	1.4430	1.3116	1.1913	1.0812	0.9334	0.7275
		Quasi-3D Zenkour (2007)	1.4354	1.2977	1.1722	1.0580	0.9057	0.6962
		Quasi-3D Mantari et Soares (2012)	1.4419	1.3035	1.1774	1.0626	0.9096	0.6991
		HSDT Mantari et al. (2012b)	1.5341	1.3874	1.2540	1.1329	0.9725	0.7506
		HSDT Thai and Kim (2013)	1.5340	1.3873	1.2540	1.1329	0.9719	0.7506
		HSDT Nguyen (2014)	1.5115	1.3671	1.2360	1.1169	0.9587	0.7414
		Présente	1.530	1.3846	1.2516	1.1308	0.9702	0.7497
4	1	3D Zenkour (2007)	0.3490	0.3168	0.2875	0.2608	0.2253	0.1805
		Quasi-3D Zenkour (2007)	0.3475	0.3142	0.2839	0.2563	0.2196	0.1692
		Quasi-3D Mantari et Soares (2012)	0.3486	0.3152	0.2848	0.2571	0.2203	0.1697
		HSDT Mantari et al. (2012b)	0.3602	0.3259	0.2949	0.2668	0.2295	0.1785
		HSDT Thai and Kim (2013)	0.3602	0.3259	0.2949	0.2668	0.2295	0.1785
		HSDT Nguyen (2014)	0.3575	0.3235	0.2927	0.2649	0.2280	0.1775
		Présente	0.3599	0.3256	0.2946	0.2666	0.2294	0.1785
	2	3D Zenkour (2007)	0.8153	0.7395	0.6708	0.6085	0.5257	0.4120
		Quasi-3D Zenkour (2007)	0.8120	0.7343	0.6635	0.5992	0.5136	0.3962
		Quasi-3D Mantari et Soares (2012)	0.8145	0.7365	0.6655	0.6009	0.5151	0.3973
		HSDT Mantari et al. (2012b)	0.8325	0.7534	0.6819	0.6173	0.5319	0.4150
		HSDT Thai and Kim (2013)	0.8325	0.7534	0.6819	0.6173	0.5319	0.4150
		HSDT Nguyen (2014)	0.8285	0.7498	0.6787	0.6145	0.5296	0.4135
		Présente	0.8320	0.7530	0.6816	0.6171	0.5317	0.4150
	3	3D Zenkour (2007)	1.0134	0.9190	0.8335	0.7561	0.6533	0.5121
		Quasi-3D Zenkour (2007)	1.0094	0.9127	0.8248	0.7449	0.6385	0.4927
		Quasi-3D Mantari et Soares (2012)	1.0124	0.9155	0.8272	0.7470	0.6404	0.4941
		HSDT Mantari et al. (2012b)	1.0325	0.9345	0.8459	0.7659	0.6601	0.5154
		HSDT Thai and Kim (2013)	1.0325	0.9345	0.8459	0.7659	0.6601	0.5154
		HSDT Nguyen (2014)	1.0281	0.9305	0.8424	0.7628	0.6576	0.5137
		Présente	1.0321	0.9341	0.8456	0.7656	0.6599	0.5153

Tableau IV.4 présente les contraintes ($\overline{\sigma}_x, \overline{\tau}_{xy}, \overline{\tau}_{xz}$) et les déplacements ($\overline{u}, \overline{w}$) non-dimensionnelle des plaques carrées S-FGM symétrique avec $a/h=10$. A partir du tableau, on peut constater que les déplacements adimensionnels ($\overline{u}, \overline{w}$) diminue avec l'augmentation du paramètre p . par contre les contraintes ($\overline{\sigma}_x, \overline{\tau}_{xy}, \overline{\tau}_{xz}$) sont en relation de corrélation directe avec ce paramètre p .

Tableau IV.4: les contraintes et des déplacements non-dimensionnelle des plaques carrées S-FGM symétrique avec $a/h=10$

p	\overline{u}	\overline{w}	$\overline{\sigma}_x$	$\overline{\tau}_{xy}$	$\overline{\tau}_{xz}$
1	0,2893	0,3876	1,1578	0,649	0,2223
2	0,2573	0,3329	1,2414	0,7081	0,2383
4	0,2497	0,3098	1,2544	0,7317	0,2513

Dans Tableau IV.5 l'effet de l'indice matériel p les et les rapports a/h et b/a sur la déflexion " \overline{w} " de la plaque S-FGM symétrique carrée est présenté. A partir des résultats obtenues, on peut noter que la déflexion " \overline{w} " diminue avec l'augmentation du paramètre p et le rapport a/h . il est remarquable que les plus grandes valeurs de la déflexion " \overline{w} " soient obtenues pour un rapport $b/a=3$.

Tableau IV.5 : la déflexion adimensionnelle (\overline{w}) des plaque carrée S-FGM symétrique en fonction de l'indice matériel p et les rapports a/h et b/a .

a/h	b/a	indice de loi de puissance							
		0.1	0.3	0.5	0.7	1	1.5	0	5
2	1	2.5783	1.8729	1.5638	1.3832	1.2174	1.0636	3.6210	0.7984
	2	4.9936	3.5442	2.9429	2.6017	2.2952	2.0171	7.3017	1.5565
	3	5.9397	4.1883	3.4724	3.0694	2.7095	2.3852	8.7844	1.8551
4	1	1.3155	0.8901	0.7302	0.6447	0.5716	0.5088	2.0596	0.4151
	2	2.9655	1.9608	1.5991	1.4112	1.2542	1.1232	4.8130	0.9418
	3	3,6605	2,4073	1,9607	1,7299	1,5384	1,3798	5,9947	1,1643

La variation de déflexion \overline{w} des plaques S-FGM symétrique en fonction du rapport de géométrie a/h est illustrée dans la figure IV.6. À travers les courbes on peut confirmer encore une fois que la déflexion \overline{w} est en relation inverse avec le rapport a/h car la plaque devient mince. La présente théorie d'ordre élevé combiné donne presque les mêmes valeurs de la déflexion \overline{w} comme la théorie FSDT pour des rapports a/h élevé.

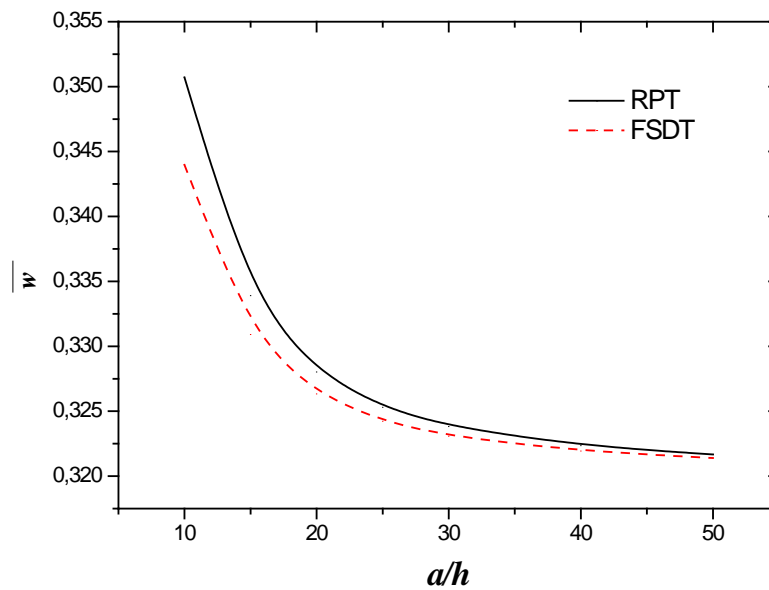


Figure. IV .6 : La variation de déflexion \bar{w} des plaques S-FGM symétrique en fonction du rapport de géométrie a/h avec ($p=1.5$).

L'effet de l'indice matériel p et le rapport de géométrie a/h sur la variation de déflexion \bar{w} des plaques S-FGM symétrique est présenté dans la figure IV.7. Il est clair à partir des résultats que la flèche \bar{w} est en relation inverse avec l'indice p et le rapport a/h .

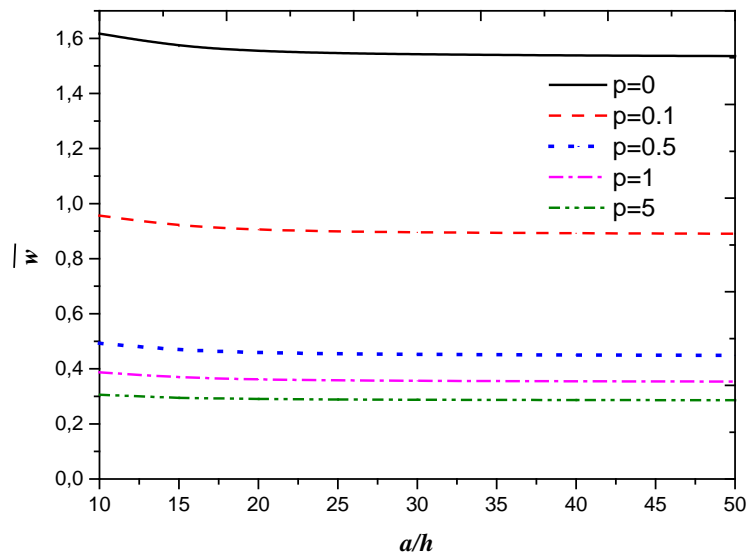


Figure. IV .7 : La variation de déflexion \bar{w} des plaques S-FGM symétrique en fonction du rapport de géométrie a/h et de l'indice p avec ($a=b$).

IV.2.2 Plaque simplement appuyées en FGM sur fondation élastique

Dans cette partie la plaque fonctionnellement graduée est considéré reposé sur une fondation élastique (figure IV.8).

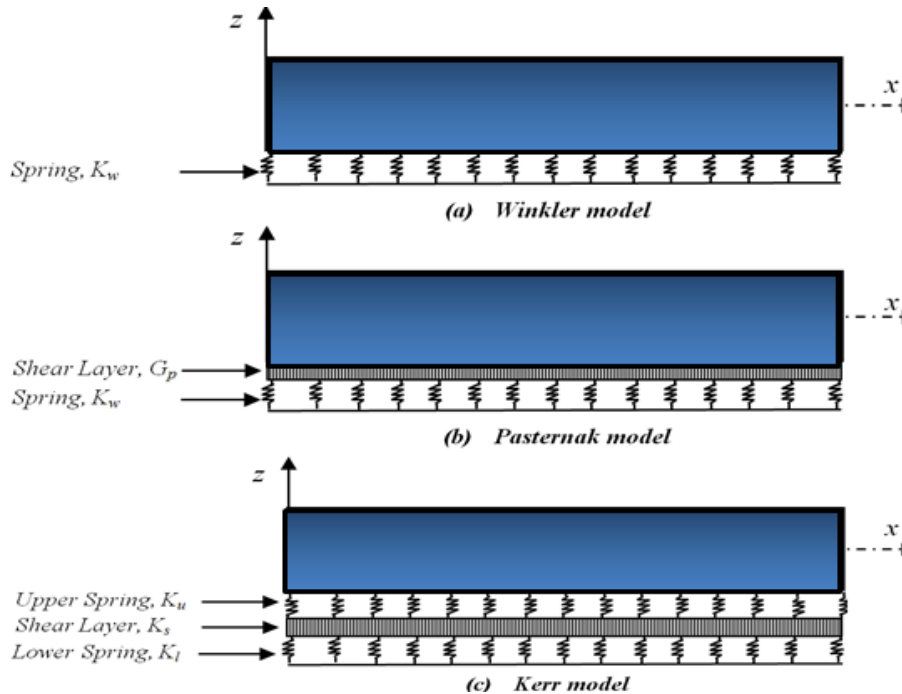


Figure. IV .8: Plaque FG reposé sur fondation élastique.

Le tableau IV.6 présente l’effet des paramètres de la fondation élastique type Winkler-Pasternak sur la déflexion adimensionnelle (\bar{w}) des plaque carrées S-FGM symétriques. A partir du tableau en peut clairement voir que la présence de la fondation élastique conduit à une réduction de la flèche adimensionnelle (\bar{w}) et cela est confirmé pour les différents valeurs de l’indice p et le rapport a/h .

Tableau IV.6 : la déflexion adimensionnelle (\bar{w}) des plaque carrée S-FGM symétrique en fonction des paramètres de la fondation élastique type Winkler-Pasternak

K_w	K_p	a/h	P				
			0	0,5	1	2	5
0	0	5	1.8703	0.6286	0.4929	0.4146	0.3685
		25	1.5460	0.4546	0.3580	0.3100	0.2887
100	0	5	1.4217	0.5684	0.4551	0.3875	0.3470
		25	1.2262	0.4222	0.3377	0.2946	0.2753
100	100	5	0.2479	0.1965	0.1809	0.1692	0.1610
		25	0.2412	0.1755	0.1589	0.1487	0.1436

Le tableau IV.7 présente l'effet des paramètres de la fondation élastique type Kerr sur la déflexion adimensionnelle (\bar{w}) des plaques carrées S-FGM symétriques. A partir du tableau il est remarquable flèche adimensionnelle (\bar{w}) diminue avec l'augmentation des paramètres (K_u et K_s) cela est due que la présence de la fondation élastique rend la plaque plus rigide.

Tableau IV.7 : la déflexion adimensionnelle (\bar{w}) des plaque carrée S-FGM symétrique en fonction des paramètres de la fondation élastique type Kerr.

Kl	a/h	Ku	Ks	P				
				0	0,5	1	2	5
100	5	100	0	1.6154	0.5970	0.4733	0.4006	0.3574
		100	100	0.3666	0.2643	0.2369	0.2172	0.2038
		200	100	0.2891	0.2215	0.2019	0.1874	0.1774
		200	200	0.1595	0.1365	0.1288	0.1227	0.1184
	25	100	0	1.3677	0.4378	0.3475	0.3021	0.2818
		100	100	0.0187	0.0182	0.0180	0.0178	0.0178
		200	100	0.0141	0.0138	0.0137	0.0136	0.0135
		200	200	0.0071	0.0070	0.0070	0.0069	0.0070

La figure IV.9 montre l'effet des paramètres de la fondation élastique type Winkler-Pasternak et le rapport a/h sur la déflexion adimensionnelle (\bar{w}) des plaques carrées E-FGM avec indice matériel $p=0.1$. A partir des courbe présenté on peut confirmer que de la flèche adimensionnelle (\bar{w}) diminue avec l'augmentation du rapport a/h . les plus grande valeurs de la flèche adimensionnelle (\bar{w}) est obtenus pour une plaque sans fondation élastique.

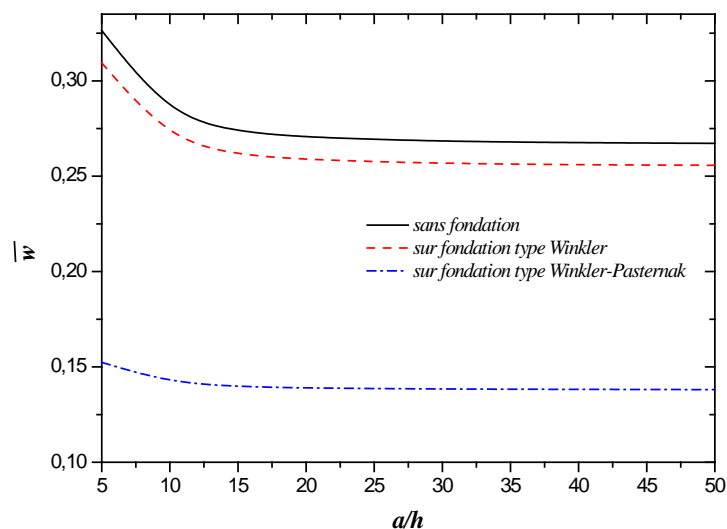


Figure. IV .9 : La variation de la déflexion adimensionnelle (\bar{w}) des plaque carrée E-FGM en fonction des paramètres de la fondation élastique type Winkler-Pasternak avec ($p=0.1$).

La figure IV.10 montre l'effet des paramètres de la fondation élastique type Kerr sur la déflexion adimensionnelle (\bar{w}) des plaques carrées E-FGM avec indice matériel $p=0.1$. A partir des graphes tracés on peut observer que les valeurs de la flèche adimensionnelle (\bar{w}) d'une plaque reposé sur une fondation élastique type Kerr est plus petite à ceux d'une plaque sans fondation élastique. Donc on peut confirmer une autre fois que la présence de la fondation élastique augmente rigidité de la plaque.

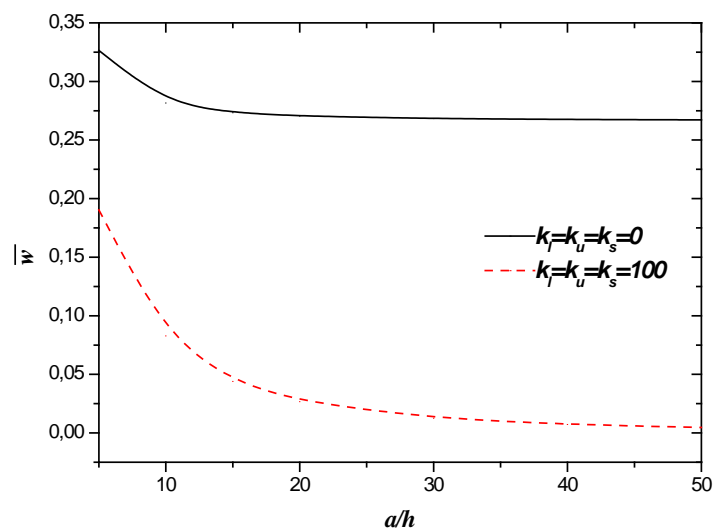


Figure. IV.10 : La variation de la déflexion adimensionnelle (\bar{w}) des plaque carrée E-FGM en fonction des paramètres de la fondation élastique type Kerr avec ($p=0.1$).

IV.3 Conclusion

En conclusion, divers résultats obtenus en l'analyse de la flexion plaque sans et avec fondation élastique à l'aide d'une nouvelle théorie déformation de cisaillement combiné (hyperbolique-exponentielle) à quatre variables.

D'après les résultats, on peut conclure que l'effet du rapport de dimension " b/a ", le rapport de géométrie " a/h " et l'indice matériel " p " ont un effet significativement sur les contraintes normales non dimensionnelles et les flèches non dimensionnelles de la plaque FG.

Conclusion générale

Conclusion générale

Les matériaux à gradient de propriétés représentent un domaine en évolution rapide en sciences et en ingénierie avec de nombreuses applications pratiques. Les besoins de recherche dans ce domaine sont particulièrement nombreux et variés, les FGM promettent des avantages potentiels importants qui justifient la nécessité des efforts importants.

Dans ce travail, nous avons présenté une simulation numérique afin de déterminer le comportement en flexion d'une plaque fonctionnellement graduée (FGM) simplement appuyée reposant sur une fondation élastique de type Winkler- Pasternak et de type Kerr sous un chargement mécanique.

À travers une synthèse bibliographique, nous avons décrit le comportement des matériaux composites et les matériaux fonctionnellement gradués (FGM). Cette revue débutera avec une exposition plutôt générale de la structure en matériau composites. Dans un deuxième temps, l'accent a été mis sur les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) telles que leur historique, les type de techniques de fabrication, les applications spécifiques des FGMs, les lois régissant la variation des propriétés matérielles des structures FGM et la loi de mélange. Ensuite une présentation de la cinématique générale des solides tel que le principe général d'équilibre, les équations d'équilibre et les conditions nécessaires pour qu'un système soit en équilibre et nous avons démontré les relations nécessaires d'une structure ainsi que les différentes théories des plaques. Un modèle analytique performant basé sur la théorie de déformation de cisaillement hyperbolique raffiné à quatre variables pour l'analyse de la flexion des plaques fonctionnellement graduées. Cette théorie identifiée la distribution parabolique des contraintes de cisaillement transversales à travers l'épaisseur de la plaque, et qui satisfait aux conditions aux limites des contraintes de cisaillement nulles sur les bords libres de la plaque sans utiliser les facteurs de correction de cisaillement. Les équations d'équilibre sont dérivées du principe des travaux virtuels. La méthode de Navier est utilisée pour obtenir les solutions analytiques exactes des structures composites avancées reposées sur une fondation élastique de type Winkler-Pasternak et Kerr.

Les résultats obtenus de cette étude sont validés et clairement discutés à travers une étude paramétrique qui nous a permis de dégager les points suivants:

- ❖ Parmi les différentes théories des plaques comme CPT, FSDT et HSDT, utilisées pour l'analyse des plaques FGM, FSDT et HSDT ont été largement utilisées.
- ❖ Dans la plupart des théories 2D seul l'effet de la déformation transversale de cisaillement a été considéré et beaucoup moins de théories trouvées dans lesquelles le cisaillement transversal et l'effet de la déformation normale transversale sont considérés. De nombreux chercheurs ont affirmé utiliser de théories 2D à la place de celles 3D pour économiser le temps de calcul et le coût, mais davantage de recherches devraient être effectuées pour rendre les résultats basés sur la théorie 2D avec une proximité étroite avec des résultats basés les théories 3D.
- ❖ Le grand potentiel des FGMs ne réside pas seulement dans le domaine du génie civil mais aussi largement accepté dans les applications de soins de santé. Les FGMs semblent être très prometteurs dans les applications dans le terrain médical comme la dentisterie, os artificiels, etc. Certains chercheurs ont besoin d'explorer davantage dans ce domaine pour en faire une réalisation révolutionnaire pour le bénéfice de la société.

D'après la comparaison de la nouvelle théorie avec d'autres modèles nous avons tiré les points suivants :

- ❖ La déflexion au centre de la plaque augmente lorsque le paramètre de matériau p augmente ou lorsque le rapport d'épaisseur a/h diminue
- ❖ les flèches et les contraintes diminuent progressivement à mesure que l'une des raideurs K_0 ou K_1 augmente. Les résultats numériques obtenus dans cette thèse constituent une référence pour les analyses des plaques sur des fondations élastiques à l'avenir.
- ❖ la flèche d'une plaque entièrement céramique est moins importante que celle d'une plaque entièrement métallique, ainsi les flèches augmentent quand l'indice matériel p augmenté. Donc la variation des propriétés matérielles de la plaque FGM joue un rôle important dans le comportement de ces plaques.

En conclusion, on peut dire que la théorie des plaques raffinées à quatre variables proposées est exacte, simple et même efficace pour la résolution du comportement des plaques en FGM, cette théorie est donc très utile pour la prédiction de la flexion des

structures composites sur fondation élastique.

Le travail présenté dans le cadre de ce mémoire de master peut être développé et enrichi. Nous envisageons, par exemple, en perspective, d'appliquer le présent modèle pour l'étude vibratoire des différentes formes de structures épaisses et modérément épaisses en matériau fonctionnellement gradué.

*Références
bibliographiques*

Références bibliographiques

- Abdizadeh (1997) Elaboration et caractérisation de composites duplex «composites laminaires tri-couches à base d'alumine». Thèse Docteur d'Etat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon et l'Université Claude Bernard Lyon I-France, 212p.
- Afaq et al(2003) Afaq. K.S : PhD thesis, Université Toulouse III – Paul Sabatier, (2003). Développement d'ONU nouveau modèle verser les structures composites multicouches et sandwichs Avec prix en Compte du cisaillement transversal et des Effets de bord.
- Ait Amar Meziane (2014) Ait Amar Meziane, M., Abdelaziz, H.H., Tounsi, A. (2014), “An efficient and simple refined theory for buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates under various boundary conditions“, *Journal of Sandwich Structures and Materials*, 16(3), 293 – 318.
- Ait Atmane (2010) H. Ait Atmane, A. Tounsi, I. Mechab, E.A. Adda Bedia, Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory. *Int. J. Mechs. Mat. Des.* 6 (2010) 113-121.
- Akavci (2010) Akavci, S. (2010), “Two new hyperbolic shear displacement models for orthotropic laminated composite plates”, *Mech. Compos. Mater.*, 46(2), 215–226.

- Ambartsumyan (1969) Ambartsumyan S.A., Theory of anisotropic plate., Tech Publishing Co, 1969.
- Attia (2015) « contribution à l'étude de la vibration libre des plaques FGM dans un champ thermique » thèses de doctorat université de DJILLALI LIABES SIDI BEL ABBES, Algérie.
- Aydogdu (2005) Metin Aydogdu, Vibration analysis of cross-ply laminated beams with general boundary conditions by Ritz method, International Journal of Mechanical Sciences 47 (2005)1740–1755.
- Bao (1995) Bao, G., Wang, L., "Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings", Int. J; Solids Structures; 32 (19): 2853–2871, (1995).
- Benammar (2017) « Etude de la vibration des plaques F G M » thèses de doctorat universite de Belhadj bouchaibe AIN TEMOUCHENT, Algérie.
- Benbakhti 2017). « Modélisation du comportement thermomécanique des plaques FGM (Functionally Graded Materials) » thèses de doctorat universite de ABDELHAMID IBN BADIS MOSTAGANEM, Algérie.
- Bishop(1993) A Bishop., C.Y. Lin., M. Navaratnam., R.D. Rawlings., H.B. McShane, A functionally gradient material produced by a powder metallurgical process, Journal of Materials Science Letters; 12 (19) :1516-18, (1993).
- Boch (1986) Boch, P., Chartier, T., Huttepain, M., "Tape casting of Al₂O₃/ZrO₂ laminated Composites, J. Am. Ceram". Soc; 69 (8):191 -192, (1986).

- Bouderba (2013) Bouderba, B, Houari, MSA, Tounsi, A. (2013), “Thermomechanical bending response of FGM thick plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations”, *Steel and Composite Structures*, 14(1), 85 – 104.
- Bourada (2012) Bourada M, Tounsi A, Houari MSA, Adda Bedia EA. (2012), “A new four-variable refined plate theory for thermal buckling analysis of functionally graded sandwich plates”, *Journal of Sandwich Structures and Materials*, 14, 5–33.
- Carrera et al. (2008) E. Carrera, S. Brischetto, A. Robaldo. Variable kinematic model for the analysis of functionally graded material plates. *AIAA Journal* 46 (2008) 194-203.
- Chung et Chi (2003) Chi . Shyang-ho., Chung Yen-Ling, Cracking in coating-substrate composites of multi-layered and sigmoid FGM coatings. *Engineering Fracture Mechanics*; 70 (10), 1227–1243, 2003.
- Chung et Chi (2006) Chi. Shyang-ho., Chung Yen-Ling, Cracking in coating substrate composites of multi-layered and sigmoid FGM coatings. *Engineering Fracture Mechanics*; 70 (10), 1227–1243, 2003.
- Chung et Chi, 2006a Shyang-Ho Chi, Yen-Ling Chung: «Mechanical Behavior of Functionally Graded Material Plates under Transverse Load», *International Journal of Solids and Structures*, Volume 43, Issue 13, Pages: 3657-3674, Part I: Analysis, June 2006.

- Chung et Chi, 2006b Chi, S. H., Chung, Y.L, Mechanical behaviour of functionally graded materials plates under transverse load – Part II: Numerical results, *Int. J;Solids Structures*; 43 (13): 3675 -3691, 2006.
- Delale et Erdogan (1983) F. Delale, F. Erdogan «The crack problem for a non homogeneous plane». *ASME Journal of Applied Mechanics* 50, 609 –614, 1983.
- Eyerer et al(2000) Eyerer P., Reinhardt H., "Ökologische Bilanzierung von Baustoffen und Gebäuden", Basel: Birkhäuser, 2000.
- Fekrar (2012) Fekrar, A., El Meiche, N., Bessaim, A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. (2012), "Buckling analysis of functionally graded hybrid composite plates using a new four variable refined plate theory", *Steel and Composite Structures* 13(1), 91 – 107.
- Gorbunov-Posadov(1949) Gorbunov-Pasadov M.I,(1949). Beams and slabs on elastic foundations. Mashstroizdat,Moscow.
- Groves (1997) J. F. Groves, and H. N. G. Wadley 1997 Functionally graded materials synthesis via low vacuum directed vapor deposition *Composites Parts B* 28B, (1997), 57 69.
- Grover (2013) Grover, N., Maiti, D.K., Singh, B.N. (2013), A new inverse hyperbolic shear deformation theory for static and buckling analysis of laminated composite and sandwich plates", *Compos. Struct.*, 95, 667–675.

- Heinz et al (2011) Heinz P., Herrmann M., Sobek W., "Herstellung sverfahren und Anwendungsbereiche für funktional gradierte Bauteile im Bauwesen", Abschlussbericht Forschungsinitiative Zukunft Bau (1/2011), Stuttgart, ILEK, 2011.
- Hildebrand et al(1949) Hildebrand, F. B., Reissner, E., Thomas, G. B., 1949. Notes on the theory of small displacements of orthotropic shells. NACA T. N. No. 1833.
- Kaddouri (2014) « Analyse des effets de l’amplitude et température sur le comportement non linéaire d’une plaque annulaire sectorielle à gradient fonctionnel» thèses de doctorat universite de Université Aboubekr Belkaid–Tlemcen,Algérie.
- Karama et al (2003) Karama, M., Afaq, K.S., Mistou, S., “Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity”, International Journal of Solids and Structures, 40(6), 1525–1546, (2003).
- Kerr (1964) Kerr AD., 1964. "Elastic and viscoelastic foundation models". J Appl Mech Trans ASME, Volume 31(4), pp. 491–8.
- Kettaf (2013) Kettaf, F.Z., Houari, M.S.A., Benguediab, M., Tounsi, A. (2013),“Thermal buckling of functionally graded sandwich plates using a new hyperbolic shear displacement model”, *Steel and Composite Structures*, 15(4), 399-423.

- Khemis (2018) « Etude de l'influence des incertitudes de l'interaction sol-structure sur le flambement des conduites flexibles enterrées dans un sol élastique » thèses de doctorat universite de BADJI MOKHTAR- ANNABA, Algérie.
- Kieback(2003) KIEBACK, B. NEUBRAND, A. RIEDEL, H., (2003). Processing techniques for functionally graded materials. *Materials Science and Engineering A* 362, 81–105.
- Koizumi (1992) M. Koizumi, Recent Progress of functionally graded materials in Japan. *Ceram. Eng. Sci. Proc*; 13 (7-8): 333-347, (1992).
- Koizumi (1996) Koizumi, M. (1996), FGM activities in Japanl, department of materials chemistry. Ryukoku University, Ohtsu, 520-21 Japan.
- Koizumi (1997) M. Koizumi, FGM activities in Japan. *Composites*; 28 (1-2): 1– 4. (1997).
- Levinson (1980) Levinson, M., "An accurate simple theory of the statics and dynamics of elastic plates", *Mechanics Research Communications*, (1980), 343-350.
- Lostec (1997) L. Lostec, Elaboration par coulage en bande et caractérisation microstructurale et mécanique de composite SiC/MAS-L, Thèse de l'université de Limoges, (1997).

- Mantari (2012) Mantari, J.L., Oktem, A.S., Guedes Soares, C. (2012), "A new trigonometric shear deformation theory for isotropic, laminated composite and sandwich plates", *Int. J. Solids Struct.*, 49(1), 43–53.
- Mantari et al. 2012a J.L. Mantari, C. Guedes Soares. Bending analysis of thick exponentially graded plates using a new trigonometric higher order shear deformation theory. *Compos. Struct.* 94 (2012) 1991-2000.
- Mantari and al. 2012b Mantari, J. L., Oktem, A. S., & Guedes Soares, C. (2012b). *Bending response of functionally graded plates by using a new higher order shear deformation theory. Composite Structures*, 94(2), 714–723.
- Mantari and Soares (2012) Mantari, J. L. Oktem, A. S. and Guedes Soares.C (2012). „ A new higher order shear deformation theory for sandwich and composite laminated plates.“““ Composites Part B: Engineering, 43:1489–1499, 2012.
- Mindlin (1951) R.D. Mindlin. "Influence of Rotary Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic Elastic Plates", *Journal of applied mechanics*, 18 31-38 (1951).
- Moya(1992) MOYA, J. S., SANCHEZ-HERENCIA, A. J., REQUENA, J. & MORENO, R., (1992). Functionally gradient ceramics by sequential slip casting materials letters.Vol. 14, p.333-35.
- Murthy (1981) Murthy. M.V.V: Rapport technique, NASA, (1981). Une théorie de déformation de cisaillement transversal amélioré pour plaque anisotrope laminé. transversal de stress continuité. *Int. J. Solids Structures*; 40 (6): 1525-1546, (2003).

- Naghdi (1957) On the theory of thin elastic shells. *Quarterly Appl.Math.* 14, 369-380.
- Nguyen (2007) T. K. Nguyen., K. Sab., G. Bonnet, Shear correction factors of functionally graded plates. *Mech. Advanced , Mater. Struct*; 14 (8): 567-575, (2007).
- Nguyen et al (2014) Nguyen, V.-H., Nguyen, T.-K., Thai, H.-T., & Vo, T. P. (2014). *A new inverse trigonometric shear deformation theory for isotropic and functionally graded sandwich plates. Composites Part B: Engineering*, 66, 233–246.
- Okamura (1991) H. Okamura, State of the arte of material design projects for severe service applications, *Mater. Sci. Eng :A*; 143 (1-2): 3-9, (1991).
- Ootao and Tanigawa (1999) Tanigawa, Y. O., Yoshinobu. (1999). *THREE-DIMENSIONAL TRANSIENT THERMAL STRESSES OF FUNCTIONALLY GRADED RECTANGULAR PLATE DUE TO PARTIAL HEATING. Journal of Thermal Stresses*, 22(1), 35–55.
- Panc (1975) Panc V. ,Theories of elastic plates,. Noordhoff, Leyden, Netherlands, 1975.
- Pasternak (1954) Pasternak p.l. (1954). on a new method of analysis of an elastic foundation by means of two foundation constants.gosudarstvennoe izdatelstro liberaturi postroitelstvui arkhitekture,
- Pradyumna and Bandyopadhyay (2008) Pradyumna, S., Bandyopadhyay, J.N. (2008), “Free vibration analysis of functionally graded curved panels using a higherorder finite element formulation”, *J. Sound Vib.*, 318(1–2), 176–192.

- Rayleigh (1877) Lord Rayleigh, "The theory of sound", The Macmillan Company (1877).
- Reddy (1984) Reddy, J.N., "A Simple Higher-Order Theory for Laminated Composite Plates", ASME Journal of Applied Mechanics, (1984), 745-752.
- Reddy (1997) J.N. Reddy, Mechanics of Laminated Composites Plates: Theory and Analysis. CRC Press, Boca Raton, (1997).
- Reddy (2000) Reddy, J.N. (2000), "Analysis of functionally graded plates", *Int.J. Numer. Methods Eng.*, 47(1-3), 663-684.
- Reddy and Cheng (2001) J.N. Reddy., Z.-Q. Cheng, Three-dimensional thermomechanical deformations of functionally graded rectangular plates, *Eur. J. Mech. A/Solids*; 20 (5) :841-855,2001.
- Ren (1986) Ren, J.G. (1986), "A new theory of laminated plate", *Compos. Sci. Technol.*, 26(3), 225-239.
- Reissner (1945) Reissner, E., "The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates", *Journal of Applied Mechanics-transactions of The ASME*, (1945), 69-77.
- Reissner-Mindlin (1951) Mindlin RD. Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates. *Transaction. ASME Journal of Applied Mechanics* 1951;18:31-8

- Said (2016) « Etude et analyse des plaques FGM en Génie Civil»
thèses de doctorat universite de UNIVERSITE
DJILLALI LIABES SIDI BEL ABBES, Algérie.
- Shahrjerdi (2011) Shahrjerdi, A., Mustapha, F., Bayat, M., Majid, D.L.A.
(2011), “Free vibration analysis of solar functionally
graded plates with temperature-dependent material
properties using second order shear deformation theory”,
Journal of Mechanical Science and Technology, 25 (9),
2195 – 2209.
- sobek et al. Sobek W., Herrmann M., Haase W., "Gradientenbetone.
Beton- und Stahlbetonbau", (zur Veröffentlichung
angenommen).
- Soldatos (1992) Soldatos, K.P. (1992), “A transverse shear deformation
theory for homogeneous monoclinic plates”, *Acta Mech.*,
94(3), 195–220.
- Touratier (1991) Touratier. M: Un efficace theoryl de plaque
standard. Engng Sci, vol. 29, no 8, pages 901-
916, (1991) .
- Takahashi (1990) M.ITOH. Y KASHIWAYA fabrication and evaluation
of w/cu gradient material by sintering and infiltration
technique , in proceeding of the first international
symposium on functionally gradient materials Japan
1990.
- Touratier (1991) M. Touratier. « An Efficient Standard Plate Theory ». *Engng Sci*, Volume 29, pages: 901-916, 1991.

- Thai and Kim (2013) Thai, H.-T., & Kim, S.-E. (2013). *A simple higher-order shear deformation theory for bending and free vibration analysis of functionally graded plates*. *Composite Structures*, 96, 165–173.
- Timoshenko (1921) Timoshenko, S., "On the correction of transverse shear deformation of the differential equations for transverse vibrations of prismatic bars", *Philosophical Magazine*, (1921), Vol.41 (series 46) p. 744-746.
- Vel and Batra(2002) S. S.Vel., R.C. Batra, Exact solution for thermoelastic deformations of functionally graded thick rectangular plates,*AIAA J*; 40 (7): 1421–1433, 2002.
- Vel and Batra (2003) Vel, S. S., & Batra, R. C. (2003). *Three-dimensional analysis of transient thermal stresses in functionally graded plates*. *International Journal of Solids and Structures*, 40(25), 7181–7196.
- Whitney (1973) Whitney, J.M. et sun, C.T., "A higher-order theory for extensional motion of laminated composites", *Journal of Sound and Vibration*, (1973), 85-97.
- Winkler (1867) Winkler, E. (1867) *Theory of Elasticity and Strength*, Dominicus, Prague, 1867.
- Wu and Chiu (2011) Wu, C.-P., & Chiu, K.-H. (2011). *RMVT-based meshless collocation and element-free Galerkin methods for the quasi-3D free vibration analysis of multilayered composite and FGM plates*. *Composite Structures*, 93(5), 1433–1448.

- Watremetz (2006) Benoît Watremetz (2006) Modèle thermomécanique 3D d'un matériau à gradient de propriétés à l'aide de techniques multigrilles : application aux moules d'injection de polymères. Soutenue en 2006 à Lyon, INSA , en partenariat avec LaMCoS - Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Solides, UMR5514 (Lyon, INSA) (laboratoire) .
- Wu and Li (2010) Wu, C.-P., & Li, H.-Y. (2010). *An RMVT-based third-order shear deformation theory of multilayered , functionally graded material plates. Composite Structures, 92(10), 2591–2605.*
- Xiang (2009) Xiang, S., Wang, K.M., Ai, Y.T., Sha, Y.D., Shi, H. (2009), “Analysis of isotropic, sandwich and laminated plates by a meshless method and various shear deformation theories”, *Compos. Struct.*, 91(1), 31–37.
- Yoshihisa (2004) Yoshihisa Uchida (2004), —Properties of functionally graded materials, Manufactured by Progressive Lamination Method for Applications, 39-51-B, Vol. 39-B.
- Yuki (1991) YUKI, M., MURAYAMA, T. & IRISAWA, T., (1991). Temperature gradient sintering of PSZ/MO functionally gradient material by laser beam heating. First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan, p.203.
- Yoshihisa (2004) Yoshihisa Uchida (2004), —Properties of functionally graded materials, Manufactured by Progressive Lamination Method for Applications, 39-51-B, Vol. 39-B.

- Yaghoobi (2013a) Yaghoobi, H., Torabi, M., (2013a), “Post-buckling and nonlinear free vibration analysis of geometrically imperfect functionally graded beams resting on nonlinear elastic foundation”, *Applied Mathematical Modelling*, 37, 8324-8340.
- Yaghoobi (2013b) Yaghoobi, H., Torabi, M., (2013b), “An analytical approach to large amplitude vibration and post-buckling of functionally graded beams rest on nonlinear elastic foundation”, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 51(1), 39-52.
- Yin(2004) Yin H.M., Sun L.Z., and Paulino G.H. (2004), « Micromechanics-based elastic model for functionally graded materials with particle interactions », *Acta Materialia*, 52,3535–3543.
- Zenkour (2006) Zenkour, AM. (2006), “Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates”, *Appl Math Model*, 30(1), 67–84.
- Zenkour (2007) Zenkour, A. M. (2006). *Benchmark trigonometric and 3-D elasticity solutions for an exponentially graded thick rectangular plate. Archive of Applied Mechanics*, 77(4), 197–214.
- Ziou (2017) « Contribution à la modélisation des structures en Matériaux à Gradient Fonctionnel » thèses de doctorat universite de Université Mohamed Khider – Biskra, Algérie.