



République Algérienne Démocratique et  
Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la  
Recherche Scientifique  
Centre Universitaire El-wancharissi de  
Tissemsilt



Institut de Sciences et de la Technologie  
Département de Sciences et de la Technologie

Mémoire de fin d'études pour l'obtention du diplôme

de Master académique en

Filière : Génie civil

Spécialité : Structures

Présenté par : - **Kaddouri Somia**

- **Djabali Samira**

*Thème*

---

## **Etude de la flexion des plaques stratifiées en matériaux composites sous différents types de chargement**

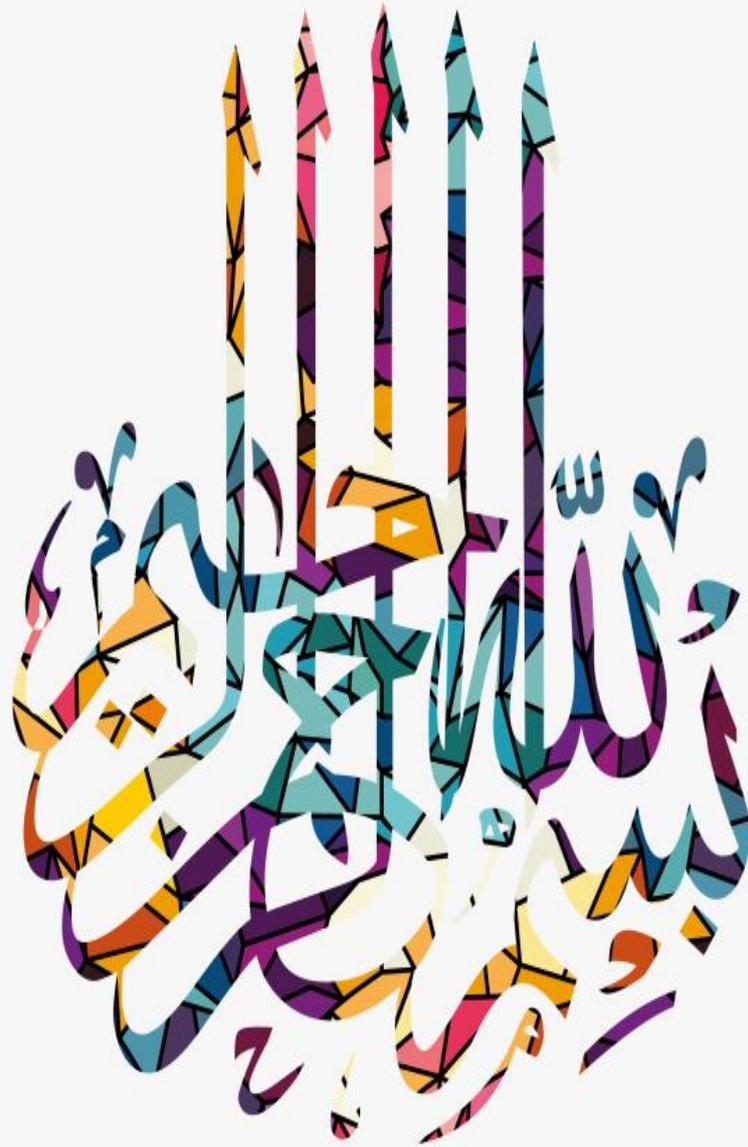
---

Soutenu le, .....

**Devant le Jury :**

ADIM Belkacem	Encadreur	M.C.B.	CU-Tissemsilt
TABET Mohamed	Examineur	M.C.B.	CU-Tissemsilt
ABDELHAMID Abdelmalek	Examineur	M.A.A.	CU-Tissemsilt

**Année universitaire : 2019-2020**



# dedicace

*Je dédie ce modeste travail : à mes parents aucun hommage ne pourrait être à la hauteur de l'amour dont ils ne cessent de me combler. Que dieu leur procure bonne santé et longue vie.*

*A mon binôme **Somia** et toute la famille **Kaddouri**, avec lequel j'ai pris beaucoup de plaisir à travailler, ma famille **Djabali** mes amis **amel fatiha hadja houda** et à tous ceux qui ont contribué de près et de loin pour que ce projet soit possible, je vous dis merci*

***Djabali Samira***

# dedicace

*A la lumière de mes jours, la source de mes efforts, la flamme de mon cœur ma vie et mon bonheur maman que j'adore.*

*A mon cher papa Qui m'a été d'un grand soutien autant matériel que moral et ma source d'affection de courage.*

*Je dédie également ce travail À Mon encadreur **Dr. Adim Belkacem** Et À tous mes enseignants durant mon cycle d'étude universitaire.*

*A mon partenaire de mémoire et mon amie **Samira** et toute la famille **Djabali** dont elle était très collaborateur dans notre projet et à tous mes amies **Amel, Houda, Silia, Khayrou** pour leur esprits positives qui m'encouragement.*

***Kaddouri Somia***

## *Remerciements*

Nous remercions ALLAH le tout puissant de nous avoir donné la santé et la volonté d'entamer et de terminer ce mémoire.

Tout d'abord, ce travail ne serait pas aussi riche et n'aurait pas pu voir le jour sans l'aide et l'encadrement de Dr **Adim Belkacem**, son expérience a joué un rôle important dans la conception de ce projet. On le remercie pour la qualité de son encadrement exceptionnel, pour sa patience, son rigueur et son disponibilité durant notre préparation de ce mémoire.

Nos remerciements s'adressent également à tous les membres de jury de notre mémoire et nos professeurs de génie civil de Tissemsilt, de leurs générosités et la grande patience dont ils ont su faire preuve malgré leurs charges académiques et professionnelles.

Merci à Dr Boudierba Bachir, Dr Bourada Fouad et Dr Bouzid Haytham pour leurs précieux conseils.

Nous remercions aussi nos chers amis, nous remercions toutes les personnes qui nous ont aidés ne serait-ce qu'avec un mot d'encouragement.

Merci à vous tous

## Résumé

La présente recherche consiste à analyser la flexion des plaques stratifiées antisymétriques en matériaux composites, en utilisant une nouvelle théorie raffinée d'ordre élevé avec une Fonction de cisaillement d'ordre N à quatre variables contre cinq variables dans les autres théories d'ordre élevé.

Parmi les avantages de cette nouvelle théorie : Elle prend en considération l'effet de cisaillement dans le calcul des déformations sans recours à des facteurs de correction de cisaillement et qui donne lieu à une variation parabolique des contraintes de cisaillement suivant l'épaisseur en satisfaisant les conditions de nullité de ces contraintes de cisaillement aux surfaces (supérieure et inférieure) de la plaque.

Les résultats numériques obtenus par la présente théorie de cisaillement d'ordre élevé prédit avec une précision des flèches adimensionnelles tout en les comparant avec les autres solutions des théories d'ordre élevé disponibles dans la littérature.

À la lumière des résultats obtenus nous pouvons dire que la présente théorie raffinée de cisaillement d'ordre élevé est précise et efficace pour étudier la flexion des plaques stratifiées antisymétriques en matériaux composites.

**Mots clés :** Matériaux composites, plaque stratifiée, flèche, théorie raffinée d'ordre élevé, Cisaillement transverse. Fonction de cisaillement d'ordre N.

## Abstract

The present research consists in analyzing the bending of antisymmetric laminated plates in composite materials, using a new refined high order theory with  $N^{\text{th}}$  order shear function that includes four variables against five in the other high order theories.

Among the advantages of this new theory: It takes into account the shear effect in the calculation of the strains without recourse to shear correction factors and which gives rise to a parabolic variation of the shear stresses along the thickness while satisfying the null condition of these shear stresses at the faces (upper and lower) of the plate.

The numerical results obtained by the present high order shear theory accurately predict dimensionless deflection while comparing them with other solutions of high order theories available in the literature.

In the light of the obtained results we can say that the present refined theory of high order shear stress is precise and efficient to study the bending of antisymmetric laminated composite plates.

**Keywords:** Composite materials, laminated plate, deflection, refined high order theory, Transverse shear.  $N^{\text{th}}$  order shear function.

## ملخص

يتكون البحث الحالي من تحليل انحناء الألواح المكدسة غير المتماثلة المصنوعة من المواد المركبة، باستخدام نظرية جديدة ذات الترتيب العالي باستخدام دالة من الدرجة نون مع أربع متغيرات مقابل خمس متغيرات في النظريات ذات الترتيب العالي الأخرى

من مزايا هذه النظرية الجديدة: أنها تأخذ في الاعتبار تأثير القص في حساب التشوهات دون اللجوء إلى عوامل تصحيح القص والتي تؤدي إلى إجهادات القص العرضي بشكل قطع مكافئ وفقاً للسمك مع استيفاء شروط انعدام إجهادات القص على الأسطح (العلوية والسفلية) من اللوحة

تتنبأ النتائج العددية التي تم الحصول عليها من خلال نظرية القص عالية الترتيب الحالية الانحناء بدقة أثناء مقارنتها بالحلول الأخرى للنظريات عالية الترتيب المتوفرة في الأدبيات

في ضوء النتائج التي تم الحصول عليها يمكننا القول إن النظرية المكررة الحالية للقص عالية الترتيب دقيقة وفعالة لدراسة انحناء الألواح المكدسة غير المتماثلة المصنوعة من المواد المركبة

**الكلمات المفتاحية:** المواد المركبة، الألواح المكدسة، الانحناء، نظرية مكررة ذات الترتيب العالي، القص العرضي، دالة القص من الدرجة نون.

## Table des matières

<i>Dédicaces</i> .....	I
<i>Dédicaces</i> .....	II
<i>Remerciements</i> .....	III
Résumé .....	IV
Abstract .....	V
ملخص .....	VI
Table des matières .....	VII
Liste des figures .....	XII
Liste des tableaux .....	XIV
Liste des notations .....	XVI
Introduction générale.....	1

### Chapitre I: Généralités sur les matériaux composites

I.1. Introduction.....	3
I.2. Constituants des matériaux composites .....	4
I.2.1. Les renforts.....	4
I.2.1.1. Fibres de verre.....	5
I.2.1.1.1.Fabrication des fibres de verre.....	7
I.2.1.1.2. Différents types de fibres de verre.....	7
I.2.1.2. Fibres de carbone .....	8
I.2.1.3. Fibres de kevlar (d'aramides) .....	9
I.2.1.4. Fibres céramiques .....	10
I.2.1.4.1. Caractéristiques mécaniques et utilisation .....	10
I.2.1.4.2. Fibres de Bore.....	11
I.2.1.5.Fibres de polyéthylène haute ténacité.....	12
I.2.1.6.Fibres naturelles .....	12
I.2.1.7. Fibre de silice (ou de quartz) .....	13
I.2.1.8. Les fibres de basalte .....	13
I.2.1.9. Fibres métalliques .....	13

I.2.2. La Matrice.....	15
I.2.2.1. Matrices organiques.....	16
I.2.2.1.1. Résines thermoplastiques .....	16
I.2.2.1.2. Résines thermodurcissables.....	17
I.2.2.2. Matrices minérales.....	20
I.2.2.2.1. Matrices métalliques .....	20
I.2.2.2.2. Matrices céramiques .....	20
I.2.3. Les charges et additifs .....	20
I.2.3.1. Les charges .....	20
I.2.3.1.1. Charges renforçantes .....	20
I.2.3.1.1.1. Charges sphériques .....	21
I.2.3.1.1.2. Charges non sphériques .....	22
I.2.3.1.2. Charges non renforçantes .....	22
I.2.3.1.2.1. Charges de faible coût.....	23
I.2.3.1.2.2. Charges ignifugeantes .....	23
I.2.3.1.2.3. Charges conductrices et antistatiques .....	24
I.2.3.2. Les additifs.....	24
I.2.3.2.1. Lubrifiants et agents de démoulage.....	24
I.2.3.2.2. Pigments et colorants.....	24
I.2.3.2.3. Agents anti-retrait et agents de fluage .....	25
I.2.3.2.4. Agents anti-ultraviolets .....	25
I.3. Classification des matériaux composites .....	25
I.3.1. Classification suivant la forme des constituants .....	25
I.3.1.1. Composites à fibres .....	25
I.3.1.2. Composites à particules .....	26
I.3.2. Classification suivant la nature des constituants .....	27
I.4. Les Procédées de fabrication.....	28
I.4.1. Les technologies dites en moule ouvert.....	30
I.4.1.1. Moulage au contact.....	30
I.4.1.2. Moulage par projection simultané .....	31
I.4.2. Les technologies dites en moule fermé .....	32
I.4.2.1. Moulage sous vide.....	32
I.4.2.2. Moulage par injection basse pression de résine (RTM) .....	32

I.4.2.3. Moulage à froid .....	33
I.4.2.4. Moulage par injection de compound BMC .....	34
I.4.2.5. Moulage par compression de mat pré imprégné SMC .....	34
I.4.2.6. Moulage par enroulement filamentaire.....	35
I.5. Architecture du composite .....	36
I.5.1. Les monocouches .....	36
I.5.2. Les stratifiées.....	36
I.5.2.1.Stratifiés à base de fils ou de tissus unidirectionnels.....	37
I.5.2.2. Structure générale d'un stratifié .....	41
I.5.2.3. Stratifiés hybrides.....	42
I.5.3. Les sandwichs .....	42
I.5.4. Autres architectures.....	44
I.5.4.1. Plastiques renforcés .....	45
I.5.4.2. Composites volumiques .....	45
I.6 Domaines d'application des composites .....	45
I.6.1. Construction aéronautique .....	45
I.6.2. Construction automobile .....	47
I.6.3. Secteur du bâtiment.....	47
I.6.4. Loisirs et sports.....	48
I.6.5. Autres domaines d'utilisation des composites .....	48
I.6.6. Voies d'un développement durable .....	49
I.6.7. L'innovation aux cœurs du développement.....	50
I.7. Avantages et inconvénients des composites .....	51
I.8. Conclusion .....	52

## **Chapitre II :Investigation sur les différentes théories des plaques**

II.1. Introduction .....	53
II.2. L'objectif de l'étude des plaques stratifiées en composites.....	53
II.3. Secteur d'utilisation des plaques.....	54
II.4. Loi de comportement.....	54
II.4.1. Loi de Hooke.....	55

II.4.2. Etat de contraintes et de déformations dans un solide .....	55
II.4.2.1. Tenseur des contraintes .....	55
II.4.2.2. Tenseur des déformations.....	55
II.4.2.3. Matrice de Rigidité .....	56
II.4.2.4. Matrice de Souplesse .....	56
II.5. Matériaux Anisotropes.....	56
II.6. Matériau Monoclinique .....	57
II.7. Matériau orthotrope .....	57
II.8. Matériau isotrope transverse.....	58
II.9. Théorie classique des plaques minces (CPT) ou Théorie de love-Kirchhoff .....	58
II.9.1. Les hypothèses cinématiques.....	59
II.9.2. Le champ de déplacement .....	59
II.10. Théorie de déformation et de cisaillement de premier ordre (First Order Shear Deformation Theory FSDT) .....	60
II.10.1. Le champ de déplacement .....	61
II.11. Théorie de déformation et de cisaillement d'ordre élevé (Higher Order Shear Deformation Theory HSDT).....	61
II.11.1. Le champ de déplacement .....	62
II.12. Théorie raffinée de déformation et de cisaillement d'ordre élevé (RSDT) .....	63
II.12.1. Hypothèses de base de (RSDT).....	63
II.12.2. Le champ de déplacement .....	63
II.13. Théorie de Zig-zag.....	64
II.14. Application de la théorie d'ordre élevé pour des structures composites .....	65
II.15. Conclusion .....	66
<b>Chapitre III :Etude de la flexion des plaques stratifiées en matériau composites sous différents types de chargement</b>	
III.1. Introduction .....	67
III.2. Cinématique .....	67
III.3. Le champ de déformation.....	67

III.4. Equations Constitutives .....	68
III.5. Equations gouvernantes.....	69
III.6. Solution analytique.....	73
III.6.1. Cas des composites stratifiées à plis croisés (0°/90°) (cross-ply).....	73
III.6.2. Cas des composites stratifiées à plis alternées et équilibrés .....	75
( $\theta/-\theta$ ) (angle-ply).....	75
III.7. Conclusion.....	77

### **Chapitre IV: validation et discussion des resultats**

IV.1. Introduction .....	78
IV.2. Conclusion .....	91
Conclusion générale et perspectives.....	92
Références bibliographiques .....	94

## Liste des figures

<b>Figure I.1.</b> Composition d'un matériau composite .....	4
<b>Figure I.2.</b> Diverses types de renforts .....	5
<b>Figure I.3.</b> Procédé d'étirage des fibres de verre. ....	7
<b>Figure I.4.</b> Différents types de fibres de verre.....	8
<b>Figure I.5.</b> Voie classique de la production des fibres de carbone .....	9
<b>Figure. I.6.</b> Différentes familles de matrice. ....	16
<b>Figure. I.7.</b> Les thermoplastiques .....	17
<b>Figure. I.8.</b> Les Thermodurcissables. ....	18
<b>Figure. I.9.</b> Principaux procédés de moulage. ....	28
<b>Figure I.10:</b> Différentes étapes de mise en forme par moulage fermé. ....	29
<b>Figure I.11.</b> Principe de moulage au contact. ....	30
<b>Figure. I.12.</b> Principe de moulage par projection simultanée. ....	31
<b>Figure I.13.</b> Moulage sous vide. ....	32
<b>Figure. I 14.</b> Principe de moulage par injection de résine. ....	33
<b>Figure I.15.</b> Principe de moulage à la presse à froid. ....	34
<b>Figure I.16.</b> Principe de moulage par compression. ....	35
<b>Figure I.17.</b> Enroulement filamentaire. ....	35
<b>Figure I.18.</b> Exemple du plan du drapage d'un composite stratifié. ....	36
<b>Figure I.19.</b> Structure d'un stratifié. ....	37
<b>Figure I.20.</b> Constitution d'un stratifié .....	37
<b>Figure I.21.</b> Désignation d'un stratifié.....	38
<b>Figure I.22.</b> Convention de signe pour la désignation des stratifiés .....	39
<b>Figure I.23.</b> Poutre sollicitée en flexion. ....	42
<b>Figure I.24.</b> Composite sandwich .....	42
<b>Figure. I.25.</b> Matériaux sandwiches à âmes pleines. ....	44

<b>Figure I.26.</b> Matériaux sandwiches à âmes creuses. ....	44
<b>Figure I.27.</b> Domaines d'application des matériaux composites .....	49
<b>Figure II.1.</b> Élément de plaque.....	53
<b>Figure II.2.</b> Les domaines d'applications.....	54
<b>Figure II.3.</b> Matériau composite unidirectionnel.....	58
<b>Figure II.4.</b> Schématisation des déformations dans le cas de théorie classique .....	59
<b>Figure II.5.</b> Schématisations de la déformation de la plaque dans le cas de FSDT de Reissner-Mindlin .....	60
<b>Figure II.6.</b> Illustration de la plaque d'ordre élevé .....	62
<b>Figure II.7.</b> Description de la déformation d'une plaque selon les théories classique (CLPT), premier ordre (FSDT) et d'ordre élevé (HSDT) .....	62
<b>Figure II.8.</b> Champ de déplacements du modèle zig-zag d'ordre élevé .....	65
<b>Figure IV.1.</b> Élément de stratifié.....	78
<b>Figure IV.2.</b> Effet de l'ordre de la fonction de cisaillement N sur la variation de la flèche adimensionnelle d'une plaque carrée stratifiée $(0^\circ/90^\circ)_4$ en matériaux composites sous charge sinusoïdale.....	84
<b>Figure IV.3.</b> Effet de l'ordre de la fonction de cisaillement N sur la variation de la flèche adimensionnelle d'une plaque carrée stratifiée $(0^\circ/90^\circ)_4$ en matériaux composites sous charge uniformément répartie .....	84
<b>Figure IV.4.</b> Effet de l'ordre de la fonction de cisaillement N sur la variation de la flèche adimensionnelle d'une plaque carrée stratifiée $(45^\circ/-45^\circ)_4$ en matériaux composites sous charge sinusoïdale.....	85
<b>Figure IV.5.</b> Effet de l'ordre de la fonction de cisaillement N sur la variation de la flèche adimensionnelle d'une plaque carrée stratifiée $(45^\circ/-45^\circ)_4$ en matériaux composites sous charge uniformément répartie .....	85
<b>Figure IV.6.</b> Variation de la flèche adimensionnelle d'une plaque carrée stratifiée $(0^\circ/90^\circ)_4$ en matériaux composites sous charge sinusoïdale et charge uniformément répartie .....	90
<b>Figure IV.7.</b> Effet de l'ordre N=5 sur la variation de la flèche adimensionnelle d'une plaque carrée stratifiée $(45^\circ/-45^\circ)_n$ en matériaux composites sous charge sinusoïdale et charge répartie .....	90

## Liste des tableaux

<b>Tableau I.1.</b> Différents types de verres filables .....	6
<b>Tableau I.2.</b> Caractéristiques mécaniques des fibres de verre. ....	6
<b>Tableau I.3.</b> Caractéristiques mécaniques des fibres de bore, bore-carbure de bore et carbure de silicium .....	11
<b>Tableau I.4.</b> Présentation commerciale des différentes fibres .....	14
<b>Tableau I.5.</b> Caractéristiques moyennes des fibres de renfort .....	15
<b>Tableau I.6.</b> Caractéristiques moyennes des matrices thermodurcissables (TD) non renforcées. [5]..	19
<b>Tableau I.7.</b> Les critères de choix des types de résine. ....	19
<b>Tableau II.1.</b> Exemple de forme des fonctions .....	64
<b>Tableau IV.1.</b> Effet du rapport coté sur l'épaisseur $a/h$ sur la variation de la flèche adimensionnelle $\bar{w}$ d'une plaque carrée et rectangulaire stratifiée $(45^\circ/-45^\circ)_1$ en matériaux composites sous chargement sinusoïdale.....	79
<b>Tableau IV.2.</b> Effet du rapport coté sur l'épaisseur $a/h$ sur la variation de la flèche adimensionnelle $\bar{w}$ et d'une plaque carrée stratifiée $(0^\circ/90^\circ)_1$ en matériaux composites sous charge sinusoïdal.....	80
<b>Tableau IV.3.</b> Effet de l'ordre de la fonction de cisaillement $N$ sur la variation de la flèche adimensionnelle d'une plaque carrée stratifiée $(0^\circ/90^\circ)_n$ en matériaux composites sous charge sinusoïdale.....	81
<b>Tableau IV.4.</b> Effet de l'ordre de la fonction de cisaillement $N$ sur la variation de la flèche adimensionnelle d'une plaque carrée stratifiée $(0^\circ/90^\circ)_n$ en matériaux composites sous charge uniformément répartie.....	82
<b>Tableau IV.5.</b> Effet de l'ordre de la fonction de cisaillement $N$ sur la variation de la flèche adimensionnelle d'une plaque carrée stratifiée $(45^\circ/-45^\circ)_n$ en matériaux composites sous charge sinusoïdale.....	82
<b>Tableau IV.6.</b> Effet de l'ordre de la fonction de cisaillement $N$ sur la variation de la flèche adimensionnelle d'une plaque carrée stratifiée $(45^\circ/-45^\circ)_n$ en matériaux composites sous charge uniformément répartie.....	83
<b>Tableau IV.7.</b> Effet du rapport d'aspect $a/b$ et d'angle d'orientation sur la variation de la flèche adimensionnelle $\bar{w}$ d'une plaque carrée stratifiée en matériaux composites sous charge sinusoïdale...	86
<b>Tableau IV.8.</b> Effet du rapport d'aspect $a/b$ et d'angle d'orientation sur la variation de la flèche adimensionnelle $\bar{w}$ d'une plaque carrée stratifiée en matériaux composites sous charge uniformément répartie.....	87
<b>Tableau IV.9.</b> Effet du rapport d'aspect $a/h$ et d'angle d'orientation sur la variation de la flèche adimensionnelle $\bar{w}$ d'une plaque carrée stratifiée en matériaux composites sous charge sinusoïdale...	88

**Tableau IV.10.** Effet du rapport d'aspect  $a/h$  et d'angle d'orientation sur la variation de la flèche adimensionnelle  $\bar{w}$  d'une plaque carrée stratifiée en matériaux composites sous charge uniformément répartie..... 89

---

**Liste des notations**

$a$	Longueur de la plaque
$b$	Largeur de la plaque
$h$	L'épaisseur de la plaque
$E$	Module de Young
$E_{11}$	Module de Young longitudinal
$E_{22}$	Module de Young transversal
$G_{12}; G_{13}; G_{23}$	Module de cisaillement
$\nu$	Coefficient de Poisson
$E_C$	Module d'élasticité du composite.
$E_f$	Module d'élasticité des fibres.
$E_m$	Module d'élasticité de la matrice
$G$	Module de cisaillement transverse
$u, v, w$	Les déplacements suivant les directions $x, y$ et $z$ .
$u_0; v_0$	Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque
$f(z)$	Fonction de cisaillement transverse
$\Psi(z)$	Est une fonction dérivée de cisaillement transverse caractérisant les théories correspondantes.
$\sigma_x; \sigma_y; \sigma_z$	Contraintes normales suivant les directions $x, y$ et $z$
$\tau_{xy}; \tau_{yz}; \tau_{xz}$	Contraintes de cisaillement

$\varepsilon_x; \varepsilon_y$	Déformations dans les directions x et y
$\gamma_{xy}; \gamma_{yz}; \gamma_{xz}$	Déformations de distorsion
$\delta u_0; \delta v_0; \delta w_b; \delta w_s$	Champ virtuel de déplacement
$w_b$	Composante de la flèche due à la flexion
$w_s$	Composante de la flèche due au cisaillement
$N_x; N_y; N_{xy}$	Efforts normaux de membrane
$M_x^b; M_y^b; M_{xy}^b$	Moments de flexion pure
$M_x^s; M_y^s; M_{xy}^s$	Moments de flexion supplémentaire due au cisaillement transverse
$K_x^b$	Courbure de flexion suivant x
$K_x^s$	Courbure de cisaillement suivant x
$K_y^b$	Courbure de flexion suivant y
$K_y^s$	Courbure de cisaillement suivant y
$K_{xy}^b$	Courbure de flexion suivant x, y
$K_{xy}^s$	Courbure de cisaillement suivant x, y
$S_{yz}^s; S_{xz}^s$	Effort de cisaillement pur
n, m	Nombres de modes,
$A_{ij}$	Termes de rigidité en membrane de la plaque
$B_{ij}$	Termes de rigidité de couplage de la plaque
$D_{ij}$	Termes de rigidité de flexion de la plaque

$A_{ij}^s; B_{ij}^s; D_{ij}^s; H_{ij}^s$	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
$Q_{ij}$	Les coefficients de rigidité
$\bar{Q}_{ij}$	Les coefficients de rigidité en fonction de l'orientation des fibres
$Q_{mn}$	Le coefficient de la charge
$a/b$	Rapport géométrique de la plaque

*Introduction*  
*générale*

## Introduction générale

Le développement des matériaux composites est né de la volonté d'allier les qualités techniques au besoin d'allégement dans un même matériau, qui par la suite doit s'adapter aux solutions technologiques des problèmes à résoudre.

Un matériau composite résulte de l'association de deux matériaux différents. Les deux constituants du composite sont la matrice et le renfort, qui en se combinant donnent un matériau hétérogène souvent anisotrope, c'est-à-dire que les propriétés diffèrent suivant les directions.

Les matériaux composites stratifiés sont des matériaux à hautes performances mécaniques, façonnables à volonté au gré du concepteur et donc doué d'un potentiel approprié. Les plaques en composites stratifiées se développent aujourd'hui dans pratiquement tous les domaines et sont à l'origine de formidables challenges dans diverses réalisations de haute technologie. De plus en plus utilisés dans la conception et la fabrication de pièces mécaniques pour les structures aéronautiques, aérospatiales, maritime, et construction.... grâce à leurs excellentes propriétés mécaniques, sont soumis à des sollicitations mécanique et/ou thermique sévères.

Cependant, les stratifiés sont particulièrement sensibles aux chargements, comme les impacts à basse vitesse, qui peuvent créer des dommages internes invisibles à l'œil nu (délaminage, rupture de matrice et de fibres). Beaucoup de travaux de recherche ont été dédiés à l'amélioration des propriétés des composites.

L'objectif de ce mémoire est de proposer une nouvelle théorie basée sur une approche analytique simple et efficace pour l'étude et l'analyse de la flexion vis-à-vis aux différents types de chargements mécaniques des plaques rectangulaires stratifiées antisymétriques en matériaux composites. Pour cela, le manuscrit s'articule sur quatre chapitres :

Dans le premier chapitre on définit d'une manière générale le concept des matériaux composites. Plus de détail, nous définissant les constituants (renfort, matrice, charges t additifs) ainsi que les différents procédés de fabrication et leurs intérêts à travers les secteurs de l'industrie moderne en définissant ses avantages et inconvénients.

Dans le deuxième chapitre une étude bibliographique concernant les différentes théories des plaques est présentée. Une synthèse bibliographique sur les différents modèles de théories des plaques qui inclut ou non le cisaillement transverse, en suite, une comparaison entre la théorie classique et les théories d'ordre élevé est présentée.

Au troisième chapitre une étude analytique de la flexion des plaques stratifiées en matériaux composites en utilisant une nouvelle théorie raffinée d'ordre élevé à quatre variables avec une fonction de cisaillement d'ordre  $N$ . Basant sur cette théorie d'ordre élevé on présente la formulation mathématique qui nous aide à résoudre le problème posé : champ du déplacement, les déformations, les équations constitutives, ces derniers sont obtenus en utilisant le principe des travaux virtuels, d'où, les flèches adimensionnelles sont obtenues par la solution de Navier.

Afin de valider notre théorie présentée dans le troisième chapitre cité précédemment, des études comparatives sont largement détaillées dans le quatrième chapitre ensuite une étude paramétrique a été présentée pour déterminer les différents facteurs qui influents sur la flexion des plaques stratifiées en composites. Où Les résultats sont obtenus en utilisant le programme Maple classique, ce dernier est un logiciel qui aide à la résolution des problèmes mathématiques grâce à des fonctions permettant de résoudre des équations typiques (dérivées, intégrales...etc.).

Enfin, ce mémoire par une conclusion générale et perspectives qui porte les résultats tirés de l'étude de la présente théorie et permet de souligner son efficacité pour l'analyse du comportement des plaques stratifiées en matériaux composites.

*Chapitre I :*  
*Généralités sur les matériaux*  
*composites*

## I.1. Introduction

Il existe différentes familles des matériaux : les métaux, les plastiques, les composites etc...les matériaux composites ne sont pas une nouveauté, ils ont tous temps utilisé par l'homme. Citons par exemple le bois, le béton et le béton armé.

Un matériau composite est constitué de l'assemblage de deux matériaux de natures différentes, se complétant et permettant d'aboutir à un matériau dont l'ensemble des performances est supérieur à celui des composants pris séparément. Les matériaux composites disposent d'éventualités importantes par rapport aux matériaux traditionnels. Ils possèdent de nombreux avantages fonctionnels :

- ✓ légèreté
- ✓ résistance mécanique et chimique
- ✓ maintenance réduite
- ✓ liberté de forme.
- ✓ Une bonne isolation électrique.
- ✓ Leur faible taux d'utilisation vient de leur coût.

On distingue deux types de composites: les composites de grande diffusion et les composites à haute performance.

### a) Grande diffusion

Les matériaux composites à grande diffusion offrent des avantages essentiel, qui sont : optimisation des coûts par diminution des prix de revient, sa composition de polyester avec des fibres de verre longues ou courtes (sous forme de mat ou tissu) et la simplicité du principe d'élaboration des matériaux (moulage par contact, SMC et injection).

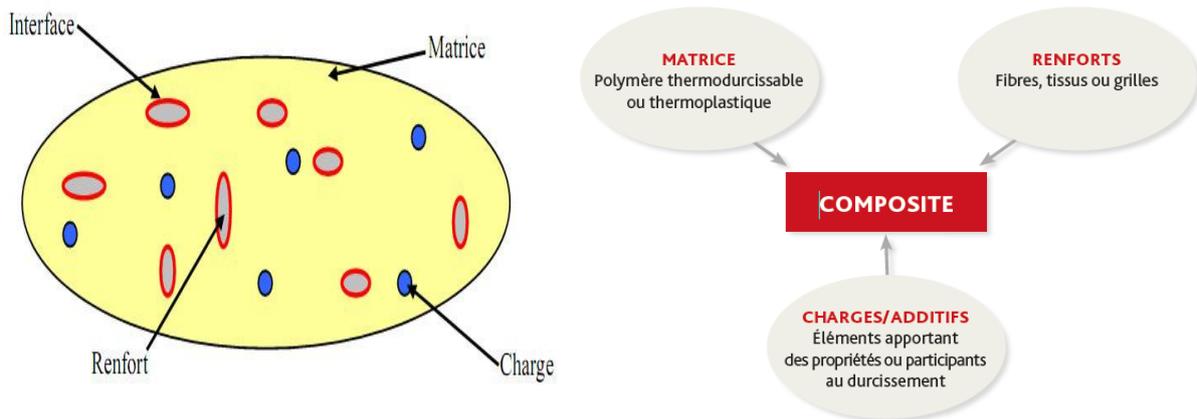
### b) Hautes performances

Les matériaux composites à hautes performances sont utilisés dans le domaine d'aéronautique où le besoin d'une grande performance déduite des hautes valeurs ajoutées. Les renforts sont plutôt des fibres longues. Le taux de renfort est supérieur à 50%.

## I.2. Constituants des matériaux composites

Un matériau composite est constitué de trois éléments principaux :

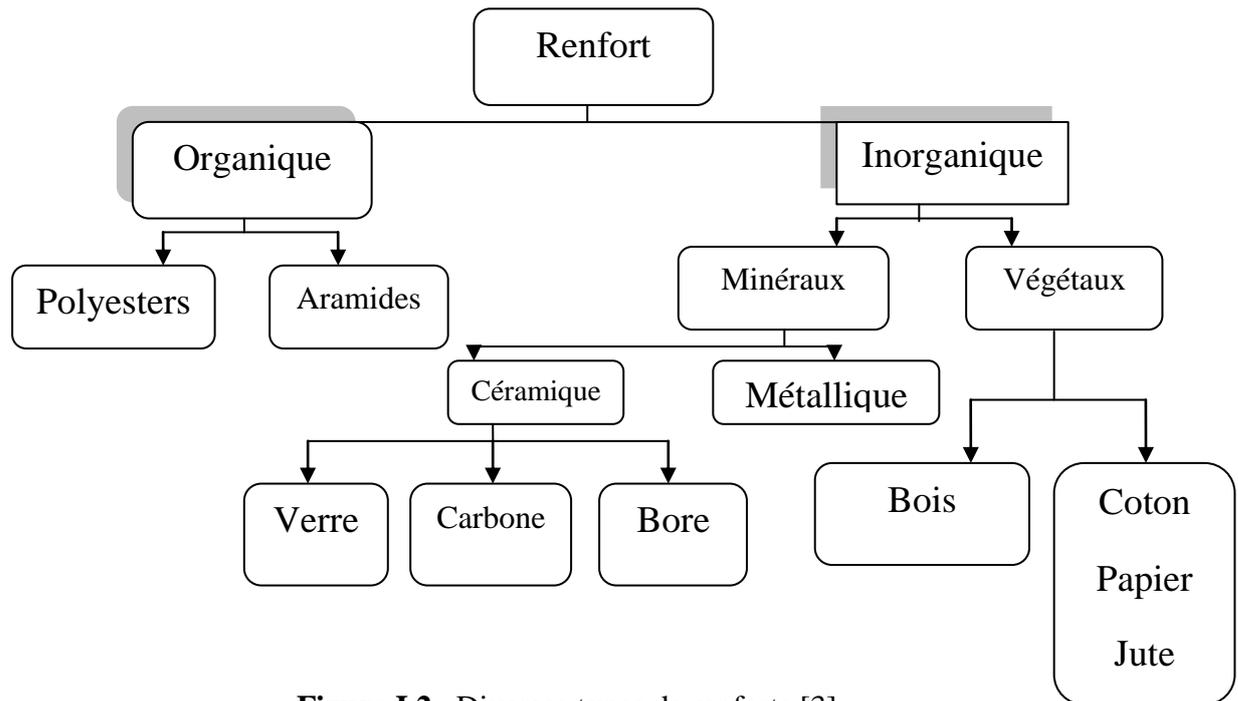
- ✓ Une matrice, généralement une résine thermoplastique (polyamide, PEEK, PEI) ou thermodurcissable (vinylester, polyester, époxyde), qui va servir de liant et va permettre de répartir les contraintes.
- ✓ de fibres minérales ou organiques qui confèrent au matériau l'essentiel de ses propriétés mécaniques. Ces fibres sont coupées (quelques millimètres à quelques décimètres) ou continues et peuvent être de nature minérale (verre, basalte), synthétique organique (carbone, aramide) ou biosourcée (lin, chanvre).
- ✓ d'additifs afin de modifier certaines caractéristiques du matériau (coloration, surface propriétés rhéologiques, etc.)



**Figure I.1.** Composition d'un matériau composite [1] [2]

### I.2.1. Les renforts

C'est le principal porteur constitutif dans le composite (forme, volume). Il confère aux composites leurs caractéristiques mécaniques : rigidité, résistance à la rupture, dureté. Les renforts peuvent être d'origine minérale (verre, bore, céramique...) ou organique (carbone ou aramide). Les plus employées sont les fibres de verre. Les fibres de carbone sont privilégiées. [3]



**Figure I.2.** Diverses types de renforts [3]

### I.2.1.1. Fibres de verre

Le verre sous forme massive est caractérisé par une très grande fragilité, attribuée à une sensibilité élevée à la fissuration. Par contre, élaboré sous forme de fibres de faibles diamètres (quelques dizaines de micromètres), le verre perd ce caractère et possède alors de bonnes caractéristiques mécaniques. Les fibres de verre sont élaborées à partir d'un verre filable, appelé verre textile, composé de silice, alumine, chaux, magnésie, etc. Ces produits peu coûteux, associés à des procédés assez simples d'élaboration, confèrent aux fibres de verre un excellent rapport performances/prix, qui les place de loin au premier rang des renforts utilisés actuellement dans les matériaux composites.

Suivant leurs compositions, différents types de verres filables peuvent être obtenus (voir tableau I.1). Dans la pratique, les verres de type E constituent presque la totalité du tonnage de verre textile produit actuellement. Les autres verres, représentant globalement une faible quantité (environ 1 %), sont réservés à des applications spécifiques :

- ✓ le verre D, à hautes propriétés diélectriques, pour la construction de Matériel électronique de télécommunications, en particulier les radomes;

- ✓ le verre C, résistant aux agents chimiques pour les couches superficielles des structures particulièrement exposées sur le plan chimique;
- ✓ les verres R et S, à caractéristiques mécaniques élevées pour la réalisation De structures à hautes performances mécaniques [4]

**Tableau I.1.** Différents types de verres filables [4]

Type	Caractéristiques générales
E	à usage général : bonnes propriétés électriques
D	hautes propriétés diélectriques
A	haute teneur en alcali
C	bonne résistance chimique
R, S	haute résistance mécanique

Nous ne considérerons par la suite que les fibres de verre de type E et de type R, Il est à noter la très faible proportion ou l'absence d'oxydes alcalins à la différence des verres d'usage courant. Ce fait conduit à des températures de transformation élevées, avec des conséquences techniques et économiques. [4]

Les caractéristiques mécaniques des fibres de verre décrites ci-dessus sont résumées dans le Tableau I.2 :

**Tableau I.2.** Caractéristiques mécaniques des fibres de verre. [3]

Caractéristiques	Type E	Type D	Type C	Type R	Type S
Contrainte à la rupture (Mpa)	3500	2450	2800	4650	
Module d'Young (Gpa)	73.5	52.5	70	86.5	86.5
Allongement à la rupture (%)	4.5	4 .5	4	3.5	3.5

### I.2.1.1.1. Fabrication des fibres de verre

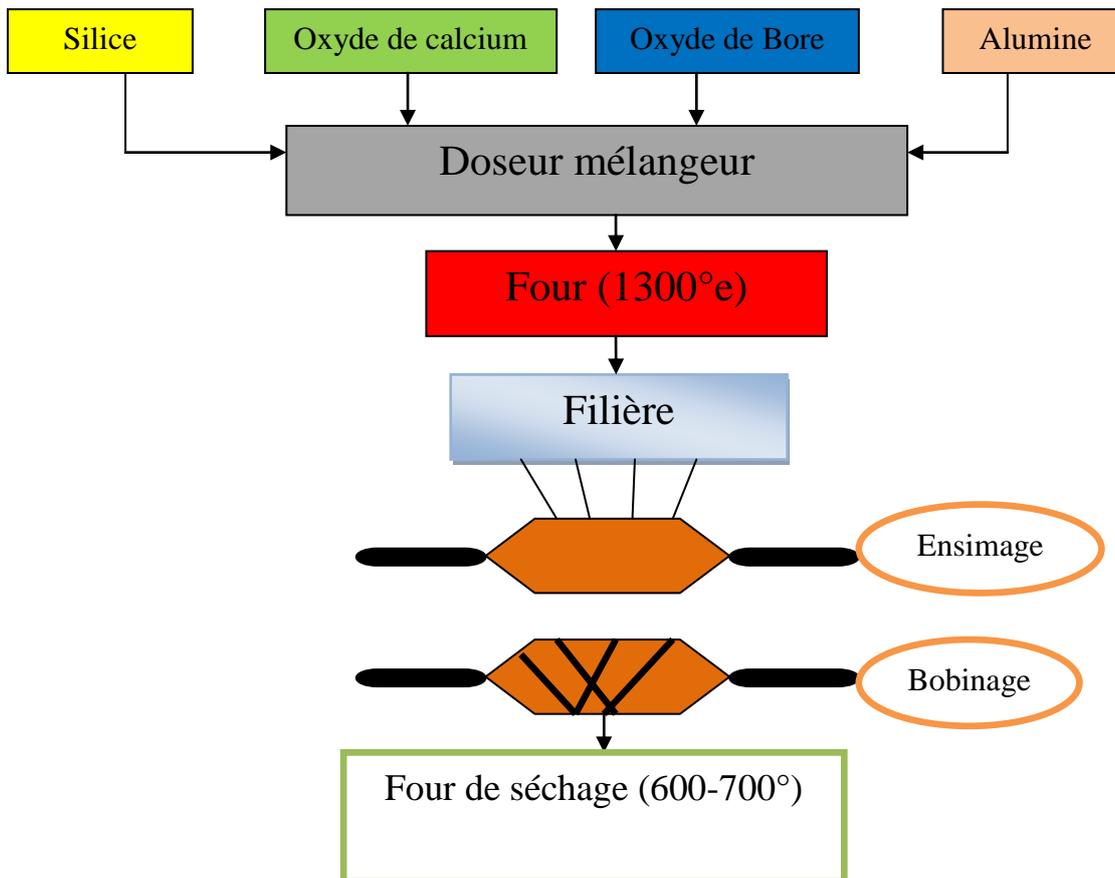


Figure I.3. Procédé d'étrirage des fibres de verre. [3]

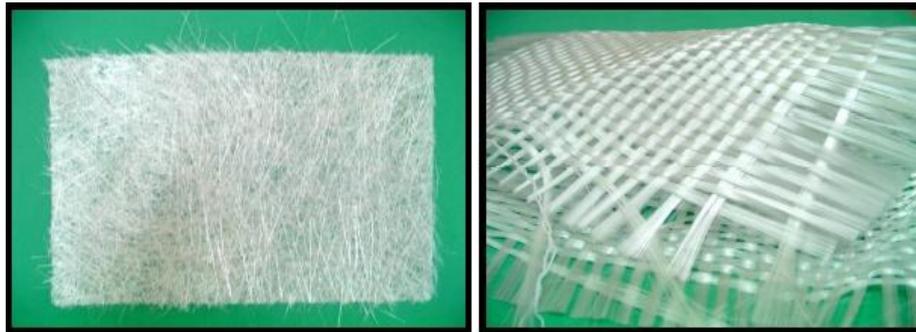
### I.2.1.1.2. Différents types de fibres de verre

Les renforts fibres se présentent sous diverses formes commerciales :

- ✓ Sous forme de roving (fils, mèches, etc. ...): le roving est un assemblage de fils de bases parallèles groupés sans torsion.
- ✓ Sous forme de tissus (tissus taffetas, toiles, serge, etc. ...): le tissu est formé par l'entrecroisement perpendiculaire des roving. Les tissus de roving peuvent peser jusqu'à 800 g/m<sup>2</sup>.
- ✓ Sous forme de mat (à fil coupé, à fil continu): le mat est un matelas de fils coupés ou continu à ensimage plastique, agglomérés par un liant à solubilité rapide ou lente dans la résine.



a – Roving de verre



c – Mat de verre

b – Tissu de verre

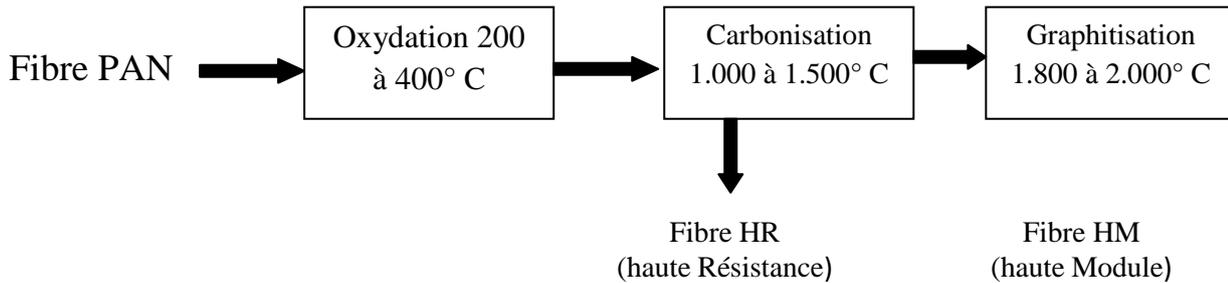
**Figure I.4.** Différents types de fibres de verre

### I.2.1.2. Fibres de carbone

Le carbone est le sixième du tableau des éléments périodiques. Des fibres de carbone de très hautes performances ont été produites dans les années soixante, quelques années après la fabrication des premières fibres de bore. Les fibres de carbone ont été rapidement acceptées comme renforcement et adoptées au lieu des fibres de bore pour la plupart des applications, surtout pour les composites à matrice organique. Les fibres de carbone peuvent avoir presque les mêmes propriétés spécifiques que celles des fibres de bore, mais sont moins chères et plus fines.

- a) La production actuelle de fibres de carbone destinées aux renforts de composites s'établit à 3.000 tonnes/an. Elles sont principalement utilisées pour les composites « Hautes Performances » en aéronautique, en construction industrielle et dans les sports et loisirs. La production de fibres de carbone repose sur la maîtrise de la production des fibres acryliques, précurseurs traditionnels des fibres de carbone, de formule générique.  $(\text{CH}_2\text{-CHCN})_n\text{-}(\text{CH}_2\text{-CXY})_n'$  (acrylonitrile + comonomère) par la voie classique du solvant, dite ex-Pan (Figure I.5). On opère par carbonisation de la fibre

de polyacrylonitrile (PAN) sous atmosphère neutre d'azote dans des fours à pyrolyse de façon à ne conserver que la chaîne carbonée. La technologie développée par Sumitomo (Dialead), dite ex-Bray, fondée sur la distillation du pétrole, donne des fibres de qualité variable ; elle a connu un développement rapide. En dehors des secteurs de l'aéronautique, des sports et loisirs, les fibres de carbone ont largement été utilisées dans les composites «Hautes performances». [5]



**Figure I.5.** Voie classique de la production des fibres de carbone [5]

### I.2.1.3. Fibres de kevlar (d'aramides)

La fibre aramide est obtenue à partir des polyamides aromatiques (ou polyaramide) par synthèse chimique à basse température ; ses propriétés diffèrent de celles des polyamides aliphatiques classiques (type PA 6-6, dit « Nylon ») ; on la nomme souvent « Kevlar », qui est la marque de son créateur Dupont de Nemours. Les composites renforcés de fibres d'aramide offrent une bonne stabilité en température (Jusqu'à 200°C en fonction de la matrice) mais souffrent :

- ✓ D'une adhérence moyenne entre matrice et fibres,
- ✓ D'un prix encore trop élevé : le prix de base est encore de l'ordre de 40 \$/kg et de 160 \$/kg pour la nouvelle fibre Zylon (PBO).

La production mondiale de fibres d'aramide atteint 40.000 tonnes/an, dont seulement 4.000 tonnes sont utilisées dans les composites.

Malgré leur résistance mécanique en traction, elles résistent mal en compression et dans le sens normal à l'axe de la fibre. De ce fait, elles sont noyées dans une matrice où sont mélangées d'autres fibres pour améliorer la tenue au choc d'une structure composite. [5]

#### **I.2.1.4. Fibres céramiques**

Diverses fibres de matériaux réfractaires ou céramiques (carbures, borures, nitrures, etc.) peuvent être élaborées par dépôt chimique en phase vapeur sur un fil support. Actuellement, les fibres obtenues par ce procédé, et faisant l'objet d'une production, sont :

- les fibres de bore (B).
- les fibres de bore (B)-carbure de bore (B<sub>4</sub>C).
- les fibres de carbure de silicium (SiC).
- les fibres de bore-carbure de silicium, appelées BorSiC.

Les fibres sont en réalité de gros filaments (diamètre de l'ordre de 100  $\mu\text{m}$ ), formés d'une âme (le fil support) en tungstène ou en carbone d'un diamètre d'environ 10  $\mu\text{m}$ , recouverts :

- d'une couche de bore d'épaisseur environ 40  $\mu\text{m}$  (fibres de bore).
- d'une couche de bore d'épaisseur 40  $\mu\text{m}$  et d'une couche de carbure de bore de 4  $\mu\text{m}$  d'épaisseur (fibres B-B<sub>4</sub>C).
- d'une couche de carbure de silicium (fibres SiC).
- d'une couche de bore et d'une couche de carbure de silicium (fibres BorSiC). [4]

##### **I.2.1.4.1. Caractéristiques mécaniques et utilisation**

Les caractéristiques mécaniques des diverses fibres sont assez voisines (par exemple, Tableau (I-3) Ces caractéristiques sont maintenues jusqu'à des températures pouvant aller de 500 à 1000 °C.

Du fait d'un prix de revient élevé, l'utilisation de ces fibres est limitée. Actuellement, les fibres SiC et BorSiC sont essentiellement utilisées avec des matrices métalliques (aluminium, par exemple) ou des matrices céramiques, conduisant à des matériaux composites de coûts très élevés, utilisés pour les aubes de compresseur, les turbines, etc

**Tableau I.3.** Caractéristiques mécaniques des fibres de bore, bore-carbure de bore et carbure de silicium [4]

Caractéristiques	Bore	Bore + B4C	SiC
Masse volumique $\sigma$ (kg/m <sup>3</sup> )	2 600	2 600	3 000
Diamètre ( $\mu\text{m}$ )	100–150	100–150	100–150
Module d'Young $E_f$ (GPa)	430	430	410
Module spécifique $E_f / \rho$ (MNm/kg)	165	165	140
Contrainte à la rupture $\sigma_{fu}$ (MPa)	3 800	4 000	3 900
Contraint spécifique $\sigma_{fu} / \rho$ (kNm/kg)	1 460	1 540	1 300

Les fibres de bore et les fibres bore-carbure de silicium sont disponibles sous forme :

- de fils continus constitués de monofilaments parallèles.
- de rubans préimprégnés pour enroulement filamentaire.
- de tissus unidirectionnels.

Ces fibres associées avec des résines époxydes, avec lesquelles l'adhérence est très bonne, ou avec d'autres résines thermoplastiques ou thermodurcissables, sont utilisées dans les domaines des sports et des loisirs. [4]

#### I.2.1.4.2. Fibres de Bore

Elles peuvent être noyées sans difficulté dans des matrices métalliques et également organiques. Pourtant leur fabrication ne se fait pas facilement.

Le bore est dur, fragile, rigide et ne peut pas être étiré. Par conséquent la fabrication des fibres de bore se fait par dépôt en phase vapeur du bore sur un filament de tungstène. Les fibres de bore possèdent des propriétés élevées en traction mais il faut également noter leurs bonnes propriétés en compression. [5]

### **I.2.1.5.Fibres de polyéthylène haute ténacité**

Fibres de polyéthylène haute ténacité présentent les avantages suivants :

- ✓ Légèreté ( $d = 0,95$  à comparer à celle de l'aramide  $d = 1,44$ ) ;
- ✓ Haute capacité de conversion de l'énergie cinétique (par exemple celle d'un projectile) en énergie thermique.

Les composites à fibres de polyéthylène restent encore marginaux, malgré leur utilisation dans le domaine de la balistique et du blindage (gilets pare-balles de Arès, plaques de blindage, casques ONU). Leur champ d'application est limité par leurs principales faiblesses :

- ✓ Mauvaise résistance à la température (fluage dès  $90^{\circ}\text{C}$  ; l'aramide ne se dégrade qu'à  $400^{\circ}\text{C}$ ) ; Le fluage c'est une déformation lente du matériau quand on lui applique une charge permanente.
- ✓ Mauvaise adhérence entre les fibres et la matrice. La production mondiale de fibres de polyéthylène haute ténacité représente 2.000 à 3.000 tonnes/an, dont moins de 200 tonnes sont utilisées dans les composites, Les principales marques sont : Dyneema de DSM (Pays Bas), Spectra aux Etats Unis. [5]

### **I.2.1.6.Fibres naturelles**

Pourront constituer une alternative intéressante aux fibres de verre en raison de leur plus grande facilité de recyclage lorsque leurs propriétés physiques seront mieux appréhendées. Les industriels (Sommer) et certains CRITT (tels Appollor) développent des composites avec des fibres naturelles (lin, chanvre, mais également sisal) qui apparaissent plus écologiques que les fibres de verre, en particulier plus facilement recyclables car elles peuvent être brûlées.

En outre :

- ✓ Leurs propriétés mécaniques pourraient atteindre celles des fibres de verre (module de Young).
- ✓ La fibre se travaille très facilement avec les technologies du textile (tissage). Les fibres naturelles présentent plusieurs verrous techniques majeurs pour une utilisation massive dans les matériaux composites.

- ✓ Elles ne sont pas fabriquées par un processus industriel et la reproductibilité de leurs caractéristiques physiques ne peut donc pas être parfaitement maîtrisée.
- ✓ La quantité et la qualité dépendent de l'environnement et de l'humidité (de 8 ou 10% du taux d'humidité).
- ✓ Leurs caractéristiques mécaniques (résistance à la traction) moyennes ont engendré plusieurs échecs dans les projets d'intégration des composites à fibres naturelles dans l'automobile [5]

### **I.2.1.7. Fibre de silice (ou de quartz)**

Elles sont produites comme le verre, par fusion, et sont essentiellement utilisées pour leur haute tenue chimique et thermique dans les tuyères pour moteur de fusé. [3]

### **I.2.1.8. Les fibres de basalte**

Trois fois plus chère que la fibre de verre, la fibre de basalte est une fibre naturelle issue de la roche volcanique. Cette roche formée à partir de magma refroidi confère des propriétés exceptionnelles à la fibre de basalte. Elle est plus légère et plus résistante que la fibre de verre. Très utilisée dans l'automobile pour ses propriétés thermiques, elle est incombustible, possède de bonnes propriétés mécaniques et couvre une large plage de température qui lui confère un réel avantage en matière d'isolation thermique :  $-260^{\circ}\text{C}$  à  $+ 1\ 200^{\circ}\text{C}$ . [1]

### **I.2.1.9. Fibres métalliques**

Elles sont les plus chères de toutes, en raison de leur difficulté de fabrication Elles approchent les propriétés d'un cristal parfait.

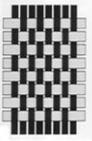
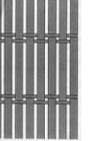
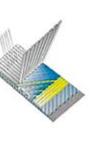
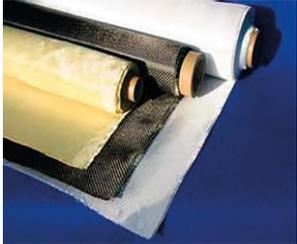
Ces fibres sont utilisées avec des matrices métalliques pour :

- ✓ Leurs bonnes conductibilités thermique et électrique ;
- ✓ Leurs caractéristiques thermomécaniques. [6]

En réalité il existe une longue liste de fibres qui peuvent être utilisées comme renforcement mais les quatre premières dont nous avons parlé sont les plus importantes.

Toutes ces fibres se présentent sous différentes formes comme indiqué dans le Tableau I.4 suivant :

**Tableau I.4.** Présentation commerciale des différentes fibres [1]

Présentation commerciale	Descriptifs
<p> <b>Fils ou stratifils roving</b></p> <p>Ensemble de fils de base ou de filaments parallèles assemblés sans torsion.</p>	
<p> <b>Mat à fils coupés ou mat à fibres longues</b></p> <p>Nappe obtenue à partir de fils continus ou coupés disposés sans orientation préférentielle et liés entre eux par un liant chimique.</p>	
<p> <b>Tissus</b></p> <p>Entrecroisement de fils de chaîne et de fils de trame se caractérisant par :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• son mode de tissage</li> </ul> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: flex-end;"> <div style="text-align: center;">  Taffetas         </div> <div style="text-align: center;">  Sergé         </div> <div style="text-align: center;">  Satin         </div> <div style="text-align: center;">  Unidirectionnel         </div> <div style="text-align: center;">  Multiaxial         </div> </div> <ul style="list-style-type: none"> <li>• la nature des fils qui le composent :</li> </ul> <ul style="list-style-type: none"> <li>- tissus roving (fabriqué à partir de fils roving)</li> <li>- tissus silionne (fabriqué à partir de fils silionne)</li> <li>- tissu verranne (fabriqué à partir de fils verranne)</li> </ul>	 
<p> <b>Nappes et rubans</b></p> <p>Bandes de tissus présentées sous différentes largeurs</p>	

Les propriétés mécaniques des principales fibres de renfort sont résumées dans le Tableau (I.5) suivant: [5]

**Tableau I.5.** Caractéristiques moyennes des fibres de renfort [5]

Type de renfort	Diamètre mono filament( $\mu$ )	Masse spécifique (kg /m)	Résistance		Module d'allongement	
			Traction (GPa)	Compression (GPa)	Elasticité (GPa)	Rupture (%)
Verre E	10 à 20	2,6	2.5	1 à 1.2	72	4.5
Verre R		2,5	3.5		85	5.2
Carbone HR	6 à 7	1,8	3 à 4	1.1 à 1.8	230 à 250	1.3
Carbone HM		1,9	2.7		400 à 500	0.5
Aramide	12	1,45	2.8 à 3	.0.3 à 0.5	120 à 130	2.5
Polyéthylène haut module		0.96	3		100	

D'autre part, elle est imperméable et résiste aux radiations, aux acides ainsi qu'aux UV:

## I.2.2. La Matrice

La matrice est un liant qui maintient en place la dispersion des fibres, les protège physiquement et chimiquement et assure, en plus, la liaison mécanique entre les éléments de renfort.

Elle se présente sous plusieurs formes :

- Organique,
- Métallique,
- Céramique.

La classification des types de matrices couramment rencontrées est donnée sur la figure I.6

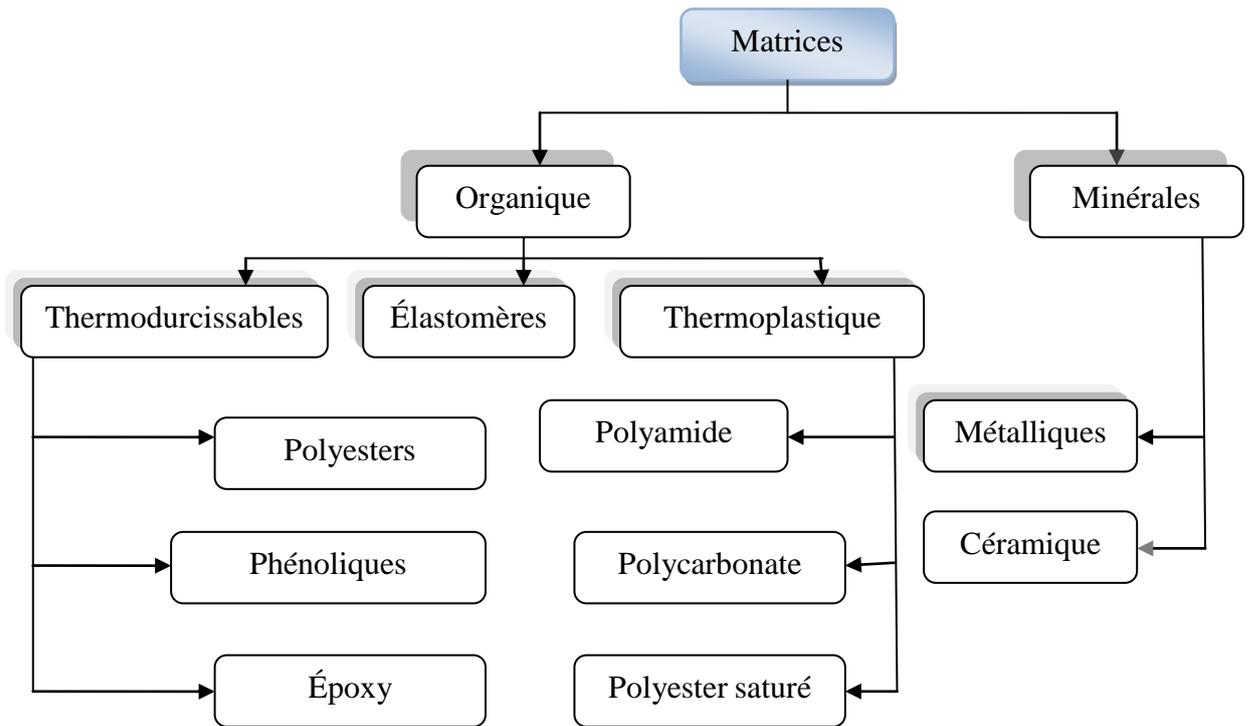


Figure. I.6. Différentes familles de matrice.

### I.2.2.1. Matrices organiques

Les deux types des résines organiques qui sont, actuellement, utilisées présentent des propriétés fondamentalement différentes : Les thermoplastiques et les thermodurcissables [5]

#### I.2.2.1.1. Résines thermoplastiques

Les résines thermoplastiques possèdent la propriété de pouvoir être mises en forme plusieurs fois par chauffage et refroidissement successifs, elles peuvent donc être récupérées et facilement recyclées.

La structure de ces résines à la forme de chaînes linéaires, il faut les chauffer pour mettre en forme (les chaînes se plient) et les refroidir pour les fixer.

Les principales résines thermoplastiques utilisées sont les suivantes :

- ✓ **Polyamide** : une bonne tenue au choc, bonne résistance à la fatigue et aux hydrocarbures.
- ✓ **Poly téréphtalate éthylénique et butylique** : bonne rigidité.
- ✓ **Polycarbonate** : une bonne tenue au choc.

- ✓ **Polysulfures de phénylène** : une résistance à l'hydrolyse.
- ✓ **Polyoxyméthylènes** : une bonne tenue à la fatigue.
- ✓ **Polysulfurés** : une bonne stabilité chimique.
- ✓ **-Polypropylène** : assez stable en température, mais combustible.

L'intérêt des résines thermoplastiques réside dans leur faible coût, résultant à la fois des matières premières disponibles et des procédés de fabrication, toutefois ce faible coût est lié à des propriétés mécaniques, et thermomécaniques faibles. [7]

Les matrices polymères thermoplastiques peuvent se présenter sous différentes formes :

- ✓ Granulés.
- ✓ Filaments.
- ✓ Poudres.
- ✓ Plaques

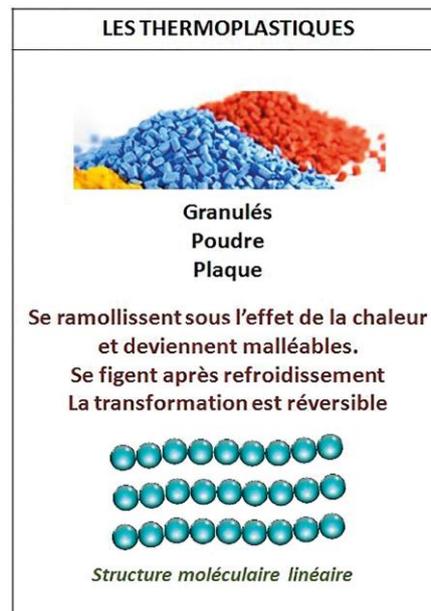


Figure. I.7. Les thermoplastiques [1]

#### I.2.2.1.2. Résines thermodurcissables

Les résines Thermodurcissables (TD) sont, en général, associées à des fibres longues. Les polymères thermodurcissables ont la forme d'un réseau tridimensionnel ; au cours de la

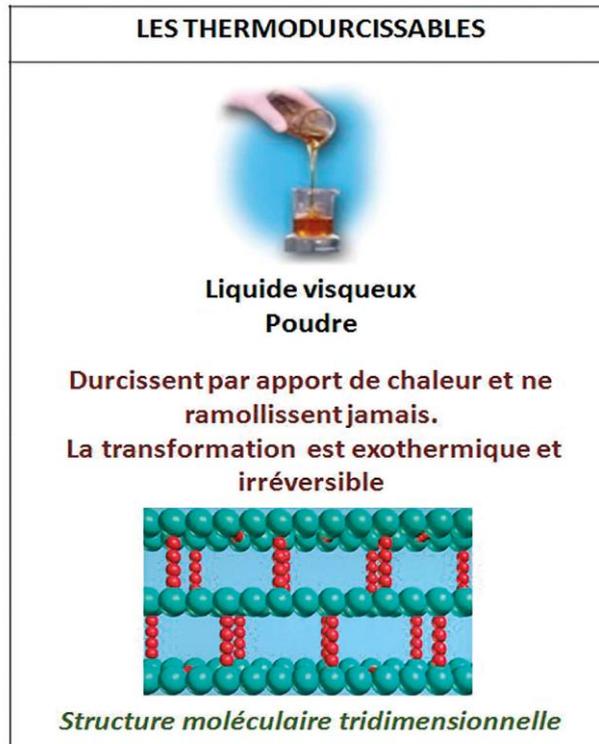
polymérisation, ce réseau se ponte (double liaison de polymérisation) et durcit de façon définitive lors du chauffage selon la forme souhaitée. La transformation est irréversible. [8]

Les résines thermodurcissables sont les plus couramment utilisées pour la fabrication de pièces en matériaux composites.

Elles se répartissent en différentes familles dont chacune possède une composition chimique particulière.

Parmi ces matrices, on distingue principalement :

- ✓ Les matrices polyesters (usage courant),
- ✓ Les matrices époxydes (tenue mécanique et chimique),
- ✓ Les matrices vinylesters (tenue chimique),
- ✓ Les matrices phénoliques (résistance au feu),
- ✓ Les matrices polyuréthanes (densité et dureté variables),
- ✓ Les matrices polyimides (tenue température  $>260^{\circ}\text{C}$ ),
- ✓ Les matrices silicones. [5]



**Figure. I.8.** Les Thermodurcissables.

Les propriétés mécaniques des principaux types de matrices organiques sont résumées dans le tableau suivant : [5]

**Tableau I.6.** Caractéristiques moyennes des matrices thermodurcissables (TD) non renforcées. [5]

Matrice	Masse spécifique (kg/m <sup>3</sup> )	Module Elasticité (Gpa)	Résistance Traction (Mpa)	Module d'allongement Rupture (%)	Tenue à la Température en Continu (°C)
Polyester	1.2	2.9-3.1	50-60	2-3	120
Epoxyde	1.1-1.4	3	50-120	3-8	150-200
Vinylester	1.1	3.4-3.5	70-85	2-5	100-140
Polyamide	1.4-1.5	4-20	30-40	<1	250-300
Phénolique	1.3	3.8-7	50	1-1.5	120-150

**Tableau I.7.** Les critères de choix des types de résine. [1]

<b>Rsines thermodurcissables</b>	
Avantages	-Coût -Durabilité
Inconvénients	-Emission de COV au cours de la mise oeuvre -Assemblages par collage délicats -Faibles cadences. -Difficultés de recyclage des déchets industriels -Difficultés de recyclage des produits en fin de vie -Saturation des CET (Centre d'enfouissement technique)
<b>Résines thermoplastiques</b>	
Avantages	-Absence d'émission de COV au cours de la mise en oeuvre -Facilité d'assemblage -Temps de cycle court (en fonction des procédés) -Potentialités de recyclage -Possibilité de formage à chaud
Inconvénients	-Choix limité de résines disponibles à l'échelle industrielle -Vigilance sur la qualité de l'interface fibre-matrice

### **I.2.2.2. Matrices minérales**

Il existe deux types de matrices minérales, matrice métallique et matrice céramiques

#### **I.2.2.2.1. Matrices métalliques**

L'utilisation des matrices métalliques est encore actuellement en grande partie à un stade préindustriel. Plusieurs matériaux composites tels que ; l'Aluminium et ses alliages, Nickel, Titane, présentent une bonne conductibilité électrique et thermique, une bonne tenue à des températures élevées et de plus ils possèdent de bonnes caractéristiques mécaniques transverses. Leur fabrication conduit à des coûts très élevés. [5]

#### **I.2.2.2.2. Matrices céramiques**

Les matériaux utilisés sont les carbures de silicium et de carbone. Ils sont utilisés pour la fabrication des pièces qui subissent des contraintes d'origine thermique et leur coût est très élevé. [5]

### **I.2.3. Les charges et additifs**

Différents produits peuvent être incorporés à la résine pour lui conférer des caractéristiques particulières ou en réduire le coût. La quantité des produits ajoutés peut varier de quelques dizaines de % dans le cas de charges à quelques % et moins dans le cas d'additifs.

L'addition de ces produits a pour fonction soit d'améliorer les caractéristiques mécaniques et physiques du produit fini, soit d'en faciliter la mise en œuvre. Nous donnons dans ce paragraphe des exemples de charges et d'additifs. [4]

#### **I.2.3.1. Les charges**

##### **I.2.3.1.1. Charges renforçantes**

L'objet de l'incorporation de charges renforçantes est d'améliorer les caractéristiques mécaniques de la résine. Ces charges peuvent être classées suivant leur forme géométrique en:

- ✓ Charges sphériques
- ✓ Charges non sphériques. [4]

### **I.2.3.1.1.1. Charges sphériques**

L'intérêt essentiel de ces charges réside dans leur forme sphérique qui évite les Concentrations de contraintes et, par conséquent, diminue la susceptibilité à la fissuration de la matrice par rapport à des charges non sphériques. Les charges sphériques se présentent sous forme de sphères, appelées généralement microbilles ou microsphères. Ces sphères pleines ou creuses ont un diamètre généralement compris entre 10 et 150  $\mu\text{m}$ . Elles peuvent être en verre, en carbone ou en matière organique (époxyde, phénolique, polystyrène, etc.). Les microbilles de verre creuses représentent plus de 99 % des charges sphériques utilisées.

#### **a) Les microbilles de verre creuses**

Le principal avantage des microbilles de verre creuses réside dans une masse Volumique faible (100 à 400  $\text{kg/m}^3$ ), apportant une augmentation du module spécifique de la résine chargée et de sa tenue en compression.

La fabrication des microbilles de verre creuses se fait par passage dans une zone à haute température, de fines particules de verre contenant un gaz d'expansion (généralement un mélange d'azote et de gaz carbonique). Lors de l'élévation de température des particules, le gaz est expansé dans la particule de verre en fusion. Les particules sont ensuite refroidies rapidement, provoquant une solidification de la paroi des microbilles avant que la pression du gaz ne diminue.

Les microbilles ainsi obtenues ont un diamètre de l'ordre de 20 à 130  $\mu\text{m}$ , avec une épaisseur de paroi de 0,5 à 2  $\mu\text{m}$ . Les microbilles peuvent être ensuite sélectionnées en fonction de leurs dimensions. Les microbilles sont enfin soumises à des traitements de surface permettant d'améliorer la liaison des microbilles avec la résine.

Les microbilles de verre creuses sont le plus souvent incorporées à des résines époxydes ou polyesters. Leur usage est limité à des mises en œuvre à basse pression du fait de la faible résistance à l'écrasement des sphères creuses.

Les avantages essentiels de leur incorporation dans une résine sont :

- La diminution de la masse volumique,
- L'augmentation du module de la résine,
- L'amélioration de la tenue en compression.

**b) Autres microbilles**

Il existe d'autres microbilles creuses :

-Microbilles de carbone :

- Masse volumique  $120 \text{ kg/m}^3$
- Diamètre 5 à  $150 \mu\text{m}$

- Microbilles organiques (époxyde, phénolique, etc.) :

- Masse volumique 100 à  $500 \text{ kg/m}^3$ .
- -Diamètre 10 à  $800 \mu\text{m}$ .

Ces microbilles sont généralement plus chères (jusqu'à 5 fois pour les microbilles de carbone) que les microbilles de verre.

Parmi les autres microbilles utilisées figurent les microbilles de verre pleines. Par rapport aux microbilles de verre creuses, les caractéristiques des microbilles Pleines sont :

- Masse volumique élevée :  $2\,500 \text{ kg/m}^3$ ,
- Prix plus faible,
- Possibilité de mise en œuvre avec les résines à des pressions élevées.

**I.2.3.1.1.2. Charges non sphériques**

Parmi les charges renforçantes non sphériques, le mica est le matériau le plus utilisé. Il est alors incorporé sous forme d'écailles de dimensions de 100 à  $500 \mu\text{m}$ , et d'épaisseur de 1 à  $20 \mu\text{m}$ . Le mica est ajouté à des résines thermoplastiques ou thermodurcissables, pour des applications électriques ou électroniques.

**I.2.3.1.2. Charges non renforçantes**

Les charges non renforçantes ont pour rôle soit de diminuer le coût des résines conservant les performances des résines, soit d'améliorer certaines propriétés des résines [4].

### **I.2.3.1.2.1. Charges de faible coût**

Ces charges sont extraites de roches ou de minerais, d'où leur faible coût. Généralement, l'incorporation de ces charges conduit à :

-Une augmentation :

- de la masse volumique de la matrice,
- du module d'élasticité,
- de la dureté,
- de la viscosité,
- de la stabilité dimensionnelle.

-Une diminution :

- du prix,
- de la résistance à la traction et à la flexion

Les principales charges sont :

- ✓ Les carbonates : craies ou calcites ( $\text{CaCO}_3$ ). Ce sont les charges les plus utilisées,
- ✓ les silicates: talc, kaolin, feldspath, wollastonite,
- ✓ Les silices, obtenues par broyage et tamisage de sable de quartz.

### **I.2.3.1.2.2. Charges ignifugeantes**

Ces charges ajoutées aux résines ont pour rôle de réduire ou d'empêcher les phénomènes de combustion. Parmi les charges solides utilisées dans les résines thermodurcissables, nous citons :

- l'hydrate d'alumine, produit le plus utilisé dans les résines thermodurcissables,
- l'oxyde d'antimoine. [4]

### **I.2.3.1.2.3. Charges conductrices et antistatiques**

Les résines organiques sont des isolants thermiques et électriques. Pour certaines applications, il est donc nécessaire d'ajouter un élément conducteur. Les principales charges utilisées sont :

- ✓ Des poudres ou paillettes métalliques : cuivre, fer, aluminium, etc.,
- ✓ Des microbilles de verre métallisées (cuivre, argent),
- ✓ Des particules de carbone (noir de carbone),
- ✓ Des filaments métalliques.

### **I.2.3.2. Les additifs**

Les additifs se trouvent en faible quantité (quelques % et moins) et interviennent comme :

- ✓ Lubrifiants et agents de démoulage,
- ✓ Pigments et colorants,
- ✓ Agents anti-retrait,
- ✓ Agents anti-ultraviolets.

#### **I.2.3.2.1. Lubrifiants et agents de démoulage**

Ces additifs ont pour objet de faciliter le façonnage de la résine et de réduire la tendance de la résine à adhérer aux moules, aux mandrins, etc.

#### **I.2.3.2.2. Pigments et colorants**

Les pigments sont des produits insolubles se présentant sous forme de poudres ou de paillettes. Ils sont obtenus à partir d'oxydes ou de sels métalliques. À partir de ces pigments, il est possible d'obtenir des pâtes colorantes constituées de dispersions de pigments dans une pâte (résine, plastifiant), pour une utilisation aisée.

Les colorants sont des composés organiques solubles dans un solvant adapté. Leur emploi est limité, du fait d'une mauvaise tenue chimique et thermique.

### **I.2.3.2.3. Agents anti-retrait et agents de fluage**

La polymérisation des résines conduit à une diminution des distances interatomiques du monomère initial. Il s'ensuit un retrait de la résine polymérisée, qui peut aboutir à un mauvais état de surface, à un gauchissement ou à des microfissurations des pièces moulées. Bien que l'incorporation des charges à la résine en limite le retrait, il est souvent nécessaire d'ajouter des produits spécifiques anti retrait (additifs dits “low profile” et “low shrink”), qui diminuent ou annulent le phénomène de retrait. Ces produits améliorent également l'écoulement de la matière dans certaines techniques de moulage. Ces agents anti-retrait sont généralement des produits à base de thermoplastiques ou d'élastomères, se présentant sous forme de poudre ou en solution dans du styrène.

### **I.2.3.2.4. Agents anti-ultraviolets**

Les agents anti-ultraviolets ont pour fonction de protéger les résines de l'action des rayons ultraviolets contenus dans le rayonnement solaire. Le principe de ces agents est d'absorber le rayonnement ultraviolet et d'éviter ainsi une détérioration prématurée de la résine par rupture de liaisons atomiques ou par passage. [4]

## **I.3. Classification des matériaux composites**

Les composites peuvent être classés suivant la forme des composants ou suivant la nature des composants.

### **I.3.1. Classification suivant la forme des constituants**

En fonction de la forme des constituants, les composites sont classés en deux grandes classes : les matériaux composites à fibres et les matériaux composites à particules.

#### **I.3.1.1. Composites à fibres**

Un matériau composite est un composite à fibres si le renfort se trouve sous forme de fibres. Les fibres utilisées se présentent soit sous forme de fibres continues, soit sous forme de fibres discontinues: fibres coupées, fibres courtes... etc. L'arrangement des fibres, leur orientation permettent de moduler à la carte les propriétés mécaniques des matériaux

composites, pour obtenir des matériaux allant de matériaux fortement anisotropes à des matériaux isotropes dans un plan.

Le concepteur possède donc là un type de matériau dont il peut modifier et moduler à volonté les comportements mécanique et physique en jouant sur :

- ✓ La nature des constituants,
- ✓ La proportion des constituants,
- ✓ L'orientation des fibres,

Suivant le cahier des charges imposées.

L'importance des matériaux composites à fibres justifie une étude exhaustive de leurs comportements mécaniques. En conséquence, le présent manuscrit sera essentiellement consacré par la suite à l'étude de ce type de matériaux

### **I.3.1.2. Composites à particules**

Un matériau composite est un composite à particules lorsque le renfort se trouve sous forme de particules. Une particule, par opposition aux fibres, ne possède pas de dimension privilégiée.

Les particules sont généralement utilisées pour améliorer certaines propriétés des matériaux ou des matrices, comme la rigidité, la tenue à la température, la résistance à l'abrasion, la diminution du retrait, etc. Dans de nombreux cas, les particules sont simplement utilisées comme charges pour réduire le coût du matériau, sans en diminuer les caractéristiques.

Le choix de l'association matrice-particules dépend des propriétés souhaitées. Par exemple, des inclusions de plomb dans des alliages de cuivre augmenteront leur facilité d'usinage. Des particules de métaux fragiles tels que le tungstène, le chrome et le molybdène, incorporé dans des métaux ductiles, augmenteront leurs propriétés à températures élevées, tout en conservant le caractère ductile à température ambiante.

Les cermets sont également des exemples de composites métal-céramique à particules, adaptés à des utilisations à températures élevées. Par exemple, les cermets à base d'oxydes

sont utilisés pour les outils de coupe à vitesse élevée, et pour les protections à hautes températures.

Également, des particules d'élastomère peuvent être incorporées dans des matrices polymères fragiles, de manière à améliorer leurs propriétés à la rupture et au choc, par diminution de la sensibilité à la fissuration.

Ainsi, les composites à particules recouvrent un domaine étendu dont le développement s'accroît sans cesse. Toutefois, compte tenu de leurs diversités, ce type de matériaux ne sera pas étudié dans le cadre de ce manuscrit. [4]

### **I.3.2. Classification suivant la nature des constituants**

Selon la nature de la matrice, les matériaux composites sont classés suivant des composites à matrice organique, à matrice métallique ou à matrice minérale.

Divers renforts sont associés à ces matrices. Seuls certains couples d'associations ont actuellement un usage industriel, d'autres faisant l'objet d'un développement dans les laboratoires de recherche. Parmi ces composites, nous pouvons citer :

1. Composites à matrice organique (résine, charges), avec :

- ✓ Des fibres minérales : verre, carbone, etc.
- ✓ Des fibres organiques : Kevlar, polyamides, etc.
- ✓ Des fibres métalliques : bore, aluminium, etc.

2. Composites à matrice métallique (alliages légers et ultralégers d'aluminium, de magnésium, de titane), avec :

- ✓ Des fibres minérales : carbone, carbure de silicium (SiC),
- ✓ Des fibres métalliques : bore,
- ✓ Des fibres métallo-minérales : fibres de bore revêtues de carbure de silicium (BorSiC).

3. Composites à matrice céramique, avec :

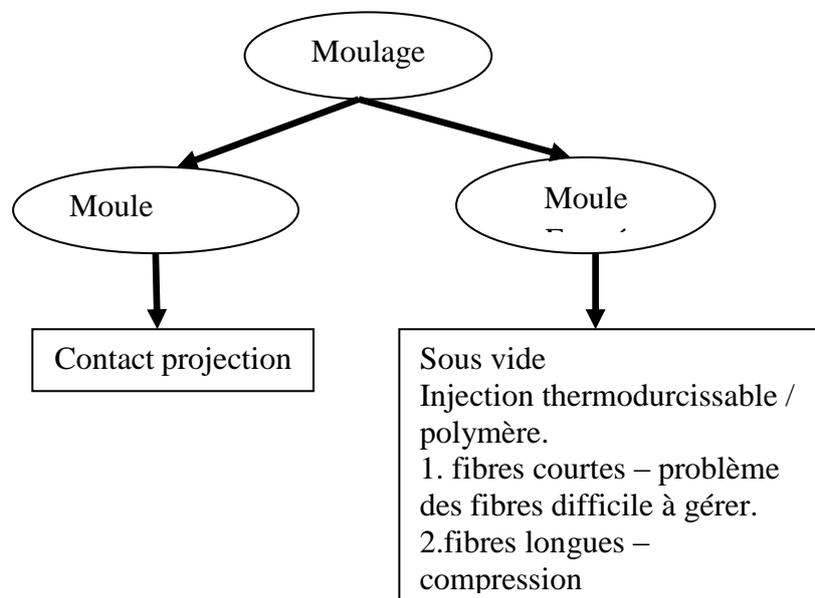
- ✓ Des fibres métalliques : bore,
- ✓ Des particules métalliques : cermets,

- ✓ Des particules minérales : carbures, nitrures, etc.

Les matériaux composites à matrice organique ne peuvent être utilisés que dans le domaine des températures ne dépassant pas 200 à 300 °C, alors que les matériaux composites à matrices métallique ou minérale sont utilisés au-delà : jusqu'à 600 °C pour une matrice métallique, jusqu'à 1000 °C pour une matrice céramique. [4]

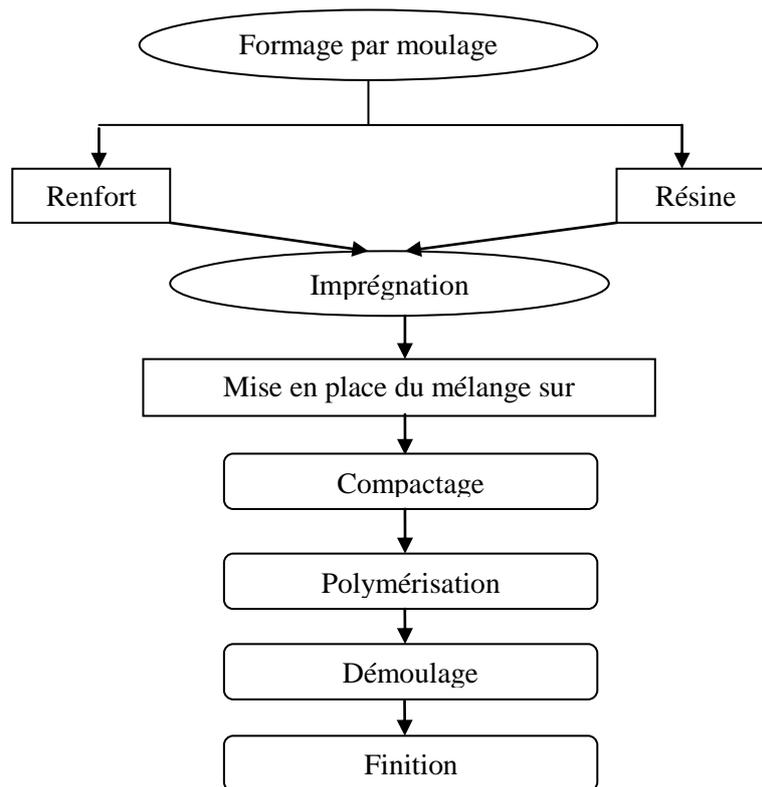
#### I.4. Les Procédés de fabrication

A cause de leur souplesse, les fibres peuvent être rangées ou bobinées dans des directions diverses afin de mieux supporter les contraintes directionnelles que la structure subira au cours du travail. Il existe différentes techniques mais la plus utilisée est le moulage (Figure I.9).



**Figure. I.9.** Principaux procédés de moulage. [5]

Nous retiendrons le formage par moulage des composites à renfort fibreux et à matrice résineuse. Les différentes étapes de fabrication sont illustrées dans la figure I.10.



**Figure I.10:** Différentes étapes de mise en forme par moulage fermé. [5]

On dispose le mélange renfort dans un moule après qu'il soit imprégné de résine, puis, on procède au compactage de l'ensemble pour chasser l'air restant.

Le mélange renfort résine ne devient un véritable matériau composite qu'après la phase de durcissement (réticulation) de la matrice, pendant laquelle cette dernière passe de l'état liquide à l'état solide par apport d'énergie. Le comportement thermique des thermoplastiques est comparable à celui des métaux ; par contre les thermodurcissables, à la température de leur injection dans le moule, atteignent une phase pâteuse puis subissent une transformation chimique interne irréversible qui durcit définitivement la matrice. [5]

Les techniques de fabrication jouent un rôle considérable dans les composites car chacune des opérations influe de manière irréversible sur le produit finale.

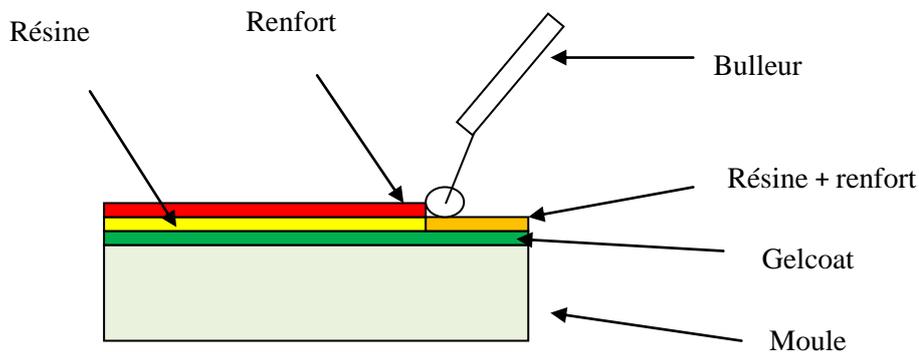
De nombreuses méthodes de fabrication ont été développées pour répondre aux besoins, et leurs choix dépend surtout des caractéristiques mécaniques dérivées et de la géométrie du produit. On peut citer : [2]

## I.4.1. Les technologies dites en moule ouvert

### I.4.1.1. Moulage au contact

Le principe est de procéder manuellement à la réalisation des pièces à partir des résines thermodurcissables, à température ambiante et sans pression.

Les renforts sont déposés sur le moule et imprégnés de résine liquide, accélérée et catalysée. Après durcissement de la résine, la pièce est démoulée et détournée.



**Figure I.11.** Principe de moulage au contact. [2]

On utilise cette technologie de moulage dans le cas de fabrication des petites séries des pièces: de 1 à 1000 pièces/an, Pièces de très grandes dimensions et pour des Revêtements sur supports divers.

Ce type de moulage représente des avantages tel que :

1. Très larges possibilités de forme.
2. Pas de limite dimensionnelle.
3. Une surface lisse gelcoatée (aspect, tenue à la corrosion).
4. Propriétés mécaniques moyennes à bonnes.
5. Investissements spécifiques très faibles.
6. Moule simples, peu onéreux, rapide à réaliser en interne.

Mais aussi il se limite à :

1. Une seule face lisse.
2. Nécessité de finition (détourage, perçage, etc.).

3. Qualité tributaire de la main d'œuvre.
4. Faible cadence de production par moule.
5. Espace de travail important.
6. Conditions de travail médiocres.

#### I.4.1.2. Moulage par projection simultanée

Les matières premières sont mises en œuvre à l'aide d'une machine dite "de projection" comprenant :

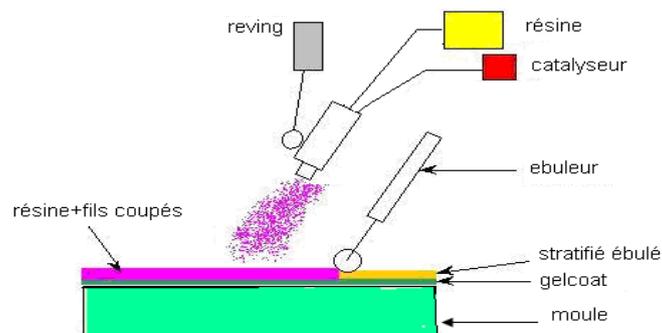
- ✓ Un dispositif de coupe - projection du renfort (roving).
- ✓ Un ou deux pistolets projetant simultanément la résine.

Les fils coupés et la résine sont projetés sur la surface du moule puis compactés et éboulés à l'aide de rouleaux et d'ébulleurs. La résine pré accélérée est catalysée en continu lors de sa projection.

Parmi les avantages associés à ce type de moulage on retrouve :

1. Très larges possibilités de forme et dimensions
2. Travail simplifié, suppression de la mise en forme obtenue directement par la projection
3. Investissements très modérés [2]
4. Moule simples, peu onéreux, rapides à réaliser en interne.

En plus des limites rencontrées par le moulage au contact, celui-ci se limite à des Propriétés mécaniques moyennes.



**Figure. I.12.** Principe de moulage par projection simultanée. [2]

## I.4.2. Les technologies dites en moule fermé

### I.4.2.1. Moulage sous vide

Le moulage sous vide s'effectue en utilisant un moule ouvert sur lequel on dispose les couches de renfort imprégné.

Une fois que le renfort (mat, tissu, préforme) est placé à l'intérieur du moule et la résine catalysée est versée sur ce dernier, une feuille de plastique souple vient couvrir le tout hermétiquement (pose d'un joint d'étanchéité sur le périmètre de la pièce). On fait le vide sous la feuille de plastique des bulles d'air, fluage de l'excédent de résine qui est absorbé par un tissu de pompage. L'ensemble est ensuite soumis à polymérisation en étuve ou en autoclave.

La résine peut également être injectée par l'aspiration consécutive au vide.

On utilise ce type de moulage dans le cas d'une production en petites séries de pièces nécessitant deux faces lisses. [2]

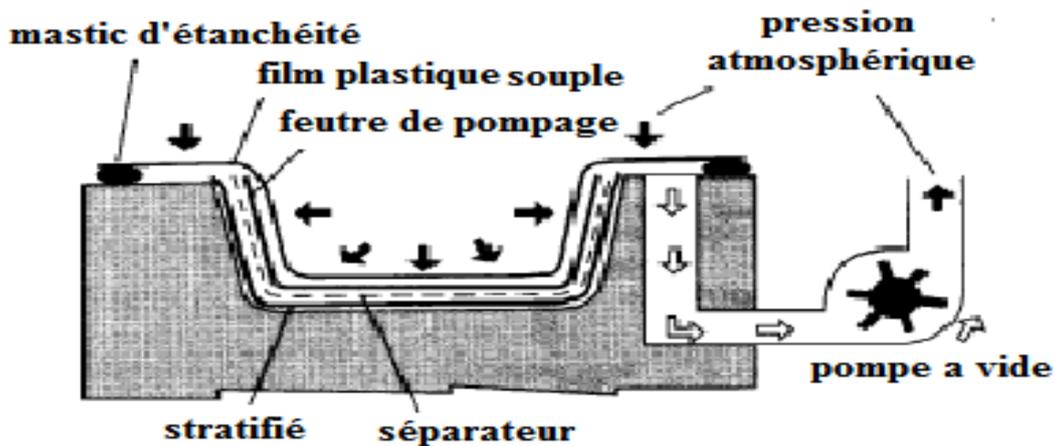
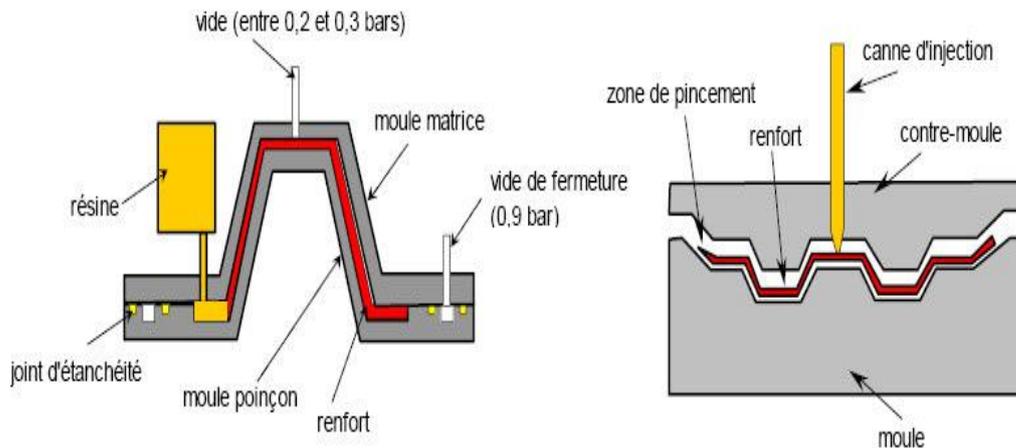


Figure I.13. Moulage sous vide. [2]

### I.4.2.2. Moulage par injection basse pression de résine (RTM)

Le moulage par injection de résine liquide RTM (Résine Transfert Molding) s'effectue entre moule et contre-moule rigides.

Le renfort (mats, préforme, éventuellement tissus) est mis en place dans le moule, une fois celui-ci solidement fermé, la résine, accélérée et catalysée, est injectée sous faible pression (1.5 à 4 bars) à travers le renfort jusqu'au remplissage complet de l'empreinte. La pression de moulage est faible. Le procédé convient pour des cadences jusqu'à 30 pièces par jour.



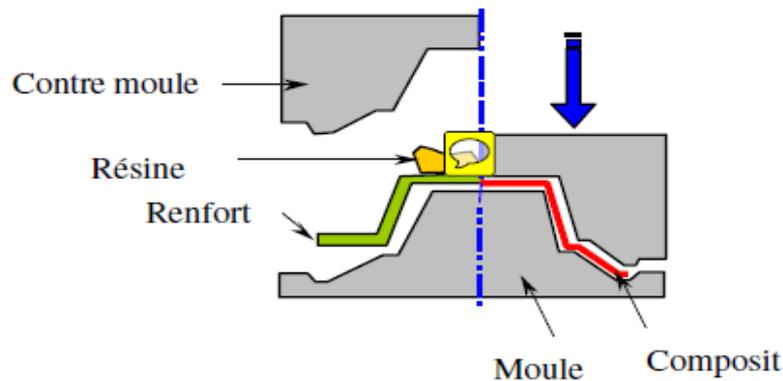
**Figure. I 14.** Principe de moulage par injection de résine. [2]

### I.4.2.3. Moulage à froid

C'est un moulage à l'aide d'une presse à compression entre moule et contre moule rigides, initialement sans apport thermique extérieur.

Le renfort (mat) est posé sur la partie inférieure du moule, la résine dotée d'un système catalytique très réactif, est tout de suite versée en vrac.

La fermeture du moule sous pression (2 à 4 bars) entraîne la répartition de la résine dans l'empreinte et l'imprégnation du renfort. Le durcissement de la résine est accéléré progressivement par l'élévation de température du moule, car la réaction exothermique. Ce qui permet un démoulage rapide.



**Figure I.15.** Principe de moulage à la presse à froid. [2]

#### I.4.2.4. Moulage par injection de compound BMC

Le compound (**Bulk Molding Compound**), préparé dans un malaxeur, est une masse à mouler constituée de résine, de charges et d'adjuvants divers, renforcée par des fils de verre coupés.

Le moulage se fait à chaud (130 - 150 °C) par injection (principalement) entre moule et contre moule en acier usiné.

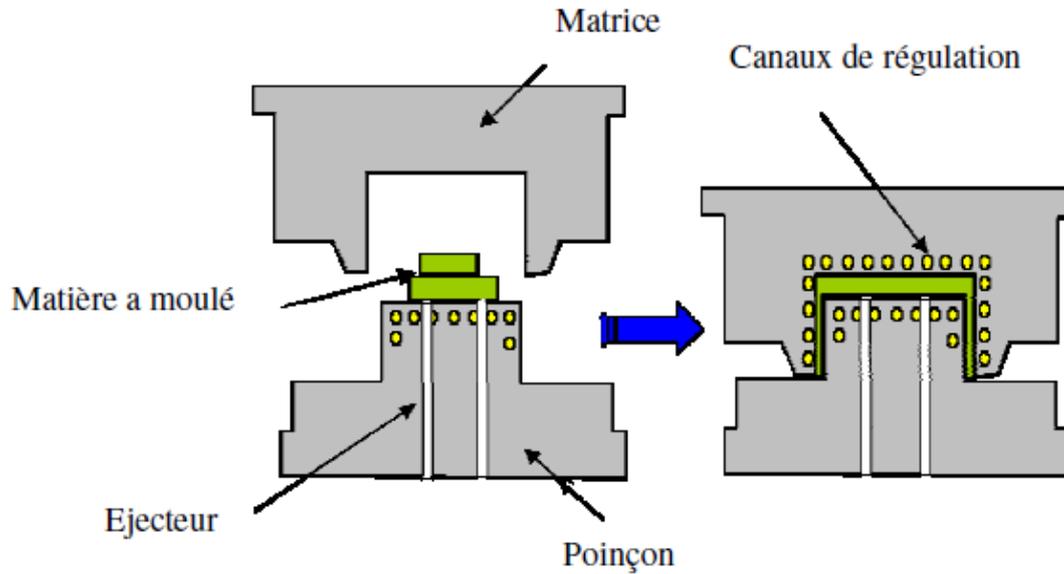
La pression (50 à 100 bars) de fermeture du moule entraîne le fluage de la matière préalablement dosée et le remplissage de l'empreinte. Le temps de durcissement très court permet un démoulage rapide.

On utilise ce type de moulage pour une production en grandes séries, et pour des pièces de taille petite et moyenne, plus ou moins épaisses.

#### I.4.2.5. Moulage par compression de mat pré imprégné SMC

Le mat pré imprégné (**Sheet Molding Compound**) est une nappe de fils coupés ou continus, imprégnée par un mélange de résine polyester, de charges et d'adjuvants spécifiques divers.

Découpé en flans de masse et dimensions déterminées, le mat pré imprégné est moulé à chaud (140 à 160 °C) par compression entre un moule et un contre moule en acier usiné.

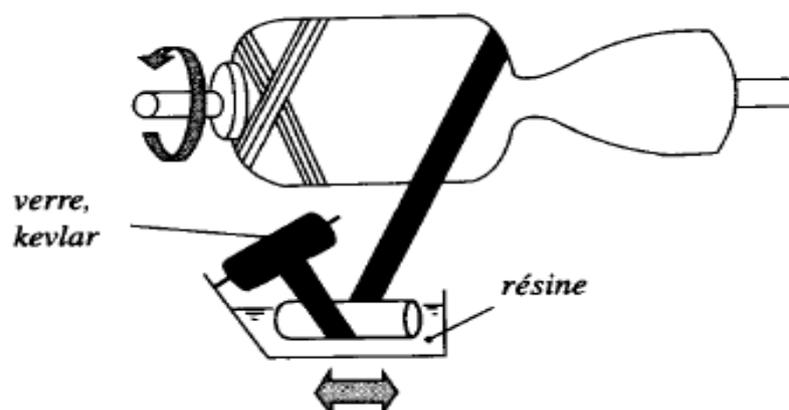


**Figure I.16.** Principe de moulage par compression. [2]

#### I.4.2.6. Moulage par enroulement filamentaire

Suivant le schéma ci-après, il peut être intégré dans une chaîne de fabrication en continu, et ainsi autoriser l'obtention de tubes de grande longueur. Application aux enveloppes de fusées, de torpilles, de conteneurs etc.

Pour des pièces de révolution à méridienne quelconque, l'enroulement est réalisé sur un mandrin de forme démontable, puis polymérisé en étuve ou en autoclave. Ce procédé est utilisé pour la fabrication de pièces devant résister aux pressions internes, (réservoirs, corps de propulseur etc.)



**Figure I.17.** Enroulement filamentaire. [2]

## I.5. Architecture du composite

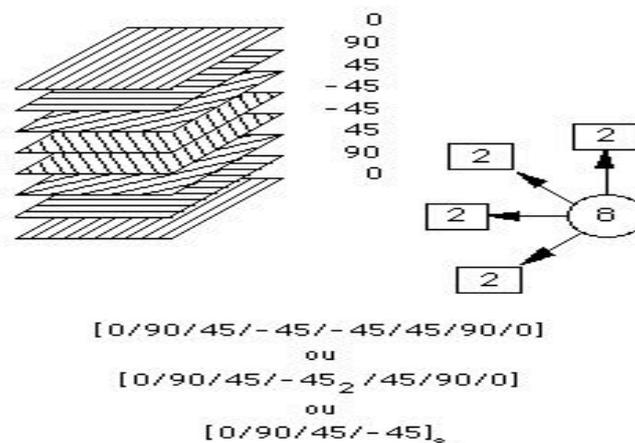
Les structures des matériaux composites peuvent être classées en trois types :

- ❖ Les monocouches.
- ❖ Les stratifiées.
- ❖ Les sandwiches

### I.5.1. Les monocouches

Le composite monocouche (couche élémentaire ou strate) correspond à l'unité élémentaire d'épaisseur, elle est constituée d'un ou plusieurs plis identiques (tissé, UD, mats, ...) assemblés sans aucune orientation. Un pli est un semi produit de composites (fibres et matrice) présenté sous forme quasi-bidimensionnelle, feuille d'épaisseur faible ( $\approx 0.125$  mm). On distingue, le pli UD (Le renfort est à structure UD), le pli tissé (Le renfort est à structure orienté) et le pli mat (Le renfort est à structure aléatoire).

La superposition de la monocouche dans l'ordre du plan de drapage va constituer le stratifié (Figure I.18).

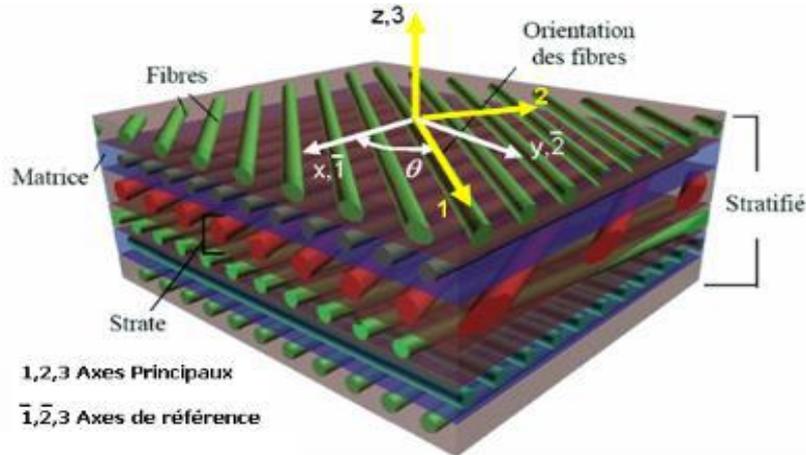


**Figure I.18.** Exemple du plan du drapage d'un composite stratifié. [2]

### I.5.2. Les stratifiées

Les stratifiés sont constitués de couches successives (appelées parfois plis) de renforts (fils, stratifils, mats, tissus, etc.) imprégnés de résines (figure I.19).

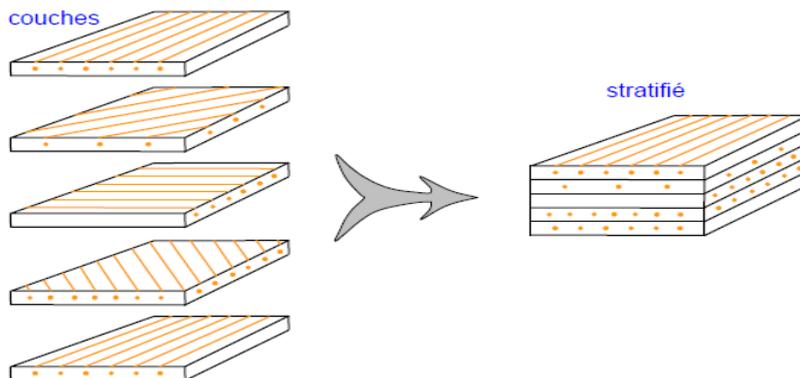
Nous examinons les divers types de stratifiés. [4]



**Figure I.19.** Structure d'un stratifié. [7]

### I.5.2.1. Stratifiés à base de fils ou de tissus unidirectionnels

Les stratifiés à base de fils ou de tissus unidirectionnels constituent un type de stratifié de base auquel peut se ramener en théorie tout autre type de stratifié. Ces stratifiés sont constitués de couches de fils ou de tissus unidirectionnels, dont la direction est décalée dans chaque couche (Figure I.20).



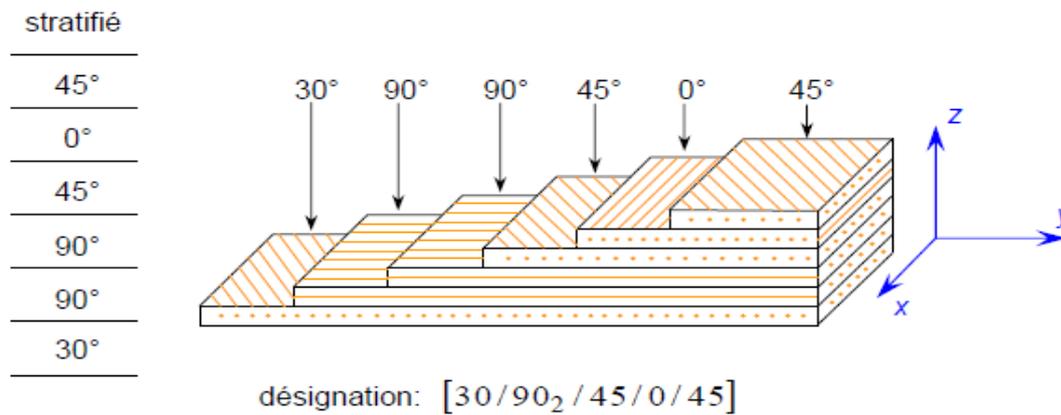
**Figure I.20.** Constitution d'un stratifié [4]

La désignation de ces stratifiés est généralement effectuée selon le code suivant :

1. Chaque couche est désignée par un nombre indiquant la valeur en degrés de l'angle que fait la direction des fibres avec l'axe  $x$  de référence.

2. Les couches successives sont séparées par un / si leurs angles sont différents.
3. Les couches successives de même orientation sont désignées par un indice Numérique.
4. Les couches sont nommées successivement en allant d'une face à l'autre. Des crochets (ou parenthèses) indiquent le début et la fin du code.

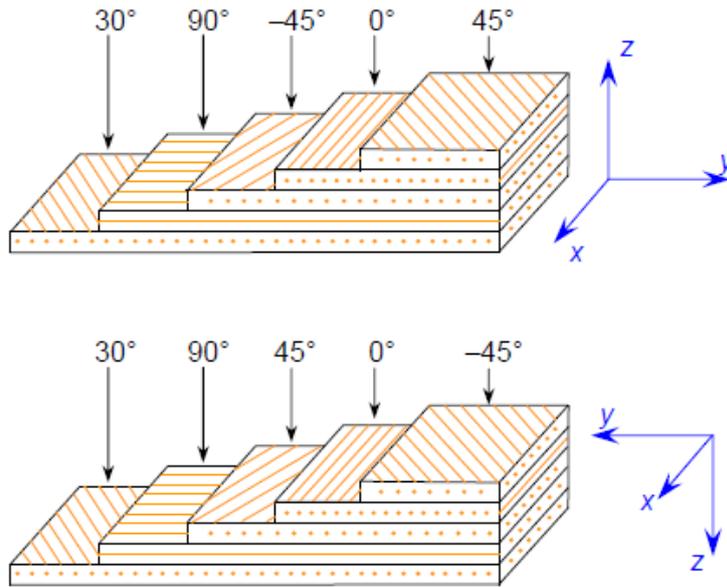
La désignation dépend du système d'axes choisi. Un exemple est donné à la Figure I.21.



**Figure I.21.** Désignation d'un stratifié.

#### a) Angles positifs et négatifs

Lorsque des couches sont orientées à des angles égaux en valeurs absolues, mais de signes opposés, les signes + ou – sont utilisés. La convention pour les angles positifs ou négatifs dépend du système d'axes choisi : une inversion peut apparaître suivant le choix effectué (figure I.22).



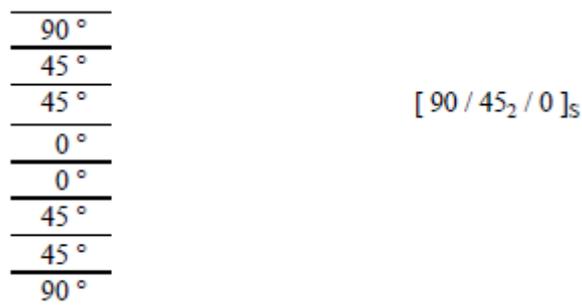
**Figure I.22.** Convention de signe pour la désignation des stratifiés [4].

**b) Stratifiés symétriques**

Un stratifié est symétrique si son plan moyen est le plan de symétrie. Sa désignation ne nécessite alors que la moitié des couches successives.

Si le stratifié à un nombre pair de couches, la désignation débute sur une face pour finir au plan de symétrie. Un indice S indique que le stratifié est symétrique.

Par exemple:



Si le stratifié comporte un nombre impair de couches, la désignation est semblable à la précédente, la couche centrale étant surlignée. Par exemple :

$$\begin{array}{c}
 \hline 90^\circ \\
 \hline 45^\circ \\
 \hline 45^\circ \\
 \hline 0^\circ \\
 \hline 45^\circ \\
 \hline 45^\circ \\
 \hline 90^\circ \\
 \hline
 \end{array}
 \quad [90/45_2/\bar{0}]_S$$

### c) Séquences

La répétition de séquences peut être indiquée par un indice indiquant le nombre de fois où une séquence est successivement répétée. Par exemple :

$$\begin{array}{c}
 \hline 0^\circ \\
 \hline 45^\circ \\
 \hline 90^\circ \\
 \hline 0^\circ \\
 \hline 45^\circ \\
 \hline 90^\circ \\
 \hline 90^\circ \\
 \hline 45^\circ \\
 \hline 0^\circ \\
 \hline 90^\circ \\
 \hline 45^\circ \\
 \hline 0^\circ \\
 \hline
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l}
 [(0/45/90)_2]_S \\
 \text{ou} \quad [0/45/90]_{2S}
 \end{array}$$

### d) Stratifiés hybrides

Les stratifiés hybrides sont constitués de couches successives comportant des fibres de natures différentes. Il sera alors nécessaire de les mentionner dans la désignation. Par exemple, pour des stratifiés avec la même résine :

0° V	[ 0 <sub>V</sub> / ±45 <sub>C</sub> / 90 <sub>C</sub> ] <sub>S</sub>
45° C	
-45° C	
90° C	
90° C	
-45° C	
45° C	
0° V	

0° K	[ 0 <sub>2C</sub> / (45 / 90) <sub>SV</sub> / 0 <sub>2K</sub> ]
0° K	
45° V	
90° V	
45° V	
0° C	
0° C	

avec V : verre, C : carbone, K : Kevlar

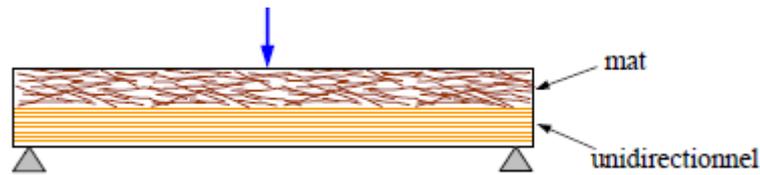
### I.5.2.2. Structure générale d'un stratifié

Dans le cas général, le renfort de chaque couche sera de natures diverses : fils, stratifils, mats, tissus, fibres de verre, fibres de carbone, etc. Chaque couche doit alors être désignée par l'indication de la nature des fibres, du type de renfort : fils, mat, tissu avec indication de la proportion de fibres suivant le sens chaîne et trame.

Le choix de la nature et de la séquence des couches dépendra de l'utilisation du matériau composite, en l'adaptant au mieux au champ des contraintes imposé :

- ✓ Les couches unidirectionnelles ont de bonnes performances mécaniques Dans la direction des fibres;
- ✓ Les mats sont peu résistants en traction et devront être réservés aux zones comprimées : par exemple (Figure I.23) couches unidirectionnelles dans la zone de traction, mat dans la zone de compression d'une poutre sollicitée en flexion;
- ✓ Une stratification croisée sera sensible au délaminage interlaminaire;
- ✓ Une stratification avec au moins trois directions de fibres sera nécessaire Pour avoir une pseudo-isotropie dans le plan du stratifié.

Enfin, il est intéressant de noter qu'une stratification symétrique garantira généralement une bonne planéité du stratifié après démoulage.



**Figure I.23.** Poutre sollicitée en flexion. [4]

### I.5.2.3. Stratifiés hybrides

Les stratifiés hybrides permettent d'être plus performants en utilisant au mieux les propriétés des diverses fibres disponibles. Parmi les différents hybrides, on peut distinguer :

- ✓ Des hybrides intercouches, constitués d'une suite de couches, chacune de nature différente;
- ✓ Des hybrides intracouches, constitués par une séquence de couches identiques, chaque couche étant constituée de renforts différents;
- ✓ Des couches métalliques peuvent également être intercalées entre les Couches.

### I.5.3. Les sandwichs

Le principe de la technique sandwich consiste à appliquer sur une âme (constituée d'un matériau ou d'une structure légère possédant de bonnes propriétés en compression) deux "feuilles", appelées peaux, possédant de bonnes caractéristiques en traction. L'objectif d'un tel procédé est de constituer une structure permettant de concilier légèreté et rigidité. [4]



**Figure I.24.** Composite sandwich [2].

Généralement, le choix des matériaux est fait avec pour objectif initial d'avoir une masse minimale en tenant compte ensuite des conditions d'utilisation (conditions thermiques, corrosion, prix, etc.).

Les matériaux les plus couramment utilisés sont :

Pour les âmes pleines figure(I.25):

- Le balsa ou bois cellulaire;
- Diverses mousses cellulaires;
- Des résines chargées de microsphères creuses de verre, appelées mousses syntactiques ;

Pour les âmes creuses (figure I.26), essentiellement nid d'abeilles et profilés :

- Des alliages métalliques légers;
- Du papier kraft (enduit ou non de résine);
- Du papier polyamide, type papier Nomex;

Des âmes mixtes peuvent être utilisées.

Les peaux sont le plus souvent des stratifiés (verre, carbone, Kevlar) ou des feuilles d'alliages légers.

Pour que les structures sandwiches jouent pleinement leur rôle, il est nécessaire de veiller à avoir une solidarisation parfaite de l'ensemble âme-peaux, de manière à répartir les efforts entre âme et peaux. L'assemblage est réalisé par un collage à l'aide de résines compatibles avec les matériaux en présence. [4]

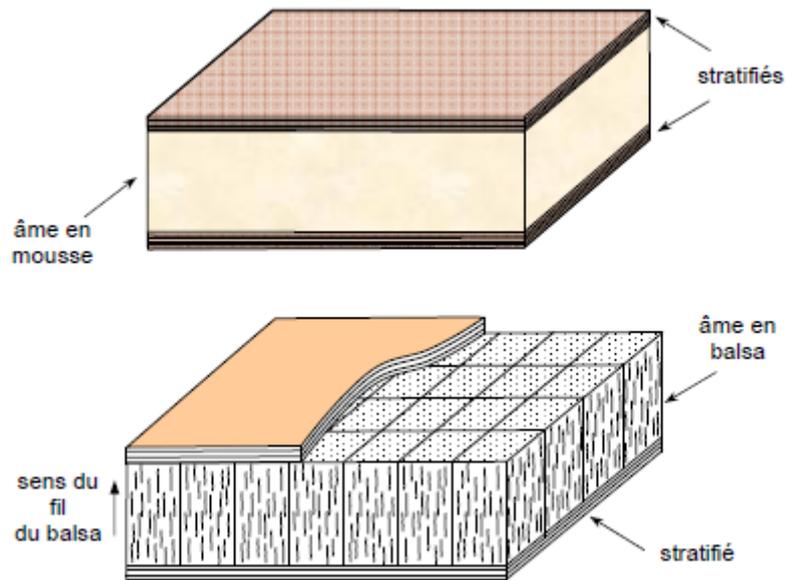


Figure. I.25. Matériaux sandwichs à âmes pleines. [4]

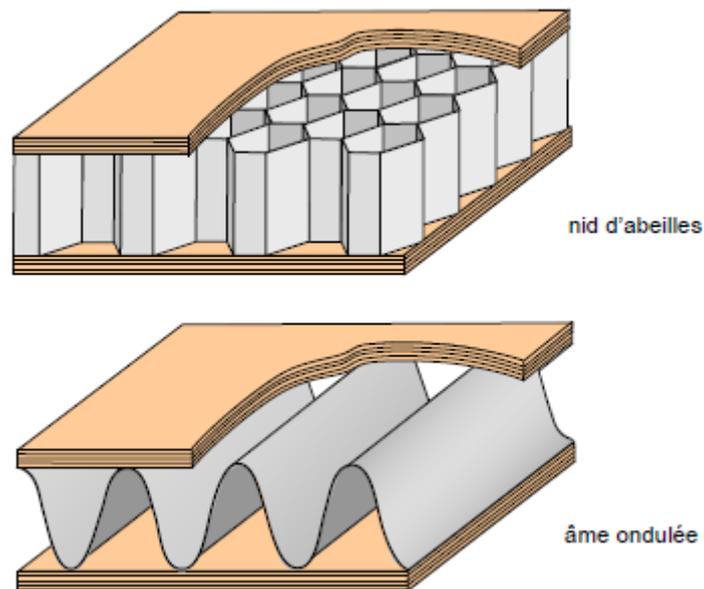


Figure I.26. Matériaux sandwichs à âmes creuses. [4]

#### I.5.4. Autres architectures

Les autres architectures des matériaux composites peuvent être schématiquement classées en : plastiques renforcés et composites volumiques.

### **I.5.4.1. Plastiques renforcés**

Ces matériaux sont constitués de résines ou matrices dans lesquelles sont introduits des renforts de type :

- Fibres courtes,
- Billes pleines ou billes creuses,
- Poudres : métalliques, de graphite.

Les renforts permettent généralement d'augmenter le module d'élasticité d'un facteur 2 à 5. Le comportement mécanique de ces matériaux peut être homogénéisé, et son étude est ramenée à celle d'un matériau usuel isotrope.

### **I.5.4.2. Composites volumiques**

Les composites volumiques ont été introduits pour des besoins spécifiques de l'aéronautique. Ils sont élaborés à partir de tissages volumiques. Ces matériaux sont très onéreux. Outre des intérêts spécifiques, ils permettent d'obtenir des caractéristiques mécaniques très élevées, avec un comportement sensiblement isotrope en volume. [4]

## **I.6 Domaines d'application des composites**

Les composites sont largement utilisés dans l'industrie, parce qu'ils présentent de bonnes caractéristiques telles la rigidité, légèreté et résistance à des contraintes d'origine mécanique ainsi qu'à celles d'origine thermique. [5]

### **I.6.1. Construction aéronautique**

Le choix des matériaux, tel que l'industrie aéronautique, aérospatiale, automobile, ferroviaire, sports et loisirs, bâtiment, génie civil est toujours un problème complexe où le comportement coût/performance règne en maître.

Les composites de haute performance ont été longtemps confinés dans l'aéronautique civile à des pièces de structure secondaire (habillage intérieur, volets), plus rarement primaire et jamais à la voilure, car il se posait deux difficultés :

- ✓ Coûts élevés par rapport à l'aluminium,

- ✓ Risques de délaminage interdisant le vol sur les structures aérodynamiques chargées.

Les premières pièces composites ont été introduites sur les satellites à la fin des années 1970. Les matériaux utilisés sont essentiellement des fibres de carbone à haut module d'Young avec résine d'époxyde. Les premiers matériaux composites ont été introduits sur les missiles balistiques dans le milieu des années 1960 par l'utilisation de structures bobinées fibres de verre/résine époxyde, les structures bobinées fibres d'aramide/époxyde ayant été introduites dans la fin des années 1970. Les fibres de carbone pour la réalisation de structures bobinées ont été introduites dans le milieu des années 1970.

L'utilisation des matériaux composites dans les constructions aéronautiques entraîne un gain de poids substantiel. Leur emploi permet, à performances égales, des gains de masse variant de 10% à 20%. Le poids de l'avion moyen-courrier Boeing 767 a été réduit, par l'emploi des composites, de 921 kilogrammes par rapport à la solution conventionnelle. Les matériaux composites sont essentiellement utilisés pour la conception et réalisation des propulseurs à poudre des lanceurs de satellites et de leur tuyère d'éjection des gaz de propulsion, obtenue par bobinage de fibres de verre, de kevlar ou de carbone, afin de résister à la pression interne résultant de la combustion du propergol carbone, afin de résister à la pression interne résultant de la combustion du propergol solide et aux efforts de lancement qui, dans certain cas, se traduisent par des chocs et des vibrations.

Sur les avions commerciaux, les premiers appareils produits industriellement en grande série utilisaient essentiellement des alliages d'aluminium, de l'acier et du titane, aujourd'hui ; les avions commerciaux les plus récents utilisent en masse encore 54% d'alliage d'aluminium, mais 20% de matériaux composites ont été introduits dans la structure, 13% d'acier, 6% de titane et 7% de matériaux divers.

Certains obstacles à l'utilisation massive des composites sont progressivement levés, en particulier par des acteurs étrangers, par exemple :

- ✓ Dans le cadre du programme Advanced Composite Technology mené par la NASA et Boeing a été mis au point un nouveau procédé permettant de développer des ailes en composites 20% moins chères qu'avec des matériaux conventionnels,
- ✓ Développement de composites à mémoire de forme mené par British Aerospace et Daimler Benz,

- ✓ Décision d'Airbus d'équiper les fuselages de ses futurs A380 en technologie composite dite « Glare11111 ». [5]

### **I.6.2. Construction automobile**

L'utilisation des composites dans le secteur automobile remonte à des origines relativement anciennes (fin des années 1980), mais ne s'est généralisé que très récemment, chez les grands constructeurs étrangers (Volvo, Mercedes) pour développer des coffres et hayons.

La société LOHEAC de transports routiers, a pu réduire substantiellement sa consommation de carburant grâce à l'économie de poids obtenue en remplaçant les cabines conventionnelles de ses tracteurs par de nouveaux éléments moulés en une seule pièce renforcés de fibre à haute résistance.

Les composites sont choisis pour la conception de ressorts à lames. Ce sont des pièces de suspension routières très sollicitées, utilisées par les véhicules de gros tonnage et dont la lame secondaire, assurant 80% de la fonction suspension en évitant des ruptures brutales.

### **I.6.3. Secteur du bâtiment**

Hormis le béton, les composites ont relativement peu pénétré le secteur du BTP, notamment du fait :

- D'un prix élevé comparé aux matériaux traditionnels (6 €/kg contre 3 €/kg pour l'acier et 1€/kg pour le bois),
- D'une relative méconnaissance des architectes et bureaux d'études vis-à-vis des composites,
- D'un manque d'information sur le cycle de vie (recyclabilité, durabilité).

Les qualités des composites (légèreté, résistance au feu, résistance mécanique et chimique), permettent de prévoir un développement prometteur. Les fournisseurs de solutions composites (Acome, Uniject, Gimm Menuiseries, Owens Corning, etc.) ont développé de nombreux produits présentés au salon JEC d'avril 2000 :

- ✓ Fenêtres,
- ✓ Portes
- ✓ Substituts d'ardoise
- ✓ Renforts de poutres

#### **I.6.4. Loisirs et sports**

Grace à leur légèreté, leur bonne tenue à la fatigue statique et dynamique et leur stabilité dimensionnelle, les matériaux composites sont des matériaux idéaux pour la fabrication et la conception de très nombreux articles de sports et de loisirs tel que les raquettes de tennis, les cannes à pêche et de hockey

Les constructeurs de matériels de sport et loisirs ont depuis longtemps adopté les composites, développés notamment par Shappe Technique et Ems Chimie (Suisse) ; ces nouveaux matériaux leur ont permis de faire preuve d'une grande créativité, tout en présentant des propriétés mécaniques intéressantes qui ont, dans une large mesure, été à l'origine du développement récent des sports de glisse modernes. (skis moulés et non stratifiés).

Le Pôle de Plasturgie de l'Est (PPE) à Saint Avold ou du SIAAP (Syndicat Interdépartemental pour l'Assainissement de l'Agglomération Parisienne) développe des matériaux composites pour leurs équipements de traitement des eaux.

#### **I.6.5. Autres domaines d'utilisation des composites**

Les matériels ferroviaires présentent de nombreuses possibilités d'utilisation des matériaux Composites

- Les développements récents de l'entreprise allemande d'équipements de trains pendulaires, Comtas (Allemagne), secteur d'excellence où les acteurs européens font maintenant front commun,
- Le projet de Bombardier-ANF de réaliser des wagons en structure composite.

L'adaptation de composites, dans l'industrie maritime, permet de diminuer le poids des structures de bateaux rapides (patrouilleurs, bateaux d'intervention ou de service) tout en ayant une résistance suffisante afin d'avoir pour résultat soit une augmentation de la vitesse

pour une puissance donnée, soit une meilleure rentabilité pour la même vitesse ou soit l'utilisation d'une motrice moins puissante et moins onéreuse.

L'équipement industriel (boîtes de stockage, isolation) et l'équipement électronique, représentent déjà 26% du marché des composites à matrice organique. Le potentiel plurifonctionnel des composites (alliant par exemple étanchéité et propriétés électriques) y est important. En électronique, les boîtiers céramiques pour microprocesseurs d'Égide, récemment introduits au Nouveau Marché, sont utilisés dans le monde entier.



Pales d'aérogénérateurs



Aéronautique

**Figure I.27.** Domaines d'application des matériaux composites [5]

Les composites jouent un rôle croissant dans le secteur dentaire (implants) et biomédical (matériaux prothétiques), en dépit de fortes contraintes de biocompatibilité, ainsi que dans la réalisation d'instruments de musique (pianos, clavecins, violons et mêmes accordéons).

### **I.6.6. Voies d'un développement durable**

Les composites devraient se développer dans les prochaines années. Cependant, pour y parvenir, l'industrie des matériaux composites devra intégrer les contraintes d'un développement durable.

Ainsi, à partir de 2004, 85 % du poids des véhicules hors d'usage devront être recyclés. Actuellement, il n'existe pas de solution technique pleinement opérationnelle et économiquement viable pour recycler les composites utilisés dans le secteur de l'automobile. Ces composites sont, pour l'essentiel, thermosettables.

Cet enjeu majeur pour la filière dépend d'une mobilisation de l'ensemble des acteurs et de leurs efforts de recherche de développement. Quelques initiatives industrielles se développent

en Europe, notamment Mecelec Composites et Recyclage en France, opérateur de la seule usine de recyclage de composites, et Ercom en Allemagne.

Techniquement, la valorisation des matériaux thermodurcissables peut passer par le broyage et l'utilisation des granulats obtenus sous forme de charges à très faible valeur ajoutée pour résines, bitumes et ciments. L'incinération dans les cimenteries constitue une seconde voie possible. Mais les impératifs de recyclage devraient favoriser l'utilisation de composites thermoplastiques, que l'on peut plus facilement retraiter.

Dans l'industrie nautique, le personnel est soumis aux émanations de Composés Organiques Volatils (COV, en particulier le styrène). En Europe, les industries scandinaves et allemandes appliquent des normes plus strictes qu'en France et militent pour une harmonisation des réglementations nationales. Le renforcement des normes actuellement en vigueur en France constituerait, pour les transformateurs en moule ouvert, une contrainte supplémentaire affectant leurs coûts.

Afin que les bureaux d'études utilisent davantage les matériaux composites, il faudra dans l'avenir mieux les caractériser. Cela permettra aux concepteurs de développer une analyse fonctionnelle qui intègre tous leurs apports. En effet, ces matériaux souffrent d'un défaut de modélisation et de normalisation face à des matériaux traditionnels comme l'acier, qui font l'objet de normes nationales ou européennes. Pour caractériser efficacement ces matériaux, des logiciels de conception et de modélisation doivent faire l'objet d'un développement plus large qu'aujourd'hui.

### **I.6.7. L'innovation aux cœurs du développement**

Pour les entreprises du secteur industriel, l'innovation est un moyen privilégié de répondre aux contraintes croisées de leurs fournisseurs et de leurs clients.

Certaines innoveront en mettant sur le marché de nouveaux produits :

- Résine.
- Semi-produits nouveaux plus sûrs et plus rapides.

D'autres développent de nouveaux procédés en mettant au point de méthodes ou outillages plus rapides et plus performants. Les entreprises doivent enfin innover en mettant en œuvre des outils de conception efficace. [5]

### **I.7. Avantages et inconvénients des composites**

Les composites sont préférés à d'autres matériaux parce qu'ils offrent des atouts liés à :

- ✓ Leur légèreté ;
- ✓ Leur résistance à la corrosion et aussi à la fatigue ;
- ✓ Leur insensibilité aux produits comme les graisses, les liquides hydrauliques, les peintures et les solvants ;
- ✓ Leur possibilité de prendre plusieurs formes, d'intégrer des accessoires et permettre la réduction de bruit.

Cependant certains inconvénients freinent leur diffusion :

- ✓ les coûts des matières premières et des procédés de fabrication;
- ✓ la gestion des déchets engendrés et la réglementation de plus en plus stricte.

L'industrie des matériaux composites doit donc aujourd'hui relever certains défis tels que :

- ✓ la maîtrise des émanations de produits organiques volatiles, par exemple le styrène;
- ✓ La maîtrise des procédés de transformations et des performances des matériaux qui sous-entend une très bonne connaissance des constituants mis en place;
- ✓ La mise en place de technologies et des filières pour la gestion des déchets en fin de vie qui est la partie la plus difficile à satisfaire en raison du caractère thermostable de la plupart des composites.

De plus, dans ce dernier point, le recyclage est actuellement très limité parce que le broyage ou les autres procédés sont très coûteux et fournissent une matière de faible qualité. Ces quelques inconvénients et défis à relever, ont poussé les chercheurs et les pouvoirs publics à investir et orienter les recherches vers les ressources renouvelables et biodégradables [9]

## **I.8. Conclusion**

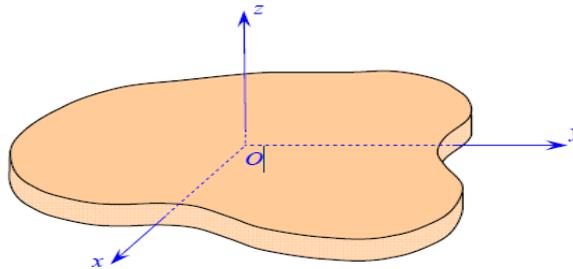
Ce chapitre a fait l'objet de généralités sur les matériaux composites, leurs propriétés physiques et mécaniques, le mode de fabrication des pièces en matériaux composites tel que le moulage, leur utilisation dans le secteur industriel tel que l'automobile, le sport et l'aéronautique...etc. Par ailleurs, nous avons décrit les différents types de matériaux et résines les plus utilisées dans l'industrie.

Nous nous intéressons dans les chapitres suivants aux différentes théories utilisées dans l'étude des plaques stratifiées en matériaux composites.

*Chapitre II :*  
*Investigation sur les*  
*différentes théories des*  
*plaques*

## II.1. Introduction

Une plaque est un solide limité par deux plans parallèles (figure II.1), dont la dimension transverse est petite en comparaison des deux autres dimensions. Il est alors possible de définir un plan de référence entre les deux plans extrêmes qui est pris comme plan  $(o_{xy})$ . L'axe  $o_z$  correspond à la direction suivant l'épaisseur.



**Figure II.1.** Élément de plaque. [4]

Les plaques composites stratifiées sont largement utilisées dans l'industrie et les nouveaux domaines de la technologie, où ils représentent une partie essentielle de la construction civile, militaire, aérospatiale, marine et automobile. Ces composants structurels, dans de nombreux cas, sont soumis à des différents types de chargements. Il est maintenant bien connu que, pour l'analyse de la stabilité des plaques, les effets de déformation de cisaillement sont importants en particulier pour les plaques épaisses ou même pour les plaques minces. [6]

Le travail demandé dans ce chapitre est de présenter les théories les plus utilisées qui décrivent le comportement des plaques stratifiées en matériaux composites, où on va suivre l'évolution de ces théories en illustrant les principes, les applications et l'insuffisance de chaque théorie.

## II.2. L'objectif de l'étude des plaques stratifiées en composites

Son objectif est de schématiser le comportement mécanique des plaques stratifiées, pour simplifier au mieux l'analyse de la structure. Nous verrons que cette simplification consiste à ramener le problème initialement à trois dimensions  $(x, y, z)$  à un problème à deux dimensions  $(x, y)$  de difficulté moindre. La théorie des stratifiés utilise les mêmes hypothèses que la théorie générale des plaques, hypothèses que nous développons dans ce chapitre.

### II.3. Secteur d'utilisation des plaques

L'utilisation des plaques est très répandue dans tous les domaines, en particulier dans le domaine du génie civil où, on les utilise dans les constructions simples (habitation) où les ouvrages d'art et elles existent sous formes différentes, y compris les circulaires et rectangulaires et d'autre formes selon l'ouvrage, Comme présentés dans la figure ci-dessous.



Constructions civiles



Ouvrages d'arts (plaques circulaire)

Ouvrages souterrains

**Figure II.2.** Les domaines d'applications.

### II.4. Loi de comportement

Un ensemble de lois de comportement a donc pour objectif de caractériser une classe limitée (même si elle est vaste) de milieux matériels soumis à certaines sollicitations

extérieures d'origine mécanique ou thermique. Ces lois sont évidemment déduites de l'expérience.

Il sera également demandé aux lois de comportement de respecter les symétries du milieu matériel étudié et de vérifier des conditions liées à la stabilité des équilibres.

### II.4.1. Loi de Hooke

Pour un milieu élastique linéaire la loi de comportement va relier les deux tenseurs de contraintes et déformations.

La loi que nous considérons est la forme  $\sigma = \varepsilon * k$ , ou  $k$  une fonction linéaire.

Alors la loi de Hooke généralisée s'écrit :  $\sigma = \varepsilon * E$  [10]

### II.4.2. Etat de contraintes et de déformations dans un solide

La notion de déformation d'un milieu continuait de la comparaison entre une configuration dite « initiale » et une configuration qualifiée de « finale ». Ce chapitre présente quelques notions générales portant sur les lois de comportement des milieux anisotropes et plus particulièrement des matériaux orthotropes et isotropes transverses parmi lesquels figurent les composites unidirectionnels. [11]

#### II.4.2.1. Tenseur des contraintes

En tout point P d'un milieu continu, l'état des contraintes est entièrement déterminé par la connaissance du tenseur des contraintes, noté  $\sigma_{ij}$  et représenté par la matrice :

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{II. 1})$$

#### II.4.2.2. Tenseur des déformations

Le tenseur des déformations s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{II. 2})$$

### II.4.2.3. Matrice de Rigidité

La relation d'élasticité linéaire est décrite par la loi de Hooke généralisée :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (\text{II.3})$$

Elle s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.4})$$

$C = [C_{ij}]$  est la matrice de Rigidité symétrique de 36 composantes

### II.4.2.4. Matrice de Souplesse

Peut-être écrite sous la forme inverse de la rigidité comme suite:

$$\epsilon = S \sigma$$

La matrice S est la matrice inverse de la matrice de rigidité C, et s'écrit dans le cas général comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.5})$$

$$\text{Avec : } S = C^{-1}$$

Les coefficients  $S_{ij}$  sont appelés constantes de souplesse.[12]

## II.5. Matériaux Anisotropes

L'anisotropie se dit d'un corps dont les propriétés varient suivant la direction ; par exemple, en optique cristalline, dans un cristal anisotrope (ou biréfringent), la vitesse de la

lumière est fonction de sa direction de propagation. Sous le microscope optique, ce phénomène se traduit par l'apparition de couleurs. Les matériaux composites sont généralement des anisotropes par opposition aux matériaux métalliques qui sont des isotropes. Par exemple, pour une nappe unidirectionnelle, la résistance et la rigidité sont beaucoup plus grandes dans le sens des fibres que dans les autres directions. La prise en compte de l'anisotropie est essentielle pour la conception et le dimensionnement d'une structure en matériaux composites car son comportement sera très différent de celui d'une structure isotrope de géométrie identique. Grâce à l'anisotropie on peut disposer les matériaux en fonction des états de chargement en chaque point, ce qui permet une réduction importante de la quantité en matière et donc du poids, critère vital en aéronautique et dans le domaine spatial. [11]

## II.6. Matériau Monoclinique

Un matériau monoclinique est un matériau qui possède un seul plan de symétrie. La forme de la matrice de rigidité (ou de souplesse) doit être telle qu'un changement de base effectué par symétrie par rapport à ce plan ne modifie pas la matrice. [12]

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 & 0 & c_{36} \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & c_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{54} & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{64} & c_{56} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (\text{II. 6})$$

La matrice de souplesse a la même forme. Le nombre de constantes d'élasticité indépendantes est réduit à 13.

## II.7. Matériau orthotrope

Un matériau orthotrope possède trois plans de symétrie, perpendiculaires deux à deux. Il est à noter que l'existence de deux plans de symétrie perpendiculaires implique l'existence du troisième : la forme de la matrice de rigidité est donc obtenue en ajoutant au matériau monoclinique un plan de symétrie perpendiculaire au précédent. L'invariance de la matrice dans un changement de base effectué par symétrie par rapport à ce deuxième plan conduit à une relation d'élasticité linéaire de la forme [13]

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.7})$$

La matrice de souplesse a la même forme. Le nombre de constantes d'élasticité indépendantes est réduit à 9.

## II.8. Matériau isotrope transverse

Un matériau isotrope transverse est un matériau orthotrope possédant de plus un axe de révolution et admet le plan comme plan d'isotropie. Il en résulte qu'un changement de base effectué par rotation quelconque autour de cet axe doit laisser inchangée la matrice de rigidité (ou de souplesse). D'où un matériau composite unidirectionnel qui peut être considéré comme un matériau isotrope transverse (Figure II.3.).

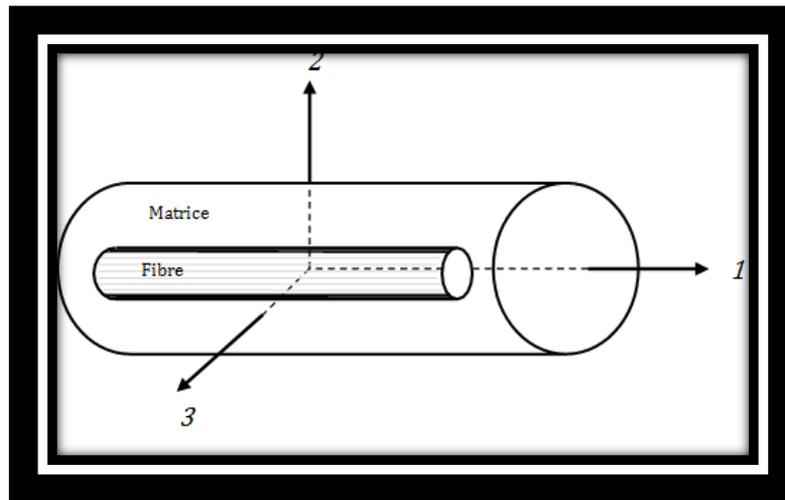


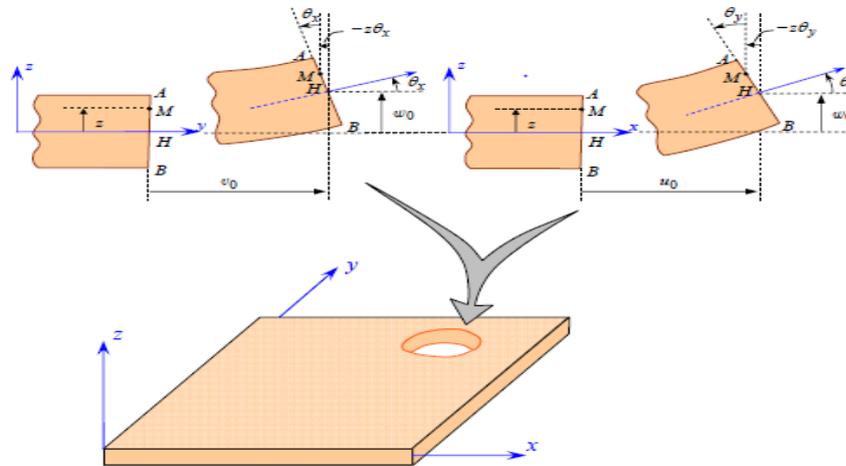
Figure II.3. Matériau composite unidirectionnel

## II.9. Théorie classique des plaques minces (CPT) ou Théorie de Love-Kirchhoff

En 1850, Kirchhoff a développé la plus connue des théories des plaques appelée « théorie classique des plaques »

Les hypothèses de Kirchhoff négligent le cisaillement transverse et l'effet de la déformation axiale dans la direction transversale, la déformation de la plaque est due

essentiellement à la flexion et aux déformations en plan (figure II.4), ce qui limite la validité de cette théorie aux plaques épaisses [14]



**Figure II.4.** Schématisation des déformations dans le cas de théorie classique [4]

### II.9.1. Les hypothèses cinématiques

- ✓ L'élément plaque est constitué par un nombre arbitraire de plis parfaitement liés les uns aux autres et dont les axes naturels ne coïncident pas obligatoirement avec les axes de références.
- ✓ L'épaisseur de l'élément est très faible par rapport aux deux autres dimensions (Longueur et largeur)
- ✓ Les déplacements U.V.W. sont faibles par rapport à l'épaisseur de h de l'élément.
- ✓ Les déformations  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  et  $\gamma_{xy}$  sont faibles
- ✓ Les déformations de cisaillement  $\gamma_{xz}$  et  $\gamma_{yz}$  sont négligeable
- ✓ Les déplacements U et V sont des fonctions linaires de z
- ✓ La déformation  $\varepsilon_z$  est négligeable.
- ✓ Les relations  $\sigma - \varepsilon$  dans chacun des plis sont conformes à la loi de Hooke
- ✓ L'épaisseur h de l'élément est constante
- ✓  $\tau_{xy}$  et  $\tau_{yz}$  sont nulles à la surface de l'élément ( $z = \pm \frac{h}{2}$ ) [15]

### II.9.2. Le champ de déplacement

La cinématique de cette théorie peut s'écrire d'une manière linéaire sous la forme suivante

$$(U, V, W): \begin{cases} U(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ V(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ W(x, y, z) = w_0(x, y) \end{cases} \quad (\text{II. 8})$$

Avec

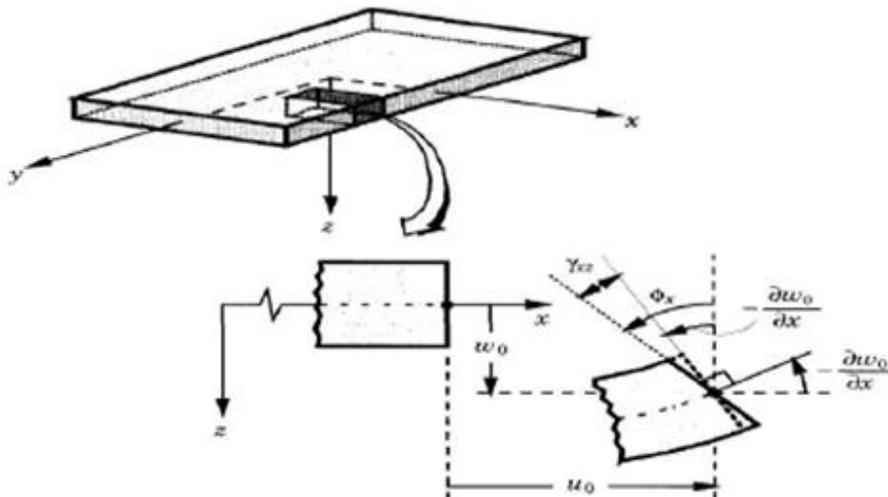
$u_0 ; v_0$  : Les déplacements de membrane dans les directions  $x$  et  $y$  respectivement

$w_0$  : La flèche de la plaque

$z \frac{\partial w_0}{\partial x} ; z \frac{\partial w_0}{\partial y}$  : Les rotations dues à la flexion (sans cisaillement).

## II.10. Théorie de déformation et de cisaillement de premier ordre (First Order Shear Deformation Theory FSDT)

Cette théorie appelé théorie de Mindlin est une extension des travaux de Timoshenko, et considérée comme une amélioration de la CPT. cette amélioration consiste à rajouter la déformation en cisaillement transverse dans les hypothèses cinématiques. la distribution de cette déformation en est supposée constante dans l'épaisseur .le champ des déplacements est alors suivant (fig. II.5)



**Figure II.5.** Schématisations de la déformation de la plaque dans le cas de FSDT de Reissner-Mindlin

### II.10.1. Le champ de déplacement

$$(U, V, W): \begin{cases} U(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + \psi \theta_x \\ V(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + \psi \theta_y \\ W(x, y, z) = w_0(x, y) \end{cases} \quad (\text{II.9})$$

Avec :

$\theta_x$  et  $\theta_y$  représentent les angles de rotation totale de la normale au plan moyen autour des axes x et y, respectivement (figure II.5), de tel sorte que :

$$\theta_x = \gamma_{xz}^0 + \frac{\partial w_0}{\partial x} ; \theta_y = \gamma_{yz}^0 + \frac{\partial w_0}{\partial y}$$

Où

$\gamma_{xz}^0$  et  $\gamma_{yz}^0$  les déformations de cisaillement transverse mesurées sur le plan moyen

$\Psi=Z;5$  variables ( $\theta_x; \theta_y; u_0; v_0; w_0$ )

Ainsi on introduit la notion de coefficient correcteur pour mieux prendre en compte ces effets de cisaillements transverses. En 2000, Choa a comparé l'énergie de cisaillement résultante de la théorie du premier d'ordre et celle déduite des équations d'équilibres de façon à obtenir des facteurs de corrections introduite dans FSDT.

### II.11. Théorie de déformation et de cisaillement d'ordre élevé (Higher Order Shear Deformation Theory HSDT)

À la différence de la théorie CPT et la théorie FSDT avec les acceptations de la distribution linéaire du déplacement par l'épaisseur, la théorie d'ordre élevé est basée sur une distribution non linéaire des champs dans l'épaisseur. Par conséquent, on tient compte des effets de la déformation transversale de cisaillement et/ou de la déformation normale transversale. Ces modèles n'exigent pas des facteurs de correction. Nous avons introduit ici quarts modèles de plaque utilisés pour analyser le comportement des matériaux composites [16]

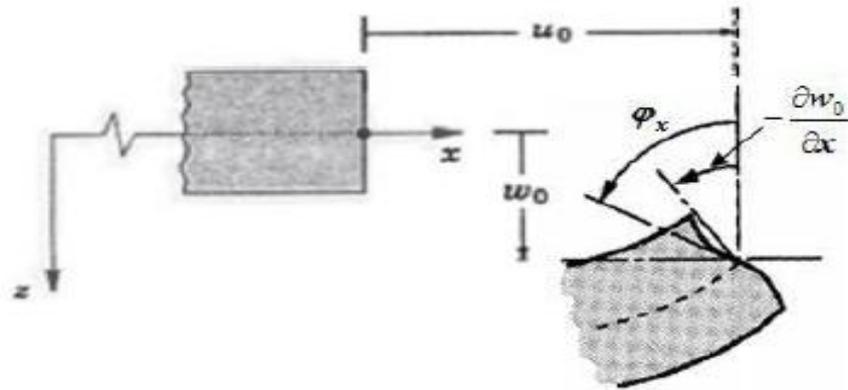


Figure II.6. Illustration de la plaque d'ordre élevé [17]

### II.11.1. Le champ de déplacement

$$(U, V, W): \begin{cases} U(x, y, z) = U_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + \psi(z)\theta_x \\ V(x, y, z) = V_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + \psi(z)\theta_y \\ W(x, y, z) = w_0(x, y) \end{cases} \quad (\text{II. 10})$$

Avec:  $\Psi$ : fonction de cisaillement

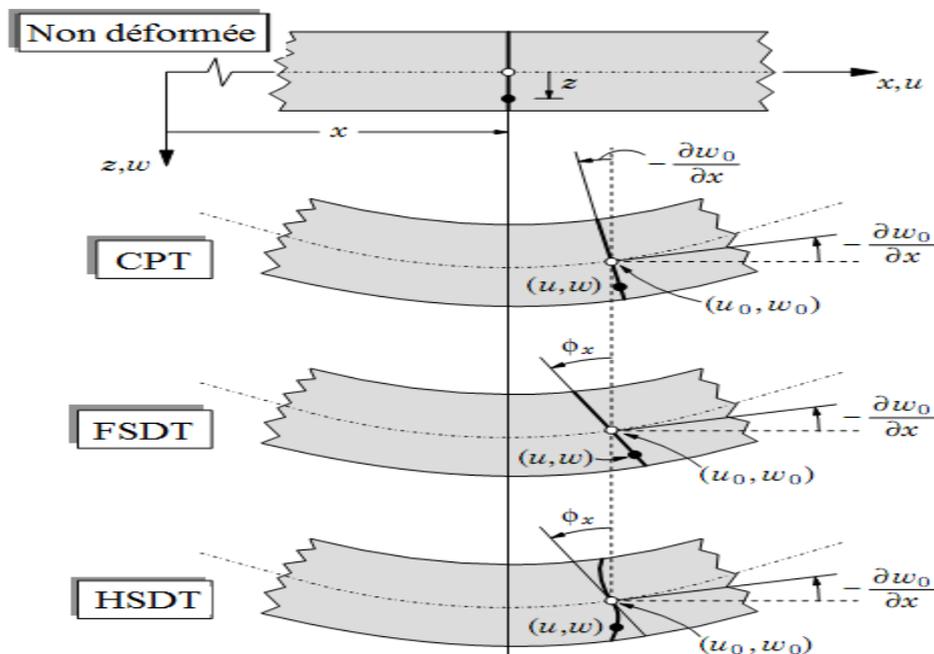


Figure II.7. Description de la déformation d'une plaque selon les théories classique (CLPT), premier ordre (FSDT) et d'ordre élevé (HSDT) [6]

## II.12. Théorie raffinée de déformation et de cisaillement d'ordre élevé (RSdT)

La théorie des plaques raffinées à quatre variables a été appliquée dans le présent travail pour l'analyse de comportement mécanique des plaques composites stratifiées en flambement. Cette théorie tient compte des effets de cisaillement transversal. Il est donc inutile d'utiliser des facteurs de correction de cisaillement

### II.12.1. Hypothèses de base de (RSdT)

- ✓ Les déplacements sont petits.
- ✓ Le déplacement transversal  $W$  contient deux composantes flexion et de cisaillement.
- ✓ La contrainte transversale normale  $\sigma_z$  est négligeable. [18]

### II.12.2. Le champ de déplacement

$$(U, V, W): \begin{cases} U(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ V(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ W(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) \end{cases} \quad (\text{II. 11})$$

Avec :

$w_b, w_s$ : les flèches de flexion et de cisaillement respectivement

$$f(z) = z - \psi(z):$$

La composante de flexion  $u_b$  est supposée être similaire au déplacement donné par la théorie de la plaque classique. Par conséquent, l'expression de  $u_b$  peut être donnée comme suit

$$u_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial x}$$

La composante de déplacement  $u_s$  dû à la déformation de cisaillement est supposée être parabolique, sinusoïdale, hyperbolique et exponentielle par rapport aux coordonnées d'épaisseur. Ainsi, la composante de cisaillement  $u_s$  donne lieu, à une liaison avec  $w_s$ , à une variation d'ordre élevé pour une déformation de cisaillement  $\gamma_{xz}$  et donc à la contrainte de cisaillement  $\tau_{xz}$  à travers l'épaisseur de la plaque de telle sorte que la contrainte de

cisaillement  $\tau_{xz}$  est nulle dans la partie supérieure et inférieure de la plaque. Par conséquent, l'expression de  $u_s$  peut être donnée comme suit :  $u_s = -f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x}$  [18]

La fonction  $f(z)$  associée à la distribution de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur de la plaque sont données dans le tableau II.1.

**Tableau II.1.** Exemple de forme des fonctions [18]

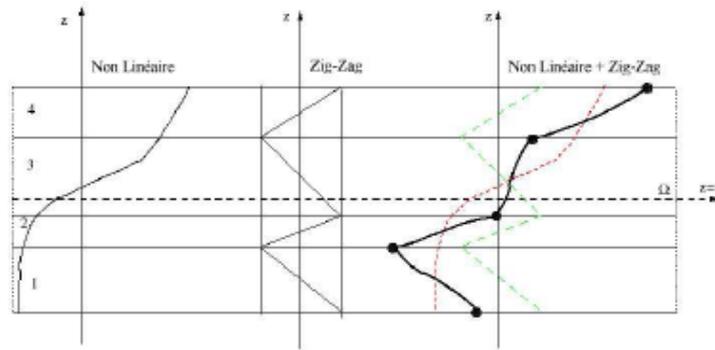
Modèle	Fonction $f(z)$
Modèle de Reddy	$f(z) = \frac{4z^3}{3h^2}$
Modèle de Touratier	$f(z) = z - \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)$
Modèle de Soldatos	$f(z) = z - h \sinh\left(\frac{z}{h}\right) + z \cosh\left(\frac{1}{2}\right)$
Modèle de Karama	$f(z) = z - ze^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}$

En effet, les déplacements de la théorie classique de plaque (CLPT) est obtenue en prenant  $f(z) = 0$ , alors que la théorie de premier ordre (FSDT) peut être obtenue par  $f(z) = z$

### II.13. Théorie de Zig-zag

Pour les modèles monocouches équivalentes, le nombre d'inconnues est indépendant du nombre de couches. Une autre piste de développement concerne l'utilisation de modèles dans lesquels on introduit une fonction qui prend en compte des perturbations des champs de déplacement aux interfaces [19]

Le déplacement reste continu suivant l'épaisseur. Cependant, la pente de la fonction de déplacement de chaque couche est différente. Ce changement en forme de Zig-Zag entre deux couches adjacentes parfaitement collées prétend prendre en compte de la différence des couches.



**Figure II.8.** Champ de déplacements du modèle zig-zag d'ordre élevé [6]

A travers notre lecture de la littérature en matière de théories d'ordre élevé, il apparaît que celles-ci sont certes intéressantes du point de vue précision, mais demeurent néanmoins coûteuses en temps de calcul et assez complexes en termes de formulations.

L'avantage principal du champ de déplacement des modèles zig-zag réside dans l'introduction de la perturbation de l'interface sans augmenter le degré de l'ordre des équations fondamentales de la théorie de couche équivalente.

Le modèle zig-zag assure un bon compromis entre la précision des solutions et le coût de calcul. Cependant quand l'éclatement diminue, le calcul des contraintes de cisaillement transverse devient moins précis. [21]

## II.14. Application de la théorie d'ordre élevé pour des structures composites

Les théories d'ordre élevé envisagées par certains auteurs sont applicables à certains types de problèmes (statique, dynamique, flambement, ...). La performance d'un élément fini est liée à la théorie utilisée. La théorie d'ordre élevé se distingue par son ordre polynomial, son nombre de coefficients ou de paramètres qu'elle engendre et le type d'élément qu'elle utilise. Kapania et Raciti [22] ont fourni une synthèse détaillée des théories de déformation de cisaillement utilisées dans la statique, vibration et l'analyse de flambement des poutres et des plaques composites. Sunôes [23] a proposé un élément quadrilatère à 9 nœuds et 10 degrés de liberté par nœuds. Les champs déplacements « $u$ » et « $v$ » sont cubiques par rapport à l'épaisseur et « $w$ » est constant. Il est particulièrement efficace pour calculer le flambage des plaques épaisses et minces. Le nombre de paramètres étant important, rend le calcul assez lourd. Kant et al [24] ont développé un élément basé sur la théorie d'ordre élevé raffinée (surtout sur les plaques sandwich). Ils ont défini un champ de déplacement de telle façon que

«  $u$ ,  $v$ ,  $w$  » soient cubiques par rapport à l'épaisseur. Chaque ensemble de deux couches successives est divisé en un certain nombre de sous-couches pour améliorer l'état de contrainte de cisaillement et avoir une continuité aux interfaces. Patel et al [25] ont traité une structure de coque assez compliquée géométriquement au 3<sup>ème</sup> ordre, afin d'améliorer l'état de déformation. Ils ont introduit l'effet de zig-zag qui assure la continuité sur les interfaces (le nombre de paramètres augmente avec le nombre de couches). Zen Wu et al [26] ont proposé une théorie intéressante du point de vue résultats sur les contraintes. Celle-ci assure la continuité sur les interfaces et les conditions nulles (en bas et en haut). Elle définit sur chaque couche un champ de déplacement différent et utilise 11 degrés de libertés par nœud. Elle est communément appelée « High order shear refined theory ». Daouadji et al [ [27] [28]] ont utilisé des théories d'ordre élevés pour étudier le comportement des structures (poutres et plaques) en matériaux composites et en matériaux FGM.

Toutes ces théories sont très intéressantes, d'une part pour traiter le problème de discontinuité des contraintes sur les interfaces et, d'autre part pour éviter l'utilisation des facteurs de correction de cisaillement. Les résultats obtenus sont globalement satisfaisants. Le seul reproche à faire à ce type de théories est qu'elles sont gourmandes en temps de calcul.

## II.15. Conclusion

Dans ce chapitre en fait une aperçu générale sur l'investigation des différents théories des plaques à savoir la théorie classique des plaques (CPT), la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT), la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT) et la théorie raffinée de déformation et de cisaillement d'ordre élevé (RSdT). Sa formulation est basée sur les hypothèses de chaque théorie dans une approche bidimensionnelle d'élasticité suivie par les équations cinématiques d'un point quelconque dans la plaque en fonction des déplacements généralisés.

Il est rare de trouver une théorie qui serait applicable à tous les cas possibles (isotrope, orthotrope, matériau composite, grand nombre des couches (stratifié), sandwich, etc...) et aux différents domaines (statique, dynamique et flambage), et qui de plus serait simple et facile et ne coûte pas chère en temps de calcul.

***Chapitre III :***  
***Etude de la flexion des***  
***plaques stratifiées en***  
***matériaux composites sous***  
***différents types de chargement***

### III.1. Introduction

Dans ce travail on utilise la théorie raffinée à quatre variables, où on présente la formulation mathématique des plaques orthotropes qui nous aide à résoudre le problème posé : champs de déplacement, les déformations, les équations constitutives et les équations d'équilibre, ces derniers sont obtenus en utilisant le principe des travaux virtuels, d'où, la flèche et les contraintes normales et tangentielles sont obtenues par la solution de Navier.

### III.2. Cinématique

Dans cette étude, des hypothèses simplificatrices sont considérées aux théories Théorie raffinée de déformation et de cisaillement d'ordre élevé (RSDT) conventionnelle afin de diminuer le nombre des variables inconnues. La cinématique des Théorie raffinée de déformation et de cisaillement d'ordre élevé (RSDT) conventionnelle est exprimé par :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f \frac{\partial w_s}{\partial y} \end{aligned} \quad (\text{III.1})$$

$$w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y)$$

Où  $u_0, v_0, w_b, w_s$  sont les quatre inconnues des déplacements de la surface moyenne de la plaque,  $f(z)$  représente la fonction de forme définissant la distribution des contraintes et des déformations de cisaillement transverse à travers l'épaisseur.

### III.3. Le champ de déformation

Les déformations sont calculées en dérivant l'équation (III.1) est donné par :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix}; \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} \quad (\text{III.2a})$$

Où

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}; \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}; \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix};$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ \frac{\partial w_s}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (\text{III. 2b})$$

$$\mathbf{f} = \frac{\left(\frac{z}{h}\right)^{(N-1)} z^N}{N}; \mathbf{g} = 1 - \frac{\partial f}{\partial z} \quad (\text{III. 2c})$$

### III.4. Equations Constitutives

Pour des plaques élastiques et orthotropes, les relations constitutives peuvent être exprimées par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.3a})$$

Où  $Q_{ij}$  présente des constantes élastiques en élasticité plane de la matrice de rigidité dans les axes principales de la plaque, et sont exprimé par :

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}; Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}; Q_{22} = \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}; Q_{66} = G_{12}; Q_{44} = G_{23}; Q_{55} = G_{13} \quad (\text{III.3b})$$

Etant donné que le stratifié est composé de plusieurs couches orthotropes orientés de manière arbitraire par rapport aux coordonnées principales du stratifié, les équations constitutives de chaque couche doivent être transformées en coordonnées du stratifié (x,y). Les relations contrainte déformation dans les coordonnées du stratifié de la  $K^{\text{ème}}$  couche sont donnés par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}^K = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix}^K * \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}^K \quad (\text{III. 4})$$

Où les rigidités sont données par :  $\bar{Q}_{ij}$

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11}\cos^4\theta + Q_{22}\sin^4\theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} - Q_{22} - 4Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{12}(\cos^4\theta + \sin^4\theta) \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{22} - 2Q_{66})\sin\theta\cos^3\theta + (Q_{12} - Q_{22} - 2Q_{66})\sin^3\theta\cos\theta \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11}\sin^4\theta + Q_{22}\cos^4\theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{22} - 4Q_{66})\sin^3\theta\cos\theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})\sin\theta\cos^3\theta \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2[Q_{66} + Q_{12}])\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{66}(\cos^4\theta + \sin^4\theta) \\ \bar{Q}_{44} &= Q_{44}\cos^2\theta + Q_{55}\sin^2\theta \\ \bar{Q}_{45} &= (Q_{55} - Q_{44})\cos\theta\sin\theta \\ \bar{Q}_{55} &= Q_{55}\cos^2\theta + Q_{44}\sin^2\theta \end{aligned} \quad (\text{III. 5})$$

### III.5. Equations gouvernantes

Dans cette étude, le principe des travaux virtuels est utilisé pour déterminer les équations d'équilibre. Ce principe peut être exprimé sous la forme analytique comme suit :

$$\delta U + \delta V = 0 \quad (\text{III.6})$$

Où  $\delta U$  est la variation de l'énergie de déformation ; et  $\delta V$  est la variation du travail extérieur engendré par les charges extérieurs appliqués à la plaque. La variation de l'énergie de déformation de la plaque est donnée par :

$$U = \frac{1}{2} \int_v (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dV \quad (\text{III. 7a})$$

$$U = \frac{1}{2} \int (N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_{xy} \delta \varepsilon_{xy}^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_y^b \delta k_y^b + M_{xy}^b \delta k_{xy}^b + M_x^s \delta k_x^s + M_y^s \delta k_y^s + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + S_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^s + S_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^s) dA = 0 \quad (\text{III. 7b})$$

D'où les efforts normaux  $N$  et les moments résultants  $M^b, M^s, S^s$  sont définis par :

$$(N_x, N_y, N_{xy}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) dz = \sum_{k=1}^{Np} \int_{z_k}^{z_{k+1}} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) dz$$

$$(M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) z dz = \sum_{k=1}^{Np} \int_{z_k}^{z_{k+1}} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) z dz \quad (\text{III. 8})$$

$$(M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) f dz = \sum_{k=1}^{Np} \int_{z_k}^{z_{k+1}} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) f dz$$

$$(S_{yz}^s, S_{xz}^s) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\tau_{yz}, \tau_{xz}) g dz = \sum_{k=1}^{Np} \int_{z_k}^{z_{k+1}} (\tau_{yz}, \tau_{xz}) g dz$$

La variation du travail extérieur peut être exprimé par :

$$V = \frac{1}{2} \int q \delta (w_b + w_s) dA$$

Où  $q$  est la charge appliquée.

Substituant l'équation (III.2) dans l'équation (III.7) et en intégrant suivant l'épaisseur de la plaque, les forces et les moments résultants sont donnés comme suit :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x^b \\ M_y^b \\ M_{xy}^b \\ M_x^s \\ M_y^s \\ M_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & B_{11}^s & B_{12}^s & B_{16}^s \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & B_{12}^s & B_{22}^s & B_{26}^s \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & B_{16}^s & B_{26}^s & B_{66}^s \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & D_{11}^s & D_{12}^s & D_{16}^s \\ B_{12} & B_{22} & B_{16} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & D_{12}^s & D_{22}^s & D_{26}^s \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & D_{16}^s & D_{26}^s & D_{66}^s \\ B_{11}^s & B_{12}^s & B_{16}^s & D_{11}^s & D_{12}^s & D_{16}^s & H_{11}^s & H_{12}^s & H_{16}^s \\ B_{12}^s & B_{22}^s & B_{26}^s & D_{12}^s & D_{22}^s & D_{26}^s & H_{12}^s & H_{22}^s & H_{26}^s \\ B_{16}^s & B_{26}^s & B_{66}^s & D_{16}^s & D_{26}^s & D_{66}^s & H_{16}^s & H_{26}^s & H_{66}^s \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \\ k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \\ k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} \quad (\text{III. 9a})$$

$$\begin{Bmatrix} S_{yz}^s \\ S_{xz}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44}^s & A_{45}^s \\ A_{45}^s & A_{55}^s \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} \quad (\text{III. 9b})$$

Où Les composantes de rigidité  $A_{ij}, B_{ij}$  etc....., sont définis par :

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, B_{ij}^s, D_{ij}^s, H_{ij}^s) = \sum_{k=1}^{Np} \int_{z_k}^{z_{k+1}} (\bar{Q}_{ij}(1, z, z^2, f, zf, f^2)) dz \quad \text{Où } (i, j) = (1, 2, 6) \quad (\text{III. 10a})$$

$$A_{ij}^s = \sum_{k=1}^{Np} \int_{z_k}^{z_{k+1}} (\bar{Q}_{ij}(g^2)) dz \quad \text{Où } (i, j) = (4, 5) \quad (\text{III. 10b})$$

Substituant les équations (III.7) dans l'équation (III.6) et intégrant par partie, mettant les coefficients  $\delta u_0, \delta v_0, \delta w_b, \delta w_s$ , nuls séparément on obtient les équations d'équilibres suivants :

$$\delta u_0: \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (\text{III.11a})$$

$$\delta v_0: \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0 \quad (\text{III.11b})$$

$$\delta w_b: \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + q = 0 \quad (\text{III.11c})$$

$$\delta w_s: \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} + \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + q = 0 \quad (\text{III.11d})$$

En remplaçant les équations (III.9) dans l'équation (III.11) les équations d'équilibre peuvent être exprimés en terme de déplacements  $\delta u_0, \delta v_0, \delta w_b, \delta w_s$ , prennent la forme suivante :

$$A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{16} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + 2A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - B_{11} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} - 3B_{16} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^2 \partial y} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial y^2} - B_{26} \frac{\partial^3 w_b}{\partial y^3} \quad (\text{III. 12a})$$

$$-B_{11}^S \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3} - 3B_{16}^S \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^2 \partial y} - (B_{12}^S + 2B_{66}^S) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x \partial y^2} - B_{26}^S \frac{\partial^3 w_s}{\partial y^3} = 0$$

$$A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + 2A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - B_{16} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^2 \partial y} - 3B_{26} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial y^2} - B_{22} \frac{\partial^3 w_b}{\partial y^3} \quad (\text{III. 12b})$$

$$-B_{16}^S \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3} - (B_{12}^S + 2B_{66}^S) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^2 \partial y} - 3B_{26}^S \frac{\partial^3 w_s}{\partial x \partial y^2} - B_{22}^S \frac{\partial^3 w_s}{\partial y^3} = 0$$

$$B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + 3B_{16} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2 \partial y} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + B_{26} \frac{\partial^3 u_0}{\partial y^3} + B_{16} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + 3B_{26} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x \partial y^2} + B_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} \quad (\text{III. 12c})$$

$$-D_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - 4D_{16} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^3 \partial y} - 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - 4D_{26} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x \partial y^3} - D_{22} \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4}$$

$$-D_{11}^S \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - 4D_{16}^S \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^3 \partial y} - 2(D_{12}^S + 2D_{66}^S) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} - 4D_{26}^S \frac{\partial^4 w_s}{\partial x \partial y^3} - D_{22}^S \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} - q = 0$$

$$\begin{aligned}
& B_{11}^S \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + 3B_{16}^S \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2 \partial y} + (B_{12}^S + 2B_{66}^S) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + B_{26}^S \frac{\partial^3 u_0}{\partial y^3} + B_{16}^S \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^3} \\
& + (B_{12}^S + 2B_{66}^S) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + 3B_{26}^S \frac{\partial^3 v_0}{\partial x \partial y^2} + B_{22}^S \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} \\
& - D_{11}^S \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - 4D_{16}^S \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^3 \partial y} - 2(D_{12}^S + 2D_{66}^S) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - 4D_{26}^S \frac{\partial^4 w_b}{\partial x \partial y^3} - H_{11}^S \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} \\
& - 4H_{16}^S \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^3 \partial y} - 2(H_{12}^S + 2H_{66}^S) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} - 4H_{26}^S \frac{\partial^4 w_s}{\partial x \partial y^3} - H_{22}^S \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} \\
& + A_{55}^S \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + A_{44}^S \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} + 2A_{45}^S \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} - q = 0
\end{aligned} \quad (\text{III. 12d})$$

### III.6. Solution analytique

Solution de Navier des plaques composites stratifiées simplement appuyées

#### III.6.1. Cas des composites stratifiées à plis croisés ( $0^\circ/90^\circ$ ) (cross-ply)

Les solutions de Navier peuvent être développés pour les stratifiées rectangulaires avec deux ensembles de conditions aux limites simplement appuyés, pour les stratifiées antisymétriques à plis croisés (cross-ply). Les rigidités de la plaque suivantes sont nulles.

$$A_{16} = A_{26} = D_{16} = D_{26} = D_{16}^S = D_{26}^S = H_{16}^S = H_{26}^S = 0$$

$$B_{16} = B_{26} = B_{66} = B_{16}^S = B_{26}^S = B_{66}^S = A_{45}^S = 0 \quad (\text{III.13})$$

$$B_{11} = -B_{22}; B_{11}^S = -B_{22}^S$$

Où les conditions aux limites peuvent être écrites comme suit :

$$v(0, y) = w_b(0, y) = w_s(0, y) = \frac{\partial w_b}{\partial y}(0, y) = \frac{\partial w_s}{\partial y}(0, y) = 0$$

$$v(a, y) = w_b(a, y) = w_s(a, y) = \frac{\partial w_b}{\partial y}(a, y) = \frac{\partial w_s}{\partial y}(a, y) = 0 \quad (\text{III.14a})$$

$$N_x(0, y) = M_x^S(0, y) = M_x^b(0, y) = N_x(a, y) = M_x^S(a, y) = M_x^b(a, y) = 0$$

$$u(x, 0) = w_b(x, 0) = w_s(x, 0) = \frac{\partial w_b}{\partial x}(x, 0) = \frac{\partial w_s}{\partial x}(x, 0) = 0$$

$$u(x, b) = w_b(x, b) = w_s(x, b) = \frac{\partial w_b}{\partial x}(x, b) = \frac{\partial w_s}{\partial x}(x, b) = 0 \quad (\text{III.14b})$$

$$N_x(x, 0) = M_x^s(x, 0) = M_x^b(x, 0) = N_x(x, b) = M_x^s(x, b) = M_x^b(x, b) = 0$$

Les conditions aux limites en équation (III.14) sont satisfaites par les expressions suivantes :

$$u_0(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} \cos(\lambda x) \sin(\mu y)$$

$$v_0(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} \sin(\lambda x) \cos(\mu y) \quad (\text{III.15})$$

$$w_b(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{bmn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y)$$

$$w_s(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{smn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y)$$

$U_{mn}, V_{mn}, W_{bmn}$  et  $W_{smn}$  sont des paramètres arbitraires à déterminer.

Navier a présenté la force externe sous la forme d'une double série trigonométrique :

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{mn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \quad (\text{III.16a})$$

Où  $\lambda = m\pi/a$  et  $\mu = n\pi/b$  et «m» et «n» sont les nombres de mode la  $q_{mn}$  coefficient dans le cas de charge uniformément répartie est définie comme suit :

$$q_{mn} = \begin{cases} \frac{16q_0}{mn\pi^2} \\ 0 \end{cases} \quad (\text{III.16b})$$

Où  $q_0$  représente l'intensité de la charge au centre de la plaque. Pour le cas de charge répartie sinusoïdale :

$$q(x, y) = q_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \quad (\text{III.16c})$$

Remplaçant les équations (III.13 et III.15) dans l'équation (III.12), la solution de Navier des stratifiées antisymétriques croisées peut être déterminée à partir de l'équation suivante :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{bmn} \\ W_{smn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ q \\ q \end{Bmatrix} \quad (\text{III.17})$$

Où:

$$a_{11} = A_{11}\kappa^2 + A_{66}\mu^2$$

$$a_{12} = (A_{11} + A_{66})\kappa\mu$$

$$a_{13} = -B_{11}\kappa^3$$

$$a_{14} = -B_{11}^S\kappa^3$$

$$a_{34} = D_{11}^S\kappa^4 + 2(D_{12}^S + 2D_{66}^S)\kappa^2\mu^2 \quad (\text{III.18})$$

$$a_{22} = A_{66}\kappa^2 + A_{22}\mu^2$$

$$a_{23} = B_{11}\mu^3$$

$$a_{24} = B_{11}^S\mu^3$$

$$a_{33} = D_{11}\kappa^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\kappa^2\mu^2 + D_{22}\mu^4$$

$$a_{44} = H_{11}^S\kappa^4 + 2(H_{12}^S + 2H_{66}^S)\kappa^2\mu^2 + H_{22}^S\mu^4 + A_{55}^S\kappa^2 + A_{44}^S\mu^2$$

### III.6.2. Cas des composites stratifiées à plis alternés et équilibrés

#### ( $\theta/-\theta$ ) (angle-ply)

Pour les stratifiées antisymétriques alternés et équilibrés (angle-ply), les rigidités suivantes de la plaque sont nulles :

$$A_{16} = A_{26} = D_{16} = D_{26} = D_{16}^S = D_{26}^S = H_{16}^S = H_{26}^S = 0$$

$$B_{11} = B_{12} = B_{66} = B_{11}^S = B_{12}^S = B_{66}^S = A_{45}^S = 0 \quad (\text{III.19})$$

Les conditions aux limites suivantes pour les stratifiées antisymétriques alternées et équilibrés peuvent être écrites comme :

$$v(0, y) = w_b(0, y) = w_s(0, y) = \frac{\partial w_b}{\partial y}(0, y) = \frac{\partial w_s}{\partial y}(0, y) = 0$$

$$v(a, y) = w_b(a, y) = w_s(a, y) = \frac{\partial w_b}{\partial y}(a, y) = \frac{\partial w_s}{\partial y}(a, y) = 0$$

$$N_{xy}(0, y) = M_x^s(0, y) = M_x^b(0, y) = N_{xy}(a, y) = M_x^s(a, y) = M_x^b(a, y) = 0$$

$$u(x, 0) = w_b(x, 0) = w_s(x, 0) = \frac{\partial w_b}{\partial x}(x, 0) = \frac{\partial w_s}{\partial x}(x, 0) = 0 \quad (\text{III. 20})$$

$$u(x, b) = w_b(x, b) = w_s(x, b) = \frac{\partial w_b}{\partial x}(x, b) = \frac{\partial w_s}{\partial x}(x, b) = 0$$

$$N_{xy}(x, 0) = M_y^s(x, 0) = M_y^b(x, 0) = N_{xy}(x, b) = M_y^s(x, b) = M_y^b(x, b) = 0$$

Les conditions aux limites en équation (III.20) sont satisfaites par les expressions suivantes :

$$u_0(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} \sin(\lambda x) \cos(\mu y)$$

$$v_0(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} \cos(\lambda x) \sin(\mu y) \quad (\text{III. 21})$$

$$w_b(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{bmn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y)$$

$$w_s(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{smn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y)$$

Remplaçant les équations (III.19 et III.21) en équation (III.12), l'équation (III.17) peut être résolue en utilisant les coefficients suivants :

$$a_{11} = A_{11}\Lambda^2 + A_{66}\mu^2$$

$$a_{12} = (A_{12} + A_{66})\Lambda\mu$$

$$a_{13} = -(3B_{16}\Lambda^2\mu + B_{26}\mu^3)$$

$$a_{14} = -(3B_{16}^S\Lambda^3\mu + B_{26}^S\mu^3)$$

$$a_{34} = D_{11}^S\Lambda^4 + 2(D_{12}^S + 2D_{66}^S)\Lambda^2\mu^2 + D_{22}^S\Lambda^4 \quad (\text{III.22})$$

$$a_{22} = A_{66}\Lambda^2 + A_{22}\mu^2$$

$$a_{23} = -(B_{16}\Lambda^3 + 3B_{26}\Lambda\mu^2)$$

$$a_{24} = -(B_{16}^S\Lambda^3 + 3B_{26}^S\Lambda\mu^2)$$

$$a_{33} = D_{11}\Lambda^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\Lambda^2\mu^2 + D_{22}\mu^4$$

$$a_{44} = H_{11}^S\Lambda^4 + 2(H_{12}^S + 2H_{66}^S)\Lambda^2\mu^2 + H_{22}^S\mu^4 + A_{55}^S\Lambda^2 + A_{44}^S\mu^2$$

### III.7. Conclusion

Dans le présent chapitre, nous avons présenté les différentes étapes de l'étude analytique du comportement en flexion des plaques composites soumises à différents types de chargement mécanique (sinusoïdale et uniformément répartie), en utilisant une nouvelle théorie raffinée d'ordre élevée (RSMT) à quatre variables, au lieu de cinq ou plus dans le cas des autres théories de déformation de cisaillement. Ce modèle n'exige pas un facteur de correction de cisaillement et donne une description parabolique des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur tout en satisfaisant les conditions de la nullité des contraintes de cisaillement sur les surfaces inférieure et supérieure de la plaque. Les résultats présentés dans le chapitre suivant permettant d'apprécier clairement l'apport de cette théorie.

*Chapitre IV:*  
*Validation et discussion des*  
*résultats*

## IV.1. Introduction

Dans ce chapitre nous allons présenter l'ensemble des résultats obtenus suite à l'exécution d'un programme de calcul pour déterminer le comportement mécanique en flexion des plaques stratifiées en matériaux composites. Ces résultats ont été obtenus grâce au code de calcul développé en langage Maple, en utilisant une nouvelle théorie raffinée de déformation et de cisaillement d'ordre élevé. Nous présenterons ces résultats d'étude statique en les confrontant avec ceux publiés dans la littérature. Les résultats de la flèche sont présentés sous forme des tableaux et des courbes.

Les caractéristiques mécaniques de la plaque utilisée dans cette étude sont :

Matériau 1:  $E_1=25E_2$  ;  $G_{12}=G_{13}=0.5E_2$  ;  $G_{23}=0.2E_2$  ;  $\nu_{12}=0.25$ .

Matériau 2:  $E_1=40E_2$  ;  $G_{12}=G_{13}=0.5E_2$  ;  $G_{23}=0.6E_2$  ;  $\nu_{12}=0.25$

La flèche adimensionnelle est obtenue par la formule :

$$\bar{w} = \frac{100h^3 E_2}{q_0 a^4} w \quad (\text{IV. 1})$$

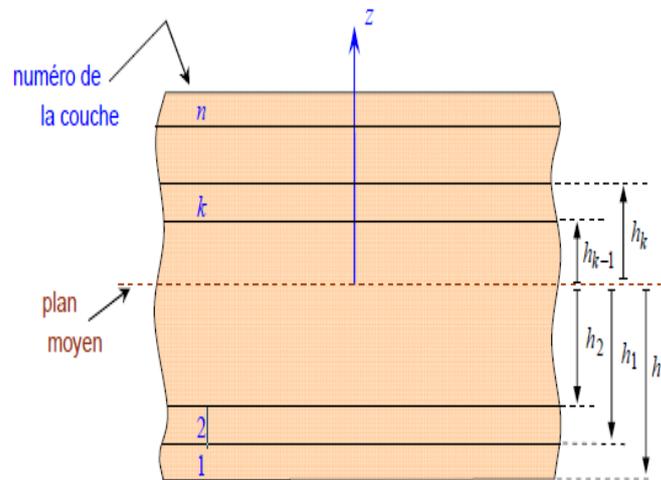


Figure IV.1. Élément de stratifié.

**Tableau IV.1.** Effet du rapport coté sur l'épaisseur  $a/h$  sur la variation de la flèche adimensionnelle  $\bar{w}$  d'une plaque carrée et rectangulaire stratifiée  $(45^\circ/-45^\circ)_1$  en matériaux composites sous chargement sinusoïdale.

Théorie	a/b	a/h=4		a/h=10		a/h=100	
		$\bar{w}$	Erreur (%)	$\bar{w}$	Erreur (%)	$\bar{w}$	Erreur (%)
Ren [29]	1	1.4471	-	0.6427	-	0.4685	-
HSDT		1.0203	-29.49	0.5581	-13.16	0.4676	-0.19
FSDT		1.1576	-20	0.5773	-10.19	0.4678	-0.149
Présente N=3		1.0203	-29.49	0.5581	-13.16	0.4676	-0.19
Présente N=5		1.0760	-25.64	0.5654	-12.02	0.4677	-0.17
Présente N=7		1.0877	-24.83	0.5667	-11.82	0.4677	-0.17
Présente N=9		1.0886	-24.77	0.5665	-11.85	0.4776	-0.19
Présente N=11		1.0865	-24.91	0.5661	-11.91	0.4776	-0.19
Ren	1/3	3.9653	-	2.3953	-	2.0686	-
HSDT		3.1560	-20.40	2.2439	-2.63	2.0671	-0.06
FSDT		3.3814	-14.72	2.2784	-4.88	2.0674	-0.07
Présente N=3		3.0971	-21.18	2.2324	-6.80	2.0670	-0.07
Présente N=5		3.1786	-19.83	2.2443	-6.30	2.0670	-0.07
Présente N=7		3.1920	-19.50	2.2460	-6.23	2.0670	-0.07
Présente N=9		3.1901	-19.54	2.2455	-6.25	2.0670	-0.07
Présente N=11		3.1845	-19.69	2.2445	-6.29	2.0670	-0.07

Le tableau IV.1 représente la variation de la flèche adimensionnelle  $\bar{w}$  d'une plaque carrée et rectangulaire stratifiée en matériaux composites  $(45^\circ/-45^\circ)_1$  sous chargement sinusoïdale en fonction du rapport coté sur l'épaisseur  $a/h$  et de l'ordre de la présente fonction de cisaillement d'ordre élevé ( $N=3,5,7,9$  et  $11$ ).

De la comparaison des résultats de la présente théorie raffinée d'ordre élevé de cisaillement transverse avec celles des autres théories : du premier ordre FSDT et d'ordre élevé (Reddy, Ren), d'où on constate une bonne convergence des résultats.

**Tableau IV.2.** Effet du rapport coté sur l'épaisseur  $a/h$  sur la variation de la flèche adimensionnelle  $\bar{w}$  et d'une plaque carrée stratifiée  $(0^\circ/90^\circ)_1$  en matériaux composites sous charge sinusoïdal

Théorie	$a/h$	$\bar{w}$	Erreur (%)
Exact	2	4.9362	–
HSDT		4.5619	-7.58
FSDT		5.4103	9.60
Présente N=3		4.5618	-8.07
Présente N =5		4.9230	-0.26
Présente N =7		4.9940	1.17
Présente N =9		4.9950	1.19
Présente N =11		4.9776	0.83
Exact		5	1.7287
HSDT	1.6670		-3.57
FSDT	1.7627		1.97
Présente N =3	1.6669		-3.57
Présente N =5	1.6995		-1.68
Présente N =7	1.701		-1.60
Présente N =9	1.6975		-1.80
Présente N =11	1.6920		-3.67
Exact	10		1.2318
HSDT		1.2161	-1.27
FSDT		1.2416	0.80
Présente N =3		1.2161	-1.27
Présente N =5		1.2232	-0.69
Présente N =7		1.2233	-0.69
Présente N =9		1.2222	-0.77
Présente N =11		1.2209	-0.88

Le tableau IV.2 représente la variation de la flèche adimensionnelle  $\bar{w}$  avec le degré de convergence des résultats entre les différentes théories de déformation et la théorie exacte d'une plaque carrée stratifiée  $(0^\circ/90^\circ)_1$  en matériaux composites en fonction du rapport coté sur l'épaisseur  $a/h$  sous charge sinusoïdale.

Les résultats de la présente théorie raffinée de cisaillement transverse d'ordre élevé sont presque identiques à celles obtenues en utilisant les autres théories : du premier ordre FSDT et d'ordre élevé (Exacte, HSDT). Sachant que la présente théorie inclut seulement quatre variables contre cinq ou plus dans les autres théories d'ordre élevé. De cette comparaison on conclut que la présente théorie est valide pour la détermination de la flèche des plaques stratifiées antisymétriques en matériaux composites.

**Tableau IV.3.** Effet de l'ordre de la fonction de cisaillement  $N$  sur la variation de la flèche adimensionnelle d'une plaque carrée stratifiée  $(0^\circ/90^\circ)_n$  en matériaux composites sous charge sinusoïdale.

Nombre de plis	N=3	N=5	N=7	N=9	N=11
$(0^\circ/90^\circ)_1$	1.2161	1.2233	1.2232	1.2222	1.2209
$(0^\circ/90^\circ)_2$	0.6865	0.6792	0.6737	0.6699	0.6672
$(0^\circ/90^\circ)_3$	0.6382	0.6338	0.6288	0.6252	0.6225
$(0^\circ/90^\circ)_4$	0.6238	0.6191	0.6146	0.6111	0.6085
$(0^\circ/90^\circ)_5$	0.6160	0.6126	0.6082	0.6049	0.6023
$(0^\circ/90^\circ)_6$	0.6123	0.6090	0.6048	0.6015	0.5989
$(0^\circ/90^\circ)_8$	0.6087	0.6055	0.6014	0.5981	0.5956
$(0^\circ/90^\circ)_{10}$	0.6070	0.6039	0.5998	0.5965	0.5941
$(0^\circ/90^\circ)_{16}$	0.6072	0.6047	0.6009	0.5978	0.5955
$(0^\circ/90^\circ)_{32}$	0.6044	0.6013	0.5973	0.5941	0.5917

**Tableau IV.4.** Effet de l'ordre de la fonction de cisaillement  $N$  sur la variation de la flèche adimensionnelle d'une plaque carrée stratifiée  $(0^\circ/90^\circ)_n$  en matériaux composites sous charge uniformément répartie.

Nombre de plis	N=3	N=5	N=7	N=9	N=11
$(0^\circ/90^\circ)_1$	1.9182	1.9281	1.9280	1.9263	1.9244
$(0^\circ/90^\circ)_2$	1.0707	1.0598	1.0518	1.0462	1.0423
$(0^\circ/90^\circ)_3$	0.9943	0.9874	0.9801	0.9748	0.9709
$(0^\circ/90^\circ)_4$	0.9700	0.9642	0.9575	0.9524	0.9486
$(0^\circ/90^\circ)_5$	0.9592	0.9538	0.9474	0.9424	0.9387
$(0^\circ/90^\circ)_6$	0.9534	0.9482	0.9419	0.9371	0.9334
$(0^\circ/90^\circ)_8$	0.9477	0.9427	0.9365	0.9318	0.9282
$(0^\circ/90^\circ)_{10}$	0.9451	0.9402	0.9340	0.9293	0.9257
$(0^\circ/90^\circ)_{16}$	0.9452	0.9412	0.9355	0.9310	0.7276
$(0^\circ/90^\circ)_{32}$	0.9409	0.9361	0.9301	0.9254	0.9219

**Tableau IV.5.** Effet de l'ordre de la fonction de cisaillement  $N$  sur la variation de la flèche adimensionnelle d'une plaque carrée stratifiée  $(45^\circ/-45^\circ)_n$  en matériaux composites sous charge sinusoïdale

Nombre de plis	N=3	N=5	N=7	N=9	N=11
$(45^\circ/-45^\circ)_1$	0.5581	0.5654	0.5667	0.5665	0.5661
$(45^\circ/-45^\circ)_2$	0.2956	0.2907	0.2871	0.2847	0.2829
$(45^\circ/-45^\circ)_3$	0.2745	0.2717	0.2686	0.2662	0.2645
$(45^\circ/-45^\circ)_4$	0.2677	0.2656	0.2627	0.2566	0.2589
$(45^\circ/-45^\circ)_5$	0.2647	0.2628	0.2601	0.2579	0.2563
$(45/-45^\circ)_6$	0.2631	0.2613	0.2586	0.2566	0.2550
$(45^\circ/-45^\circ)_8$	0.2615	0.2598	0.2572	0.2552	0.2536
$(45^\circ/-45^\circ)_{10}$	0.2608	0.2591	0.2566	0.2545	0.2530
$(45^\circ/-45^\circ)_{16}$	0.2590	0.2582	0.2560	0.2548	0.2528
$(45^\circ/-45^\circ)_{32}$	0.2596	0.2580	0.2555	0.2535	0.2520

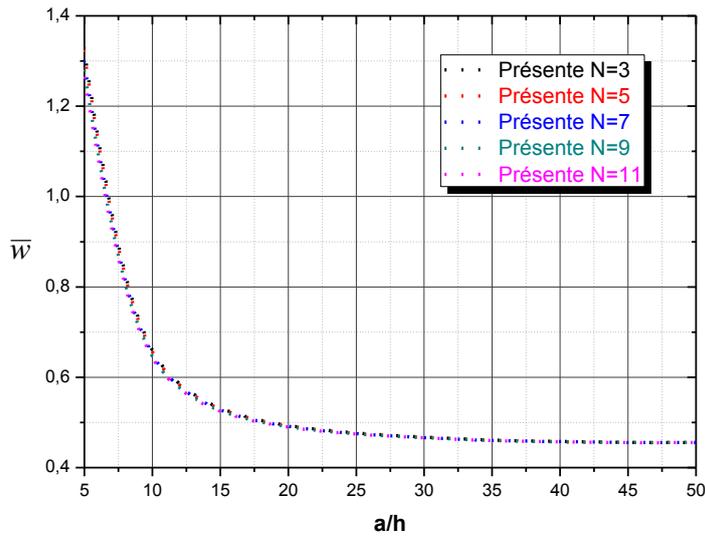
**Tableau IV.6.** Effet de l'ordre de la fonction de cisaillement  $N$  sur la variation de la flèche adimensionnelle d'une plaque carrée stratifiée  $(45^\circ/-45^\circ)_n$  en matériaux composites sous charge uniformément répartie

Nombre de plis	N=3	N=5	N=7	N=9	N=11
$(45^\circ/-45^\circ)_1$	1.2584	1.2569	1.2534	1.2520	1.2432
$(45^\circ/-45^\circ)_2$	0.7031	0.6922	0.6841	0.6786	0.6746
$(45^\circ/-45^\circ)_3$	0.6552	0.6489	0.6417	0.6364	0.6325
$(45^\circ/-45^\circ)_4$	0.6399	0.6347	0.6282	0.6232	0.6194
$(45^\circ/-45^\circ)_5$	0.6330	0.6283	0.6221	0.6172	0.6135
$(45^\circ/-45^\circ)_6$	0.6293	0.6249	0.6188	0.6141	0.6105
$(45^\circ/-45^\circ)_8$	0.6258	0.6215	0.6155	0.6109	0.6073
$(45^\circ/-45^\circ)_{10}$	0.6241	0.6200	0.6141	0.6094	0.6059
$(45^\circ/-45^\circ)_{16}$	0.6232	0.6200	0.6145	0.6101	0.6067
$(45^\circ/-45^\circ)_{32}$	0.6214	0.6174	0.6116	0.6070	0.6035

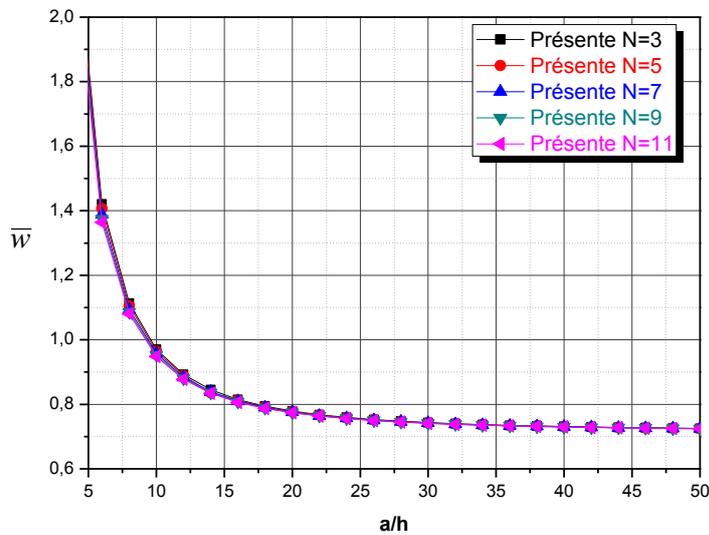
Les tableaux (IV.3 - IV.6) représentent la variation de la flèche adimensionnelle  $\bar{w}$  d'une plaque carrée stratifiée en matériaux composites  $(0^\circ/90^\circ)_n$  et  $(45^\circ/-45^\circ)_n$  en fonction de l'ordre de la fonction de cisaillement  $N$  sous charge sinusoïdale et uniformément répartie.

D'où on a constaté que la diminution de la flèche des plaques dépend de l'augmentation de séquence d'empilement ce qui est logique puisque lorsque le nombre de plis augmente, la rigidité de la plaque augmente (on prend  $a/b$  et  $a/h$  constants) ce qui conduit à la croissance de la résistance de la plaque vis-à-vis la flexion et qui devient par la suite plus stable.

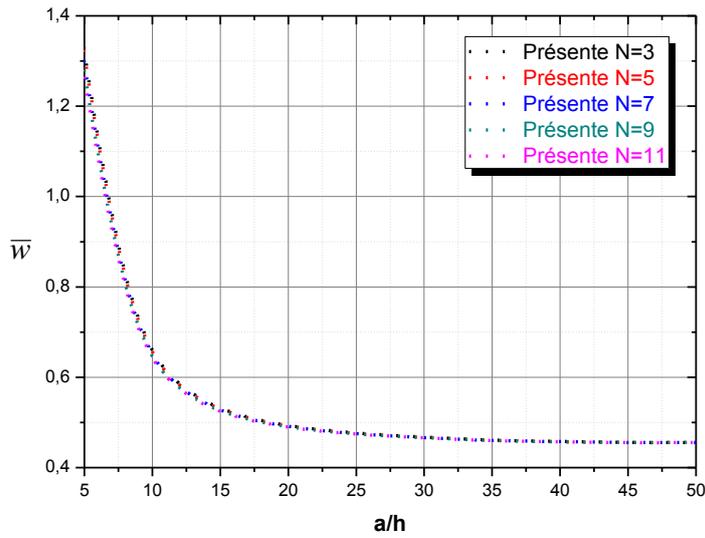
Dans cette étude on adopte des stratifiés de huit couches, puisque après cette valeur la variation de la flèche devient insignifiante, d'où on vise l'optimisation entre la résistance et l'économie.



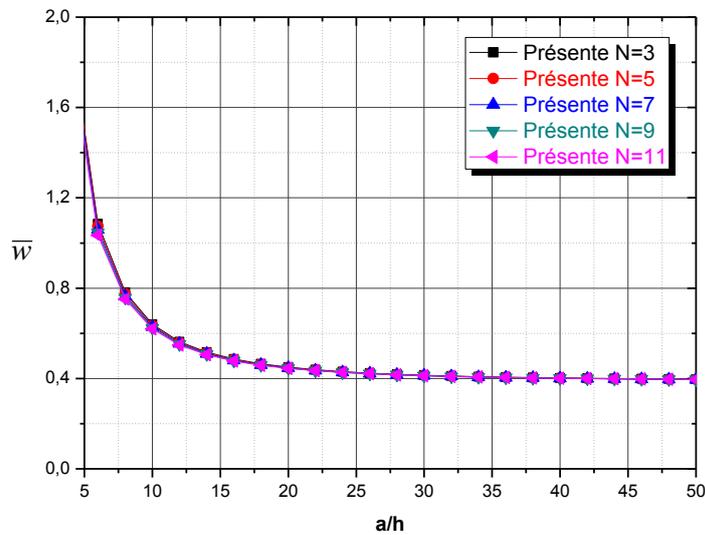
**Figure IV.2.** Effet de l'ordre de la fonction de cisaillement  $N$  sur la variation de la flèche adimensionnelle d'une plaque carrée stratifiée  $(0^\circ/90^\circ)_4$  en matériaux composites sous charge sinusoïdale.



**Figure IV.3.** Effet de l'ordre de la fonction de cisaillement  $N$  sur la variation de la flèche adimensionnelle d'une plaque carrée stratifiée  $(0^\circ/90^\circ)_4$  en matériaux composites sous charge uniformément répartie



**Figure IV.4.** Effet de l'ordre de la fonction de cisaillement  $N$  sur la variation de la flèche adimensionnelle d'une plaque carrée stratifiée  $(45^\circ/-45^\circ)_4$  en matériaux composites sous charge sinusoïdale



**Figure IV.5.** Effet de l'ordre de la fonction de cisaillement  $N$  sur la variation de la flèche adimensionnelle d'une plaque carrée stratifiée  $(45^\circ/-45^\circ)_4$  en matériaux composites sous charge uniformément répartie

Les figures (IV.2 - IV.5) représentent la variation de la flèche adimensionnelle  $\bar{w}$  d'une plaque carrée stratifiée en matériaux composites  $(0^\circ/90^\circ)_4$  et  $(45^\circ/-45^\circ)_4$  en fonction de l'ordre de la fonction de cisaillement  $N$  sous charge sinusoïdale et uniformément répartie.

D'où, nous observons que la flèche pour les plaques stratifiées en composites diminue lorsque le rapport coté sur épaisseur  $a/h$  augmente, c'est-à-dire, que les flèches sont maximales pour les plaques épaisses et minimales pour les plaques minces.

**Tableau IV.7.** Effet du rapport d'aspect  $a/b$  et d'angle d'orientation sur la variation de la flèche adimensionnelle  $\bar{w}$  d'une plaque carrée stratifiée en matériaux composites sous charge sinusoidale

Angle d'orientation	a/b	N=3	N=5	N=7	N=9	N=11
$(15^\circ/-15^\circ)_4$	0.5	0.7388	0.7341	0.7284	0.7239	0.7205
	1	0.5414	0.5380	0.5336	0.5303	0.5278
	1.5	0.3627	0.3599	0.3568	0.3544	0.3526
	2	0.2371	0.2355	0.2333	0.2316	0.2302
	2.5	0.1573	0.1561	0.1546	0.1533	0.1523
	3	0.1074	0.1066	0.1054	0.1045	0.1037
$(30^\circ/-30^\circ)_4$	0.5	0.8294	0.8241	0.8177	0.8127	0.8090
	1	0.4515	0.4481	0.4436	0.4402	0.4376
	1.5	0.2543	0.2522	0.2494	0.2471	0.2454
	2	0.1539	0.1526	0.1507	0.1492	0.1479
	2.5	0.0994	0.0986	0.0972	0.0962	0.0954
	3	0.0678	0.0673	0.0664	0.0655	0.0649
$(45^\circ/-45^\circ)_4$	0.5	1.0323	1.0262	1.0189	1.0133	1.0091
	1	0.4206	0.4172	0.4128	0.4094	0.4068
	1.5	0.2069	0.2051	0.2023	0.2002	0.1988
	2	0.1161	0.1153	0.1135	0.1123	0.1112
	2.5	0.0720	0.0715	0.0704	0.0695	0.0688
	3	0.0481	0.0478	0.0471	0.0464	0.0459
$(0^\circ/-90^\circ)_4$	0.5	1.1657	1.1595	1.1522	1.1466	1.1425
	1	0.6228	0.6191	0.6146	0.6111	0.6085
	1.5	0.2586	0.2565	0.2538	0.2517	0.2501
	2	0.1247	0.1236	0.1219	0.1206	0.1196
	2.5	0.0713	0.0708	0.0697	0.0688	0.0681
	3	0.0458	0.0457	0.0449	0.0443	0.0438

**Tableau IV.8.** Effet du rapport d'aspect a/b et d'angle d'orientation sur la variation de la flèche adimensionnelle  $\bar{w}$  d'une plaque carrée stratifiée en matériaux composites sous charge uniformément répartie

Angle d'orientation	a/b	N=3	N=5	N=7	N=9	N=11
$(15^\circ/-15^\circ)_4$	0.5	0.5109	0.5072	0.5025	0.4888	0.4960
	1	0.3501	0.3478	0.3450	0.3428	0.3412
	1.5	0.2265	0.2251	0.2235	0.2222	0.2211
	2	0.1463	0.1455	0.1444	0.1436	0.1429
	2.5	0.0964	0.0958	0.0950	0.0945	0.0940
	3	0.0652	0.0647	0.0642	0.0638	0.0635
$(30^\circ/-30^\circ)_4$	0.5	0.5529	0.5491	0.5443	0.5407	0.5379
	1	0.2884	0.2861	0.2833	0.2811	0.2794
	1.5	0.1562	0.1549	0.1532	0.1519	0.1509
	2	0.0919	0.0911	0.0900	0.0892	0.0885
	2.5	0.0581	0.0576	0.0569	0.0563	0.0559
	3	0.0390	0.0386	0.0381	0.0377	0.0374
$(45^\circ/-45^\circ)_4$	0.5	0.6608	0.6569	0.6528	0.6486	0.6459
	1	0.2676	0.2656	0.2627	0.2605	0.2589
	1.5	0.1318	0.1306	0.1290	0.1276	0.1266
	2	0.0742	0.0736	0.0725	0.0716	0.0710
	2.5	0.0460	0.0457	0.0450	0.0444	0.0439
	3	0.0307	0.0305	0.0301	0.0296	0.0293
$(0^\circ/-90^\circ)_4$	0.5	1.7495	1.7406	1.7302	1.7223	1.7164
	1	0.9700	0.9642	0.9575	0.9524	0.9486
	1.5	0.3934	0.3902	0.3862	0.3831	0.3808
	2	0.1825	0.1807	0.1783	0.1764	0.1749
	2.5	0.1002	0.0994	0.0978	0.0956	0.0956
	3	0.0624	0.0621	0.0621	0.0610	0.0595

**Tableau IV.9.** Effet du rapport d'aspect  $a/h$  et d'angle d'orientation sur la variation de la flèche adimensionnelle  $\bar{w}$  d'une plaque carrée stratifiée en matériaux composites sous charge sinusoïdale.

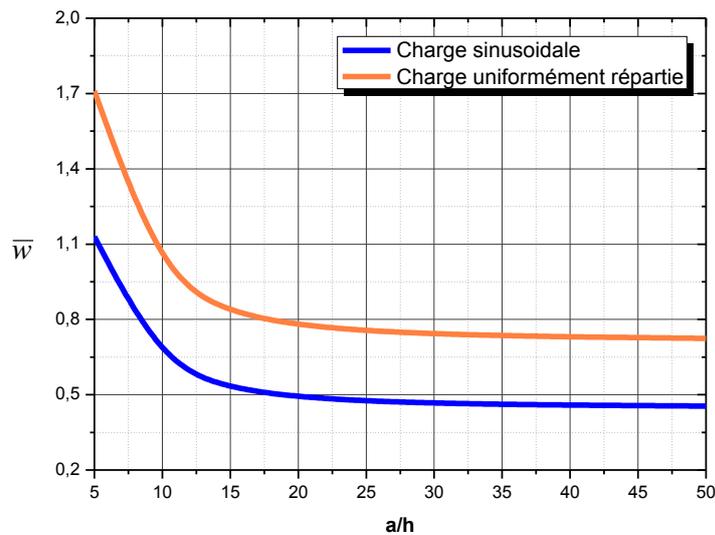
Angle d'orientation	a/h	N=3	N=5	N=7	N=9	N=11
$(15^\circ/-15^\circ)_4$	10	0.5414	0.5380	0.5336	0.5303	0.5277
	20	0.4109	0.4100	0.4088	0.4080	0.4073
	30	0.3866	0.3862	0.3857	0.3853	0.3850
	40	0.3781	0.3779	0.3776	0.3774	0.3773
	50	0.3742	0.3740	0.3739	0.3737	0.3736
$(30^\circ/-30^\circ)_4$	10	0.4515	0.4481	0.4436	0.4402	0.4376
	20	0.3208	0.3198	0.3187	0.3178	0.3172
	30	0.2965	0.2961	0.2956	0.2952	0.2949
	40	0.2880	0.2877	0.2875	0.2872	0.2871
	50	0.2841	0.2839	0.2837	0.2836	0.2835
$(45^\circ/-45^\circ)_4$	10	0.4206	0.4172	0.4128	0.4095	0.4069
	20	0.2900	0.2890	0.2870	0.2869	0.2863
	30	0.2656	0.2652	0.2646	0.2642	0.2640
	40	0.2571	0.2568	0.2565	0.2563	0.2561
	50	0.2531	0.2530	0.2528	0.2526	0.2525
$(0^\circ/-90^\circ)_4$	10	0.6228	0.6191	0.6146	0.6111	0.6085
	20	0.4917	0.4907	0.4895	0.4887	0.4880
	30	0.4674	0.4669	0.4664	0.4660	0.4657
	40	0.4588	0.4586	0.4583	0.4580	0.4579
	50	0.4549	0.4547	0.4545	0.4544	0.4543

**Tableau IV.10.** Effet du rapport d'aspect  $a/h$  et d'angle d'orientation sur la variation de la flèche adimensionnelle  $\bar{w}$  d'une plaque carrée stratifiée en matériaux composites sous charge uniformément répartie

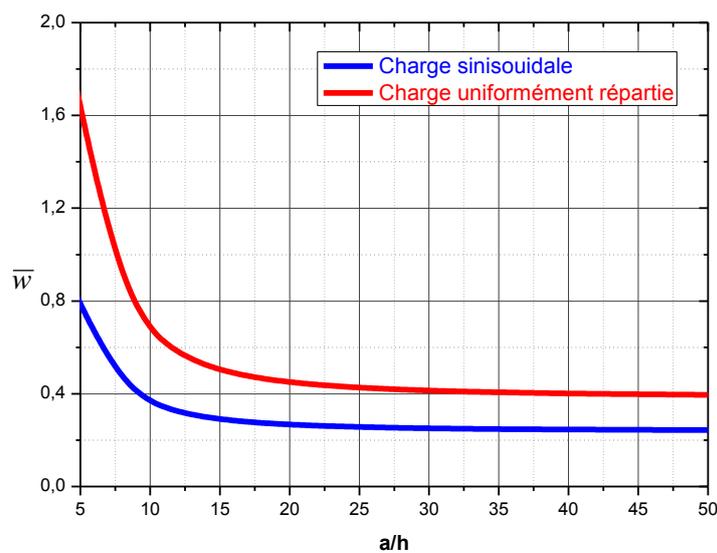
Angle d'orientation	$a/h$	N=3	N=5	N=7	N=9	N=11
$(15^\circ/-15^\circ)_4$	10	0.3501	0.3478	0.3450	0.3428	0.3412
	20	0.2669	0.2662	0.2655	0.2650	0.2646
	30	0.2514	0.2511	0.2508	0.2505	0.2504
	40	0.2460	0.2458	0.2456	0.2455	0.2454
	50	0.2435	0.2434	0.2433	0.2432	0.2431
$(35^\circ/-35^\circ)_4$	10	0.2884	0.2861	0.2833	0.2811	0.2794
	20	0.2051	0.2045	0.2037	0.2032	0.2027
	30	0.1896	0.1893	0.1890	0.1887	0.1885
	40	0.1842	0.1840	0.1838	0.1837	0.1836
	50	0.1817	0.1815	0.1814	0.1813	0.1813
$(45^\circ/-45^\circ)_4$	10	0.2677	0.2656	0.2627	0.2605	0.2589
	20	0.1845	0.1839	0.1831	0.1826	0.1822
	30	0.1690	0.1687	0.1684	0.1681	0.1680
	40	0.1636	0.1634	0.1632	0.1631	0.1630
	50	0.1611	0.1610	0.1609	0.1608	0.1607
$(0^\circ/-90^\circ)_4$	10	0.9700	0.9642	0.9575	0.9524	0.9486
	20	0.7788	0.7773	0.7756	0.7744	0.7734
	30	0.7434	0.7427	0.7419	0.7414	0.7410
	40	0.7310	0.7306	0.7302	0.7298	0.7296
	50	0.7252	0.7250	0.7247	0.7245	0.7243

Les tableaux (IV.7 - IV.10) représentent la variation de la flèche adimensionnelle d'une plaque stratifiée en matériaux composites en fonction de l'angle d'orientation des plis et de la

fonction de cisaillement d'ordre  $N$ . D'où, La flèche diminue en fonction de l'augmentation de rapport d'aspect  $a/b$ , ou ils sont maximaux pour les plaques courtes et minimales pour les plaques élancées. Il est à noter que le choix de l'orientation est conditionné principalement par la géométrie de plaque qui joue un rôle principal dans résistance aux charges mécaniques de la plaque. Quel que soit l'orientation choisie ou la géométrie utilisée (le rapport d'aspect  $a/b$ ), les flèches sont minimales pour le cas  $((15^\circ/-15^\circ)_4; (30^\circ/-30^\circ)_4$  et  $(45^\circ/-45^\circ)_4$ ) et maximales pour le cas  $(0^\circ/90^\circ)_4$ , où la rigidité de la plaque dépend de l'orientation choisie.



**Figure IV.6.** Variation de la flèche adimensionnelle d'une plaque carrée stratifiée  $(0^\circ/90^\circ)_4$  en matériaux composites sous charge sinusoïdale et charge uniformément répartie



**Figure IV.7.** Effet de l'ordre  $N=5$  sur la variation de la flèche adimensionnelle d'une plaque carrée stratifiée  $(45^\circ/-45^\circ)_n$  en matériaux composites sous charge sinusoïdal et charge répartie

Les figures (IV.6 et IV.7) représentent la variation de la flèche adimensionnelle  $\bar{w}$  d'une plaque carrée stratifiée en matériaux composites  $(0^\circ/90^\circ)_4$  et  $(45^\circ/-45^\circ)_4$  et en fonction de l'ordre  $N=5$  sous charge sinusoïdale et charge uniformément répartie

De la comparaison des résultats obtenues on constate que la flèche due à la charge sinusoïdale est supérieure à celle dû à la charge uniformément répartie.

## IV.2. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les résultats numériques de l'analyse de la flexion des plaques stratifiées en matériaux composites en utilisant une nouvelle théorie raffinée de déformation de cisaillement d'ordre élevé de fonction de cisaillement d'ordre  $N$  à quatre variables. Cette théorie a été développée dans le chapitre précédent. Tous les résultats obtenus sont en bon accord avec ceux de la littérature. Par conséquent, on peut conclure que la théorie proposée est précise pour résoudre le problème de la flexion des composites stratifiées.

*Conclusion générale et  
Perspectives*

## Conclusion générale et perspectives

L'objectif de ce mémoire est de proposer une nouvelle théorie raffinée de déformation et de cisaillement qui prend en considération l'effet de cisaillement transverse pour l'analyse du comportement en flexion des plaques stratifiées en matériaux composites.

Cette étude est basée sur une théorie de cisaillement raffinée de quatre variables, les équations d'équilibre des plaques en matériaux composites ont été étudiées. Cette théorie d'ordre élevé donne une variation parabolique aux contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur sans l'aide des facteurs de correction de cisaillement et satisfait les conditions de nullité de ces contraintes de cisaillement sur les faces supérieure et inférieure de la plaque. Pour montrer l'efficacité de la présente théorie, les résultats obtenus par cette analyse sont comparés avec des résultats existants dans la littérature.

Pour cela une étude paramétrique a été effectuée pour examiner l'influence de l'angle d'orientation, le rapport coté sur épaisseur  $a/h$ , le rapport d'aspect  $a/b$ , l'ordre de la fonction de cisaillement  $N$  ( $N=3,5,7,9,11$ ), sur la flèche adimensionnelle des plaques stratifiées antisymétriques en matériaux composites.

Basant sur l'étude précédente on peut tirer les conclusions suivantes :

- ✓ La présente théorie peut fournir des résultats de flèche adimensionnelle presque identiques avec les autres théories d'ordre élevé pour toutes types de plaques (minces ou bien épaisses) ;
- ✓ La flèche pour les plaques stratifiées en composites diminue par l'augmentation du rapport d'aspect  $a/b$ , c'est-à-dire que la flèche est minimale pour les plaques élancées ;
- ✓ La flèche des plaques stratifiées en composites diminue lorsque le rapport coté sur épaisseur  $a/h$  augmente, c'est-à-dire que les flèches sont maximales pour les plaques épaisses et minimale pour les plaques minces ;
- ✓ L'orientation des fibres influe directement sur la déformation de plaque en composite ;
- ✓ L'augmentation de la séquence d'empilement conduit à l'augmentation de la rigidité de la plaque et par conséquent la diminution de la flèche. Pour ce paramètre, il est à noter qu'il faut équilibrer entre la résistance et l'économie.
- ✓ La flèche due à la charge sinusoïdale est supérieure à celle dû à la charge uniformément répartie.

En conclusion, on peut dire que la présente théorie raffinée proposée est précise, simple et efficace pour résoudre le comportement en flexion des plaques stratifiées en matériaux composites sous différents types de chargement (sinusoïdale et uniformément répartie).

En perspective à ce travail, nous envisageons d'étudier l'utilisation de la nouvelle théorie pour les cas suivants :

- ✓ Utilisation de la théorie raffinée pour d'autres types de plaques telles que les plaques sandwichs ;
- ✓ Etudes d'autres types de structures comme les poutres ;
- ✓ L'influence de la température sur les plaques stratifiées.

## *Références bibliographiques*

**Références bibliographiques**

- [1] m. Marc et c. pascal, Les matériaux composites, ANFA, 2014.
- [2] N. KAOUCHE, prise en compte du vieillissement et de l'endommagement dans le dimensionnement de structures en matériaux composites, Oran, 2016.
- [3] B. Bakhouch, caractérisation d'un matériau composite stratifié à fibre de verre /époxy en flexion trois points statiques, ANNABA, 2018.
- [4] J. M. Berthelot, Mécaniques des matériaux et structures composites, Le Mans: ISMANS, 2010.
- [5] M. Laarej, Etude par spectroscopie raman et modélisation d un résine composite RTM, Tlemcen, 2010.
- [6] B. ADIM, «Etude de la stabilité des plaques en matériaux composites : analyse et modélisation», Tiaret, 2016.
- [7] z. e. a. ould el hacen, renforcement du béton par les matériaux composites, tébessa, 2016.
- [8] L. Penn et H. Wang, Epoxy Rein, London: S.T.Peters, 1998.
- [9] H. Manel, Etude numérique avec comparaison expérimentale des propriétés thermophysiques des matériaux composites à matrice polymère, Batna, 2011.
- [10] h. CHERIDI, «analyse dynamique des plaques minces et épaisses:application aux matériaux homogènes et non homogènes,» constantine.
- [11] S. KASKASE, «ETUDE DE L'EFFET DU CISAILLEMENT TRANSVERSE SUR LE COMPORTEMENT MECANIQUE,» CONSTANTINE, 2010.
- [12] j. COIRIER, «mécanique des milieux continus,» Dunod, PARIS, 2001.
- [13] V. VASILIEV et E. MAROSOV, «Mechanic and analysis of composite materials,» EL siviér science.LTD, OXFORD-UK, 2001.
- [14] m. e. a. DERRADJ et m. BOUSALEM, «analyse de flexion et de flambage d'une plaque composite semi-épaisse à gradient fonctionnel renforcée par du nanotubes en carbone,» blida, 2018.

- [15] S.G.Lekhnitskii, «anisotropes plates,» Gordan&Braech science publisher, London, 1968.
- [16] A. Boukhari, «Application des théories à ordre élevé de déformation de cisaillement pour l'étude du comportement mécanique des plaques épaisses,» Sidi Belabbès, 2015.
- [17] J. N. Reddy, *Mechanics of Laminated Composites Plates: Theory and Analysis.* ., 1997.
- [18] T. BECHRI, «Analyse du flambement des plaques stratifiées antisymétriques croisées par la théorie à d'ordre élevé,» RNGC, BEJAIA, 2014.
- [19] H. M. Berrabah, B. E. A. Adda et A. Tounsi, «Comparaison des différentes théories de poutre non locale raffinée pour la flexion et l'analyse du flambement des nano-poutres,» *journal of materials and engineering structures*, pp. 2-13, 2016.
- [20] E. Carrera, « Theories and finites elements for multilayered, anisotropic, composite plate and shel,» *Archive of Computational Methods in Engineerin*, 2002.
- [21] K. NEDRI, « Analyse de la vibration libre des plaques composites sur fondation élastique,» SIDI BEL ABBES., 2016.
- [22] R. Kapania et S. Raciti, «Recent advances in analysis of laminated beams and plates,Part I : Shear effects and buckling,» *AIAA Journa*, pp. 923-934, 1989.
- [23] j. Sunôes et M. Moita, « Buckling behaviour of laminated composite structures using a discrete higher-order displacement model », 1996.
- [24] T. Kant et K. Swaminathan, «« Estimation of transverse/interlaminar stresses in laminated composites a selective review and survey of current developments,» *Composite structures*, pp. 65-75, 2000.
- [25] B. Patel, C. Munot, S. Gupta, G. Sanbanson et M. Ganapatthi, «Application of higher-order finite element for elastic stability analysis of laminate cross-ply oval cylindrical shells »,» *Finite Elements in Analysis and Design*, pp. 1083-1104, 2004.
- [26] Z. Wu et Chen.W, «An efficient higher-order theory and finite element for laminated plates subjected to thermal loading”,» *Composite Structures*, pp. 99-109, 2006.
- [27] T. Hassaine Daouadji, A. Tounsi, L. Hadji, A. Hadj Henni et E. A Adda Bedia, «« A theoretical analysis for static and dynamic behavior of functionally graded plates»,» *Materials Physics and Mechanics journal*, pp. 110-128, 2012.
- [28] H. Hebali, A. Tounsi, S. Houari, A. Bessaim et E. Adda Bedia, «« A new quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates »,» *ASCE J*, pp. 374 - 383, 2014.

- [29] S.-E. Kim, «A two variable refined plate theory for laminated composite plates,» *Composite Structures*, n° 1197-205, p. 203, 2009.
- [30] G. Asmaa., *Analyse statique des plaques stratifiées en matériaux composites*, Tissemsilt, 2019.

## Résumé

La présente recherche consiste à analyser la flexion des plaques stratifiées antisymétriques en matériaux composites, en utilisant une nouvelle théorie raffinée d'ordre élevé avec une Fonction de cisaillement d'ordre  $N$  à quatre variables contre cinq variables dans les autres théories d'ordre élevé.

Parmi les avantages de cette nouvelle théorie : Elle prend en considération l'effet de cisaillement dans le calcul des déformations sans recours à des facteurs de correction de cisaillement et qui donne lieu à une variation parabolique des contraintes de cisaillement suivant l'épaisseur en satisfaisant les conditions de nullité de ces contraintes de cisaillement aux surfaces (supérieure et inférieure) de la plaque.

Les résultats numériques obtenus par la présente théorie de cisaillement d'ordre élevé prédit avec une précision des flèches adimensionnelles tout en les comparant avec les autres solutions des théories d'ordre élevé disponibles dans la littérature.

À la lumière des résultats obtenus nous pouvons dire que la présente théorie raffinée de cisaillement d'ordre élevé est précise et efficace pour étudier la flexion des plaques stratifiées antisymétriques en matériaux composites.

**Mots clés :** Matériaux composites, plaque stratifiée, flèche, théorie raffinée d'ordre élevé, Cisaillement transverse. Fonction de cisaillement d'ordre  $N$ .

---

## Abstract

The present research consists in analyzing the bending of antisymmetric laminated plates in composite materials, using a new refined high order theory with  $N$ th order shear function that includes four variables against five in the other high order theories.

Among the advantages of this new theory: It takes into account the shear effect in the calculation of the strains without recourse to shear correction factors and which gives rise to a parabolic variation of the shear stresses along the thickness while satisfying the null condition of these shear stresses at the faces (upper and lower) of the plate.

The numerical results obtained by the present high order shear theory accurately predict dimensionless deflection while comparing them with other solutions of high order theories available in the literature.

In the light of the obtained results we can say that the present refined theory of high order shear stress is precise and efficient to study the bending of antisymmetric laminated composite plates.

**Keywords:** Composite materials, laminated plate, deflection, refined high order theory, Transverse shear.  $N$ th order shear function.

---

## ملخص

يتكون البحث الحالي من تحليل انحناء الألواح المكسدة غير المتماثلة المصنوعة من المواد المركبة ، باستخدام نظرية جديدة ذات الترتيب العالي باستخدام دالة من الدرجة نون مع أربعة متغيرات مقابل خمسة متغيرات في النظريات ذات الترتيب العالي الأخرى

من مزايا هذه النظرية الجديدة: أنها تأخذ في الاعتبار تأثير القص في حساب التشوهات دون اللجوء إلى عوامل تصحيح القص والتي تؤدي إلى إجهادات القص العرضي بشكل قطع مكافئ وفقاً للسمك مع استيفاء شروط انعدام إجهادات القص على الأسطح (العلوية والسفلية) من اللوحة

تتنبأ النتائج العددية التي تم الحصول عليها من خلال نظرية القص عالية الترتيب الحالية الانحناء بدقة أثناء مقارنتها بالحلول الأخرى للنظريات عالية الترتيب المتوفرة في الأدبيات

في ضوء النتائج التي تم الحصول عليها يمكننا القول أن النظرية المكررة الحالية للقص عالية الترتيب دقيقة وفعالة لدراسة انحناء الألواح المكسدة غير المتماثلة المصنوعة من المواد المركبة

**الكلمات المفتاحية:** المواد المركبة ، الألواح المكسدة ، الانحناء ، نظرية مكررة ذات الترتيب العالي، القص العرضي، دالة القص من الدرجة نون.