



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique
Université de Tissemsilt



Faculté des Sciences et de la Technologie
Département des Sciences et de la Technologie

Mémoire de fin d'études pour l'obtention du diplôme
de Master académique en

Filière : **Génie Civil**

Spécialité : **Structures**

Présenté par : Bennouar Lamia

Mehenni Linda

Thème

**Effet de déformation de cisaillement
transverse sur la stabilité des plaques
simplement appuyées**

Soutenu le,

Devant le Jury :

BOUZRIBA Asma	Président	M.C.B.	Univ-Tissemsilt
BOURADA Fouâd	Encadreur	M.C.B.	Univ-Tissemsilt
BOUZID Haytham	Examineur	M.C.B.	Univ-Tissemsilt

Année universitaire : 2020-2021

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Remerciements

Remerciements

Nous tenons d'abord remercier ALLAH le tout puissant de nous avoir donné la volonté et la santé... pour réaliser ce travail.

Nous exprimons nos profonds remerciements à notre encadreur Dr. BOURADA Fouâd qu'il nous a apporté d'une aide précieuse, à sa disponibilité et sa gentillesse et nous le remercions pour ses conseils.

Enfin, on adresse aussi notre remerciement aux membres de jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre recherche.

Nous tenons à exprimer un remerciement tout spécial à nos très chère Mamans et nos tant aimé Papas.

Résumé

Résumé

Ce travail présente une étude analytique sur l'analyse de la stabilité des plaques épaisses isotropes et fonctionnellement graduées soumises à plusieurs types de chargement axial. Le modèle développé tient en compte l'effet de la déformation de cisaillement transverse et contient seulement quatre variables inconnues. Ce modèle est basé sur une nouvelle fonction de gauchissement hyperbolique inverse qui a sur les conditions aux limites à la surface libre de la plaque (supérieure et inférieure). Les propriétés des matériaux utilisés sont calculées suivant des fonctions des lois de puissance dans la direction de l'épaisseur de la plaque. Les équations d'équilibre sont déterminées et résolues par le principe des travaux virtuels et la procédure de Navier, respectivement. La validité et l'efficacité de la formulation proposée sont vérifiées en comparant les résultats obtenus avec ceux trouvés dans la littérature. Plusieurs études sont présentées pour examiner les effets de l'indice de matériaux, rapport de géométrie et de dimensions et le type de chargement sur la charge critique des flambements des plaques isotropes et fonctionnellement graduées simplement appuyées.

Mots clés : plaque fonctionnellement graduée, flambement, théorie de déformation de cisaillement, principe des travaux virtuels, procédure de Navier, charge critique de flambement.

Abstract

Abstract

This work presents an analytical investigation on the stability analysis of isotropic and functionally graded thick plates subjected to several types of axial loads. The developed model takes into account the transverse shear deformation effect and contains only four unknown variables. This model is based on a novel inverse hyperbolic warping function which ensures the boundary conditions at the free surfaces of the plate (top and bottom). The properties of the used materials are computed according to a power law function in the direction of plate thickness. The stability equations are determined and resolved via virtual works principle and Navier procedure, respectively. The validity and efficiency of the proposed formulation are checked by comparing the obtained results with those found in the literature. Several studies are presented to examine the effects of the material index, geometry and aspect ratio and loading type on the critical buckling load of simply supported isotropic and functionally graded plate.

Keywords: functionally graded plate, buckling, shear deformation theory, virtual work principle, Navier procedure, critical buckling load.

ملخص

ملخص

عرض هنا العمل درس تخليق بوليثين ان هياكل ان س ك ح ان م ي ديج اف متدرج ح وظف المعارضه لوج اواع م ه
ن ذمى الخ ان م ن ز ح، ر ه ي ذ ج ل م ط و ز "أخرت ع ه الاعا زنتا لث ش ي القص العرضي و يحتو في قظ على أربع ح مج ا م
مت غ س ج. ول اى م ي ذ ج يرتكز على دالة هيباربولى كية عكسية تخرج ان ت ت ض م ه ن ل س و ط ان م ن ذ ج ف ان م س ا د ا ن ل س ج
ن ه ص ف ذ ح) العى ح ن و س ل ف و ح (تم د س ا ب خى ا ص ن ا م ي ا د المستعمل ح د سة د و ا ل ا س ح ف ل ن ج ا ي س م ل ظ ن ص ر ف ذ ح. تم ت ذ د و
حل معادلات التاشن عن طريق م بدأ الأعم الفل ق م س و ح و ط س ق و ا ف ي ه ن ان ت ي ان ت م ا ت ذ ق ق م ه فعالية و ه ي ان ي م ي ذ ج
ل ق م س ح ت ق ا و ح ل ه ت ل ج ل م ن ص م ع ه ا م غ ل ه ي ج ي ج م ه ق م. ت م ق د م ع ج ذ ل ل ا خ ل ا ه ت ا ز ن ت ل س ا خ ا م م ل م ا ج، الأعداد
ان ه ي س ح و وى ع ان ف م ن ح على ان ن ه ي ح ان ذ س ج ن ل و ث ع ا ج ن ص ف ل ا خ ل م ي د ي ج و ل م ن و ج ح و ظ ف ا ل م د ع م ح ت م س ل ط ح.
الكل م ل ه ت م ف ت ا ح ية ل ن ص ر ف ا ن ج م ت د ر ج ح و ظ ف ا، ال و ث ع ا ج و ظ س ن ش ي ل ن ق ض، ن ه د ا الأعم ل ا ت س ض ح س ل ط ح و ا ف،
ان ذمى ح ان ذ س ج ل و ث ع ا ج.

Table des matières

Table des matières

Remerciement	I
Résumé	III
Abstract	V
ملخص	VII
Table des matières	IX
Liste des figures	XIV
Liste des tableaux	XVI
Liste des notations et symboles	XVIII
Introduction générale	2
<i>Chapitre I : Généralités sur les matériaux Fonctionnellement Gradués</i>	
<i>(FGM)</i>	
I.1 Introduction	7
I.2 Les matériaux composites	7
I.2.1 Définition de matériau composite	7
I.2.2 Composition de matériau composite	8
I.2.2.1 Les Matrices	8
I.2.2.2 Les Renforts	8
I.2.3 Architecture des matériaux composites	9
I.2.3.1 Monocouche	9
I.2.3.2 Stratifiée	9
I.2.3.3 Sandwichs	10
I.3 Matériaux à gradient fonctionnel (FGM)	11
I.3.1 Définition des FGM	11
I.3.2 Histoire du Développement Architectural du Concept FGM	11
I.3.3 Concept des matériaux à gradient de propriétés	13
I.3.4 Les procédés pour le traitement des FGM	17
I.3.5 Les domaines d'application des FGM	18
I.3.6 L'application de FGM dans le domaine du génie civil	20
I.3.6.1 Le Béton à gradient de propriétés	20
I.3.6.2 Autres matériaux à gradient de propriétés	20
I.3.7 Champs d'utilisation les FGM	21

I.3.7.1 Aéronautique	21
I.3.7.2 Matières industrielles	21
I.3.7.3 Optoélectronique	21
I.3.7.4 Biomatériaux	22
I.3.7.5 D'autres domaines	22
I.3.8 Comparaison des matériaux FGM et les matériaux composites traditionnels	22
I.3.9 Propriétés matérielles effectives d'un matériau FGM	24
I.3.10 Lois de distribution des propriétés matérielles des plaques FGM	25
I.3.10.1 Propriétés matérielles de la plaque P-FGM	27
I.3.10.2 Propriétés matérielles de la plaque S-FGM	28
I.3.10.3 Les propriétés matérielles de la plaque E-FGM	29
I.4 Conclusion	30

Chapitre II: Les théories des plaques

II.1 Introduction	32
II.2 Définition des plaques	32
II.3 Domaine d'utilisation les plaques	32
II.4 Classement des théories de déformation en cisaillement	33
II.5 Théories des plaques	34
II.5.1 Théorie classique des plaques (CPT), ou la théorie de Love-Kirchhoff	34
II.5.2 Théorie des plaques du premier ordre (FSDT), ou la théorie de Reissner-Mindlin	35
II.5.2.1 Le coefficient de correction	36
II.5.3 Théorie des plaques d'ordre élevée (HSDT)	37
II.6 Théories raffinées d'ordre élevé	42
II.7 Conclusion	42

Chapitre III : Formulations théoriques

III.1 Introduction	44
III.2 Analyse du comportement mécanique des plaques FGM	44
III.2.1 Propriétés des matériaux	44
III.2.1.1 Plaque P-FGM	44
III.3 La nouvelle théorie des plaques raffinées à quatre variables	45
III.4 Cinématiques et les équations gouvernantes	46
III.4.1 Champ de déplacement	46

III.4.2 Champs de déformation	46
III.4.3 Les contraintes	48
III.5 Les équations gouvernantes	48
III.5.1 Les équations gouvernantes de la plaque	49
III.5.2 Formulation des équations différentielles	49
III.6 Solution analytique pour les plaques FG simplement appuyées	50
III.7 Conclusion	52

Chapitre IV : Résultats et discussions

IV.1 Introduction	54
IV.2 Résultats numériques et discussions	54
IV.2.1 Analyse du flambement des Plaques simplement appuyées en FGM	54
IV.3 Conclusion	69
Conclusion générale	71
Références bibliographiques	73

Liste des figures

Liste des figures

Chapitre I : Généralités sur les matériaux Fonctionnellement Gradués (FGM)

Figure I.1: Schéma illustratif d'un matériau composite	7
Figure I.2: Les différentes familles de matrices.	8
Figure I.3: Les différentes familles de renforts.	9
Figure I.4: Matériau composite monocouche.	9
Figure I.5: Matériau composite stratifié.	10
Figure I.6: Matériau sandwiches à âme pleine.	10
Figure I.7: Illustration de la hiérarchie de FGM.	12
Figure I.8: Exemples des FGM naturelles.	13
Figure I.9: Différentes exigences des propriétés des matériaux dans différents endroits (Hopkinson et al. 2006).	14
Figure I.10: Variation des propriétés matérielles à travers l'épaisseur d'une plaque carrée : (a) variation discrète et continue, (b) variation non continue.	15
Figure I.11: Concept des matériaux à gradient de propriétés (Boch et al. 1986).	16
Figure I.12: Protection thermique (Houari, 2011).	17
Figure I.13: Technique d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés.	18
Figure I.14: Les principaux domaines d'application des FGM.	19
Figure I.15: Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels (Koizumi, 1993).	23
Figure I.16: La distribution des composantes des matériaux Yoshihisa (2004).	24
Figure I.17: Variation continue de la microstructure (schématisée).	25
Figure I.18: Matériaux FGM avec des fractions volumiques des phases constitutives Graduées (Yin et al. 2004).	25
Figure I.19: Géométrie d'une plaque FGM.	26
Figure I.20: Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.	28
Figure I. 21: Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.	29
Figure I.22: Variation du module de Young dans une plaque E-FGM.	30

Chapitre II: Les théories des plaques

Figure II.1: Schéma d'une plaque FGM.	32
Figure II.2: Des exemples d'utilisation des FGM en génie civil.	33
Figure II.3: Illustration de la plaque de Love-Kirchhoff.	34
Figure II.4: Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin.	35
Figure II.5: Approximations de la contrainte du CT : constante (théorie du premier ordre) et quadratique (ordre supérieur).	36
Figure II.6: Illustration de la plaque d'ordre élevé (Reddy, 1997).	37
Figure II.7: Comparaison de la HSDT avec CPT et FSDT.	38
Figure II.8: Variation de la fonction de forme $f(z)$ des différents modèles en fonction de l'épaisseur.	39
Figure II.9: Variation de la dérivée de la fonction de forme $f(z)$ des différents modèles suivant l'épaisseur.	40

Chapitre III : Formulations théoriques

Figure III.1: Géométrie de la plaque en FGM.	45
---	----

Chapitre IV : Résultats et discussions

Figure. IV.1: Géométrie d'une plaque FGM.	54
Figure IV.2: La variation de la charge critique adimensionnelle du flambement \bar{N}_{cr} d'une plaque FG rectangulaire en fonction de l'indice de puissance et le type de chargement avec ($a/b=0.5$) et le rapport ($a/h=10$).	65
Figure IV.3: La variation de la charge critique adimensionnelle du flambement \bar{N}_{cr} d'une plaque FG carrée en fonction du rapport a/h	66
Figure IV.4: La variation de la charge critique adimensionnelle du flambement \bar{N}_{cr} d'une plaque FG carrée en fonction du rapport E_c/E_m avec ($p=1$).	67
Figure IV.5: La variation de la charge critique adimensionnelle du flambement \bar{N}_{cr} en fonction du rapport de géométrie a/h avec ($p=1$).	68

Liste des Tableaux

Liste des Tableaux

Chapitre II : Les théories des plaques

Tableau II.1: Différentes fonction de forme de théorie des plaques isotropes	40
---	----

Chapitre IV : Résultats et discussions

Tableau IV.1: Propriétés du céramique et métal.	55
Tableau IV.2: Comparaison des charges critiques de flambement (\hat{N}_{cr}) des plaques carrées Al/SiC avec ($a/h=10$).	56
Tableau IV.3: Comparaison des charges critiques de flambement (\bar{N}_{cr}) des plaques Al/Al ₂ O ₃ .	57
Tableau IV.4: Comparaison des charges critiques de flambement non-dimensionnelles (\hat{N}_{cr}) pour des plaques rectangulaires isotropes simplement supportées sous compression uni-axiale le long de la direction x .	59
Tableau IV.5: Comparaison des charges critiques de flambement non-dimensionnelles pour des plaques rectangulaires isotropes simplement supportées sous compression uni-axial le long de la direction y .	60
Tableau IV.6: Comparaison des charges critiques de flambement non-dimensionnelle (\hat{N}_{cr}) pour des plaques rectangulaires isotropes simplement supportées sous compression bi-axiale.	62
Tableau IV.7: Comparaison des charges critiques de flambement N_{cr} (MN/m) d'une plaque rectangulaire entièrement FGM.	64

*Liste des notations
et symboles*

Liste des notations et symboles

$\{ \}$	Vecteur colonne.
$[]$	Matrice.
Σ	Sommation.
\int	Intégrale.
a, b	La longueur et largeur de la plaque.
H	L'épaisseur de la plaque.
V_c	Fraction volumique.
P	Indice de fraction volumique.
P_m	Propriété du métal.
P_c	Propriété de la céramique.
ν	Le coefficient de Poisson.
E	Module de Young.
$E(z), E_c, E_m$	Les modules d'élasticité du FGM, céramique, métal.
$\gamma_{xz}, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}$	Composantes de déformation.
$\tau_{xz}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$	Contrainte de cisaillement.
σ_{xx}, σ_{yy}	Contrainte normale.
N	L'effort normal.
M	Le moment de flexion dans la plaque.
M^b	Le moment de flexion dans la plaque.
M^s	Moment supplémentaire dus au cisaillement transverse.
$f(z)$	Fonction de forme.
u, v, w	Les composantes du déplacement suivant les directions x, y, z
u_b, v_b, w_b	Déplacements du à la flexion.
u_s, v_s, w_s	Déplacements du au cisaillement.
x, y, z	Les coordonnées cartésiennes rectangulaires.
ϕ_x, ϕ_y	Les rotations autour les axes x, y .
u_0, v_0, w_0	Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de La plaque.
$u_{mn}^0, v_{mn}^0, w_{bmn}^0, w_{smn}^0$	Les coefficients de déplacement maximum inconnus.
$g(z)$	Dérivée de la fonction de cisaillement.
A, B, D, B^S, D^S, H^S	Les composantes de rigidité.

Q_{ij}	Coefficients de rigidités.
k^b	Les courbures de la plaque due à la flexion.
k^s	Les courbures de la plaque due au cisaillement.
δU	L'énergie de déformation virtuelle.
δV	Le travail virtuel externe.
∂	Dérivée partielle.
λ, μ	Les pulsations.
m, n	Des nombres naturels.
$f(z)$	Fonction de gauchissement hyperbolique inverse.
$\delta u, \delta v, \delta w$	Champ virtuel de déplacement.
S_{xz}, S_{yz}	Effort de cisaillement.
K	Facteur de correction.
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Déformation dans la direction x, y et z.
ε^0	Les déformations en membrane.
$N_{cr}, \bar{N}, \hat{N}_{cr}$	Les charges critiques.

Abréviations

<i>FGM</i>	Matériau fonctionnellement gradué.
<i>Al</i>	L'aluminium.
<i>Al₂O₃</i>	Oxyde d'aluminium.
<i>Al / Sic</i>	Alliage aluminium carbure de silicium.
<i>CPT</i>	Théorie classique Love-Kirshoff.
<i>FSDT</i>	La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre.
<i>HSDT</i>	Théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé.
<i>RPT</i>	Théorie raffinée des plaques
<i>3-D</i>	Tridimensionnelle.

Introduction générale

Introduction générale

Le monde industriel est en évolution permanente et une quête dans le perfectionnement de la recherche. Cette perfection être réalisé grâce à le progrès de la science qui a atteint des résultats de la recherche scientifiques, ce qui permet la conception des procédures de développements industriels.

Les matériaux sont considérés comme une composante de recherche prometteuse, car on trouve leurs applications dans tous les domaines. Pour cette raison, l'innovation de ces matériaux importance pour répondre au besoin de technologique.

Comme les matériaux classiques devenus limités et soumises à des contraintes de plus en plus complexes. Donc, il est devenu nécessaire de développer des nouveaux matériaux pour trouver des solutions à ces limites, cette nouvelle catégorie des matériaux apparaît sous le nom « matériaux composites ».

Les matériaux composites sont généralement constitués de deux ou plusieurs matériaux de natures différentes, dont l'association confère à l'ensemble des performances supérieurs à celles des composants pris séparément. Ainsi, des propriétés telles que la rigidité et la résistance à la fatigue, à la corrosion aussi à l'usure. Ils peuvent être endommagés car un sérieux problème était détecté c'est la discontinuité des propriétés et des forts concentrations de contraintes au niveau d'interface parce qu'ils sont constitués de couches. Cette discontinuité est la cause principale qui produit le délaminage.

Des matériaux plus modernes sont l'innovation du siècle, cette nouvelle classe de matériaux appelée *matériaux à gradient fonctionnel* (En anglais : Functionally Graded Materials, FGM) a suscité un intérêt grâce à ces avantages, ils sont capable de supporter des gradients de température très élevée. Ce sont des matériaux composites compliqués avec une variation progressive continue des fractions volumiques de chaque constituant, éliminant la discontinuité au niveau de interfaces.

Les matériaux à gradient fonctionnel ont prouvé fortement leur présence au monde industriel et on acquit une grande popularité en raison de leurs capacités thermiques et mécaniques considérables, introduits en premier temps dans le laboratoire national d'aérospatial par un groupe scientifiques japonais en 1984 (Koizumi, 1993).

Typiquement, les FGM sont fabriqués par la céramique et le métal, ils sont utilisés comme des éléments de structure travaillant dans des environnements à haute température car leurs compositions riches en céramique. Cependant, les FGM touchant un large éventail

d'application dans de divers domaines comme: génie civil, l'aéronautique, véhicules spatiaux, nucléaire aussi le domaine de la médecine et de l'électricité, etc.

Etant donné que les effets de la déformation de cisaillement sont très considérés dans les FGM, donc il est nécessaire de bien choisir la bonne théorie décrivant correctement le comportement statique et dynamique de la structure. Parmi ces théories, la théorie classique des plaques minces « CPT », la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre « FSDT » et la théorie de déformation d'ordre élevée « HSDT ».

Le plus simple est la théorie classique des plaques (CPT) qui ignore les effets de cisaillement transverse. Ce modèle est non applicable pour les plaques épaisses et orthotropes avec un degré important du rapport des modules. Afin de surmonter ces limitations, la théorie de déformation de cisaillement qui considère l'effet du cisaillement transverse a été introduite par plusieurs chercheurs. En effet, la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT) et la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSDT) ont été proposées comme une amélioration de la CPT. La FSDT développée par Reissner (1945) et Mindlin (1951) considère les effets du cisaillement transverse par l'intermédiaire d'une distribution linéaire des déplacements à travers l'épaisseur.

Plusieurs investigations ont été présentées dans différents articles scientifiques en utilisant la FSDT dans la vibration libre des plaques composites (Yan et al. 1966; Whitney, 1969; Whitney et Pagano, 1970; Sun et Whitney, 1973; Reddy, 1997). Kant et Swaminathan (2002) ont employé la FSDT présentée par Whitney et Pagano (1970) pour la réponse dynamique des plaques composites stratifiées et des plaques sandwich. Sadoune et al. (2014) ont développé une nouvelle théorie de déformation de cisaillement du premier ordre pour le comportement mécanique des plaques stratifiées. Meksi et al. (2015) ont proposé aussi une nouvelle théorie simple de déformation de cisaillement du premier ordre avec seulement quatre variables pour l'analyse vibratoire et statique des plaques fonctionnellement graduée. Bellifa et al. (2016) ont utilisé une nouvelle théorie FSDT pour l'analyse statique et dynamique des plaques fonctionnellement graduée. Hadji et al. (2016) ont analysé une poutre fonctionnellement graduée en employant une nouvelle théorie FSDT. Yaghoobi et al. (2014) ont proposé une formulation analytique pour l'analyse de la vibration non linéaire et du post flambement des poutres fonctionnellement graduée reposant sur une fondation élastique non linéaire et soumise à un chargement thermomécanique. Bourada et al. (2012) ont présenté une nouvelle théorie raffinée des plaques à quatre variables pour l'analyse de la stabilité thermique des plaques sandwich fonctionnellement graduée. Il est à noter que plusieurs HSDTs sont utilisés aussi pour étudier la déformation des structures composites soumises à une grande distorsion

géométrique (Katariya et Panda 2016, Kar et Panda 2014). Tounsi et ces collaborateurs (Benachour et al. 2011, Houari et al. 2013, Tounsi et al. 2013, Saidi et al. 2013, Fekrar et al. 2014, Hadji et al. 2014, Ait Yahia et al. 2015, Sallai et al. 2015, Bennai et al. 2015, Merazi et al. 2015, Al-Basyouni et al. 2015, Attia et al. 2015, Ait Atmane et al. 2015, Boukhari 2016, Bounouara et al. 2016) ont proposé des nouvelles HSDTs pour étudier le comportement des structures composites.

Récemment, Mantari et Granados (2015) ont proposé une nouvelle FSDT avec quatre variables dans laquelle des termes d'intégrale sont utilisés dans la cinématique de la plaque. Puisque les FSDTs ne respectant pas les conditions d'équilibre dans les surfaces supérieures et inférieures, des coefficients de corrections de cisaillement sont exigés pour corriger la distribution irréaliste de la contrainte/ déformation de cisaillement à travers l'épaisseur. Pour ces raisons, plusieurs HSDTs ont été proposées pour améliorer les limitations de la FSDT tels que Levinson (1980), Bhimaraddi et Stevens (1984), Reddy (1984), Ren (1986), et Kant et Pandya (1988). Une bonne revue et synthèse de ces modèles pour l'investigation des plaques stratifié peut être trouvé dans la littérature (Noor et Burton 1989a, b, Reddy 1990 et 1993, Mallikarjuna et Kant 1993, Dahsin et Xiaoyu 1996). Reddy (1984) a proposé une HSDT avec des distributions cubiques des déplacements axiaux. En se basant sur la théorie de Reddy, Xiang et al. (2011) ont développé une théorie de déformation de cisaillement à n-ordre. Kant et Pandya (1988), Mallikarjuna et Kant (1989) et Kant et Khare (1997) ont employé aussi des théories HSDTs avec des distributions cubiques pour les déplacements axiaux. Récemment, une nouvelle classe de théories HSDTs est proposée par plusieurs chercheurs tels que Shahrjerdi et al. (2011), Viswanathan et al. (2013), Ait Amar Meziane et al. (2014), Belabed et al. (2014), Ahmed (2014), Swaminathan et Naveenkumar (2014), Nedri et al. (2014), Bourada et al. (2015), Hamidi et al. (2015), Kar et al. (2015), Mahi et al. (2015), Saidi et al. (2016), Bennoun et al. (2016) and Tounsi et al. (2016).

Ce travail à l'objectif de présenter le développement de la théorie d'ordre élevé de la déformation de cisaillement transverse sur la stabilité des plaques simplement appuyées. Cette théorie n'exige pas de facteur de correction de cisaillement et de confronter les résultats obtenus aux résultats des autres modèles proposés dans la littérature.

Ce travail de mémoire s'articule autour de quatre chapitres.

Le premier chapitre, présente les matériaux fonctionnellement gradués, leurs propriétés, leurs l'histoire de leur développement, leurs principales méthodes de fabrication et leurs domaines d'application.

Le deuxième chapitre, est consacré pour la présentation des différentes théories de déformations des plaques.

Dans le troisième chapitre, nous avons proposé une solution analytique de l'analyse de la stabilité des plaques en matériaux à gradient de propriétés « FGM » en utilisant la théorie d'ordre élevée hyperbolique inverse.

Le quatrième chapitre est consacré pour les résultats et le tracé des courbes des études comparatives réalisés et commentaires sur les résultats.

En fin, ce travail se termine par une conclusion générale en présentant des perspectives en mettant une valeur aux résultats obtenus.

Chapitre I :

Généralités sur les

matériaux

Fonctionnellement

Gradués (FGM)

I.1 Introduction

L'un des derniers développements des matériaux avancés, est, les matériaux composites fonctionnellement gradués FGM. Ils sont exploités pour les hauts performances car sa forte résistance mécanique, thermique ou à la corrosion. Il s'intéresse à divers domaines d'applications de haute technologies: aéronautique, aérospatial, nucléaire et en génie civil et aussi appliqué dans le domaine de la biomédicale.

Les FGM sont des modernes classes de matériaux composites spéciaux, il composés d'un mélange de céramique et de métal. Récemment, ce type de matériel à suscité un grand intérêt dans la communauté scientifique car ses multiples avantages, parmi ses avantages est sa résistance à des environnements à gradient de température élevée et de l'amélioration de la rigidité, etc.

I.2 Les matériaux composites

I.2.1 Définition de matériau composite

Un matériau composite est constitué de l'assemblage de deux matériaux ou plus de natures différentes. Se complétant et permettant d'aboutir à un matériau hétérogène dont l'ensemble des performances est supérieur à celui des composants pris séparément.

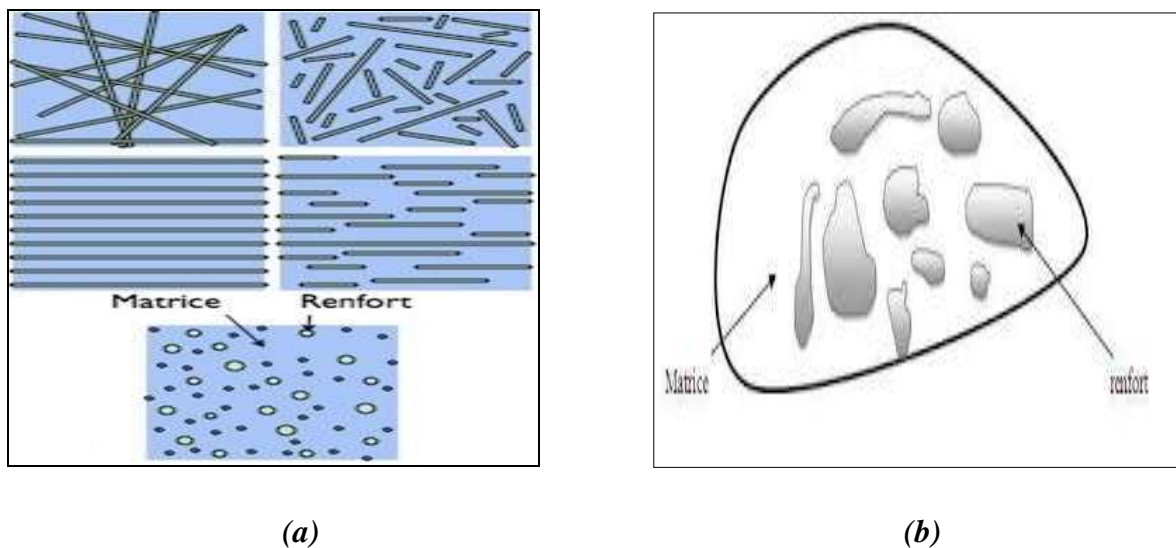


Figure I.1: Schéma illustratif d'un matériau composite.

Le principal intérêt de l'utilisation des matériaux composites provient de ses excellentes caractéristiques. Ils disposent d'atouts importants par rapport aux matériaux traditionnels. Ils apportent de nombreux avantages fonctionnels :

- Légèreté ;
- Grande résistance à la fatigue ;
- Liberté de formes ;

- Maintenance réduite ;
- Faible vieillissement sous l'action de l'humidité, de la chaleur, de la corrosion (sauf alu carbone) ;
- Une bonne isolation électrique.

On distingue habituellement trois familles :

- Les composites à matrice organique (CMO).
- Les composites à matrice céramique (CMC).
- Les composites à matrice métallique (CMM).

I.2.2 Composition de matériau composite

I.2.2.1 Les Matrices

La matrice est l'élément qui lie et maintient les fibres. Elle répartie les efforts (résistance à la compression ou à la flexion) et assure la protection chimique des fibres.

Les différentes familles de Matrice sont présentées par l'organigramme suivant :

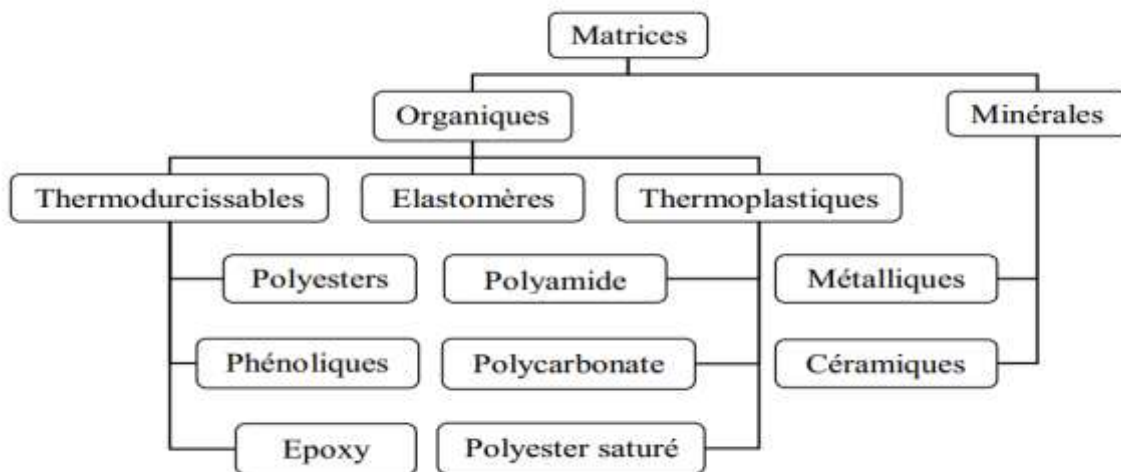


Figure I.2: Les différentes familles de matrices.

I.2.2.2 Les Renforts

Les renforts contribuent à améliorer la résistance mécanique et la rigidité des matériaux composites et se présentent sous forme filamentaire, allant de la particule de forme allongée à la fibre continue qui donne au matériau un effet directif. Ils sont caractérisés par :

- La nature de la fibre, minérale ou organique,
- L'architecture du renfort, Unidirectionnel (UD) au tissu...

Chacune de ces familles possède des propriétés différents et pour chacune d'entre elles Différents types de renforts sont employés.

Les différentes familles de renforts sont présentées par l'organigramme suivant :

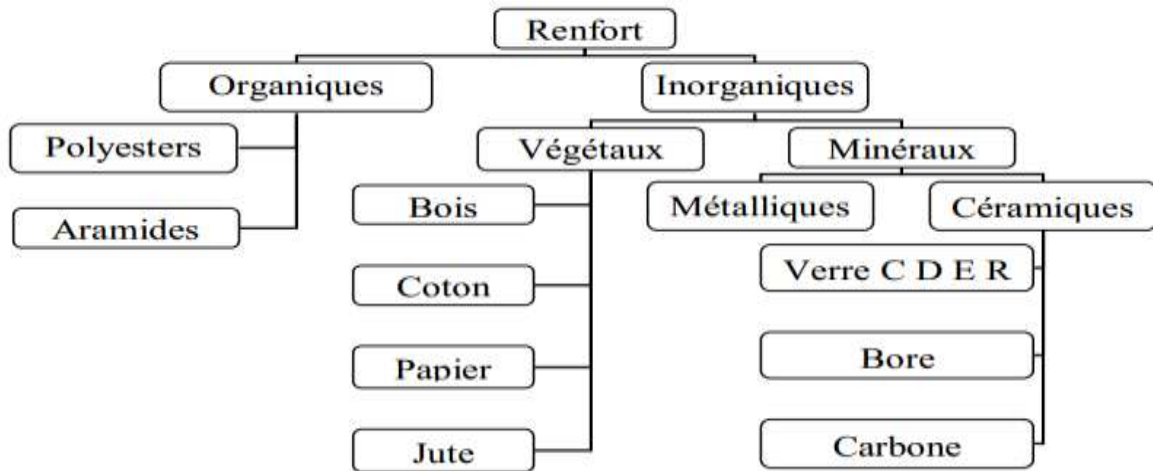


Figure I.3: Les différentes familles de renforts.

I.2.3 Architecture des matériaux composites

I.2.3.1 Monocouche

Les monocouches représentent l'élément de base de la structure composite. Les différents types de monocouches sont caractérisés par la forme du renfort : à fibres continue, à fibres courtes, fibres tissés et mat.

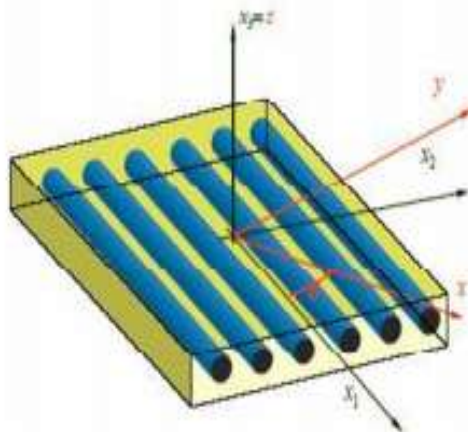


Figure I.4: Matériau composite monocouche.

I.2.3.2 Stratifié

Les stratifiés sont constitués de couches successives (appelées parfois plis) de renforts (fils, stratifiés, mat, tissus, etc.) imprégnés de résines.

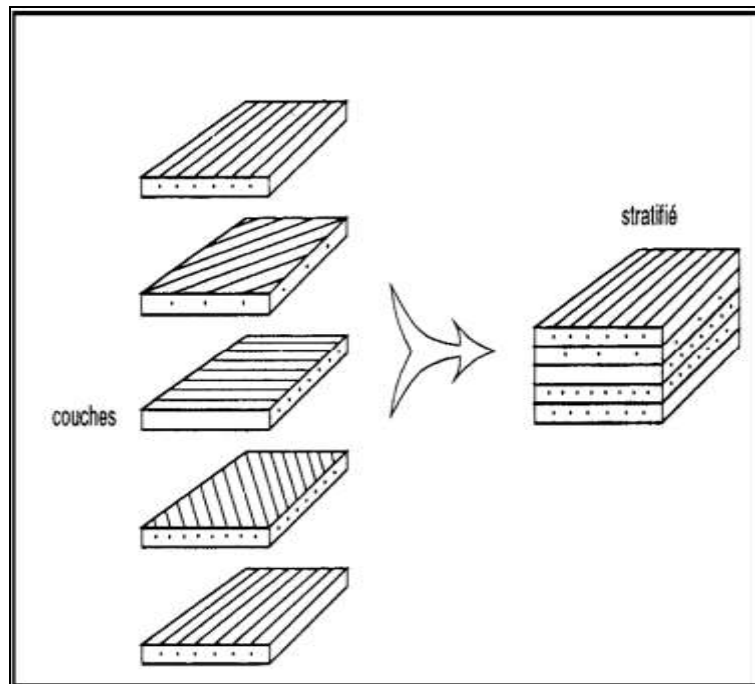


Figure I.5: Matériau composite stratifié.

I.2.3.3 Sandwichs

Matériaux composés de deux semelles (ou peaux) de grande rigidité et de faible épaisseur enveloppant une âme (ou cœur) de forte épaisseur et faible résistance. L'ensemble forme une structure d'une grande légèreté. Le matériau sandwich possède une grande rigidité en flexion et c'est un excellent isolant thermique.

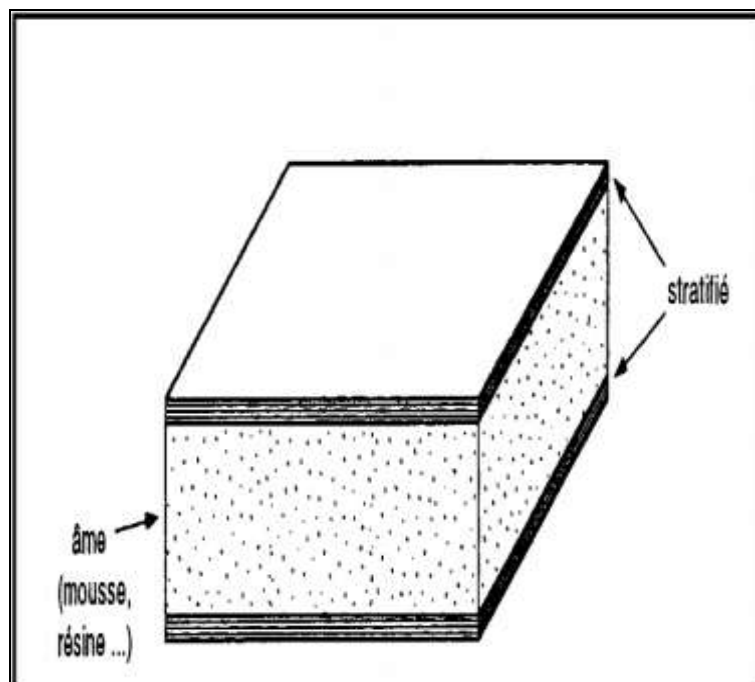


Figure I.6: Matériau sandwichs à âme pleine.

I.3 Matériaux à gradient fonctionnel (FGM)

I.3.1 Définition des FGM

Les matériaux à gradient fonctionnel (Functionally Graded Materials : FGM) ou les matériaux fonctionnellement gradués sont une nouvelle classe de matériaux composites qui ont des propriétés mécaniques variables suivant une fonction dans une direction donnée, en général c'est l'épaisseur de la plaque. Leurs microstructures et la composition varient graduellement et continument avec la position de manière à optimiser les performances mécaniques et thermiques de la structure qu'ils constituent. Ils sont considérés comme des matériaux intelligents dont les fonctions désirées sont intégrées, dès la conception, au cœur même de la matière. A chaque interface, le matériau est choisi selon les applications spécifiques et les charges environnementales. Ces matériaux possèdent de multiples avantages qui peuvent les rendre attractifs du point de vue de leur potentiel d'application. Il peut s'agir de l'amélioration de la rigidité, de la tenue à la fatigue, de la résistance à la corrosion ou de la conductivité thermique en plus d'avoir une gradation des propriétés permettant ainsi d'augmenter ou de moduler des performances telles que la réduction des contraintes locales ou encore l'amélioration du transfert de chaleur.

I.3.2 Histoire du Développement Architectural du Concept FGM

Devant l'évolution croissante de la technologie, et les exigences de plus en plus pressantes de l'industrie moderne pour trouver des matériaux performants. L'utilisation scientifique des matériaux de base disponibles en divers composés inorganiques et organiques sa fait le chemin pour le développement des polymères avancés, les alliages, les céramiques d'ingénierie structurelles, etc. Les matériaux à gradient fonctionnel (FGM) sont des matériaux de pointe dans la famille des composites d'ingénierie, constitués en deux ou plusieurs phases de composition continue et variable.

Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) peuvent être utilisé et appliqué dans ses plusieurs domaines pour des usages structuraux et fonctionnels, Durant les années 1980 et 1990, plusieurs programmes de cinq ans ont été conduits au japon afin de développer l'architecture des FGM. Et d'étudier également ces matériaux pour les applications de hautes températures (par exemple, éléments pour navettes spatial hypersonique) ainsi que pour des applications fonctionnelles (par exemple, convertisseurs thermoélectriques et thermo-ioniques). Ces programmes ont conduit au développement de la conception architecturale du FGM et de ces perspectives.

Les FGM sont des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement inhomogènes. Ils sont constitués de plusieurs couches contenant des composants différents

tels que les céramiques (côté haute températures) et les métaux (côté basse température). Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure du matériau distingue les FGM des matériaux composites conventionnels (Monocouches, Stratifiés, Sandwichs, (Koizumi, 1993). Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés matérielles des FGM.

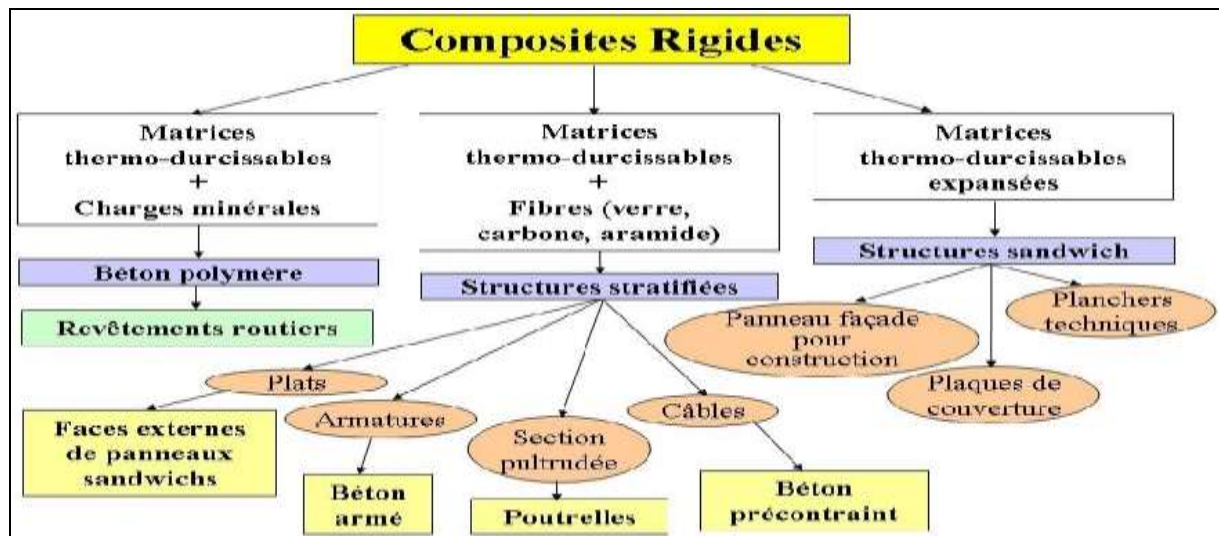


Figure I.7: Illustration de la hiérarchie de FGM.

Les chercheurs ont développé ces propriétés, ils avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales (1-10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre). Ont été utilisées des techniques pour fabriquer ces matériaux présentant un gradient de composition et de structure, ces techniques sont les suivants :

- Le système SiC/Cpar C.V.D ;
- Le système PSZ/Mo par synthèse par la technique de la compaction sèche des poudres ;
- Le système TiB2/Cu par synthèse auto-propagation à haute température ;
- Le système (Ni-Cr-Al-Y) / (ZrO2-Y2O3) par projection plasma à double torches (Okamura, 1991).

Bien que le concept des FGM et la capacité à le fabriquer semble être une invention d'ingénierie avancée, le concept n'est pas nouveau. Ces types de substances ont été trouvés dans la nature. Quelques exemples de FGM naturels ont été inclus dans la figure I.8 pour illustration. Les os ont une classification fonctionnelle et même notre peau est également graduée pour fournir certaine fermeté, un toucher et une élasticité en fonction de la profondeur de la peau et l'emplacement sur le corps. Les constituants des FGM modifiés par l'homme impliquent généralement deux phases de matériau isotrope, bien qu'un certain nombre de configurations chimiquement et spatialement compatibles puissent exister. Ces

composants comprennent souvent des alliages d'ingénierie de magnésium, l'aluminium, le cuivre, le titane, le tungstène, l'acier, etc. Et les céramiques structurales avancées telles que la zirconne, l'alumine, le carbure de silicium et de carbure de tungstène.



a. L'os



b. La peau



c. Bambou

Figure I.8: Exemples des FGM naturelles.

I.3.3 Concept des matériaux à gradient de propriétés

Les matériaux à gradient de fonction nés dans les années 1980 par un groupe de chercheurs au laboratoire national d'aérospatial (National Aerospace Laboratory, STA) au Japon. En 1990 a eu lieu la première conférence internationale sur les FGM à Sendai-city au Japon. En 1992, les matériaux à gradient fonctionnel ont été sélectionnés parmi les dix premières technologies de point au Japon et actuellement dans le monde entier.

Comme nous l'avons indiqué précédemment, les FGM sont utilisés dans nombreux domaines donc en prenant un exemple dans le domaine aérospatial sur les matériaux constituant les parois de les engins spatiaux (navettes spatiales ou des avions hypersoniques) sont soumis à des températures élevées, les pièces exposées sont le cône d'entrée, pour cette raison les matériaux constituant les parois de ces pièces doivent être capable de supporter une dizaine de millimètres un chargement thermique induit par des température de 1800C° en atmosphère. A ce jour il n'y a aucuns matériaux monolithiques pouvant supporter une telle contrainte thermique (Koizumi, 1992).

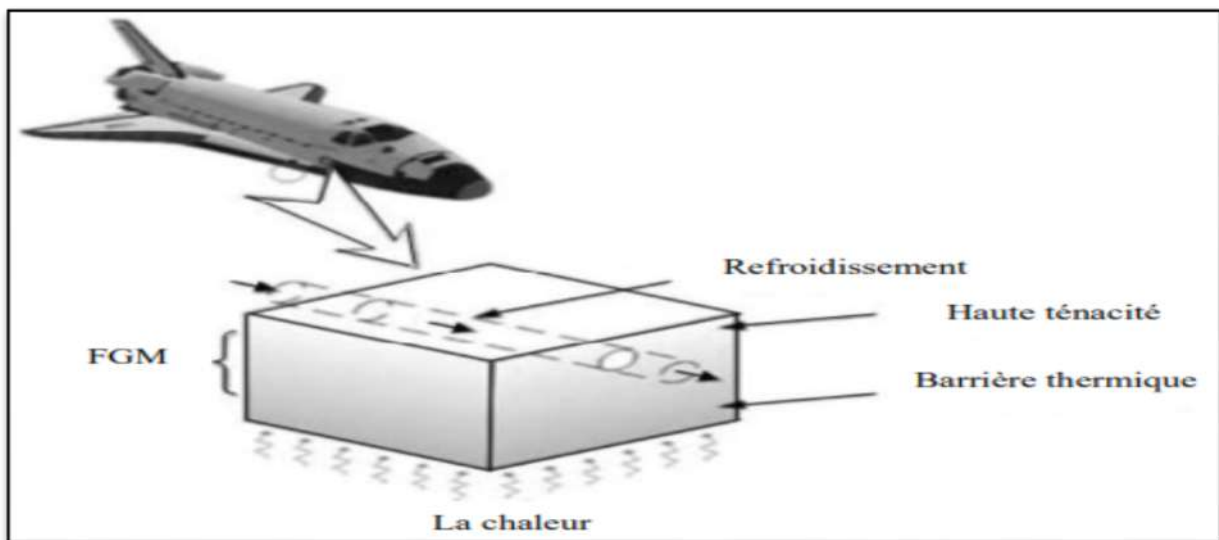


Figure I.9: Différentes exigences des propriétés des matériaux dans différents endroits

(Hopkinson et al. 2006).

Donc, la solution envisagée est la mise en œuvre des matériaux dont la face exposée à très haute température posséderait des propriétés de résistance aux fortes chaleurs et à l'oxydation, tel que la céramique, et dont la face intérieure serait très bonne conductrice de la chaleur et posséderait une bonne résistance mécanique et une meilleure ténacité, comme le métal.

Il s'agit d'une classe de composites constitués de deux matériaux ou plus avec des propriétés physico-chimiques différentes. Un FGM est caractérisé par un changement graduel et continu des propriétés du matériau (Bohidar et al. 2014). Il présente donc une microstructure hétérogène et contrôlée, modulée par un gradient de composition, de porosité, de distribution de phase ou de texture qui induit des différences de propriétés (densité, dureté, conductivité thermique, conductivité électrique...). Les FGM sont classés en deux catégories : les FGM continus (figure I.10.a) et les FGM discontinus sous forme de multicouche (figure I.10.b).



(a). Plaque FGM (variation continue des propriétés)



(b). Plaque non-FGM (variation non-continue des propriétés)

Figure I.10: Variation des propriétés matérielles à travers l'épaisseur d'une plaque carrée :

(a) variation discrète et continue, (b) variation non continue.

Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure d'un matériau « FGM » est illustré dans la figure I.11. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés du « FGM ». Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente (Boch et al. 1986).

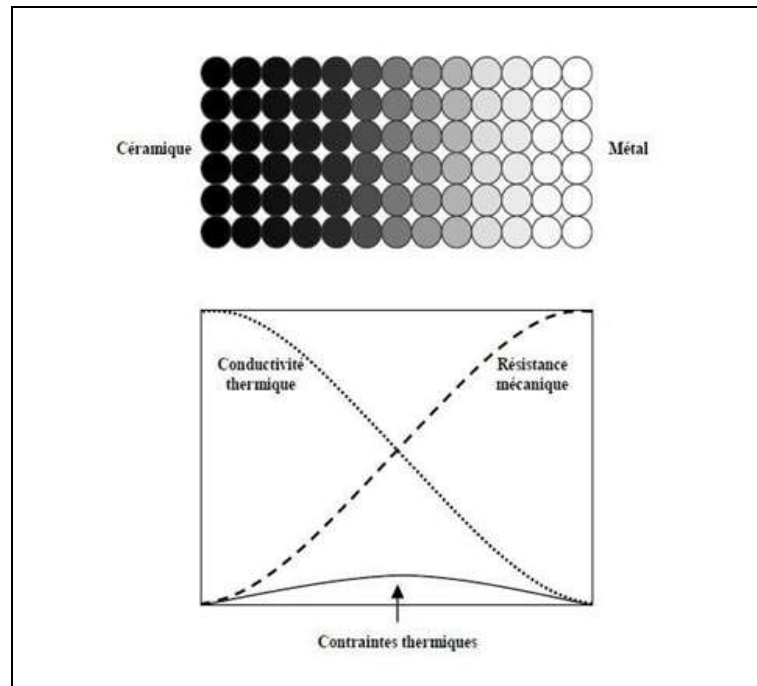


Figure I.11: Concept des matériaux à gradient de propriétés (Boch et al. 1986).

Généralement, les « FGM » sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Les vides sont également considérés comme une composante des matériaux FGM (Kokini et Takeuchi, 1990). Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement inhomogènes.

L'utilisation de la céramique n'est pas fortuite. Ce matériau est choisi grâce à ses caractéristiques exceptionnelles qui sont énumérées comme suit :

- Faible réactivité chimique (bonne tenue à la corrosion) ;
- Haute température de fusion ou de décomposition ;
- Haute module d'élasticité et haute dureté ;
- Charge à la rupture élevée ;
- Conservation des propriétés à haute température ;
- Faible conductivité thermique (bonne résistance à la température).
- Cependant, les céramiques sont réputées être fragiles et très vulnérabilité aux défauts de petites tailles.

Les caractéristiques du métal sont données comme suit :

- Bonne résistance mécanique ;
- Conductivité thermique élevée ;
- Très bonne ténacité.

La figure I.12 montre les concentrations de contraintes dans les panneaux de protection thermique conventionnels au niveau des interfaces (changement brutale de composition). Il montre également comment un FGM peut alléger ces concentrations de contraintes en changeant graduellement les propriétés matérielles et assure toujours la protection thermique trouvée dans les barrières thermiques conventionnelles.

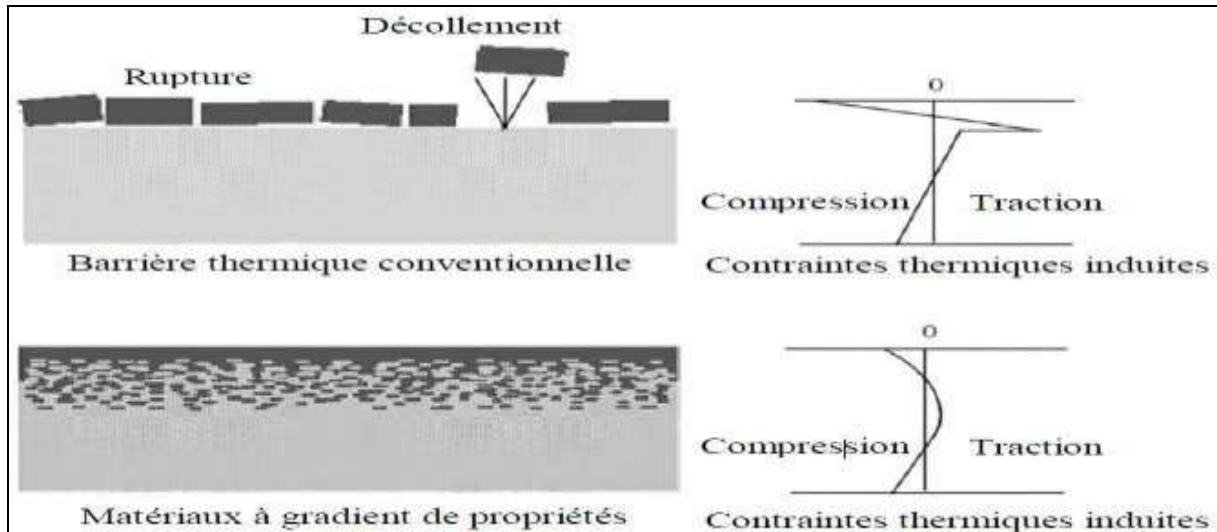


Figure I.12: Protection thermique (Houari, 2011).

I.3.4 Les procédés pour le traitement des FGM

S'il y'a une caractéristique concernant la fabrication des FGM c'est certainement la très grande variété des méthodes de traitement disponibles (Anne et al. 2006). Les matériaux fonctionnellement classés contiennent des matériaux avec une gradation de composition, de granulométrie et/ou de porosité. Le FGM est traité pour atteindre un objectif général de distribution spatiale dans la microstructure et/ou la composition du produit final. Lors du choix d'une méthode de traitement, les différences entre les propriétés des deux phases de la substance sont très importantes. Dans la composition de tout FGM, par exemple, la différence de résistance thermique entre les deux phases est un facteur majeur.

Si les deux phases ont des points de fusion sensiblement différents, comme dans le cas des FGM en céramique/métal, le gradient de composition peut être formé en produisant un gradient de porosité performant de la phase réfractaire infiltré, par la suite, par la deuxième phase fondue pour obtenir un produit final dense. Si les deux phases ont un point de fusion semblable, l'infiltration ne peut pas être utilisée, car le squelette ne peut pas tenir leur puissance durant l'infiltration. Les dimensions et la géométrie du FGM doivent être aussi bien considérées. Il est faisable de produire des FGM dans plusieurs systèmes avec des

technologies de couches thermiques, mais leur basse efficacité les rend inutiles pour la production en grandes masses des FGM tridimensionnels.

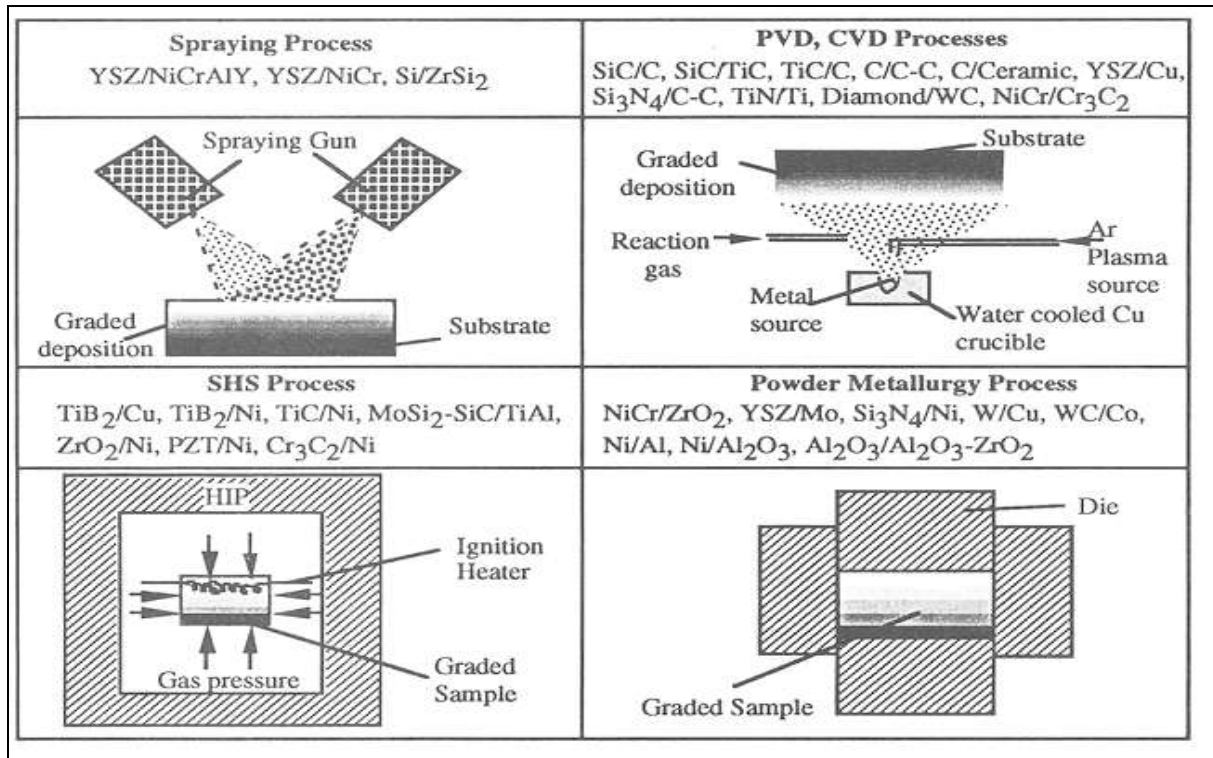


Figure I.13: Technique d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés.

I.3.5 Les domaines d'application des FGM

Pour réussir dans le domaine des matériaux intelligents, il faut une forte interdépendance entre les différents secteurs industriels et scientifiques. Le concept FGM a été initialement proposé pour répondre aux exigences et aux besoins du domaine de l'aéronautique et de l'espace, mais ces matériaux sont utilisés dans la fabrication d'outils industriels qui nécessitent une grande rigidité, une grande dureté et une résistance thermique élevée. Ils ont également des applications en optoélectronique, particulièrement dans la fabrication des fibres optiques capables de transmettre l'information à de très grandes vitesses. Ils sont aussi applicables à la conversion d'énergie comme les systèmes de conversion de l'énergie solaire en énergie en énergie électrique, générateur thermoélectrique, convertisseur thermoïnique et pile à combustible. Les FGM sont utilisés dans la restauration du squelette car ils contiennent des matériaux vitaux pour réparer ou combler toute carence dans les os, Les dents et les os sont des tissus vivants et sont constituent des matériaux à gradient fonctionnel naturels. Cette technologie et aussi applicable dans les centrales nucléaires où la température peut atteindre des valeurs considérables dans les composants des réacteurs nucléaires.

Actuellement, des lanceurs en FGM sont testés et les résultats sont prometteurs. Outre les applications citées précédemment, les FGM trouvent aussi leurs applications dans les semi-conducteurs et en génie civil.

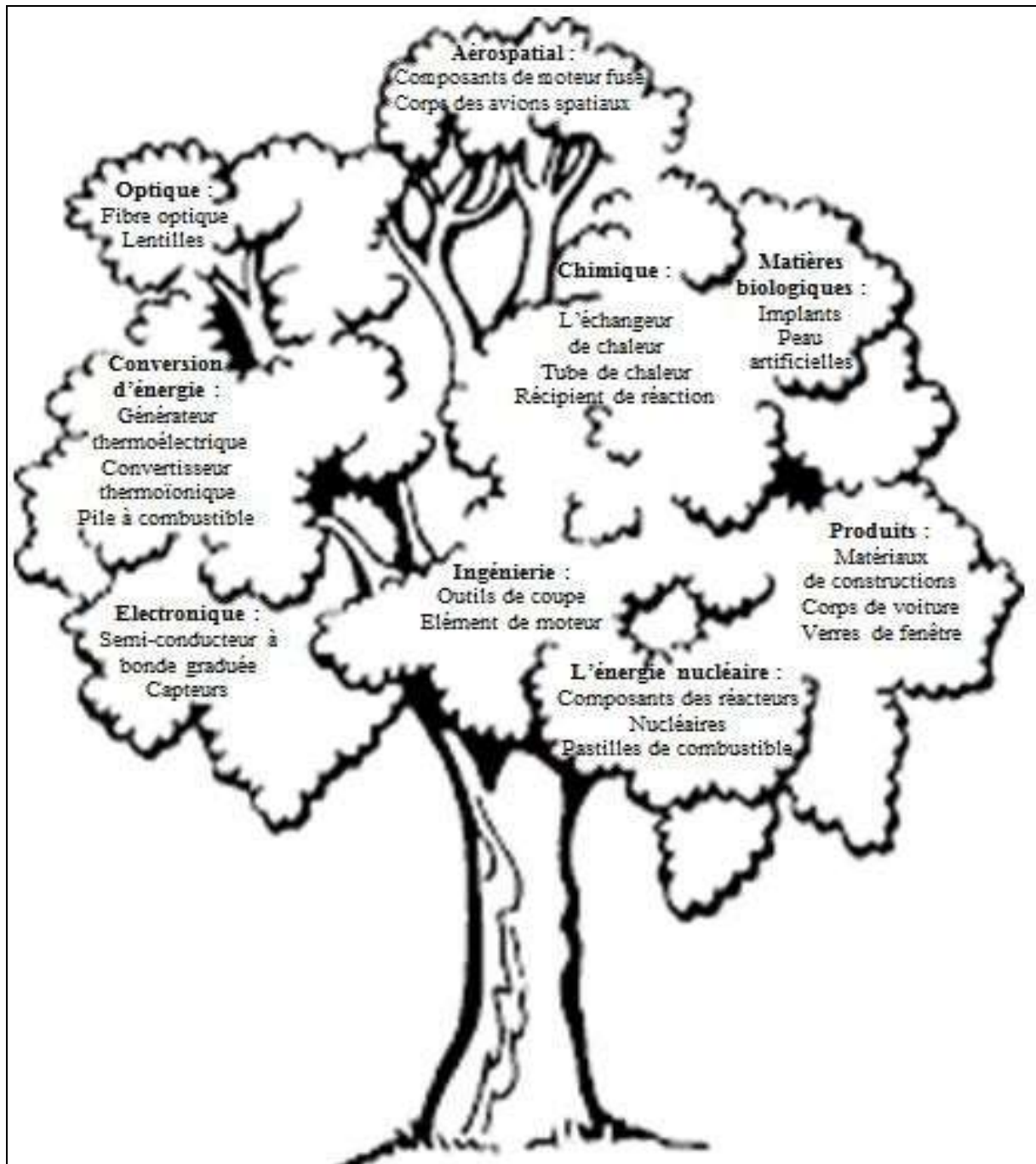


Figure I.14: Les principaux domaines d'application des FGM.

I.3.6 L'application de FGM dans le domaine du génie civil

Le développement des éléments de constructions plus légers et recyclables en fonction de leur nature pourrait avoir un impact positif sur le plan environnemental et économique du pays. La gradation des propriétés des matériaux constitue une étape importante dans le développement des structures innovantes dans le domaine du génie civil. L'exemple du béton met clairement en relief les possibilités et les potentiels offerts par la gradation.

Sous les auspices des projets de recherche effectués à l'université de Stuttgart, différentes classes des matériaux de construction (béton, textile, bois, métaux et polymères), des méthodes de production et des domaines d'application (structure porteuse, enveloppe du bâtiment, technique de mélange) ont été étudiés et évalués pour certains éléments du bâtiment basés sur le concept du FGM.

I.3.6.1 Le Béton à gradient de propriétés

Werner Sobek a été le premier à formuler le concept des bétons à gradients de propriétés. (ILEK, Institut de la conception et la construction de structures légères) de l'Université allemande de Stuttgart, dans le cadre des projets de recherche « Matériaux à gradient dans le bâtiment et le génie civil » et « planchers préfabriqués à gradient de propriété » (Heinz et al. 2011). La fabrication l'automatisation, l'optimisation et la technologie du béton sont actuellement examinées à l'Université de Stuttgart.

L'optimisation des structures en béton suivant le concept du FGM est actuellement en étude et en développement dans plusieurs projets de recherche. Le but principal est de satisfaire un ajustement continu des propriétés du béton, telles que la densité, la porosité, la conductivité thermique et la résistance à l'intérieur de l'élément conformément aux spécifications et profils des efforts déterminées pour l'élément Said (2016).

Il est à noter que l'idée du béton à gradient de propriétés, a permis de réaliser des murs extérieurs moins épais par rapport aux systèmes composites d'isolation thermique comparable, avec une conductivité thermique bien inférieure à celle du polystyrène. Cette invention conduit à l'amélioration de la recyclable et la sauvegarde des ressources économiques.

Les essais et les calculs de planchers à gradient de propriété se sont révélés d'une réduction de poids de plus de 60% et d'une réduction des émissions de carbone dépassant 35% par rapport aux planchers minces classiques, sans aucune perte de résistance (Eyerer et al. 2000; Said, 2016).

I.3.6.2 Autres matériaux à gradient de propriétés

Les textiles avec des propriétés variables de couches superposées permettent de doter au matériau une perméabilité et une rigidité graduelle. Ce qui peut augmenter l'efficacité de

systèmes d'isolation vis-à-vis des effets de chaleur et d'humidité. En plus, la variation graduelle des propriétés de rigidité permettent de surmonter le changement brusque entre les composantes rigides et flexibles des éléments, ce qui pourrait complètement servir de base à des nouvelles solutions architecturales à l'avenir.

À l'aide d'un processus progressif, il a été possible de produire des éléments de mousse à cellules ouvertes avec des motifs de porosité variable. Ces mousses peuvent ensuite être traitées pour fabriquer des composants avec une variation de distribution de rigidité afin de répondre aux exigences de certains cas.

Un autre aspect de cette technique impliquant des matériaux à gradient de propriété sert à rassembler des différents matériaux suivant une transition graduelle et continue. Cela représente une nouvelle approche dans la technique d'assemblage avant tout, même si cela signifie que la variation de dilatation thermique ne peut plus être définie de manière précise au niveau local en vue de la transition continue en cause, ou la transmission de charge évité à certains endroits. Sous les auspices du projet, les investigations préliminaires sont effectuées dans le cadre de la construction des classes pertinentes de matériaux, des domaines potentiels d'application et des méthodes appropriées de production Said (2016).

I.3.7 Champs d'utilisation les FGM

I.3.7.1 Aéronautique

Le concept de FGM a été initialement conçu pour ce champ. Possédant deux propriétés contradictoires, comme la conductivité thermique et de propriété barrière thermique dans un matériau, il permet de produire le poids-léger et des matériaux solides. Surtout ce sera une technologie indispensable pour la roquette et à la construction de station spatiale. Les FGM sont également applicables à un mur externe de l'avion spatial et des parties de moteur de fusée.

I.3.7.2 Matières industrielles

De nombreuses applications de FGM ont été récemment réalisées pour les matériaux industriels. Comme les produits récents sont s'intensifier en raison d'une résistance accrue et la résistance thermique et énergétique de réduction et de la forme, la demande d'un nouveau matériau pour l'outil industriel sont en pleine croissance. Dans ce domaine, il est nécessaire d'avoir les deux résistances à l'usure et la ténacité, ainsi nous pouvons dire que la demande de la FGM est une solution. D'ailleurs, comme les besoins n'pour la coupe à sec et ne pas utiliser de liquide de coupe augmenter en contrepartie de l'environnement, le développement d'une autolubrifiant et outil de haute résistance thermique est attendu.

Une production à l'essai de l'outil industriel a été menée avec succès à l'aide de diamants (à l'extérieur) et l'acier (à l'intérieur), et le développement est maintenant prévu pour un outil à grande vitesse dans n'importe quelle taille de forme.

I.3.7.3 Optoélectronique

Il y a tant de variations dans les moyens de communication. Maintenant, les outils de communication utilisant les fibres optiques ont besoins de nouveaux progrès ainsi que des informations de plus en plus de volume. Une idée est une lumière de longueur d'onde système un indice de réfraction filer le classement. Il a une structure que l'indice de réfraction des ondes transmettant le sens varie avec la fréquence en continu la longueur d'onde avec le filtre, la réfraction inutile peut être évitée dans une certaine mesure. Application des FGM aux fibres optiques plastiques peuvent assurer une transmission à haute vitesse. Par conséquent, il sera capable de se propager système de communication optique jusqu'au niveau des ménages.

I.3.7.4 Biomatériaux

Notre corps est soutenu par 206 os couvrant le cerveau et d'autres organes, si nous avons une douleur à un os ou une articulation nous aurons des troubles dans notre vie. Pour résoudre ces problèmes on a besoin d'un nouveau matériau qui peut remplacer les os et les articulations et a une longue vie a été souhaité. La technologie FGM est applicable aux os artificiels, les articulations et les dents.

La technologie de classification des structures est utilisée dans la recherche pour la prévention du cancer, aussi. Par exemple, une étude est établie sur le renforcement de collagène dans le corps en utilisant la technologie de classement.

I.3.7.5 D'autres domaines

Le téléphone cellulaire est l'un des moyens d'outils de communication pratique, la technologie des FGM est applicable dans ce domaine aussi pour la minimisation de la taille et l'efficacité de transmission, une permittivité-technologie de classification peut être appliquée lors de la production des substrats. De même, les FGM sont également applicables dans d'autres domaines tels que le champ de l'électronique et domaine de la chimie. Les fibres optiques entièrement faites de polymères fluorés ont été développés. En outre, des nouvelles recherches sont également développer de nouveaux matériaux avec des nouvelles fonctions à l'aide de nanotechnologie de classification.

I.3.8 Comparaison des matériaux FGM et les matériaux composites traditionnels

Généralement les FGM sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement inhomogènes. Le changement continu

dans la composition et donc dans la microstructure du matériau distingue les FGM des matériaux composites conventionnels comme illustré sur la figure I.15 (Koizumi, 1996). Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés matérielles des FGM. Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente (Boch, 1986).

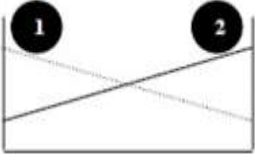
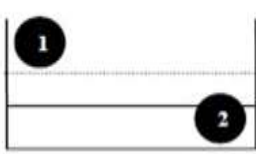
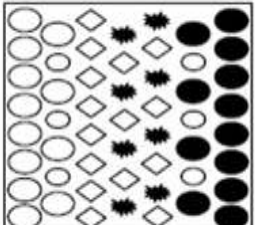
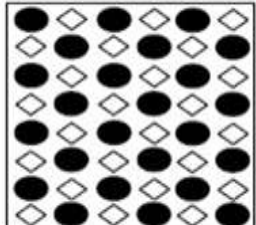
Propriétés	<p>1 Résistance mécanique</p> <p>2 Conductivité thermique</p>		
Structure	<p>Eléments constitutants:</p> <p>céramique ○</p> <p>métal ●</p> <p>microporosité ◊</p> <p>fibre *</p>		
Matériaux	exemple	FGM	NON-FGM

Figure I.15 : Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels (Koizumi, 1993).

Yoshihisa (2004) a établie un modèle simple illustrant les différences entre les matériaux à gradient de propriétés (FGM) et les matériaux plus conventionnels est représenté dans la figure I.16 : **(a)** un matériau plan composé, **(b)** un matériau relié et **(c)** un matériau à gradient de propriété. Le matériau plan composé à une caractéristique plane, et le matériau relié a une frontière sur l'interface de deux matériaux, FGM ont de excellentes caractéristiques qui différent de ceux des matériaux plans composés et reliés. Par conséquent, les FGM attirent l'attention en termes de leur application dans les domaines industriels. Puisque les FGM ont une double propriété des deux matières premières qui sont mélangées ensemble, et la distribution composante est graduée sans interruption. Par exemple l'un des FGM qui se composent du métal et en céramique a la caractéristique de la conductivité thermique et de la force métallique dans le coté en métal et la résistivité aux hautes températures dans le coté en céramique.

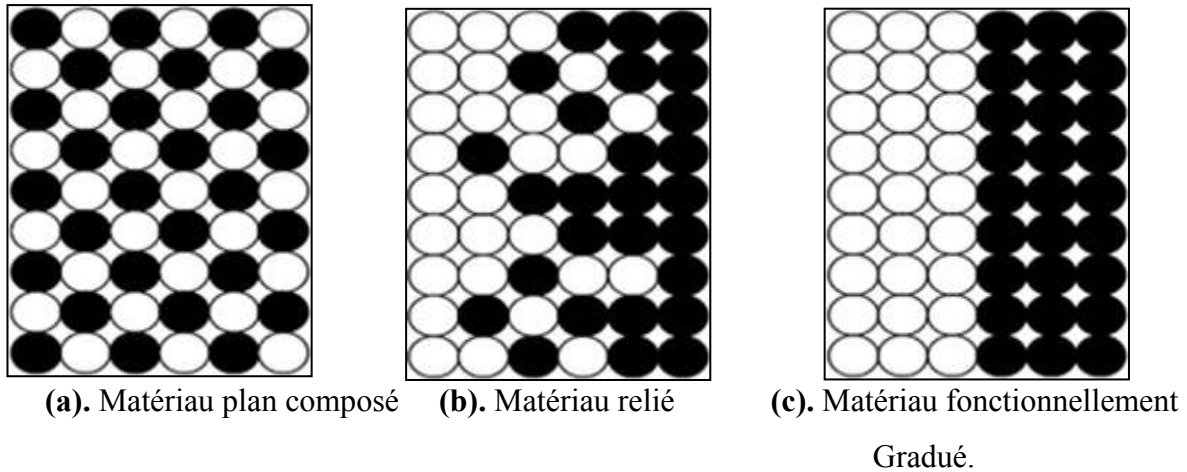


Figure I.16: La distribution des composantes des matériaux Yoshihisa (2004).

I.3.9 Propriétés matérielles effectives d'un matériau FGM

Les matériaux à gradient de propriétés sont généralement fabriqués par deux phases matérielles avec des propriétés différentes. Une description détaillée des microstructures graduée réelles n'est pas disponible, excepté peut être pour l'information sur la distribution de fraction volumique. Puisque la fraction de volume de chaque phase varie graduellement dans la direction de la graduation, les propriétés effectives des FGM changeant le long de cette direction.

Par conséquent, nous avons deux approches possibles pour modéliser un FGM.

- ✓ La première approche : une variation par tranche de fraction volumique de la céramique ou du métal est assumée, et le FGM est pris pour être posé avec la même fraction de volume dans chaque région, c'est-à-dire couches quasi homogènes de céramique-métal, (figure I.17).

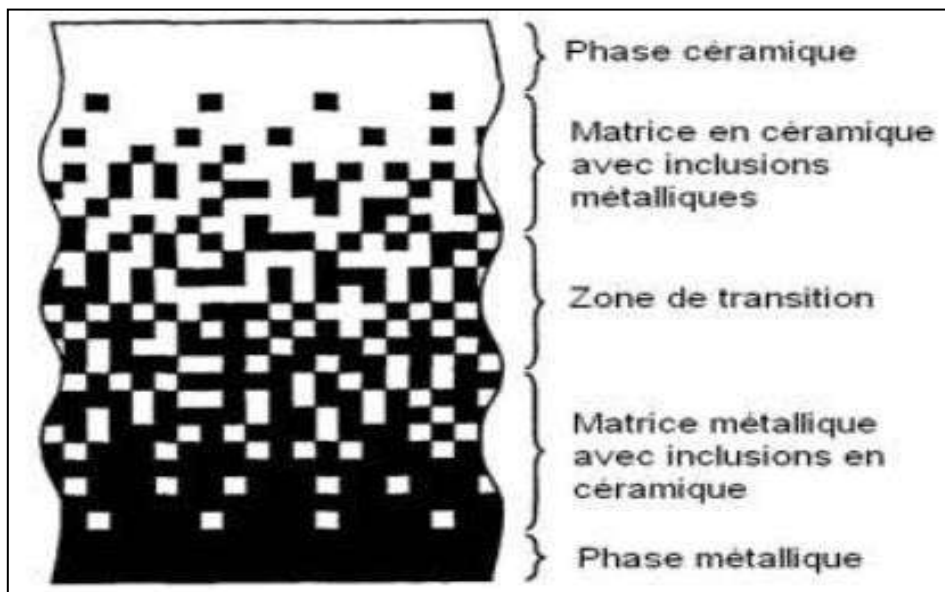


Figure I.17: Variation continue de la microstructure (schématisée).

- ✓ la deuxième approche : une variation continue de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumée figure I.18, et la fraction de volume en métal peut être représentée suivant une fonction dépendante de la coordonnée Z (épaisseur).

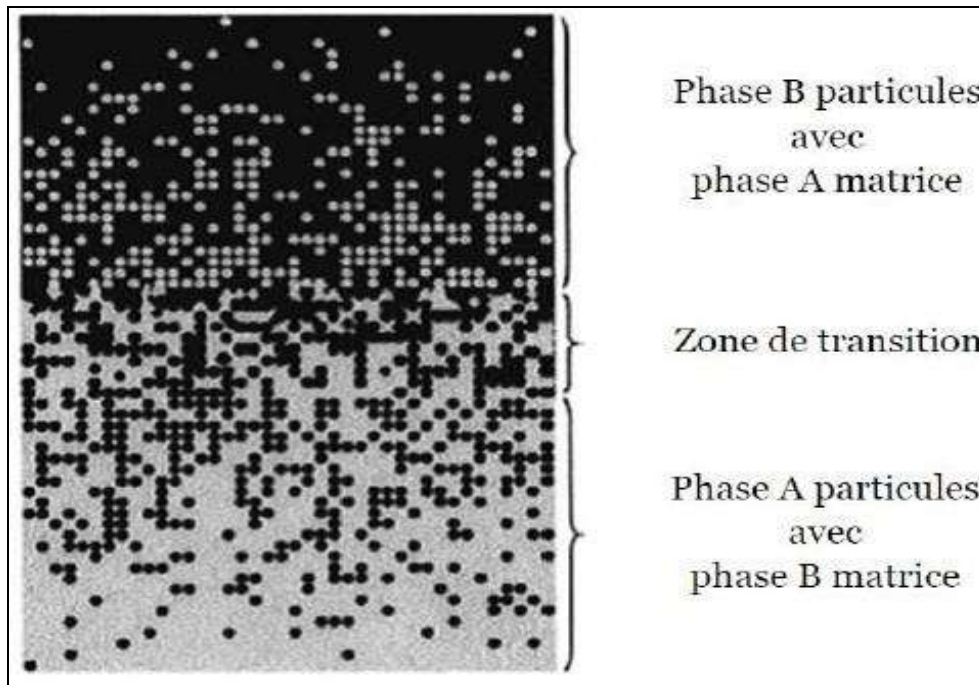


Figure I.18: Matériaux FGM avec des fractions volumiques des phases constitutives Graduées (Yin et al. 2004).

I.3.10 Lois de distribution des propriétés matérielles des plaques FGM

Les matériaux à gradient fonctionnel « FGM » consiste en l'association de deux ou plusieurs matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes, avec une transition idéalement continue de la composition de la structure, et de la distribution des porosités entre ces matériaux de manière à optimiser les performances de la structure qu'ils constituent.

Les caractéristiques les plus distinctes des matériaux FGM sont leurs microstructures non uniformes avec des macro-propriétés graduées dans l'espace. Un des paramètres clé à déterminer lors de la fabrication de ces matériaux est la composition multi-phase à travers l'épaisseur.

La dépendance des propriétés de la position se traduit par la prise en compte de la loi des mélanges correspondant au modèle de Voigt (Shen, 2009) :

$$P = \sum_{i=1}^n P_i V_i \quad (1.1)$$

P : Propriété le long de l'axe z ;

P_i : La propriété mécanique du constituant (i) ;

V_i : La fraction volumique du constituant (i) ;

Avec :

$$\sum_{i=1}^n V_i = 1 \quad (1.2)$$

Dans la pratique, la plupart des structures FGM sont à deux constituant : de la céramique et du métal inoxydable. Dans ce cas, la loi de Voigt se réduit à :

$$P = P_m V_m + P_c V_c \quad (1.3)$$

P : Propriété le long de l'axe z ;

P_m : La propriété mécanique du métal ;

P_c : La propriété mécanique de la céramique ;

V_m : La fraction volumique du métal ;

V_c : La fraction volumique de la céramique ;

Avec :

$$V_m + V_c = 1 \quad (1.4)$$

Un FGM peut être définie par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume. Les liaisons entre les particules doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture, et également assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure.

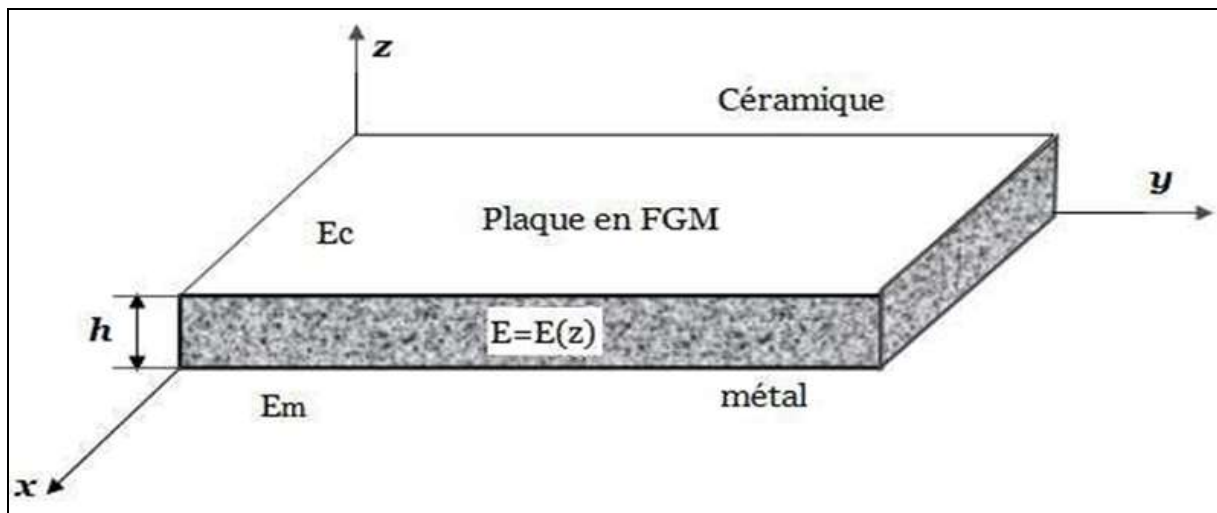


Figure I.19: Géométrie d'une plaque FGM.

Les coordonnées x et y définissent le plan de la plaque, tandis que l'axe z est perpendiculaire à la surface moyenne de la plaque et dans la direction de l'épaisseur. Les propriétés du matériau dont le module de Young et le coefficient de poisson sur les faces supérieures et inférieures sont différentes. Ils varient de façon continue, suivant l'épaisseur $E = E(z)$ et $\nu = \nu(z)$.

L'effet du coefficient de poisson sur les déformations est négligeable comparativement à celui du module de Young. Par conséquent, le coefficient de poisson peut être supposé comme constant. Cependant, Le module de Young dans la direction de l'épaisseur de la plaque FGM varie en fonction de la loi de puissance (P-FGM), la fonction exponentielle (E-FGM) ou avec la fonction sigmoïde (S-FGM).

I.3.10.1 Propriétés matérielles de la plaque P-FGM

La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance :

$$V(z) = \left(\frac{z + \frac{h}{2}}{h} \right)^p \tag{1.5}$$

Où p est un paramètre matériels (paramètre de puissance) et h est l'épaisseur de la plaque.

Une fois la fraction volumique locale $V(z)$ a été définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminés par la loi des mélanges (Bao et Wang, 1995) :

$$P(z) = P_m + (P_c - P_m)V(z) \tag{1.6}$$

Où :

P_m et P_c sont respectivement les propriétés de la surface inférieure ($z = -h/2$) et de la surface supérieure ($z = h/2$) de la plaque FGM.

$V(z)$ Étant la fraction volumique du P-FGM définit par la relation (1.5)

La variation de la fraction volumique dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la figure I.20. Il apparait clairement que la fraction volumique change rapidement près de surface inférieure pour $p < 1$ et augmentée rapidement près de la surface supérieure pour $p > 1$.

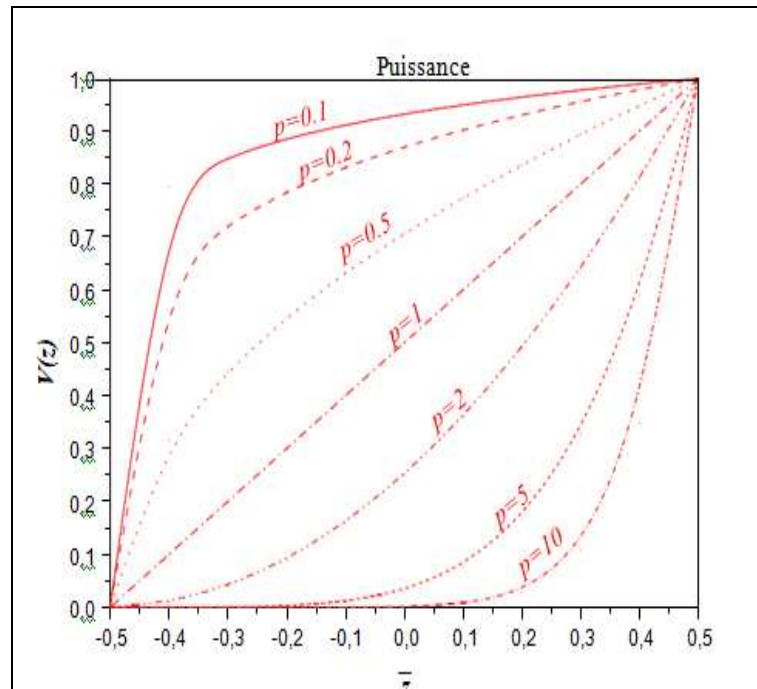


Figure 1.20: Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.

En considérant la loi de variation P-FGM métal-céramique (surface supérieure 100% céramique (indice c) et surface inférieure 100% métal (indice m)), les propriétés s'écrivent alors comme suit :

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m)V(z) \quad (1.7)$$

$$\rho(z) = \rho_m + (\rho_c - \rho_m)V(z) \quad (1.8)$$

$E(z)$: La variation du module de Young le long de l'axe z ;

E_m : Module de Young du métal ;

E_c : Module de Young de la céramique ;

$\rho(z)$: La variation de la masse volumique le long de l'axe z ;

ρ_m : La masse volumique du métal ;

ρ_c : La masse volumique de la céramique.

Lorsque ($p=1$), la composition change linéairement à travers l'épaisseur, tandis que lorsque ($p=1/2$ ou 2), la composition change d'une manière quadratique ou parabolique.

I.3.10.2 Propriétés matérielles de la plaque S-FGM

La fraction de volume de la plaque FGM est définie par deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces, les deux fonctions de loi de puissance sont définies par (Chung et chi, 2003).

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{h}{2} + z}{h/2} \right)^p \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (1.9.a)$$

$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{h}{2} - z}{h/2} \right)^p \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (1.9.b)$$

On utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé par :

$$E(z) = V_1(z)E_1 + (1 - V_1(z))E_2 \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (I.10.a)$$

$$E(z) = V_2(z)E_1 + (1 - V_2(z))E_2 \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (I.10.b)$$

La figure I.21 montre que la variation de la fraction volumique définie par les équations (1.9.a) et (1.9.b) représente les distributions sigmoïdes, et cette plaque FGM est appliquée (Plaque S-FGM).

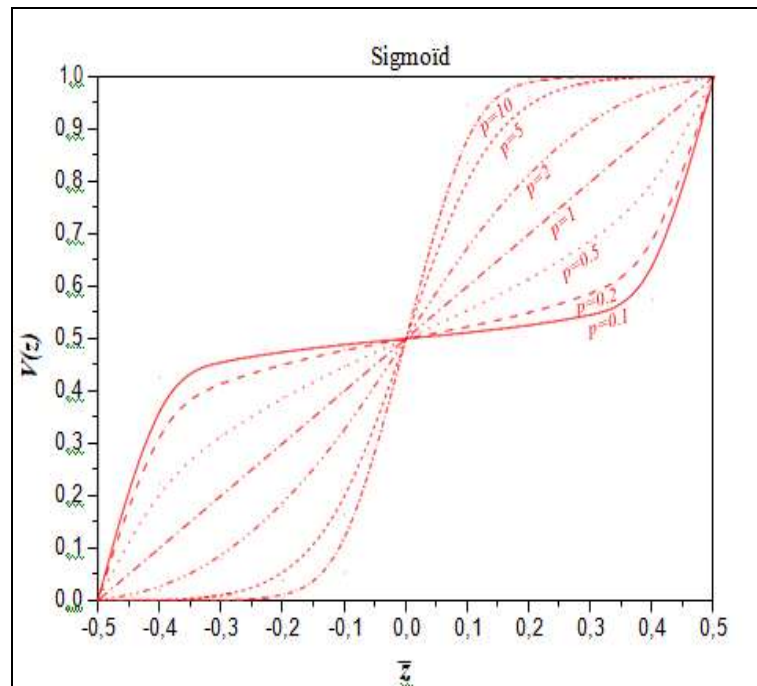


Figure I. 21: Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.

I.3.10.3 Les propriétés matérielles de la plaque E-FGM

Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme (Delate et Erdogan, 1983).

$$E(z) = E_m e^{B(z+h/2)} \quad (1.11)$$

Avec :

$$B = \frac{1}{h} \ln\left(\frac{E_c}{E_m}\right) \tag{I.12}$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée sur la figure I.22.

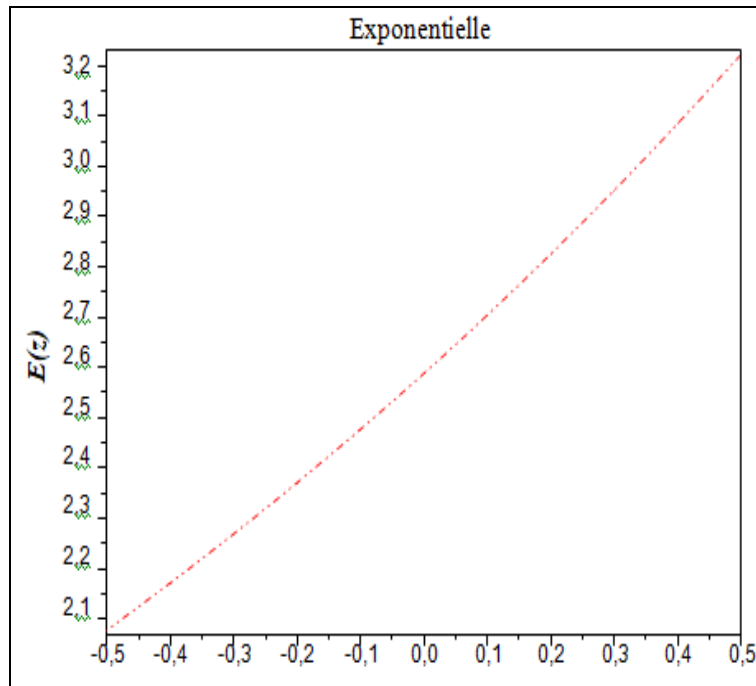


Figure I.22: Variation du module de Young dans une plaque E-FGM.

I.4 Conclusion

Ce chapitre nous a permis d'avoir un aperçu global sur les matériaux fonctionnellement gradués FGM et nous avons présenté ces matériaux avec données tous c'est qui concerne avec les FGMs.

Nous avons commencé par la définition des matériaux FGM, puis nous avons exposé l'histoire et leur développement avec un concept général, d'autre part nous avons illustré leurs propriétés et leurs domaines d'applications avec un champ d'utilisation de ces matériaux.

La variation spatiale et progressive des propriétés de ces matériaux permet de créer des structures innovantes qui peuvent être exploitées dans de nombreux domaines d'application dans les structures spéciales en génie civil.

Chapitre II:

Les théories des plaques

II.1 Introduction

Au cours de ces dernières années, Il est bien connu que les plaques isotropes et les plaques composites sont très utilisés dans nombreuses industries, particulièrement dans les domaines de l'aéronautique, de l'automobile et de la construction navale, a stimulé les chercheurs à développer des théories capables de décrire exactement leurs comportement structural.

Il est nécessaire de choisir la bonne théorie décrivant correctement le comportement statique et dynamique de la structure ainsi que la méthode de résoudre à appliquer. Il existe la théorie des plaques minces (CTP), la théorie des plaques moyennement épaisses (FSDT). Ensuite, des théories d'ordre supérieur (HSDT).

II.2 Définition des plaques

Une plaque FG est tridimensionnelle solide rectangulaire simplement appuyée de longueur a , de largeur b et d'épaisseur h , et soumis à des charges qui provoquent la déformation de flexion. Les propriétés matérielles varient doucement à travers l'épaisseur de la plaque, (figure II.1).



Figure II.1: Schéma d'une plaque FGM.

II.3 Domaine d'utilisation les plaques

Le domaine de l'utilisation de plaque est très vaste dans tous les domaines, surtout dans le domaine du génie civil ou, on les utilise dans les constructions simples (habitation) ou les ouvrages d'art et elle se trouve à différentes formes, selon la qualité de l'ouvrage y compris les circulaires et rectangulaires et d'autre formes, Comme celle-est montré dans les photos ci-dessous :

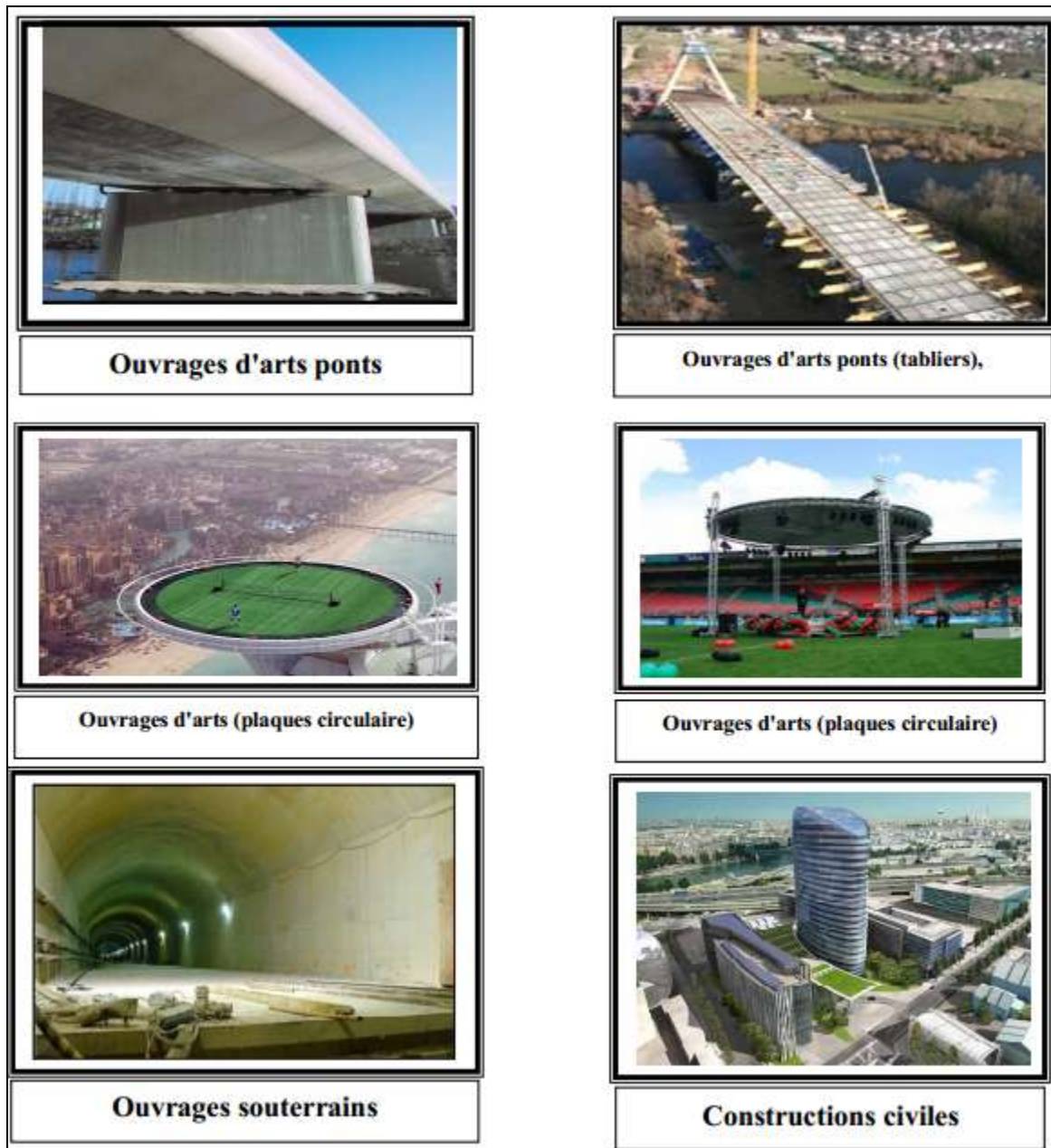


Figure II.2: Des exemples d'utilisation des FGM en génie civil.

II.4 Classement des théories de déformation en cisaillement

Il est nécessaire de choisir la bonne théorie décrivant le comportement statique et dynamique de la structure ainsi que la méthode de résolution à appliquer pour résoudre les problèmes des structures ayant comme éléments structuraux des poutres et plaques FGM dans le domaine élastique. En 1888, Love utilise les hypothèses de Gustav Kirchhoff, elles-mêmes inspirées des hypothèses d'Euler-Bernoulli pour fonder une théorie des plaques minces (également appelée théorie classique ou théorie de Kirchhoff-Love). La théorie des plaques semi-épaisses (théorie des déformations du premier ordre) a été consolidée par Mindlin à partir des travaux de Rayleigh (1877), Timoshenko (1921), Reissner (1945) et Uflyand (1948).

Ensuite, des théories d'ordre supérieur sont venues améliorer les hypothèses des théories classiques et du premier ordre lorsque l'épaisseur de la plaque devient importante. Il existe aussi la théorie basée sur l'élasticité tridimensionnelle (théorie 3-D) qui ne fait aucune hypothèse restrictive sur les déplacements de la plaque.

II.5 Théories des plaques

II.5.1 Théorie classique des plaques (CPT), ou la théorie de Love-Kirchhoff

Lorsque la flèche générée par les déformations de cisaillement reste négligeable devant la flèche générée par la courbure de la plaque, cela signifie que nous parlons sur une plaque mince.

Cette théorie présente comme la plus simple des approches est basée sur les hypothèses de Kirchhoff, dans lesquelles les déformations dues aux cisaillements transverses sont négligées et la normale à la surface moyenne de la plaque reste perpendiculaire et droite à celle-ci après déformation, (figure II.3), ce qui revient à négliger les effets de déformation en cisaillement transverse. Donc dans ce cas-là une distribution des déplacements suivant l'épaisseur est linéaire (Reissner, 1961).

Le champ de déplacement d'un point de coordonnées (x, y, z) à l'instant t est donné par :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (\text{II.1.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (\text{II.1.b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{II.1.c})$$

Où u_0, v_0, w_0 sont les déplacements le long des coordonnées x, y et z d'un point du plan moyen (plan $z=0$).

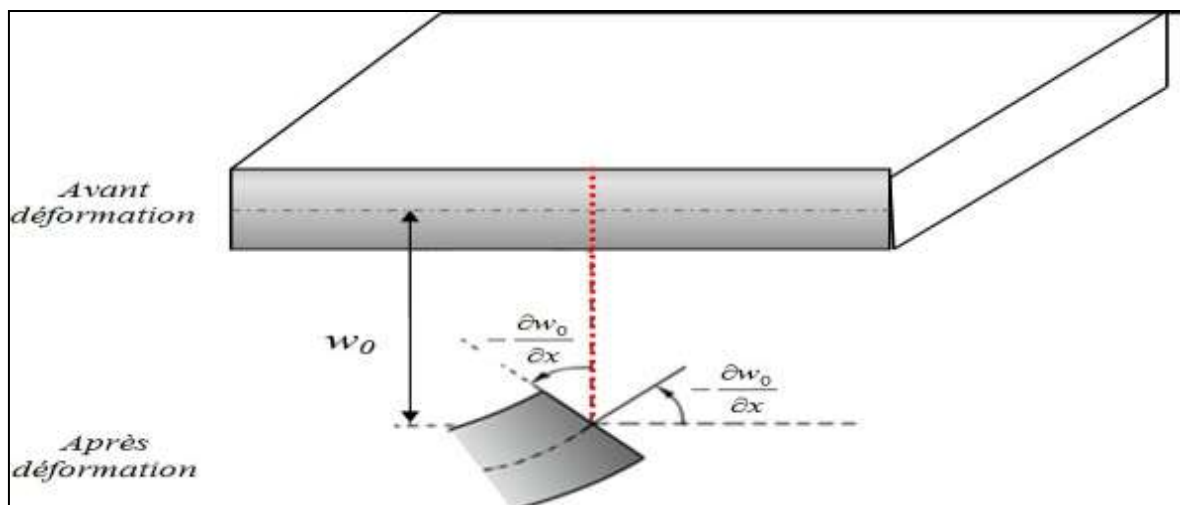


Figure II.3 : Illustration de la plaque de Love-Kirchhoff.

Puisque la CTP est limitée et donne des résultats imprécis pour les plaques semi-épaisses et épaisses (Reissner, 1945; Mindlin, 1951) ont prolongé la théorie classique des plaques minces (CPT) en tenant compte de l'effet de cisaillement transverse.

II.5.2 Théorie des plaques du premier ordre (FSDT), ou la théorie de Reissner-Mindlin

Cette théorie est également appelée « théorie de Mindlin » est une extension des travaux de Timoshenko et est considérée comme une amélioration de la théorie classique des plaques minces (théorie de Kirchhoff). Cette amélioration consiste à rajouter les déformations en cisaillement transverse dans les hypothèses cinématiques. La distribution de cette déformation est supposée constante à travers l'épaisseur de la plaque. Ce qui oblige l'introduction d'un facteur de correction.

Les théories de Mindlin supposent que, la normale reste droite mais non perpendiculaire à la surface moyenne (à cause de l'effet du cisaillement transverse).

Le champ des déplacements est alors le suivant, (figure II.4) :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + z \phi_x(x, y) \tag{II.2.a}$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + z \phi_y(x, y) \tag{II.2.b}$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \tag{II.2.c}$$

Avec : $\phi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x}$, $\phi_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y}$

Où u_0, v_0, w_0 sont les déplacements le long des coordonnées (x, y, z) d'un point du plan (plan $z=0$); ϕ_x et ϕ_y sont les rotations de la normales à la section transversale par rapport aux axes x et y respectivement.

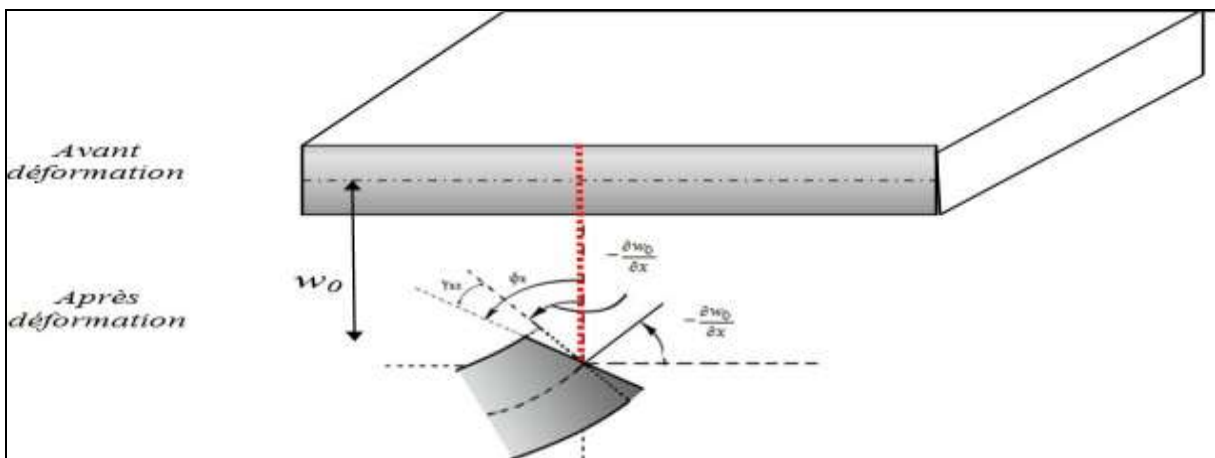


Figure II.4: Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin.

Avec ce choix de la forme des champs de déplacements, les déformations transversales sont constantes en z . Les contraintes de cisaillement sont donc uniforme dans chaque couche discontinue entre les couches. Cette mauvaise description oblige à introduire des coefficients correcteurs pour mieux prendre en compte dans l'écriture de l'énergie, les effets de cisaillement transversal (Whitney, 1973). Les résultats obtenus dépendent essentiellement du choix empirique dans des situations complexes des coefficients correcteurs et l'étude du composite épais reste aléatoire par ce type d'approche cinématique.

Timoshenko a été le premier à avoir étudié les effets des déformations de cisaillement et de l'inertie de rotation dans l'analyse des poutres, c'est pourquoi le modèle de la poutre avec une théorie du premier ordre est aussi appelé modèle ou poutre de Timoshenko.

II.5.2.1 Le coefficient de correction

Le champ de déplacement est basé sur la théorie du premier ordre, les auteurs considèrent que les contraintes et les déformations de cisaillement sont constantes à travers l'épaisseur d'une structure. Dans le cas réel, ceci n'est vrai. En effet, les contraintes de cisaillement sont quadratiques à travers l'épaisseur (figure II.4). Pour corriger les contraintes de cisaillement transversal dont l'expression est issue de la théorie du premier ordre des facteurs de corrections doivent être introduits, figure II.5. (Kaddouri, 2014) :

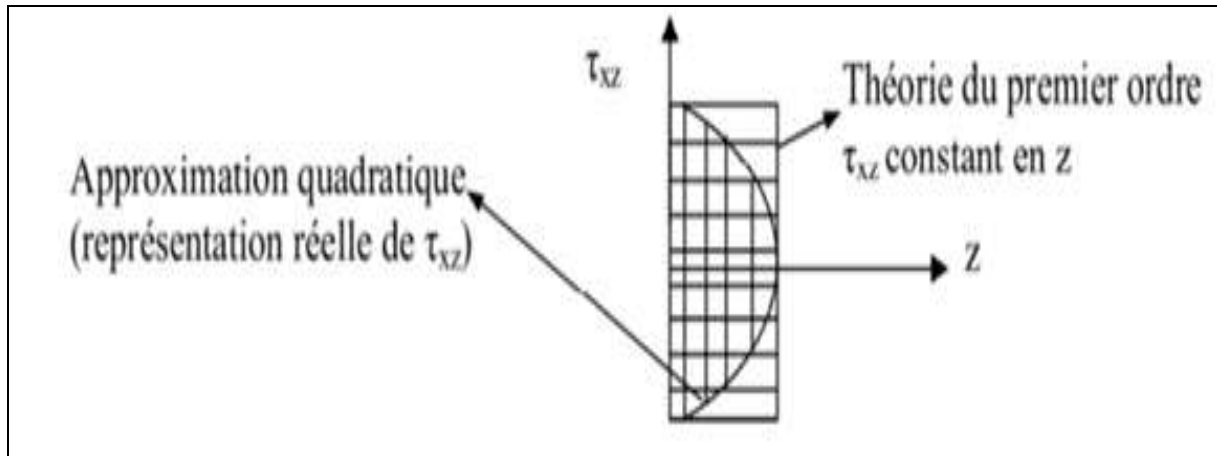


Figure II.5: Approximations de la contrainte du CT : constante (théorie du premier ordre) et quadratique (ordre supérieur).

K est un facteur corrigeant l'hypothèse de contraintes de cisaillement constantes sur l'épaisseur de la plaque dans la théorie de Mindlin, il est le rapport entre l'énergie de déformation de cisaillement de la distribution parabolique et celle uniforme :

$$w(x, y, z) = \frac{\int_{v_1} \tau_{xz} \gamma_{xy} dv}{\int_{v_2} \tau_{xz} \gamma_{xy} dv} \quad (\text{II.3})$$

Ce coefficient dépend de la forme géométrique de la poutre ou la plaque :

Pour un élément circulaire : $K = \frac{5}{6}$

Pour un élément rectangulaire : $K = \frac{2}{3}$

II.5.3 Théorie des plaques d'ordre élevée (HSDT)

Les théories de la déformation de cisaillement des plaques à ordre élevée ont été développées ces dernières années, pour l'analyse de plusieurs problèmes isothermes et ensuite déployées pour comprendre les phénomènes physiques induits dans la plaque. À la différence de la théorie CPT et la théorie FSDT avec les acceptations de la distribution non linéaire du déplacement par l'épaisseur, la théorie d'ordre élevée est basée sur une distribution non linéaire des champs dans l'épaisseur. Par conséquent, on tient compte des effets de la déformation transversale de cisaillement et / ou de la déformation normale transversale. Ces modèles n'exigent pas des facteurs de correction. (Hildebrand et al. 1949), (Naghdi, 1957), (Reissner, 1975). Plusieurs théories d'ordre supérieur ont été proposées par plusieurs chercheurs.

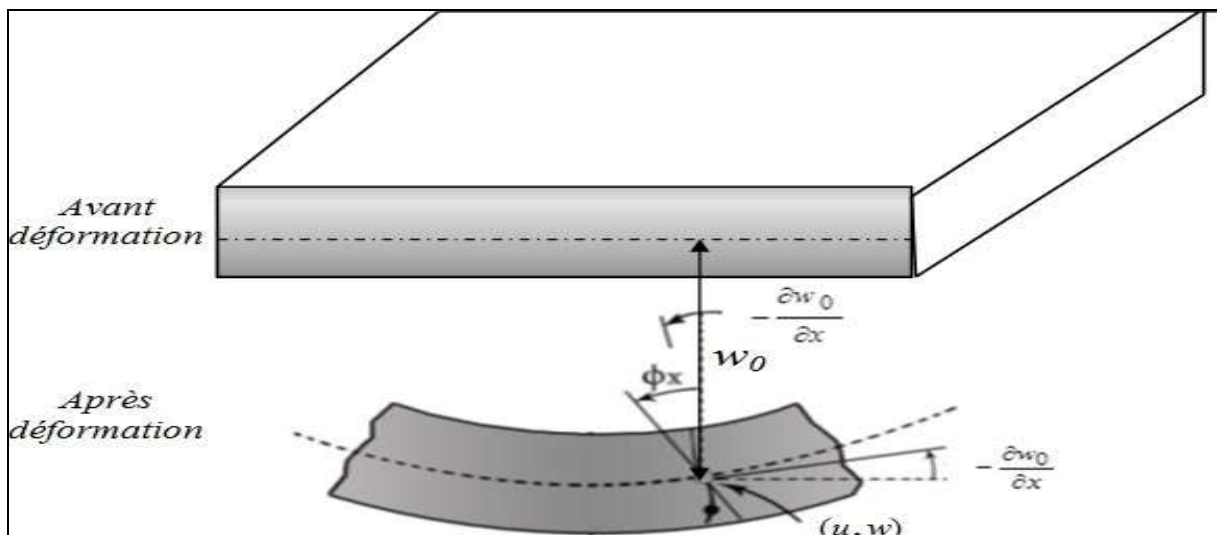


Figure II.6: Illustration de la plaque d'ordre élevé (Reddy, 1997).

Le champ de déplacement est généralement écrit comme suit :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z) \phi_x(x, y) \quad (\text{II.4.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z) \phi_y(x, y) \quad (\text{II.4.b})$$

$$w(x, y) = w_0(x, y) \quad (\text{II.4.c})$$

Où u_0, v_0 et w_0 sont les déplacements le long des coordonnées (x, y, z) et ϕ_x, ϕ_y sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes x, y respectivement. $f(z)$ est une fonction de cisaillement transverse caractérisant les théories correspondantes. En effet, les déplacements de la théorie classique de plaque (CPT) sont obtenue en prenant $f(z) = 0$ alors que la théorie de premier ordre (FSDT) peut être obtenue par $f(z) = z$.

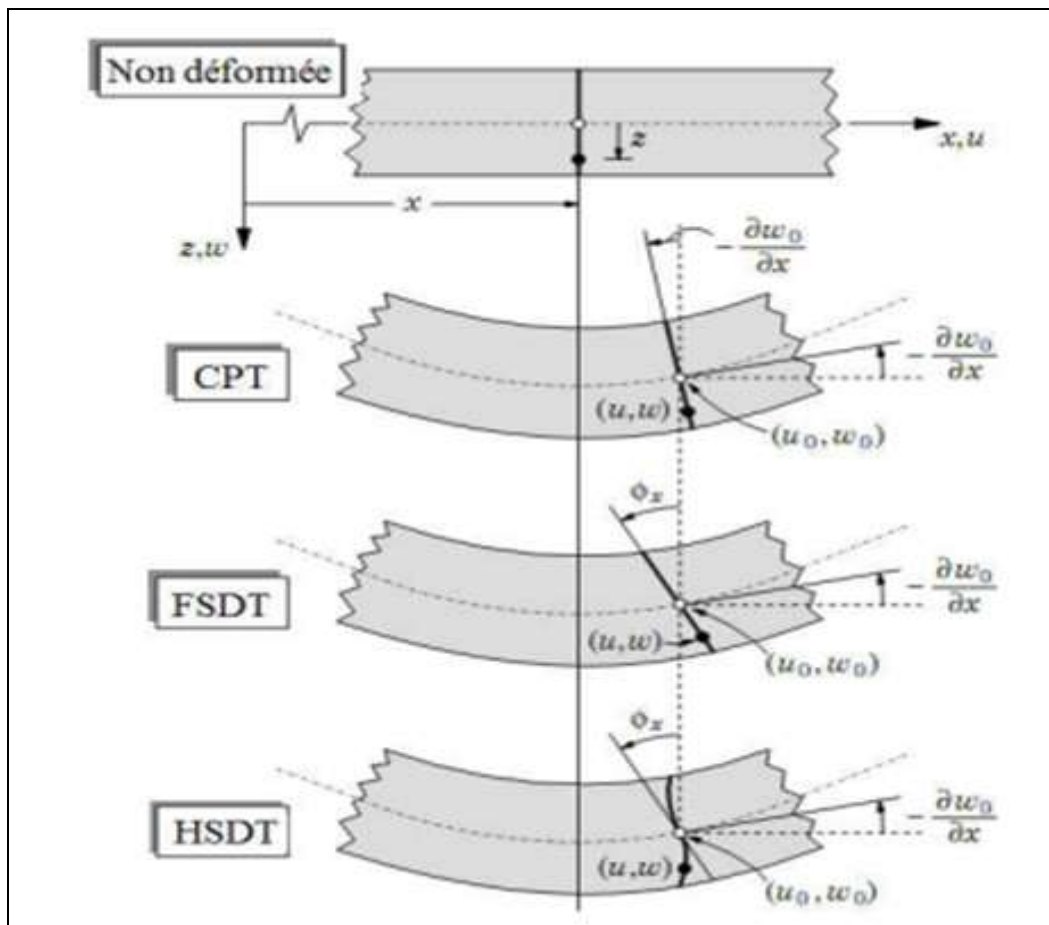


Figure II.7: comparaison de la HSDT avec CPT et FSDT.

L'approche d'Ambartsumyan (Ambartsumyan, 1970) avec :

$$f(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right)$$

L'approche de Reissner (Reissner, 1945) avec :

$$f(z) = \frac{5}{4} z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$$

L'approche d'Afaq :

$$f(z) = z e^{-2(z/h)^2}$$

L'approche de Levinson, Murthy (Murthy, 1981) et Reddy avec :

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$$

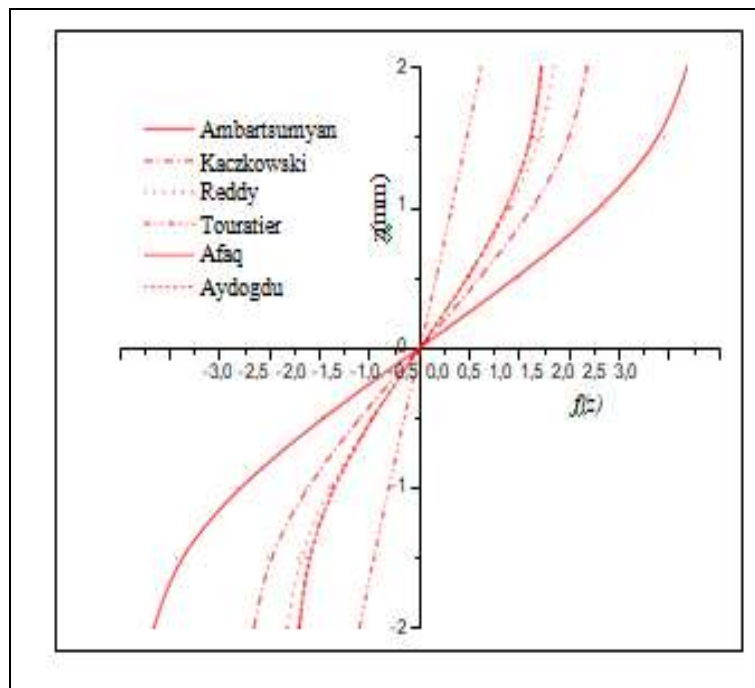


Figure II.8: Variation de la fonction de forme $f(z)$ des différents modèles en fonction de l'épaisseur.

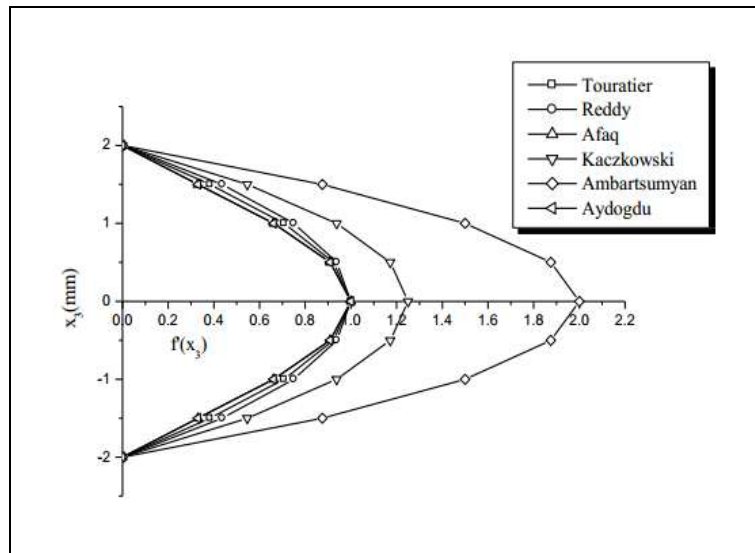


Figure II.9: Variation de la dérivée de la fonction de forme $f(z)$ des différents modèles suivant l'épaisseur.

Nous regroupons dans le tableau suivant les différentes fonctions de cisaillement ainsi qu'une comparaison entre les différents modèles.

Tableau II.1: Différentes fonction de forme de théorie des plaques isotropes.

Théories	Intitulé	Fonction de forme $f(z)$	Distribution de γ_{xz} et γ_{yz} suivant z	Coefficient de correction de cisaillement	Validité
CPT Kirchhoff (1850)	Théorie classique des plaques	0	-	-	Plaques minces
FSDPT Mindlin (1951)	Théorie de déformation des plaques du 1 ^{er} ordre	z	Constante	Requis	Plaques minces et moyennement épaisses

Ambartsuin (1958)	Théorie d'ordre supérieur	$\frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right)$	Quadratique	Non requis	Plaques minces et moyennement épaisses
TSDPT Touratier (1991)	Théorie de déformation trigonométrique des plaques	$\frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)$	Parabolique	Non requis	Plaques minces et épaisses
ESDPT Karama, Afaq et al. (2003)	Théorie de déformation exponentielle des plaques	$z \text{Exp} \left(-2 \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right)$	Parabolique	Non requis	Plaques minces et épaisses
PSDPT Reddy (1984)	Théorie de déformation parabolique des plaques	$z \left(1 - \frac{4}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right)$	parabolique	Non requis	Plaques minces et épaisses
EL Meiche, Tounsi et al. (2011)	Théorie raffinée des plaques	$\frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) - z$ $\cosh(\pi/2 - 1)$	Parabolique	Non requis	Plaques minces et épaisses
Atmane, Tounsi et al. (2010)	Théorie raffinée des plaques	$\frac{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1\right]} z - \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) - z$ $\cosh(\pi/2 - 1)$	Parabolique	Non requis	Plaques minces et épaisses
Shimpi (2002)	Théorie raffinée des Plaques	$h \left[\frac{1}{4} \left(\frac{z}{h} \right) - \frac{5}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^3 \right]$	Parabolique	Non requis	Plaques minces et épaisses

II.6 Théories raffinées d'ordre élevé

La théorie raffinée a été développée pour les plaques isotropes, le nombre de fonctions inconnues dans cette théorie (RPT) actuelle est seulement quatre, alors que les autres théories de déformation de cisaillement le nombre d'inconnus est cinq (Bourada et al. 2012).

Les hypothèses de la RPT sont les suivantes :

- i. Les déplacements sont petits en comparaison avec l'épaisseur de la plaque ;
- ii. Le déplacement transversal w comprend deux composantes : w_b due à la flexion et w_s due au cisaillement transverse ;
- iii. La contrainte normale transverse σ_z est négligeable par rapport aux contraintes σ_x et σ_y ;
- iv. Les déplacements axiaux sont constitués de trois composantes : d'extension, de flexion et de cisaillement.

Le champ de déplacement de telle théorie s'écrit de la façon suivante :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (\text{II.5.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (\text{II.5.b})$$

$$w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) \quad (\text{II.5.c})$$

Où u_0 et v_0 sont les déplacements suivant les directions x et y respectivement. w_b , w_s sont les déplacements transversaux dus à la flexion au cisaillement respectivement. $f(z)$ est une fonction de forme qui détermine la distribution des déformations et des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur.

II.7 Conclusion

Ce chapitre était dédié adonné une lecture sur la littérature des différentes théories, ainsi que les modèles analytiques des plaques. Sa formulation est basée sur les hypothèses de chaque théorie.

Nous avons utilisés une nouvelle théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevée raffinée avec un nouveau champ de déplacement qui présente des intégrales variables.

Chapitre III :
Formulations théoriques

III.1 Introduction

La base des théories précédentes est le calcul approximatif de grandeurs généralisées sur la base d'un système d'équations d'équilibre et de conditions aux limites, et a un statut complémentaire qui relie les contraintes généralisées et les déformations.

Dans ce chapitre on va présenter une formulation analytique pour étudier la réponse de la stabilité des plaques isotrope et fonctionnellement graduées (FG), supposant une théorie raffinée hyperbolique inverse qui utilise seulement quatre variables. Contrairement aux autres théories qui ont cinq fonctions inconnues ou plus.

III.2 Analyse du comportement mécanique des plaques FGM

III.2.1 Propriétés des matériaux

Les FGM sont des matériaux composites constitués de la céramique et du métal. Il y'a quelque modèles dans la littérature qui expriment la variation des propriétés matérielles dans les FGM Chi and Chung (2006ab). Le plus couramment utilisé est la distribution de la loi de puissance en terme de fraction volumique des constituants.

L'effet du coefficient de Poisson sur la déformation est beaucoup moins important que celui du module de Young. Delale et Erdogan (1983) ont supposé que le coefficient de Poisson de la plaque est constant dans tous points de la plaque.

Les propriétés mécaniques de la plaque en FGM sont déterminées à partir de la fraction volumique des matériaux constituants.

III.2.1.1 Plaque P-FGM

Les propriétés du matériau sont considérées comme variant selon l'épaisseur de la plaque selon la distribution de la loi de puissance comme suit:

$$E(z) = (E_c - E_m)V_c + E_m, \quad (\text{III.1})$$

E_c, E_m sont respectivement les propriétés du matériau (de la céramique et du métal) ;

V_c est le volume fraction de la céramique et est exprimée par une loi de puissance simple.

La fraction volumique de la céramique est décrite comme suit:

$$V_c(z) = \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^p \quad (\text{III.2})$$

Avec : $V_m + V_c = 1$

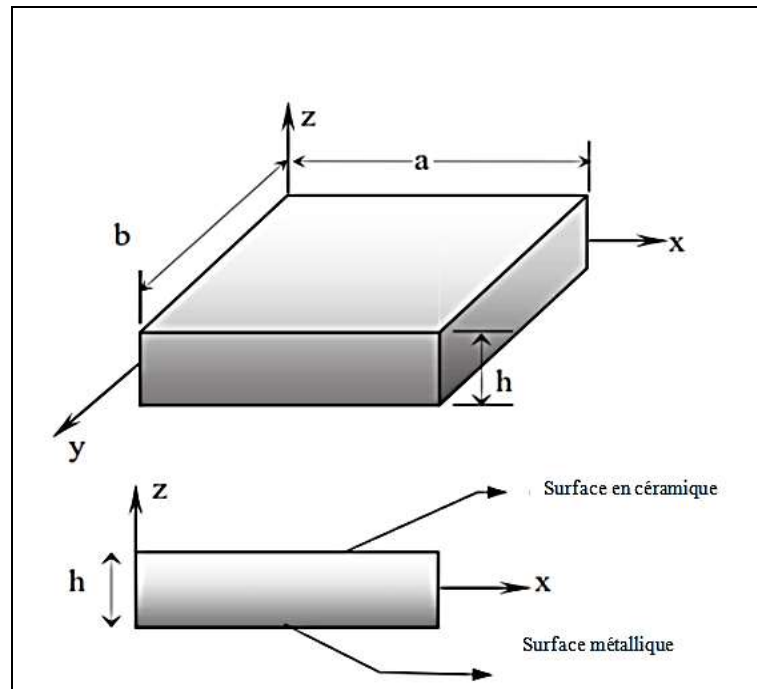


Figure III.1: Géométrie de la plaque en FGM.

III.3 La nouvelle théorie des plaques raffinées à quatre variables

Le nombre de variables inconnus de la théorie raffinée de déformation de cisaillement est seulement quatre, contrairement au cinq variables dans le cas des autres théories de déformation de cisaillement. Les hypothèses de la présente théorie sont les suivantes:

(i) Les déplacements sont petits par rapport à l'épaisseur de la plaque, et par conséquent, les déformations impliquées sont infinitésimales ;

(ii) Le déplacement transversal w inclut deux composantes : un déplacement du à la flexion w_b , et un déplacement w_s du au cisaillement. Ces composantes sont en fonction des coordonnées x, y uniquement ;

$$w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) \quad (\text{III.3})$$

(iii) La Contrainte normale transversal σ_z est négligeable par rapport aux contraintes normales σ_x et σ_y ;

(iv) Le déplacement u suivant la direction x et le déplacement v suivant y se constituent de trois termes : extension, flexion et cisaillement

$$u = u_0 + u_b + u_s, \quad v = v_0 + v_b + v_s \quad (\text{III.4})$$

Les composantes de la flexion u_b et v_b sont supposées similaires aux déplacements donnés par la théorie classique des plaques. Par conséquent, l'expression pour u_b et v_b peut être donnée comme :

$$u_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial x}, \quad v_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial y} \quad (\text{III.5})$$

Les composantes de cisaillement u_s et v_s donnent à l'aide du déplacement w_s une variation parabolique des distorsions γ_{xz} et γ_{yz} de telle sorte que les contraintes τ_{xz} et τ_{yz} seront nulles aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque, et par conséquent, l'expression pour u_s et v_s est donnée par :

$$u_s = -f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x}, \quad v_s = -f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (\text{III.6})$$

III.4 Cinématiques et les équations gouvernantes

III.4.1 Champ de déplacement

Sur la base des hypothèses effectuées dans la section précédente, le champ de déplacement est obtenu comme suit :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= v_0 - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ w(x, y, z) &= w_b(x, y) + w_s(x, y) \end{aligned} \quad (\text{III.7.a})$$

Où

$$f(z) = z - \arcsin h(0.35z) - \frac{(-2) * 0.35z}{h\sqrt{0.35^2 + 4}} \quad (\text{III.7.b})$$

u_0 : Déplacement membranaire plan dans la direction (x) ;

v_0 : Déplacement membranaire plan dans la direction (y) ;

w_b, w_s : Les composantes de déplacement transversal en termes de flexion et de cisaillement et $f(z)$ est la fonction de gauchissement hyperbolique inverse.

III.4.2 Champs de déformation

Le champ de déformation devient :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_x^0 + zk_x^b + f(z)k_x^s \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_y^0 + zk_y^b + f(z)k_y^s \end{aligned}$$

$$\varepsilon_z = 0 \quad (\text{III.8})$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xy}^0 + zk_{xy}^b + f(z)k_{xy}^s$$

$$\gamma_{yz} = g(z)\gamma_{yz}^s$$

$$\gamma_{xz} = g(z)\gamma_{xz}^s$$

Avec

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.9})$$

$$\begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.10})$$

$$\begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.11})$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ \frac{\partial w_s}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.12})$$

$$g(z) = 1 - f'(z) \text{ et } f'(z) = \frac{df(z)}{dz} \quad (\text{III.13})$$

ε^0 : Les déformations en membrane;

k_x^b : Les courbures de la plaque due à la flexion;

k_x^s : Les courbures de la plaque due au cisaillement;

γ_{yz}^s : Déformation transversal due au cisaillement.

III.4.3 Les contraintes

En se limitant à un comportement élastique linéaire, l'expression des contraintes pour un FGM isotrope peut être déterminée en écrivant la relation qui existe entre ces dernières et les déformations, le champ des contraintes peuvent s'écrire sous forme matricielle suivante :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{Et} \quad \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.14})$$

Où $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{yx})$ et $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{yx})$ sont les composantes des contraintes et des déformations, respectivement. Les coefficients de rigidités réduites Q_{ij} sont exprimées par :

$$\begin{aligned} Q_{11} = Q_{22} &= \frac{E(z)}{1-\nu^2} \\ Q_{12} &= \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2} \\ Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} &= \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \end{aligned} \quad (\text{III.15})$$

Où

$\nu(z)$: Le coefficient de Poisson en un point z de la plaque (il est supposé constant dans notre étude) ;

$E(z)$: Module de Young en un point z de la plaque.

III.5 Les équations gouvernantes

Afin d'établir de façon systématique l'ensemble des équations d'équilibre ainsi que les conditions au limites, le principe des travaux virtuels est appliquée, celui-ci indique que, pour tout champ de contrainte en équilibre avec les efforts extérieurs, la somme de travail des efforts internes et le travail des efforts externes est nulle pour tout champ virtuel. Le principe des travaux virtuels dans le cas présent peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\int_V (\delta U + \delta V) dV = 0 \quad (\text{III.16})$$

Tel que δU est la variation de l'énergie de déformation donnée par:

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_{A-h/2}^{h/2} \int (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz}) dAdz \\ &= \int_A \left[N_{xx} \delta \varepsilon_x^0 + N_{yy} \delta \varepsilon_y^0 + N_{xy} \delta \varepsilon_{xy}^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_y^b \delta k_y^b + M_{xy}^b \delta k_{xy}^b + M_x^s \delta k_x^s + M_y^s \delta k_y^s \right. \\ &\quad \left. + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + S_{xz} \delta \gamma_{xz} + S_{yz} \delta \gamma_{yz} \right] dA \end{aligned} \quad (\text{III.17})$$

Où les résultantes des contraintes, et sont définis par :

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} & N_{yy} & N_{xy} \\ M_x^b & M_y^b & M_{xy}^b \\ M_x^s & M_y^s & M_{xy}^s \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}) \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \end{Bmatrix} dz \quad (\text{III.18.a})$$

$$(S_{xz}, S_{yz}) = \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) g(z) dz \quad (\text{III.18.b})$$

Et δV est le travail virtuel du au chargement extérieur exprimé par :

$$\delta V = - \int_A \bar{N} \delta (w_b + w_s) dA \quad (\text{III.19.a})$$

Où

$$\bar{N} = N_{xx}^0 \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x^2} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 \delta (w_b + w_s)}{\partial x \partial y} + N_{yy}^0 \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial y^2} \quad (\text{III.19.b})$$

III.5.1 Les équations gouvernantes de la plaque

L'équation devant être vérifiée quel que soit les déplacements virtuels $\delta u_0, \delta v_0, \delta w_b$ et δw_s cinématiquement admissible, on en déduit les équations d'équilibre :

$$\delta u_0 = \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0$$

$$\delta v_0 = \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} = 0 \quad (\text{III.20})$$

$$\delta w_b = \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + \bar{N} = 0$$

$$\delta w_s = \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + \frac{\partial S_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}}{\partial y} + \bar{N} = 0$$

III.5.2 Formulation des équations différentielles

Les équations gouvernantes peuvent être obtenues en utilisant le principe d'énergie potentielle totale minimale et les quatre équations gouvernantes sont données comme suit :

$$A_{11} d_{11} u_0 + A_{66} d_{22} u_0 + (A_{12} + A_{66}) d_{12} v_0 - B_{11} d_{111} w_b - (B_{12} + 2B_{66}) d_{122} w_b - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) d_{122} w_s - B_{11}^s d_{111} w_s = 0 \quad (\text{III.21.a})$$

$$A_{22} d_{22} v_0 + A_{66} d_{11} v_0 + (A_{12} + A_{66}) d_{12} u_0 - B_{22} d_{222} w_b - (B_{12} + 2B_{66}) d_{112} w_b - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) d_{112} w_s - B_{22}^s d_{222} w_s = 0 \quad (\text{III.21.b})$$

$$\begin{aligned}
 & B_{11}d_{111}u_0 + (B_{12} + 2B_{66})d_{122}u_0 + (B_{12} + 2B_{66})d_{112}v_0 + B_{22}d_{222}v_0 - D_{11}d_{1111}w_b \\
 & - 2(D_{12} + 2D_{66})d_{1122}w_b - D_{22}d_{2222}w_b - D_{11}^s d_{1111}w_s - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)d_{1122}w_s \\
 & - D_{22}^s d_{2222}w_s + \bar{N} = 0
 \end{aligned} \quad (III.21.c)$$

$$\begin{aligned}
 & B_{11}^s d_{111}u_0 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s)d_{122}u_0 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s)d_{112}v_0 + B_{22}^s d_{222}v_0 - D_{11}^s d_{1111}w_b \\
 & - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)d_{1122}w_b - D_{22}^s d_{2222}w_b - H_{11}^s d_{1111}w_s - 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s)d_{1122}w_s \\
 & - H_{22}^s d_{2222}w_s + A_{55}^s d_{11}w_s + A_{44}^s d_{22}w_s + \bar{N} = 0
 \end{aligned} \quad (III.21.d)$$

Où d_{ij} , d_{ijl} et d_{ijlm} sont les opérateurs différentiels suivants :

$$d_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \quad d_{ijl} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}, \quad d_{ijlm} = \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m}, \quad (i, j, l, m = 1, 2) \quad (III.22)$$

Et

$$\bar{N} = \left[N_x^0 \frac{\partial^2(w_b + w_s)}{\partial x^2} + N_y^0 \frac{\partial^2(w_b + w_s)}{\partial y^2} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2(w_s + w_b)}{\partial x \partial y} \right] \quad (III.23)$$

Les coefficients dans les équations gouvernantes associées aux paramètres matériels de hybride ont fonctionnellement classé des plaques sont définis comme

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} A_{11} & B_{11} & D_{11} & B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s \\ A_{12} & B_{12} & D_{12} & B_{12}^s & D_{12}^s & H_{12}^s \\ A_{66} & B_{66} & D_{66} & B_{66}^s & D_{66}^s & H_{66}^s \end{array} \right\} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11}(1, z, z^2, f(z), zf(z), f^2(z)) \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ \nu \\ \frac{1-\nu}{2} \end{array} \right\} dz \quad (III.24.a)$$

Et

$$(A_{22}, B_{22}, D_{22}, B_{22}^s, D_{22}^s, H_{22}^s) = (A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s) \quad (III.24.b)$$

$$A_{44}^s = A_{55}^s = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{2(1+\nu)} [g(z)]^2 dz \quad (III.24.c)$$

III.6 Solution analytique pour les plaques FG simplement appuyées

Dans cette partie, nous sommes concernés par la solution exacte des équations. Pour une plaque rectangulaire en céramique-FGM-métal simplement appuyée avec une longueur a et une largeur b et soumise à un chargement dans le plan dans deux directions ($N_x^0 = N_{cr}$, $N_y^0 = \gamma N_{cr}$, $N_{xy}^0 = 0$).

Les conditions aux limites simplement appuyées sont données comme suit :

$$v_0 = w_b = w_s = \frac{\partial w_b}{\partial y} = \frac{\partial w_s}{\partial y} = N_x = M_x^b = M_x^s = 0 \text{ à } x = 0, a \quad (III.25.a)$$

$$u_0 = w_b = w_s = \frac{\partial w_b}{\partial x} = \frac{\partial w_s}{\partial x} = N_y = M_y^b = M_y^s = 0 \text{ à } y = 0, b \quad (\text{III.25.b})$$

Où N_x^0 , N_y^0 et N_{xy}^0 sont des forces de pré-flambement dans le plan.

A partir de la solution de Navier, on peut résoudre le problème de la stabilité des plaques isotope et en FGM. Les fonctions de déplacement qui satisfont les équations des conditions aux limites (III.25) sont sélectionnées comme la série de Fourier suivante :

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_b \\ w_s \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} \cos(\lambda x) \sin(\mu y) \\ V_{mn} \sin(\lambda x) \cos(\mu y) \\ W_{bmn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \\ W_{smn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \end{Bmatrix} \quad (\text{III.26})$$

Où : U_{mn} , V_{mn} , W_{bmn} et W_{smn} sont des paramètres arbitraires des déplacements et $\lambda = m\pi/a$, $\mu = n\pi/b$ sont les pulsations, m et n sont les nombres naturels de modes.

En remplaçant l'équation (III.26) dans l'équation (III.21), on obtient le système matriciel suivant :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} + k & a_{34} + k \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} + k & a_{44} + k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{bmn} \\ W_{smn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.27})$$

Avec

$$\begin{aligned} a_{11} &= A_{11}\lambda^2 + A_{66}\mu^2 \\ a_{12} &= \lambda \mu (A_{12} + A_{66}) \\ a_{13} &= -\lambda [B_{11}\lambda^2 + (B_{12} + 2B_{66})\mu^2] \\ a_{14} &= -\lambda [B_{11}^s\lambda^2 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s)\mu^2] \\ a_{22} &= A_{66}\lambda^2 + A_{22}\mu^2 \\ a_{23} &= -\mu [(B_{12} + 2B_{66})\lambda^2 + B_{22}\mu^2] \\ a_{24} &= -\mu [(B_{12}^s + 2B_{66}^s)\lambda^2 + B_{22}^s\mu^2] \\ a_{33} &= D_{11}\lambda^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\lambda^2\mu^2 + D_{22}\mu^4 \\ a_{34} &= D_{11}^s\lambda^4 + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)\lambda^2\mu^2 + D_{22}^s\mu^4 \\ a_{44} &= H_{11}^s\lambda^4 + 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s)\lambda^2\mu^2 + H_{22}^s\mu^4 + A_{55}^s\lambda^2 + A_{44}^s\mu^2 \end{aligned} \quad (\text{III.28})$$

$$k = N_{cr}(\lambda^2 + \gamma \mu^2) \quad (\text{III.29})$$

En appliquant l'approche de condensation statique, nous avons obtenu l'expression de la charge de flambement

$$N_{cr} = \frac{-1}{\lambda^2 + \gamma \mu^2} \frac{\bar{a}_{33}\bar{a}_{44} - \bar{a}_{34}\bar{a}_{43}}{\bar{a}_{33} + \bar{a}_{44} - \bar{a}_{34} - \bar{a}_{43}} \quad (\text{III.30})$$

Où

$$\begin{aligned} \bar{a}_{33} &= a_{33} - a_{13} \frac{b_1}{b_0} - a_{23} \frac{b_2}{b_0} & , & & \bar{a}_{34} &= a_{34} - a_{14} \frac{b_1}{b_0} - a_{24} \frac{b_2}{b_0} \\ \bar{a}_{43} &= a_{34} - a_{13} \frac{b_3}{b_0} - a_{23} \frac{b_4}{b_0} & , & & \bar{a}_{44} &= a_{44} - a_{14} \frac{b_3}{b_0} - a_{24} \frac{b_4}{b_0} \\ b_0 &= a_{11}a_{12} - a_{12}^2 & , & & b_1 &= a_{13}a_{22} - a_{12}a_{23} & , & & b_2 &= a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13} \\ & & & & b_3 &= a_{14}a_{22} - a_{12}a_{24} & , & & b_4 &= a_{11}a_{24} - a_{12}a_{14} \end{aligned} \quad (\text{III.31})$$

Pour le cas de CPT, l'expression de la charge de flambement N_{cr} peut être simplifiée en fixant le cisaillement composante du déplacement transversal vers zéro ($W_s = 0$) comme

$$N_{cr} = \frac{-\bar{a}_{33}}{\lambda^2 + \gamma \mu^2} \quad (\text{III.32})$$

Pour chaque choix de m, n , il existe une valeur unique correspondante de N_{cr} . La charge critique de flambement est la plus petite valeur de $N_{cr}(m, n)$.

III.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une solution générale du comportement de flambement dans des matériaux à gradient FGM en utilisant la théorie d'ordre élevé supérieure à quatre variables. Cette théorie n'a que quatre fonctions inconnues, tandis que cinq ou plus dans le cas d'autres théories de contrainte de cisaillement. Les équations gouvernantes dans la plaque FG sont dérivées en utilisant le principe des travaux virtuels, et résolus par la méthode de Navier.

La théorie présentée est fortement similaire à la théorie classique des plaques à bien des égards, ne nécessite pas de facteur de correction de cisaillement et donne une description équivalente de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur avec une condition de contrainte de cisaillement nulle atteinte sur les bords libres de celle-ci. Les résultats d'autres théories de haut niveau.

Chapitre IV

Résultats et discussions

IV.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons élaborer un ensemble de résultats obtenus suite à l'exécution du programme de calcul Maple, nous présenterons les résultats de flambement des plaques isotropes et en matériaux à gradient de propriété simplement appuyées en fonction de l'indice de puissance « p », le type de chargement et le rapport a/h , en utilisant une nouvelle théorie déformation de cisaillement à quatre variables, et présenter les résultats obtenus suite à son exécution. Nous présenterons enfin des tableaux et des graphes.

Les résultats obtenus sont comparés à ceux rapportés dans la littérature.

IV.2 Résultats numériques et discussions

Les résultats de l'analyse du flambement des plaques en matériaux fonctionnellement gradués sont présentés. Les différentes plaques isotrope et en matériaux fonctionnellement gradués sont étudiées avec des caractéristiques géométriques et matériels différentes dans le but d'évaluer la précision de la théorie proposée.

IV.2.1 analyse du flambement des Plaques simplement appuyées en FGM

La plaque est considérée simplement appuyée, Les dimensions des plaques sont $a \times b \times h$ (voir figure IV.1). La graduation des caractéristiques du matériau est dans le sens de l'épaisseur, le métal et la céramique étant les constituants typique.

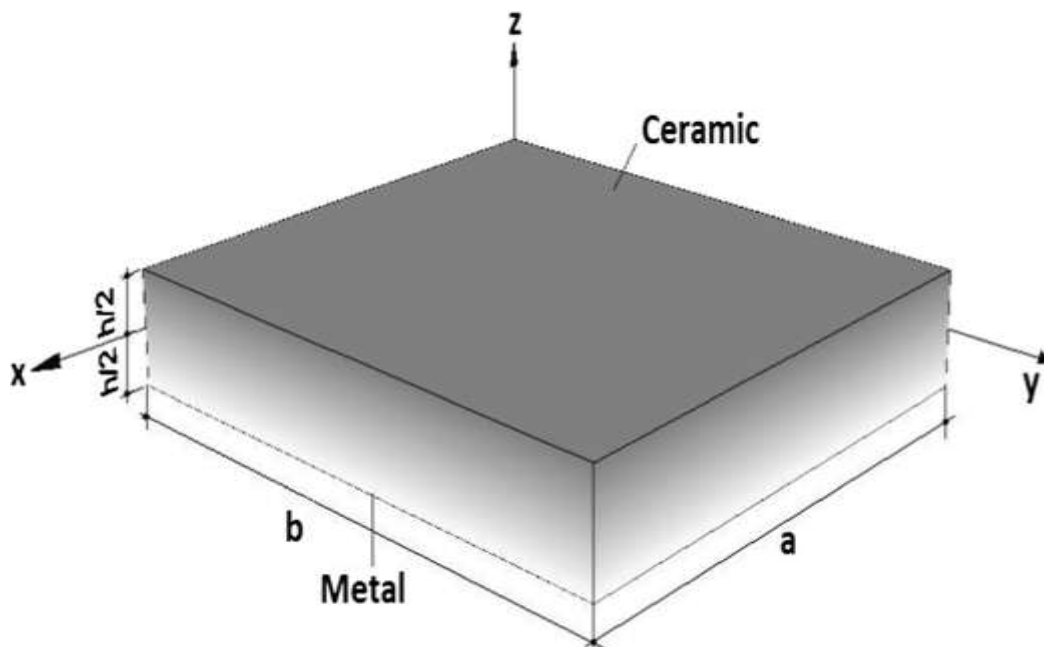


Figure IV.1: Géométrie d'une plaque FGM.

Dans ce chapitre, les propriétés des matériaux utilisées sont montrées dans le tableau IV.1 :

Tableau IV.1: Propriétés du céramique et métal.

Matériaux	Module de Young (GPa)	Coefficient de Poisson
Aluminium (Al)	70	0.3
Alumina (Al ₂ O ₃)	380	0.3
Silicon Carbide (SiC)	420	0.3

Les paramètres non dimensionnels suivants sont utilisés :

$$\hat{N}_{cr} = \frac{N_{cr} a^2}{D_{11} - B_{11}^2 / A_{11}} \quad (\text{IV.1})$$

$$\bar{N}_{cr} = \frac{N_{cr} a^2}{Eh^3} \quad (\text{IV.2})$$

Le tableau IV.2, présente des comparaisons de la charge critique du flambement (\hat{N}_{cr}) des plaques fonctionnellement graduées de type Al/Sic carrées simplement appuyées sous les différents types de chargement .

Les présentes résultats sont comparés avec ceux obtenus en utilisant la théorie de déformation de cisaillement de premier ordre (FSDT) développé par Mohammadi et al (2010), les théories de déformation de cisaillement hyperbolique de Nguyen (2014) et le Model HSDT de Thai et choi (2012), le model HSDT de Bodaghi et Saidi (2010).

A travers le tableau, on peut observer que les résultats obtenus par le modèle développé sont presque identique à ceux de Mohammadi et al (2010), Bodaghi et saidi (2010), Thai et Choi (2012) et Nguyen (2014).

Il est a noté aussi due l'augmentation du paramètre « p » conduit à une réduction de la charge critique adimensionnelle du flambement (\hat{N}_{cr}) et cela parce que la plaque devient flexible.

Tableau IV.2: Comparaison des charges critiques de flambement (\hat{N}_{cr}) des plaques carrées Al/SiC avec ($a/h=10$).

γ	Théorie	Indice p					
		0	0.5	1	2	5	10
0	HSDT (Nguyen 2014)	37.4215	37.6650	37.7560	37.6327	36.8862	36.5934
	FSDT (Mohammadi et al. 2010)	37.3708	–	37.7132	37.7089	–	–
	HSDT (Bodaghi et Saidi 2010)	37.3714	–	37.7172	37.5765	–	–
	HSDT (Thai et Choi 2012)	37.3721	–	37.7143	37.6042	–	–
	Présente	37.4655	37.7122	37.7929	37.6684	36.9145	36.6445
1	HSDT (Nguyen 2014)	18.7107	18.8325	18.8780	18.8163	18.4431	18.2967
	FSDT (Mohammadi et al. 2010)	18.6854	–	18.8566	18.8545	–	–
	HSDT (Bodaghi et Saidi 2010)	18.6860	–	18.8571	18.8020	–	–
	HSDT (Thai et Choi 2012)	18.6861	–	18.8572	18.8021	–	–
	Présente	18.7328	18.8561	18.8966	18.8344	18.4572	18.3223
-1	HSDT (Nguyen 2014)	72.3281	73.4526	73.8426	73.2827	69.9876	68.7244
	FSDT (Mohammadi et al. 2010)	72.0834	–	73.6307	73.6112	–	–
	HSDT (Bodaghi et Saidi 2010)	72.2275	–	73.6645	73.1587	–	–
	HSDT (Thai et Choi 2012)	72.0983	–	73.6437	73.1436	–	–
	Présente	72.5299	73.8554	74.5572	74.3588	70.8570	69.3709

Le tableau IV. 3 montre les valeurs de la charge critique du flambement (\bar{N}_{cr}) des plaques fonctionnellement graduées en fonction du rapport de dimension a/b et de géométrie a/h et l'indice matériel « p ». La plaque FG est soumise à des efforts mécanique uni-axial de compression, bi-axiale de compression et bi-axial avec une compression dans la direction « x » et traction dans la direction « y ».

On peut constater que les résultats actuels calculés par la nouvelle théorie de déformation de cisaillement sont en bon accord avec les modèles d'ordre élevés développé par Thai et Choi (2012) et Nguyen (2014) et cela est confirmé pour différent valeurs du paramètre « p » et les différents rapports a/b et a/h.

Il est à noter que le chargement le plus défavorable est la compression bi-axiale dans les deux directions x et y, car cette derniers donne les plus faible valeurs de la charge critique du flambement (\bar{N}_{cr}).

Tableau IV.3: Comparaison des charges critiques de flambement (\bar{N}_{cr}) des plaques Al/Al₂O₃.

x	a/b	a/h	Théorie	Indice p					
				0	0.5	1	2	5	10
0	0.5	5	HSDT (Thai et Choi 2012)	6.7203	4.4235	3.4164	2.6451	2.1484	1.9213
			HSDT (Nguyen 2014)	6.7417	4.4343	3.4257	2.6503	2.1459	1.9260
			Présente	6.7605	4.4995	3.4339	2.6564	2.1501	1.9326
		10	HSDT (Thai et Choi 2012)	7.4053	4.8206	3.7111	2.8897	2.4165	2.1896
			HSDT (Nguyen 2014)	7.4115	4.8225	3.7137	2.8911	2.4155	2.1911
			Présente	7.4170	4.8430	3.7160	2.8928	2.4167	2.1930
		20	HSDT (Thai et Choi 2012)	7.5993	4.9315	3.7930	2.9582	2.4944	2.2690
			HSDT (Nguyen 2014)	7.6009	4.9307	3.7937	2.9585	2.4942	2.2695
			Présente	7.6023	4.9373	3.7943	2.9589	2.4944	2.2699
	1	5	HSDT (Thai et Choi 2012)	16.0211	10.6254	8.2245	6.3432	5.0531	4.4807
			HSDT (Nguyen 2014)	16.1003	10.6670	8.2597	6.3631	5.0459	4.4981
			Présente	16.1688	10.9001	8.2901	6.3859	5.0614	4.5214
		10	HSDT (Thai et Choi 2012)	18.5785	12.1229	9.3391	7.2631	6.0353	5.4528
			HSDT (Nguyen 2014)	18.6030	12.1317	9.3439	7.2687	6.0316	5.4587
			Présente	18.6250	12.2118	9.3589	7.2758	5.0366	5.4663
20		HSDT (Thai et Choi 2012)	19.3528	12.5668	9.6675	7.5371	6.3448	5.7668	
		HSDT (Nguyen 2014)	19.3593	12.5652	9.6702	7.5386	6.3437	5.7689	
		Présente	19.3651	12.5905	9.6726	7.5404	5.3450	5.7704	
1	0.5	5	HSDT (Thai et Choi 2012)	5.3762	3.5388	2.7331	2.1161	1.7187	1.5370
			HSDT (Nguyen 2014)	5.3934	3.5475	2.7406	2.1202	1.7167	1.5408
			Présente	5.4084	3.5996	2.7471	2.1251	1.7201	1.5461
		10	HSDT (Thai et Choi 2012)	5.9243	3.8565	2.9689	2.3117	1.9332	1.7517
			HSDT (Nguyen 2014)	5.9292	3.8580	2.9710	2.3129	1.9324	1.7529
			Présente	5.9336	3.8744	2.9728	2.3142	1.9333	1.7544
		20	HSDT (Thai et Choi 2012)	6.0794	3.9452	3.0344	2.3665	1.9955	1.8152
			HSDT (Nguyen 2014)	6.0807	3.9445	3.0350	2.3668	1.9953	1.8156
			Présente	6.0818	3.9498	3.0354	2.3671	1.9955	1.8159

Tableau IV.3: continuité

γ	a/b	a/h	Théorie	Indice p					
				0	0.5	1	2	5	10
1	1	5	HSDT (Thai et Choi 2012)	8.0105	5.3127	4.1122	3.1716	2.5265	2.2403
			HSDT (Nguyen 2014)	8.0501	5.3335	4.1299	3.1815	2.5230	2.2491
			Présente	8.0844	5.4500	4.1450	3.1929	2.5307	2.2607
		10	HSDT (Thai et Choi 2012)	9.2893	6.0615	4.6696	3.6315	3.0177	2.7264
			HSDT (Nguyen 2014)	9.3015	6.0659	4.6748	3.6344	3.0158	2.7293
			Présente	9.3125	6.1059	4.6794	3.6379	3.0183	2.7331
		20	HSDT (Thai et Choi 2012)	9.6764	6.2834	4.8337	3.7686	3.1724	2.8834
			HSDT (Nguyen 2014)	9.6796	6.2826	4.8351	3.7693	3.1718	2.8844
			Présente	9.6825	6.2952	4.8363	3.7702	3.1725	2.8852
-1	0.5	5	HSDT (Thai et Choi 2012)	8.9604	5.8980	4.5551	3.5268	2.8646	2.5617
			HSDT (Nguyen 2014)	8.9890	5.9124	4.5676	3.5337	2.8612	2.5679
			Présente	9.0141	5.9993	4.5785	3.5419	2.8669	2.5768
		10	HSDT (Thai et Choi 2012)	9.8738	6.4275	4.9481	3.8529	3.2219	2.9195
			HSDT (Nguyen 2014)	9.8820	6.4299	4.9516	3.8548	3.2206	2.9214
			Présente	9.8894	6.4574	4.9547	3.8571	3.2223	2.9240
		20	HSDT (Thai et Choi 2012)	10.1324	6.5753	5.0574	3.9442	3.3259	3.0253
			HSDT (Nguyen 2014)	10.1345	6.5742	5.0583	3.9447	3.3255	3.0260
			Présente	10.1364	6.5831	5.0590	3.9453	3.3259	3.0265
	1	5	HSDT (Thai et Choi 2012)	26.2058	17.7704	13.8486	10.5589	7.9590	6.8970
			HSDT (Nguyen 2014)	26.4999	17.9424	13.9872	10.6421	7.9571	6.9626
			Présente	26.7391	18.6931	14.0996	10.7259	8.0114	7.0374
		10	HSDT (Thai et Choi 2012)	35.8416	23.5920	18.2206	14.1073	11.4583	10.2468
			HSDT (Nguyen 2014)	35.9559	23.6497	18.2704	14.1349	11.4447	10.2717
			Présente	36.0564	23.9974	18.3142	14.1679	11.4676	10.3074
20	HSDT (Thai et Choi 2012)	39.4951	25.7100	19.7925	15.4115	12.8878	11.6779		
	HSDT (Nguyen 2014)	39.5280	25.7197	19.8065	15.4190	12.8824	11.6857		
	Présente	39.5576	25.8298	19.8190	15.4285	12.8892	11.6961		

Le tableau IV.4 présente les valeurs de la charge critique de flambement (\hat{N}_{cr}) des plaques isotropes simplement appuyées sous un chargement mécanique uni-axiale de compression dans le sens (x). Les résultats obtenus en utilisant la présente théorie sont comparé a ceux obtenue par Kirchhoff (1850) on utilisant la théorie classique des plaques (CPT), Mindlin (1951) en employant la théorie de déformation de cisaillement de 1^{er} ordre et d'autres modèles d'ordre élevé développé par Reddy (1984) et Sayyad et Ghugal (2014).

A partir des comparaisons effectués, une bonne concordance est confirmé entre la théorie actuel et d'autre modèle d'ordre supérieur, cela est valable pour les plaques carrés et rectangulaire, on peut observer que tous les modèles CPT, FSDT et HSDTs donné presque les mêmes valeurs pour les plaques mince (a/h=100) et cela montre que l'effet de la déformation de cisaillement est négligé dans les plaques, par contre il apparait dans les plaques semi épaisses et épaisses.

Tableau IV.4: Comparaison des charges critiques de flambement non-dimensionnelles (\hat{N}_{cr}) pour des plaques rectangulaires isotropes simplement supportées sous compression uni-axiale le long de la direction x .

γ	a/h	Théorie	b/a						
			1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
0	5	Présente	2.951	1.621	1.237	1.075	0.991	0.942	0.911
		Sachin et Hajare (2015)	2.949	1.662	1.238	1.076	0.992	0.943	0.911
		Sayyad et Ghugal	3.026	1.654	1.259	1.093	1.007	0.957	0.925
		Reddy (1984)	2.951	1.621	1.237	1.075	0.991	0.942	0.911
		Mindlin (1951)	2.949	1.621	1.237	1.075	0.991	0.942	0.911
		Kirchhoff (1850)	3.615	1.885	1.412	1.216	1.115	1.057	1.020
	10	Présente	3.422	1.811	1.364	1.177	1.081	1.026	0.990
		Sachin et Hajare(2015)	3.422	1.812	1.364	1.178	1.082	1.026	0.991
		Sayyad et Ghugal	3.454	1.825	1.373	1.185	1.089	1.032	0.997
		Reddy (1984)	3.422	1.812	1.364	1.177	1.081	1.026	0.990
		Mindlin (1951)	3.422	1.811	1.364	1.177	1.081	1.026	0.990
		Kirchhoff (1850)	3.615	1.885	1.412	1.216	1.115	1.057	1.020
	20	Présente	3.564	1.866	1.399	1.206	1.107	1.049	1.012
		Sachin et Hajare (2015)	3.565	1.867	1.400	1.206	1.107	1.049	1.013
		Sayyad et Ghugal	3.582	1.874	1.405	1.211	1.111	1.053	1.016
		Reddy (1984)	3.564	1.866	1.399	1.206	1.107	1.049	1.012
		Mindlin (1951)	3,564	1,866	1,399	1,206	1,107	1,049	1,012
		Kirchhoff (1850)	3.615	1.885	1.412	1.216	1.115	1.057	1.020
	50	Présente	3.607	1.882	1.41	1.214	1.114	1.056	1.019
		Sachin et Hajare (2015)	3.607	1.883	1.412	1.216	1.114	1.057	1.020
		Sayyad et Ghugal	3.621	1.889	1.415	1.219	1.118	1.059	1.022
		Reddy (1984)	3.606	1.882	1.410	1.124	1.114	1.055	1.018
		Mindlin (1951)	3.607	1.882	1.410	1.214	1.114	1.056	1.019
		Kirchhoff (1850)	3.615	1.885	1.412	1.216	1.115	1.057	1.020
100	Présente	3.613	1.884	1.411	1.215	1.115	1.057	1.020	
	Sachin et Hajare (2015)	3.613	1.885	1.412	1.216	1.115	1.057	1.020	
	Sayyad et Ghugal	3.625	1.891	1.416	1.219	1.119	1.060	1.023	
	Reddy (1984)	3.613	1.884	1.411	1.215	1.115	1.056	1.019	
	Mindlin (1951)	3.613	1.885	1.411	1.215	1.115	1.057	1.020	
	Kirchhoff (1850)	3.615	1.558	1.412	1.216	1.115	1.057	1.020	

Le tableau IV.5 présente la charge critique non-dimensionnelle du flambement (\hat{N}_{cr}) des plaques carrés (a=b) et rectangulaire (b/a=1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5 et 4). La structure est soumise a un chargement de compression dans le sens (y), les résultats sont comparées avec les modèles existants dans la littérature tel que Kirchhof (1850), Mindlin (1951), Reddy (1984) et Sayyad et Ghugal (2014), il est claire d’après les résultats obtenus qu’un bon accord est confirmé entre les résultats actuels et ceux des théories de déformation de cisaillement (FSDT et HSDTs).

Il est remarquable aussi que la théorie classique donne les mêmes valeurs de la charge critique adimensionnelle du flambement (\hat{N}_{cr}) pour les plaques minces et épaisses, ce qui montre que la théorie classique (CPT) néglige l’effet de la déformation de cisaillement dans les plaques épaisses dans ce cas les résultats sont surestimé pour les petites valeurs des rapports a /h.

Tableau IV.5: Comparaison des charges critiques de flambement non-dimensionnelles pour des plaques rectangulaires isotropes simplement supportées sous compression uni-axial le long de la direction y.

γ	a/h	Théorie	b/a						
			1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
1	5	Présente	2.951	3.649	4.951	6.722	8.925	11.546	14.580
		Sachin et Hajare (2015)	2.949	3.650	4.953	6.724	8.927	11.549	14.583
		Sayyad et Ghugal (2014)	3.026	3.721	5.039	6.835	9.069	11.729	16.269
		Reddy (1984)	2.951	3.649	4.951	6.722	8.925	11.546	14.580
		Mindlin (1951)	2.949	3.648	4.950	6.721	8.923	11.545	14.578
		Krichhoff (1850)	3.615	4.242	5.648	7.601	10.042	12.953	16.325
	10	Présente	3.422	4.076	5.456	7.360	9.737	12.569	15.850
		Sachin et Hajare (2015)	3.422	4.077	5.457	7.361	9.738	12.570	15.851
		Sayyad et Ghugal (2014)	3.454	4.108	5.495	7.410	9.802	12.652	15.953
		Reddy (1984)	3.422	4.076	5.456	7.360	9.737	12.570	15.850
		Mindlin (1951)	3.422	4.076	5.456	7.360	9.737	12.570	15.850
		Krichhoff (1850)	3.615	4.242	5.648	7.601	10.042	12.953	16.325
	20	Présente	3.564	4.200	5.599	7.539	9.964	12.855	16.203
		Sachin et Hajare (2015)	3.565	4.200	5.600	7.539	9.964	12.855	16.204
		Sayyad et Ghugal (2014)	3.582	4.218	5.623	7.570	10.005	12.907	16.269
		Reddy (1984)	3.564	4.200	5.599	7.539	9.964	12.855	16.204
		Mindlin (1951)	3.564	4.200	5.599	7.539	9.949	12.855	16.204
		Krichhoff (1850)	3.615	4.242	5.648	7.601	10.042	12.953	16.325

Tableau IV.5: Continuité

γ	a/h	Théorie	b/a						
			1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
1	50	Présente	3.607	4.235	5.640	7.591	10.029	12.937	16.305
		Sachin et Hajare (2015)	3.607	4.236	5.641	7.591	10.030	12.937	16.306
		Sayyad et Ghugal (2014)	3.621	4.251	5.660	7.618	10.066	12.984	16.365
		Reddy (1984)	3.606	4.235	5.640	2.590	10.028	12.935	16.303
		Mindlin (1951)	3.607	4.236	5.641	7.591	10.030	12.937	16.305
		Krichhoff (1850)	3.615	4.242	5.648	7.601	10.042	12.953	16.325
	100	Présente	3.613	4.241	5.646	7.598	10.039	12.949	16.320
		Sachin et Hajare (2015)	3.613	4.241	5.647	7.599	10.039	12.949	16.320
		Sayyad et Ghugal (2014)	3.625	4.255	5.665	7.624	10.073	12.992	16.375
		Reddy (1984)	3.613	4.240	5.646	7.595	10.037	12.944	16.312
		Mindlin (1951)	3.613	4.241	5.646	7.598	10.037	12.950	16.321
		Krichhoff (1850)	3.615	4.242	5.648	7.601	10.042	12.953	16.325

Les valeurs de la charge critique non dimensionnelle du flambement (\hat{N}_{cr}) des plaques isotropes simplement appuyées sous un chargement bi-axiale de compression (dans les directions x et y) sont présentés dans le tableau IV.6.

Encore une fois on peut conclure que le modèle présenté donne des bonnes résultats de la charge critique adimensionnelle du flambement (\hat{N}_{cr}). Il est clair, d'après les tableaux présentés que l'effet de la déformation de cisaillement transverse a un rôle très important pour la prédiction de la charge critique du flambement des plaques semi-épaisses et épaisses.

On peut noter aussi que la charge critique du flambement est en relation inverse avec le rapport b/a, c'est-à-dire que les plaques élancées donnent des faibles valeurs de la charge critique (\hat{N}_{cr}).

Tableau IV.6: Comparaison des charges critiques de flambement non-dimensionnelle (\hat{N}_{cr}) pour des plaques rectangulaires isotropes simplement supportées sous compression bi-axiale.

ν	a/h	Théorie	b/a						
			1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
1	5	Présente	1.475	1.122	0.990	0.927	0.892	0.871	0.857
		Sachin et Hajare (2015)	1.475	1.123	0.991	0.927	0.893	0.872	0.858
		Sayyad et Ghugal (2014)	1.513	1.145	1.007	0.942	0.907	0.885	0.871
		Reddy (1984)	1.475	1.122	0.990	0.927	0.892	0.871	0.857
		Mindlin (1951)	1.474	1.122	0.990	0.927	0.892	0.871	0.857
		Kirchhoff (1850)	1.807	1.305	1.129	1.048	1.004	0.977	0.960
	10	Présente	1.711	1.254	1.091	1.015	0.973	0.948	0.932
		Sachin et Hajare (2015)	1.711	1.254	1.091	1.015	0.974	0.949	0.932
		Sayyad et Ghugal (2014)	1.727	1.264	1.099	1.022	0.980	0.954	0.938
		Reddy (1984)	1.711	1.254	1.091	1.015	0.973	0.948	0.932
		Mindlin (1951)	1.711	1.254	1.091	1.015	0.973	0.948	0.932
		Kirchhoff (1850)	1.807	1.305	1.129	1.044	1.004	0.977	0.960
	20	Présente	1.782	1.292	1.119	1.039	0.996	0.970	0.953
		Sachin et Hajare (2015)	1.783	1.292	1.120	1.040	0.996	0.970	0.953
		Sayyad et Ghugal (2014)	1.791	1.298	1.124	1.045	1.000	0.974	0.957
		Reddy (1984)	1.782	1.292	1.119	1.039	0.996	0.970	0.953
		Mindlin (1951)	1.782	1.292	1.119	1.039	0.996	0.970	0.953
		Kirchhoff (1850)	1.807	1.305	1.129	1.048	1.004	0.977	0.960
	50	Présente	1.803	1.303	1.128	1.047	1.002	0.976	0.959
		Sachin et Hajare (2015)	1.804	1.303	1.128	1.047	1.003	0.976	0.959
		Sayyad et Ghugal (2014)	1.81	1.308	1.132	1.050	1.006	0.979	0.962
		Reddy (1984)	1.803	1.303	1.128	1.046	1.002	0.976	0.959
		Mindlin (1951)	1.803	1.303	1.128	1.046	1.002	0.976	0.959
		Kirchhoff (1850)	1.807	1.305	1.129	1.048	1.004	0.977	0.960
100	Présente	1.806	1.304	1.129	1.048	1.003	0.977	0.960	
	Sachin et Hajare (2015)	1.807	1.305	1.129	1.048	1.004	0.977	0.960	
	Sayyad et Ghugal (2014)	1.812	1.309	1.133	1.051	1.007	0.980	0.963	
	Reddy (1984)	1.806	1.304	1.129	1.047	1.003	0.976	0.959	
	Mindlin (1951)	1.806	1.305	1.129	1.048	1.003	0.977	0.960	
	Kirchhoff (1850)	1.807	1.305	1.129	1.048	1.004	0.977	0.960	

Le tableau IV.7 présente les valeurs de la charge critique du flambement des plaques en FGM (avec $E_c = 420$ GPa et $E_m = 70$ GPa $\nu = 0.3$) simplement appuyées en fonction du rapport de géométrie (a/h).

Les résultats calculés par la nouvelle théorie de déformation de cisaillement sont comparés à ceux obtenue par Bodaghi et Saidi (2010) basée sur la théorie d'ordre élevée (HSDT), il est remarquable que les présents résultats sont conformes aux résultats publiés.

Il peut être conclu que la présente théorie n'est pas seulement exacte, mais aussi simple pour la prédiction de la charge critique adimensionnelle N_{cr} de plaques FGM.

Tableau IV.7: Comparaison des charges critiques de flambement N_{cr} (MN/m) d'une plaque rectangulaire entièrement FGM.

ν	a/b	a/h	Théorie	P		
				0	1	2
0	0.5	10	HSDT (Fekrar et al. 2012)	2080.010	1028.554	780.149
			HSDT (Bodaghi et Saidi 2010)	2079.721	1028.412	780.097
			Présente	2079.769	1028.458	780.211
		5	HSDT (Fekrar et al. 2012)	12172.770	6275.972	4695.067
			HSDT (Bodaghi et Saidi 2010)	12162.119	6270.298	4692.542
			Présente	12165.646	6272.867	4694.481
	1	10	HSDT (Fekrar et al. 2012)	1437.452	702.276	534.807
			HSDT (Bodaghi et Saidi 2010)	1437.361	702.304	534.441
			Présente	1437.390	702.252	534.827
		5	HSDT (Fekrar et al. 2012)	9918.275	4956.375	3746.287
			HSDT (Bodaghi et Saidi 2010)	9915.620	4955.431	3746.054
			Présente	9916.331	4955.601	3746.560
	1.5	10	HSDT (Fekrar et al. 2012)	1528.089	749.027	569.786
			HSDT (Bodaghi et Saidi 2010)	1527.903	748.920	569.751
			Présente	1527.995	748.986	569.821
5		HSDT (Fekrar et al. 2012)	10048.091	5069.449	3819.647	
		HSDT (Bodaghi et Saidi 2010)	10044.721	5067.219	3819.109	
		Présente	10045.135	5068.050	3820.003	
-1	0.5	10	HSDT (Fekrar et al. 2012)	1664.008	822.843	624.119
			HSDT (Bodaghi et Saidi 2010)	1663.777	822.738	624.158
			Présente	1663.818	822.769	624.168
		5	HSDT (Fekrar et al. 2012)	9738.216	5020.777	3756.054
			HSDT (Bodaghi et Saidi 2010)	9738.216	5016.384	3754.274
			Présente	9732.500	5018.199	3755.940

Tableau IV.7: continuité

γ	a/b	a/h	Théorie	P			
				0	1	2	
1	1	10	HSDT (Fekrar et al. 2012)	9729.999	351.138	267.403	
			HSDT (Bodaghi et Saidi 2010)	718.726	351.124	267.416	
			Présente	718.695	351.125	267.418	
		5	HSDT (Fekrar et al. 2012)	718.692	2478.187	1873.143	
			HSDT (Bodaghi et Saidi 2010)	4959.137	2477.589	1873.19	
			Présente	4958.160	2477.763	1873.28	
	1.5	10	HSDT (Fekrar et al. 2012)	4957.888	256.782	195.706	
			HSDT (Bodaghi et Saidi 2010)	526.878	256.776	195.714	
			Présente	526.861	256.777	195.713	
		5	HSDT (Fekrar et al. 2012)	526.861	1871.329	1418.040	
			HSDT (Bodaghi et Saidi 2010)	3773.504	1871.038	1418.12	
			Présente	3772.966	1871.117	1418.160	
	1	0.5	10	HSDT (Fekrar et al. 2012)	3772.877	1371.406	1040.199
				HSDT (Bodaghi et Saidi 2010)	2773.980	1371.653	1040.519
				Présente	2773.0260	1371.279	1040.280
			5	HSDT (Fekrar et al. 2012)	16230.36	8367.962	6260.09
				HSDT (Bodaghi et Saidi 2010)	16216.712	8360.541	6257.811
				Présente	16220.907	8363.751	6259.902
1		10	HSDT (Fekrar et al. 2012)	2773.347	1371.406	1040.199	
			HSDT (Bodaghi et Saidi 2010)	2772.980	1371.653	1040.519	
			Présente	2773.0260	1371.294	1040.276	
		5	HSDT (Fekrar et al. 2012)	16230.360	8367.962	6260.090	
			HSDT (Bodaghi et Saidi 2010)	16216.712	8360.541	6257.811	
			Présente	16220.907	8364.061	6259.438	
1.5		10	HSDT (Fekrar et al. 2012)	2773.347	1371.406	1040.199	
			HSDT (Bodaghi et Saidi 2010)	2772.980	1371.653	1040.519	
			Présente	2773.026	1371.294	1040.276	
		5	HSDT (Fekrar et al. 2012)	16223.643	8360.414	6257.811	
			HSDT (Bodaghi et Saidi 2010)	16216.712	8360.541	6257.812	
			Présente	16220.907	8363.839	6259.865	

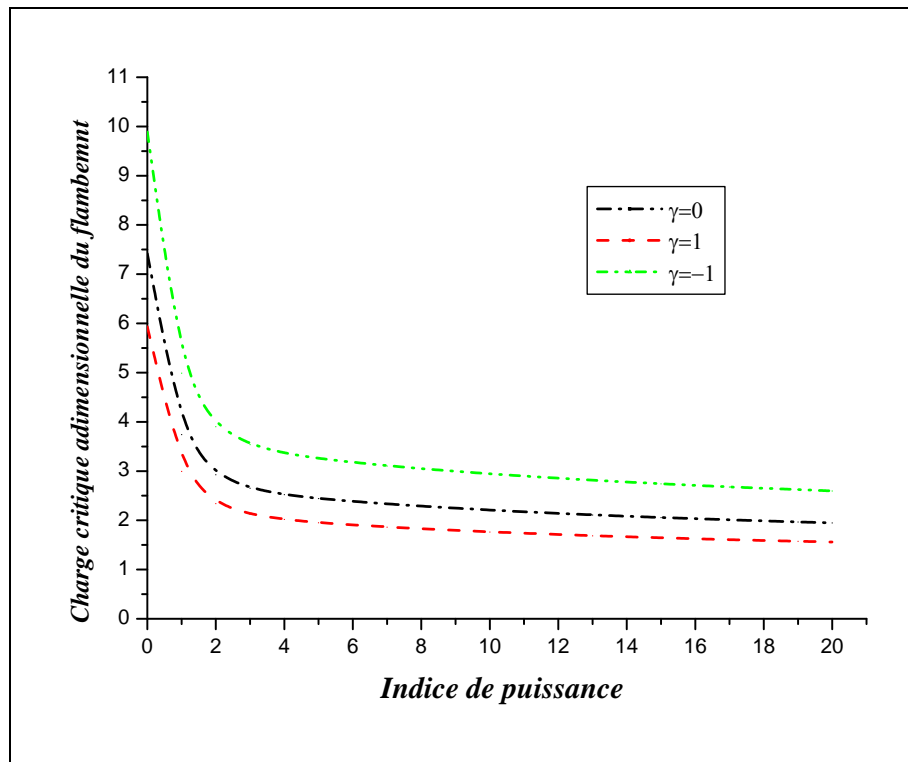


Figure IV.2: La variation de la charge critique du flambement \bar{N}_{cr} d'une plaque FG rectangulaire en fonction de l'indice de puissance et le type de chargement avec ($a/b=0.5$) et le rapport ($a/h=10$).

La variation de la charge critique de flambement \bar{N}_{cr} des plaques rectangulaire ($a/b=0.5$) fonctionnellement graduée (Al/SiC) avec ($a/h=10$) en fonction de l'indice de la fraction volumique « p » pour les différents type du chargement axiale est illustré dans la figure IV.2.

À travers les graphes tracées on peut conclure que la charge critique de flambement \bar{N}_{cr} diminue avec l'augmentation du l'indice de fraction volumique « p » et cela est valable pour les différents types de chargement.

On peut observer aussi que les plus grand valeurs de la charge critique adimensionnelle du flambement \bar{N}_{cr} sont obtenue pour une plaque FG sous un chargement bi-axiale avec une compression dans la direction x et traction dans la direction y car la plaque est stabilise par l'effort de traction.

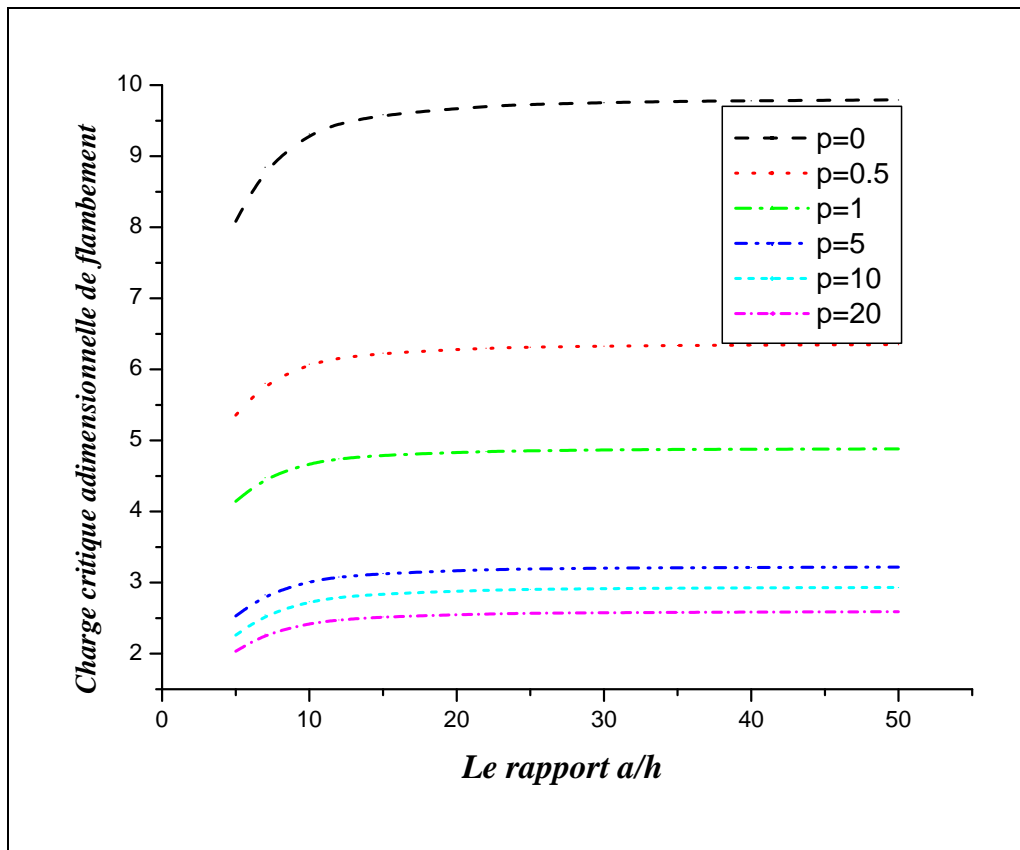


Figure IV.3: La variation de la charge critique du flambement \bar{N}_{cr} d'une plaque FG carrée en fonction du rapport a/h .

Les effets du rapport a/h et le paramètre « p » sur la variation de la charge critique adimensionnelle du flambement \bar{N}_{cr} des plaques FG carrées simplement appuyées soumise à une compression bi-axiale est illustré dans la figure IV.3.

A partir de courbes tracés on peut remarquer que la charge critique \bar{N}_{cr} est en relation de corrélation directe avec le rapport de géométrie a/h est en relation inverse avec l'indice matériel « p ».

Les plus grandes valeurs la charge critique adimensionnelle du flambement \bar{N}_{cr} sont obtenue pour une plaque totalement céramique ($p=0$).

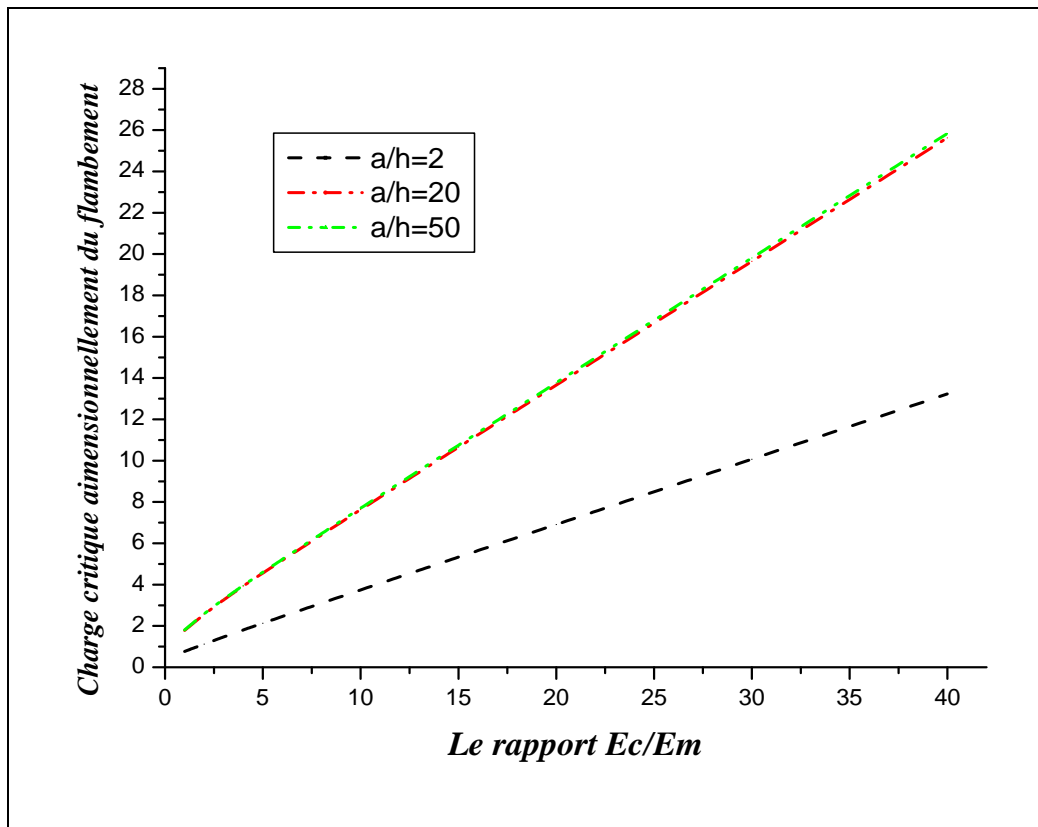


Figure IV.4: La variation de la charge critique du flambement \bar{N}_{cr} d'une plaque FG carrée en fonction du rapport E_c/E_m avec ($p=1$).

Figure IV.4, illustre l'effet des rapports de géométrie et des modules sur la variation de la charge critique du flambement \bar{N}_{cr} des plaques fonctionnellement graduées simplement appuyées soumise à un chargement bi-axiale de compression.

A partir de courbes tracées, on constate que la charge critique du flambement \bar{N}_{cr} est en relation de corrélation directe avec les rapports de géométrie a/h , ce qui montre que pour les plaques FG très épaisses l'effet de la déformation de cisaillement est considérable.

On peut constater aussi que l'augmentation des valeurs du rapport des modules conduit à une augmentation dans les valeurs de la charge critique adimensionnelle du flambement \bar{N}_{cr} et cela est due à la rigidité élevée de la plaque FG simplement appuyée.

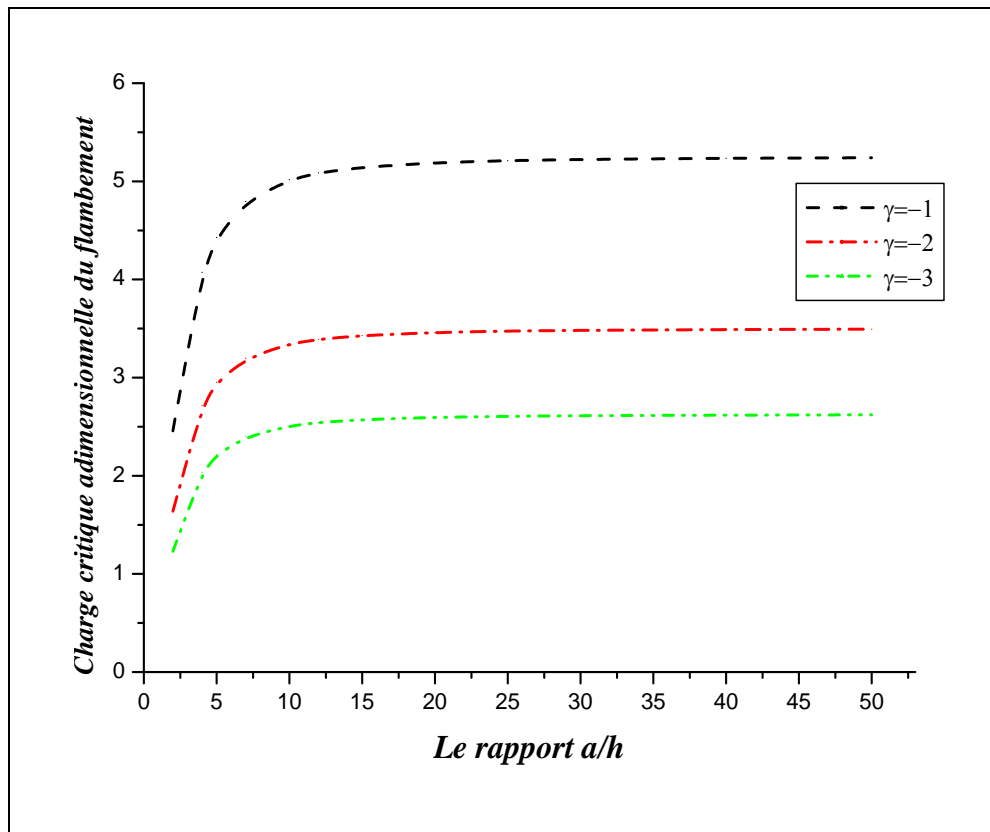


Figure IV.5: La variation de la charge critique adimensionnelle du flambement \bar{N}_{cr} en fonction du rapport de géométrie a/h avec ($p=1$).

Figure IV.5 présente la variation de la charge critique adimensionnelle du flambement des plaques en FGM simplement appuyées en fonction du type de chargement et le rapport d'épaisseur. On peut conclure encore une fois que le rapport de géométrie a un effet important sur la variation des valeurs de la charge critique du flambement.

On observe aussi que une plaque sous un chargement de compression suivant x et y de même intensité donne les plus importantes valeurs de la charge \bar{N}_{cr} par rapport à une plaque soumise à un chargement bi-axiale de compression avec des intensités différentes suivant l'axe y.

Finalement on voit que l'augmentation de la charge suivant y diminue la charge du flambement \bar{N}_{cr} , donc on peut dire que c'est le cas le plus défavorable.

IV.3 Conclusion

On conclusion, l'analyse du flambement des plaques isotropes simplement appuyées a été présentée, sur la base de la nouvelle théorie des plaques raffinée à quatre variables, la précision et l'efficacité de la présente théorie ont été démontrées pour l'analyse de flambement des plaques isotropes simplement appuyées par rapport à d'autres théories de plaque de déformation de cisaillement telles que HSDT.

Conclusion générale

Conclusion générale

Le domaine de recherche des structures en matériaux fonctionnellement gradués est très vaste et immense, où il est possible de modifier leur composition pour obtenir les propriétés recherchées. La conception et l'élaboration de ces matériaux nécessitent d'évolution des outils d'analyse adaptés à leurs spécificités géométriques et matérielles.

Dans ce travail, une nouvelle théorie de déformation de cisaillement hyperbolique inverse avec seulement quatre variables a été développée pour l'étude de la stabilité des plaques isotropes et fonctionnellement graduées soumises à des différents types de chargement mécanique (uni-axiale et bi-axiale). Le modèle développé donne une description parabolique des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur tout en satisfaisant les conditions de la nullité des contraintes de cisaillement sur les surfaces inférieure et supérieure de la plaque. Avec aucune utilisation d'un facteur de correction de cisaillement. Les équations gouvernantes sont obtenues à partir du principe des travaux virtuels et résolus par la solution de Navier.

A travers ce travail on peut conclure que :

- L'effet de la déformation de cisaillement est négligé dans les plaques minces, par contre il apparait dans les plaques semi-épaisses et épaisses. Donc, la théorie classique des plaques (CPT) donne les mêmes valeurs de la charge critique adimensionnelle du flambement (\bar{N}_{cr}) pour les plaques minces et épaisses ;
- La charge critique du flambement est en relation inverse avec le rapport b/a ;
- L'augmentation de l'indice matériel « p » conduit à une réduction de la charge critique adimensionnelle du flambement (\bar{N}_{cr}) ;
- Les plus faibles valeurs de la charge critique du flambement sont obtenues pour le chargement le plus défavorable est la compression bi-axiale dans les deux directions x et y .

Finalement, nous pouvons dire que la présente théorie raffinée hyperbolique inverse est exacte pour résoudre les problèmes de la stabilité des plaques sous chargement mécanique.

Le travail présenté dans le cadre de cette mémoire de Master peut être développé et enrichi. Nous envisageons, par exemple, en perspective, d'appliquer le présent modèle pour l'étude de la flexion statique et la vibration libre des différentes formes de structures épaisses et modérément épaisses en matériaux fonctionnellement gradués.

Références
bibliographiques

Références bibliographiques

- Ait Sidhom (2018)* Ait Sidhom.I, « Analyse de la vibration libre des plaques épaisses en matériaux Fonctionnellement graduées », Thèse de doctorat, Université de science et Technologie, Mohammed Boudiaf, Oran ,Algérie, (2018).
- Ait Atmane et al (2010)* H. Ait Atmane., A. Tounsi., I. Mechab., E.A Adda Bedia, Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory. *Int. J. Mech. Mater. Design*; 6 (2): 113-121, (2010).
- Attia et al (2015)* Attia, A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. « contribution à l'étude de la vibration libre des plaques FGM dans un champ thermique » thèses de doctorat université de DJILLALI LIABES SIDI BEL ABBES, Algérie, (2015).
- Ahmed (2014)* Ahmed, A., "Post buckling analysis of sandwich beams with functionally graded faces using a consistent higher order theory", *International Journal of Civil, Structural, Environmental.*, 4(2): 59 – 64, (2014).
- Ait Yahia et al (2015)* Ait Yahia, S., Ait Atmane, H., Houari, M.S.A. and Tounsi, A., "Wave propagation in functionally graded plates with porosities using various higher-order shear deformation plate theories", *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, 53(6), 1143-1165, (2015).
- Anne et al (2006)* Anne.G, Novak, S., Kalin, M., Lukas, P., *et al.* The effect of residual stresses in functionally gradedalumina–ZTA composites on their wear and friction behavior. *Journal of the European Ceramic Society*, vol. 27, no 1, p. 151-156, (2007).
- Anne et al (2007)* Anne.G,Novak, S., et al. "The effect of residual stresses in functionally graded alumina–ZTA composites on their wear and friction behaviour." *Journal of the European Ceramic Society* 27.1: 151-156, (2007).

- Ambartsumyan (1970)** Ambartsumyan S.A., Theory of anisotropic plate, Tech Publishing Co, (1970).
- Bao (1995)** Bao, G., Wang, L., "Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings", Int. J; Solids Structures; 32 (19): 2853–2871, (1995).
- Bakora (2015)** Bakora.A, "Contribution à l'analyse de post-Flambement des plaques FGM épaisses soumises à un chargements thermo mécanique, thèse de doctorat, Université de sidi Belabbes, Algérie, (2015).
- Bhimaraddi et Stevens (1984)** Bhimaraddi, A, Stevens, L.K, "A higher order theory for free vibration of orthotropic, homogeneous and laminated rectangular plates", J Appl Mech-T ASME., 51(1), 195–198, (1984).
- Belabed et al (2014)** Belabed, Z., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R., Anwar Bég, O, "An efficient and simple higher order shear and normal deformation theory for functionally graded material (FGM) plates", Composites: Part B, 60, 274–283, (2014).
- Bellifa et al (2016)** Bellifa, H., Benrahou, K.H., Hadji, L., Houari, M.S.A., Tounsi, A, "Bending and free vibration analysis of functionally graded plates using a simple shear deformation theory and the concept the neutral surface position", J Braz. Soc. Mech. Sci. Eng., 38, 265–275, (2016).
- Belabed et al (2014)** Belabed, Z., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R., Anwar Bég, O, "An efficient and simple higher order shear and normal deformation theory for functionally graded material (FGM) plates", Composites: Part B, 60, 274–283, (2014).
- Benachour et al (2011)** Benachour, A., Daouadji, H.T., Ait Atmane, H., Tounsi, A. and Meftah, S.A, "A four variable refined plate theory for free vibrations of functionally graded plates with arbitrary gradient", Compos. Part B., 42(6), 1386-1394, (2011).

- Bennoun et al (2016)*** Bennoun, M., Houari, M.S.A., Tounsi, A, “A novel five variable refined plate theory for vibration analysis of functionally graded sandwich plates”, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 23(4), 423 – 431, (2016).
- Belkorissat et al (2015)*** Belkorissat, I., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R, “On vibration properties of functionally graded nano-plate using a new nonlocal refined four variable model”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 18(4), 1063-1081, (2105).
- Benchohra (2017)*** Benchohra.M, « Etude de la réponse mécanique des structures en matériaux composites avancés en utilisant un modèle de déplacement d’ordre élevé »,Thèse de Doctorat,Université de sidi Belabbes Algérie, (2017).
- Boch et al (1986)*** Boch, P., Chartier, T., Huttepain, M., "Tape casting of laminated Composites, *J. Am. Ceram". Soc* 69 (8):191 -192, (1986).
- Bourada et al (2012)*** Bourada M, Tounsi A, Houari MSA, Adda Bedia EA. “A new four-variable refined plate theory for thermal buckling analysis of functionally graded , sandwich plates”, *Journal of Sandwich Structures and Materials*, 14,5–33, (2012).
- Bourada et al (2015)*** Bourada, M., Kaci, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A, “A new simple shear and normal deformations theory for functionally graded beams”, *Steel and Composite Structures*, 18(2), 409– 423, (2015).
- Bouchafa et al (2015)*** Bouchafa, A., Bachir Bouiadjra, M., Houari, M.S.A. and Tounsi, A, “Thermal stresses and deflections of functionally graded sandwich plates using a new refined hyperbolic shear deformation theory”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 18(6), 1493-1515, (2015).
- Bounouara et al (2016)*** Bounouara, F., Benrahou, K.H., Belkorissat, I. and Tounsi, A. , “A nonlocal zeroth-order shear deformation theory for free vibration of functionally graded nanoscale plates resting on elastic

foundation”, Steel Compos. Struct., Int. J., 20(2), 227-249, (2016).

Benachour et al (2011) Benachour, A., Daouadji, H.T., Ait Atmane, H., Tounsi, A. and Meftah, S.A, “A four variable refined plate theory for free vibrations of functionally graded plates with arbitrary gradient”, Compos. Part B., 42(6), 1386-1394, (2011).

Bousahla et al (2014) Bousahla, A.A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Adda Bedia, E.A, “A novel higher order shear and normal deformation theory based on neutral surface position for bending analysis of advanced composite plates”, Int. J. Computat. Method., 11(6), 1350082, (2014).

Boukhari (2016) Boukhari .A, “Application des théories à ordre élevé de déformation de cisaillement par l’étude du comportement mécanique des plaques épaisses», thèse de Doctorat, Université de sidi Belabbes, Algérie, (2016).

Bohidar et al (2014) Bohidar, Shailendra Kumar, Ritesh Sharma, and Prabhat Ranjan Mishra. "Functionally graded materials: A critical review." International Journal of Research 1.4 : 289-301, (2014).

Chung et Chi (2003) Chi, Shyang-ho, Yen-Ling Chung. "Cracking in coating–substrate composites with multi-layered and FGM coatings." Engineering Fracture Mechanics 70.10: 1227-1243, (2003).

Chung et Chi (2006) Chi. Shyang-ho., Chung Yen-Ling, Cracking coating substrate composites of multi-layered and sigmoid FGM coatings. Engineering Fracture Mechanics; 70 (10), 1227–1243, (2003).

Chung et Chi (2006a) Shyang-HoChi,Yen-Ling Chung:«MechanicalBehavior of Functionally Graded Material Plates under Transverse Load»,International Journal of Solids and Structures, Volume 43, 13, 3657-3674, Part I: Analysis, June (2006).

Chung et Chi (2006b) Chi, S. H., Chung, Y.L, Mechanical behaviour of functionally

graded materials plates under transverse load – Part II: Numerical results, *Int. J;Solids Structures*; 43 (13): 3675 -3691, (2006).

- Delale et Erdogan (1983)*** F. Delale, F. Erdogan «The crack problem for a non-homogeneous plane». *ASME Journal of Applied Mechanics* 50, 609 –614, (1983).
- Dahsin et Xiaoyu (1996)*** Dahsin, L, Xiaoyu, L, “An overall view of laminate theories based on displacement hypothesis”, *J Compos Mater.*, 30, 1539–1561,(1996).
- Dash et al. (2019)*** Dash, R. and Sarada Prasad, P., Charan Jena, P. "FGM beam analysis in dynamical and thermal surroundings using finite element method." *Materials Today: Proceedings* 18: 3676-3682, (2019).
- Eyerer et Reinhardt (2000)*** Eyerer P., Reinhardt H., "Ökologische Bilanzierung von Baustoffen und Gebäuden", Basel: Birkhäuser, (2000).
- Fekrar et al. (2012)*** Fekrar, A., El Meiche, N., Bessaim, A., Tounsi,Adda Bedia, E.A. “Buckling analysis of functionally graded hybrid composite plates using a new four variable refined plate theory”, *Steel and Composite Structures* 13(1), 91 – 107, (2012).
- Fekrar et al. (2014)*** Fekrar, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R, “A new five-unknown refined theory based on neutral surface position for bending analysis of exponential graded plates”, *Meccanica*, 49(4), 795-810, (2014).
- Hamidi et al. (2020)*** Hamidi, A., Gafour, Y, Benahmed, A., Zidour, M., & Bensattalah, T. Porosity-dependent free vibration analysis of FG nanobeam using non-local shear deformation and energy principle. *Advances in nano research*, 8(1), 37-47, (2020).

- Hamidi et al. (2015)** Hamidi, A, Houari, M. S, Mahmoud, S. R., *et al.* A sinusoidal plate theory with 5-unknowns and stretching effect for thermomechanical bending of functionally graded sandwich plates. *Steel and Composite Structures*, 18(1), 235-253, (2015).
- Hopkinson et al (2006)** Hopkinson, Neil, Ajoku, Uzoma, Saleh, Naguib, *et al.* Investigating mechanical anisotropy and end-of-vector effect in laser-sintered nylon parts. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part B: Journal of Engineering Manufacture*, (2006).
- Hebbar (2018)** Hebbar.N, « Etude de l'effet de déformation de cisaillement sur la Statique et Dynamique des Structures Composites Epaissees », Thèse de Doctorat, Université Djillali LIABES de Sidi Belabbes, Algérie, (2018).
- Heinz et al (2011)** Heinz P., Herrmann M., Sobek "Herstellung sverfahren und Anwendungsbereiche für funktional gradierte Bauteile imBauwesen", Abschlussbericht Forschungsinitiative Zukunft Bau (1/2011), Stuttgart ILEK, (2011).
- Hildebrand et al(1949)** Hildebrand, F. B., Reissner, E., Thomas, G. B. Notes on the theory of small displacements of orthotropic shells. *NACA T. N. 1833*, (1949).
- Houari et al (2011)** M.S.A. Houari., S. Benyoucef., I. Mechab., A. Tounsi., E.A. Adda Bedia, Two-variable refined plate theory for thermoelastic bending analysis of functionally graded sandwich plates, *Journal of Thermal Stresses*; 34 (4): 315–334, (2011).
- Hadji et al (2014)** Hadji, L., Daouadji, T.H., Tounsi, A. and Bedia, E.A, “A higher order shear deformation theory for static and free vibration of FGM beam”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 16(5), 507-519, (2014).

- Issad (2018)*** Issad,M,N , « Investigation sur le comportement mécanique des plaques épaisse isotropes et orthotropes », Thèse de Doctorat, Université DJILLALI LIABES Sidi Bleabbes, Algérie, (2018).
- Kaddouri (2014)*** Kaddouri .A,« Analyse des effets de l’amplitude et température sur le, comportement non linéaire d’une plaque annulaire sectorielle à gradient fonctionnel» thèses de doctorat universite de Université Aboubekr Belkaid– Tlemcen,Algérie, (2014).
- Kant et Pandya (1988)*** Kant, T., Pandya, BN, "A simple finite element formulation of a higher-order theory for unsymmetrically laminated composite plates", Compos Struct, 9(3), 215–264, (1988).
- Katariya (2015)*** Katariya, P.V., Panda, S.K, “Thermal buckling and vibration analysis of laminated composite curved shell panel”, Aircraft Engineering and Aerospace Technology., 88(1), 97 – 107, (2015).
- Kar et Panda (2014)*** Kar, V.R., Panda, S.K, “ Large deformation bending analysis of functionally graded spherical shell using FEM", Structural Engineering Mechanics, 53(4), 661 – 679, (2014).
- Kant et Khare (1997)*** Kant, T., Khare, RK, "A higher-order facet quadrilateral composite shell element", Int J Numer Meth Eng, 40(24), 4477–4499, (1997).
- Kant et Swaminathan (2002)*** Kant. T., Swaminathan, K. Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory. Composite. Structure; 56 (4): 329-344, (2002).
- Kokini et Takeuchi (1990)*** Kokini. K., Takeuchi, Y., Multilayer ceramic thermal barrier coatings under transient thermal loads. In Proceeding of the First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan; 31-36, (1990).

- Koizumi (1992)*** Koizumi, M. Recent Progress of functionally graded materials in Japan. *Ceram. Eng. Sci. Proc*; 13 (7-8): 333-347, (1992).
- Koizumi (1993)*** Koizumi, M. Recent Progress of functionally graded materials in Japan. *Ceram. Eng. Sci. Proc*; 13 (7-8): 333- 347, (1993).
- Koizumi (1996)*** Koizumi, M. FGM activities in Japan, department of materials chemistry. Ryukoku University, Ohtsu, 520-21 Japan, (1996).
- Koizumi (1997)*** Koizumi, M. FGM activities in Japan. *Composites*; 28 (1-2): 1–4, (1997).
- Levinson (1980)*** Levinson, M., "An accurate simple theory of the statics and dynamics of elastic plates", *Mechanics Research Communications*, 343-350, (1980).
- Meradjah et al (2015)*** Meradjah, M., Kaci, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R, "A new higher order shear and normal deformation theory for functionally graded beams", *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 18(3), 793-809, (2015).
- Merazi et al (2015)*** Merazi, M., Hadji, L., Daouadji, T.H., Tounsi, A. and Adda Bedia, E.A, "A new hyperbolic shear deformation plate theory for static analysis of FGM plate based on neutral surface position", *Geomech. Eng., Int. J.*, 8(3), 305-321, (2015).
- Mantari et Granados (2015)*** Mantari, J.L., Oktem, A.S., Guedes Soares, C. "A new trigonometric shear deformation theory for isotropic, laminated composite and sandwich plates", *Int. J. Solids Struct.*, 49(1), 43–53, (2015).
- Mallikarjuna et Kant (1993)*** Mallikarjuna, M., Kant ,T, "A critical review and some results of recently developed refined theories of fiber-reinforced laminated composites and sandwiches", *Compos Struct*, 23(4), 293–312, (1993).

- Mallikarjuna et Kant (1989)*** Mallikarjuna and Tarun, Kant, “Finite element formulation of a higher-order theory for dynamic response of laminated composite plates”, *Engineering Computations.*, 6(3), 198-208, (1989).
- Mahi et al (2015)*** Mahi, A., Adda Bedia, E.A., Tounsi, A, “A new hyperbolic shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic, functionally graded, sandwich and laminated composite plates”, *Applied Mathematical Modelling*, 39, 2489–2508;(2015).
- Meksi et al (2015)*** Meksi, A., Benyoucef, S., Houari, M.S.A., Tounsi, A, “A simple shear deformation theory based on neutral surface position for functionally graded plates resting on Pasternak elastic foundations”, *Structural Engineering and Mechanics*, 53(6), 1215-1240, (2015).
- Mindlin (1951).*** R.D. Mindlin, Influence of rotatory inertia and shear on flexural motion of isotropic, elastic plates. *J.Appl.Mech*; 18 (1): 31-38, (1951).
- Murthy (1981)*** Murthy. M.V.V: Rapport technique, NASA, (1981). Une théorie de déformation de cisaillement transversal amélioré pour plaque anisotrope laminé, (1981).
- Noor et Burton (1989)*** Noor, AK., Burton, W, “Stress and free vibration analysis of multilayer composite plates”, *Compos Struct.*, 11, 183–204, (1989).
- Naghdi (1957)*** Transversal de stress continuité. *Int. J. Solids Structures*; 40 (6): 1525-1546, On the theory of thin elastic shells. *Quarterly Appl.Math.* 14, 369-380, (1957).
- Nguyen (2007)*** T. K. Nguyen., K. Sab., G. Bonnet, Shear correction factors of functionally graded plates. *Mech. Advanced Mater. Struct*; 14 (8): 567-575, (2007).

- Nguyen et al (2014)** Nguyen, V.-H., Nguyen, T.-K., Thai, H.-T., & Vo, T. P. A new inverse trigonometric shear deformation theory for isotropic and functionally graded sandwich plates. *Composites Part B: Engineering*, 66, 233–246, (2014).
- Nedri et al (2014)** Nedri, K., El Meiche, N., Tounsi, A, “Free vibration analysis of laminated composite plates resting on elastic foundations by using a refined hyperbolic shear deformation theory”, *Mechanics of Composite Materials.*, 49(6), 629 – 640, (2014).
- Ould Larbi et al (2013)** Ould Larbi, L, Kaci, A., Houari, M.S.A. and Tounsi, A, “An efficient shear deformation beam theory based on neutral surface position for bending and free vibration of functionally graded beams”, *Mech. Based Des. Struct. Mach.*, 41(4), 421-433, (2013).
- Okamura (1991)** H. Okamura, State of the arte of material design projects for severe service applications, *Mater. Sci. Eng :A*; 143 (1-2): 3-9, (1991).
- Panda et Singh (2013)** Panda, SK., Singh, BN, “Large Amplitude Free Vibration Analysis of Thermally Post buckled Composite Doubly Curved Panel Embedded with SMA fibres”, *Nonlinear Dynamics.*, 74(1), 395-418, (2013).
- Panda et Singh (2013)** Panda, SK., Singh, BN, “Thermal Postbuckling behavior of laminated composite spherical shell panel using NFEM”, *Mechanics Based Design of Structures and Machines.*, 41(4), 468-488, (2013).
- Panda et Singh (2013)** Panda, SK., Singh, BN, “Nonlinear finite element analysis of thermal post-buckling vibration of laminated composite shell panel embedded with SMA fibre”, *Aerospace Science and Technology.*, 29(1), 47-57, (2013).
- Panda et Singh (2010)** Panda, SK., Singh, BN, “Nonlinear free vibration analysis of thermally post-buckled composite spherical shell panel”,

International Journal of Mechanics and Materials in Design., 6(2), 175-188, (2010).

- Panda et Singh (2010)*** Panda, SK., Singh, BN, “Thermal post-buckling analysis of a laminated composite spherical shell panel embedded with shape memory alloy fibres using non-linear finite element method”, Proc. I,Mech,E Part C: Journal of Mechanical Engineering and Science., 224(4), 757-769, (2010).
- Panda et Singh (2011)*** Panda, SK., Singh, BN, “Large amplitude free vibration analysis of thermally post-buckled composite doubly curved panel using nonlinear FEM”, Finite Elements in Analysis and Design., 47(4), 378 – 386, (2011).
- Rayleigh (1877)*** Lord Rayleigh, "The theory of sound", The Macmillan Company, (1877).
- Ren (1986)*** Ren, J G. “A new theory of laminated plate”, Composite Science and Technology, 26, 225-239, (1986).
- Reddy (1984)*** Reddy, J.N., "A Simple Higher-Order Theory fo Laminated Composite Plates", ASME Journal of Applied Mechanics, 745-752, (1984).
- Reddy (1997)*** J.N. Reddy, Mechanics of Laminated Composites Plates: Theory and Analysis. CRC Press, Boca Raton, (1997).
- Reddy (2000)*** Reddy, J.N, “Analysis of functionally graded plates”, Int.J. Numer. Methods Eng., 47(1–3), (2000).
- Reissner (1945)*** Reissner, E., "The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates", Journal of Applied Mechanics-transactions of The ASME, 69-77, (1945).
- Reissner et Mindlin (1951)*** Mindlin RD. Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates. Transaction.ASME Journal of Applied Mechanics;18:31–8, (1951).

- Shahrjerdi et al (2011)*** Shahrjerdi, A., Mustapha, F., Bayat, M., Majid, DLA, “Free vibration analysis of solar functionally graded plates with temperature-dependent material properties using second order shear deformation theory”, *Journal of Mechanical Science and Technology.*, 25 (9), 2195 – 2209, (2013).
- Said (2016)*** « Etude et analyse des plaques FGM en Génie Civil» thèses de doctorat de l’universite Djillali Liabes sidi bel abbes, Algérie, (2016).
- Sadoune et al (2014)*** Sadoune, M., Tounsi, A., Houari, MSA., Adda Bedia, EA, “A novel first-order shear deformation theory for laminated composite plates”, *Steel and Composite Structures.*, 17(3), 321-338, (2014).
- Saidi et al (2013)*** Saidi, H., Houari, MSA., Tounsi, A. and Adda Bedia, EA, “Thermo-mechanical bending response with stretching effect of functionally graded sandwich plates using a novel shear deformation theory”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 15(2), 221-245, (2013).
- Saidi et al (2016)*** Saidi, H., Tounsi, A., and Bousahla, A.A, “A simple hyperbolic shear deformation theory for vibration analysis of thick functionally graded rectangular plates resting on elastic foundations”, *Geomechanics and Engineering.*, 11(2), 289-307, (2016).
- Sallai et al (2015)*** Sallai, B., Hadji, L., Hassaine Daouadji, T. and Adda Bedia, EA, “Analytical solution for bending analysis of functionally graded beam”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 19(4), 829-841;(2015).
- Swaminathan et Naveenkumar (2014)*** Swaminathan, K., Naveenkumar, DT, “Higher order refined computational models for the stability analysis of FGM plates: Analytical solutions”, *European Journal of Mechanics A/Solids.*, 47, 349 – 361, (2014).

- Sun et Whitney (1973)*** Sun, CT., Whitney, JM, “Theories for the dynamic response of laminated plates”, AIAA J., 11, 178–183, (1973).
- Shen (2009)*** Shen, Hui-Shen. "A comparison of buckling and postbuckling behavior of FGM plates with piezoelectric fiber reinforced composite actuators." Composite Structures : 375-384, (2009).
- Thai and Choi (2012)*** Thai, H. T., & Choi, D. H. A refined shear deformation theory for free vibration of functionally graded plates on elastic foundation. Composites Part B: Engineering, 43(5), 2335-2347, (2012).
- Timoshenko (1921)*** Timoshenko, S, "On the correction of transverse shear deformation of the differential equations for transverse vibrations of prismatic bars", Philosophical Magazine,.41 (46), 744-746, (1921).
- Timoshenko (1940)*** S.P.Timoshenko, "Strength of materials", Chapitre I, 170-171. D. Van Nostrand Company, (1940).
- Timoshenko (1959)*** S.P. Timoshenko., S.Woinowsky-Krieger, Theory of Plates and Shells. McGraw-Hill, New York, (1959).
- Timoshenko (1972)*** S.P. Timoshenko., J.M.Gere, Mechanics of Materials. D. Van Nostrand Company, (1972).
- Tounsi et al (2013)*** Tounsi, A., Houari, MSA., Benyoucef, S. and Adda Bedia, EA, “A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates”, Aerosp. Sci. Technol., 24(1), 209-220, (2013).
- Tounsi et al (2016)*** Tounsi, A., Houari, M.S.A., Bessaim, A, “ A new 3-unknowns non-polynomial plate theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate”, Struct. Eng. Mech., Int. J., 60(4), 547-565, (2016).
- Uflyand (1948)*** Elishakoff, I., Hache, F., & Challamel, N.Vibrations of asymptotically and variationally based Uflyand–Mindlin plate

models. International Journal of Engineering Science, 116, 58-73, (2017).

- Viswanathan et al (2013)** Viswanathan, KK., Javed, S., Abdul Aziz, Z, “Free vibration of symmetric angle-ply layered conical shell frusta of variable thickness under shear deformation theory”, Structural Engineering and Mechanics., 45(2), 259 – 275, (2013).
- Whitney (1973)** Whitney, J.M. et sun, C.T., "A higher-order theory for extensional motion of laminated composites", Journal Sound and Vibration, 85-97, (1973).
- Whitney et Pagano (1970)** Whitney, JM, Pagano, NJ, “Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates”, J Appl Mech-T ASME., 37(4), 1031–1036, (1970).
- Xiang et al (2011)** Xiang, S., Wang, K.M., Ai, Y.T., Sha, Y.D., Shi, H. ,“Analysis of isotropic, sandwich and laminated plates by a meshless method and various shear deformation theories”, Compos. Struct., 91(1), 31–37, (2011).
- Yaghoobi et Torabi (2013)** Yaghoobi, H., Torabi, M., “Post-buckling and nonlinear free vibration analysis of geometrically imperfect functionally graded beams resting on nonlinear elastic foundation”, Applied Mathematical Modelling, 37, 8324-8340, (2013).
- Yan et al (1966)** Yan, P.C., Norris, C.H., Stavsky, Y, “Elastic wave propagation in heterogeneous plates”, Int J Solids Struct., 2, 665–684, (1966).
- Yoshihisa (2004)** Yoshihisa Uchida, Properties of functionally , graded materials, Manufactured by Progressive, Lamination Method for Applications, 39 (51), (2004).
- Yin et al (2004)** Yin H.M., Sun L.Z., and Paulino G.H, « Micromechanics-based elastic model for functionally graded materials with particle interactions », Acta Materialia, 52, 3535–3543, (2004).

Zemani et Sebakhi
(2014)

Zamani, K, Sebakhi, F, “Etudes des vibrations libres des plaques épaisses en matériaux à gradient fonctionnel (FGM) reposant sur un support élastique de Winklar Pasternak», Master structures aéronautiques, Institut d’aéronautique et des études spatiales de Blida, Algérie, (2014).