



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique
Université de Tissemsilt



Faculté des Sciences et de la Technologie
Département des Sciences et de la Technologie

Mémoire de fin d'études pour l'obtention du diplôme
de Master académique en

Filière : **Génie civil**

Spécialité : **Structures**

Présenté par : **Adjali Hicham**

Thème

**Etude de l'influence des propriétés
Mécaniques sur le comportement des
plaques FGM**

Soutenu le,

Devant le Jury :

OUAZIR Mansour	Président	M.C.B	Univ-Tissemsilt
ADIM Belkacem	Encadreur	M.C.A	Univ-Tissemsilt
BOUZID Haytham	Examineur	M.C.B	Univ-Tissemsilt

Année universitaire : 2020-2021

Remerciement

Je remercie s'adresse en premier lieu à Allah le tout puissant pour la volonté, la santé et la patience qu'il m'a donné durant toutes ces longues années.

*D'abord et avant tout, je tiens à exprimer ma gratitude au **Dr. ADIM Belkacem**, mon encadreur de mémoire, pour sa confiance et son attention au cours de ce projet, ainsi que pour ses excellents conseils scientifiques, son suivi et ses sages conseils qui ont aidé à accomplir cette tâche.*

Je tiens à remercier les membres du jury et tous les enseignants de la spécialité génie civil et toute l'équipe pédagogique.

Je tiens à remercier mes collègues pour le courage et le soutien et l'amitié.

Que tous ceux que je n'avais pas cité, et qui m'ont aidé de près et de loin reçoivent mes remerciements

Dédicace

Je dédie ce travail

*A ma mère en témoignage de mon affection et mon admiration pour
se courage et sa dignité et à qui je ne saurai jamais exprimer toute ma
reconnaissance*

*A mon père qui m'a tout donné et qui à su de ses précieux conseils
m'inspirer le sens de la dignité, du courage et du fin travail, qu'il
trouve ici l'accomplissement de tous ses vœux.*

*A mes frères et ma sœur à qui je souhaite beaucoup de réussite et
courage.*

*A tous mes amis et camarades et collègues en témoignages de mes
plus profondes amitiés et ma sympathie.*

*A docteur **ADIM Belkacem** pour le parfait encadrement et les
informations et la sagesse et le courage je le souhaite que du bonheur.*

*A tous les enseignants de la spécialité génie civil qui m'ont donné des
informations riches*

*A tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de
ce travail.*

Résumé

Ce travail présente une étude du comportement mécanique des plaques fonctionnellement graduées FGM en utilisant la théorie raffinée de quatre variables. La présente théorie prend en compte les effets de cisaillement transversal et la distribution parabolique des contraintes de cisaillement transversales à travers l'épaisseur de la plaque FGM.

Les équations d'équilibres pour les plaques FGM sont obtenues en utilisant le principe des travaux virtuels, la solution analytique est obtenue en utilisant la solution de Navier. Où les résultats obtenus par la présente analyse de la flexion des plaques FGM sont en bon accord avec ceux trouvés dans la littérature.

D'où, on peut dire que la théorie raffinée proposée est exacte et simple pour la résolution du comportement de flexion des plaques FGM

Mots clés : Plaques FGM, Flexion, Travaux virtuels, Solution de Navier

Abstract

This work presents a study of the mechanical behavior of functionally graduated FGM plates using the refined theory of four variables. This theory takes into account the transverse shear effects and the parabolic distribution of the transverse shear stresses through the thickness of the FGM plate.

The equilibrium equations for FGM plates are obtained using the principle of virtual works; the analytical solution is obtained using the Navier's solution. Where the results obtained by this analysis of the bending of the FGM plates are in good agreement with those found in the literature.

Hence, we can say that the proposed refined theory is accurate and simple for the resolution of the bending behavior of FGM plates.

Keywords: FGM plates, Bending, Virtual works, Navier's solution

ملخص

يقدم هذا العمل دراسة للسلوك الميكانيكي للألواح ذات المواد المتدرجة وظيفيا باستخدام النظرية المكررة بأربعة متغيرات. تأخذ هذه النظرية في الاعتبار تأثيرات القص العرضي والتوزيع بشكل قطع مكافئ لضغوط القص على طول سمك الألواح ذات المواد المتدرجة وظيفيا ويتم الحصول على معادلات التوازن للألواح ذات المواد المتدرجة وظيفيا باستخدام مبدأ الأعمال الافتراضية ؛ ويتم الحصول على الحل التحليلي باستخدام حل نافير. حيث تتفق النتائج المحصل عليها باستخدام النظرية الحالية مع النتائج الواردة في المراجع. و من ثم، يمكن أن نقول أن النظرية المكررة المقترحة دقيقة وبسيطة لحل سلوك الصفائح ذات المواد المتدرجة وظيفيا

الكلمات المفتاحية : لوحات ذات المواد المتدرجة وظيفيا ، الانحناء ، الأعمال الافتراضية ، حل نافير

Table des matières

Remerciement.....	I
Dédicace	II
Résumé.....	III
Abstract	IV
ملخص.....	V
Table des matières	VI
Liste des figures	IX
Liste des tableaux	XI
Liste des abréviations	XII
Introduction générale.....	1
I.1. Introduction.....	3
I.2. Concept des matériaux fonctionnellement gradués (FGM)	3
I.3. Différence entre FGM et les matériaux composites traditionnels	6
I.4. Procédés de fabrication FGM	9
I.4.1. Coulage séquentiel en barbotine (slip casting)	9
I.4.2. Coulage en bande (tape casting)	10
I.4.3. Compactage des couches (poudre d'empilement)	11
I.4.4. Coulée par centrifugation.....	11
I.4.5. Projection plasma.....	11
I.4.6. Dépôt physique en phase vapeur (pvd)	12
I.4.7. Dépôt chimique en phase vapeur (cvd).....	13
I.4.8. Frittage et infiltration	14
I.4.9. Frittage laser différentiel.....	14
I.4.10. Dépôt par électrophorèse	15
I.5. Application des matériaux fonctionnellement gradués (FGM)	16
I.5.1. Génie civil.....	16
I.5.2. Réacteur nucléaire.....	17
I.5.3. Domaine aérospatial.....	17
I.5.4. Domaine biomédical	18

I.6. Avantage et inconvénients de la FGM.....	19
I.6.1. Avantages de la FGM	19
I.6.2. Inconvénients de la FGM.....	20
I.7. Lois de distribution des propriétés matérielles des plaques FGM	20
I.7.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM.....	22
I.7.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM	24
I.7.3. Propriétés matérielles de la plaque E-FGM	25
I.7.4. Autres propriétés matérielles des plaques FGM	26
I.8. Conclusion	27
II.1. Introduction	29
II.2. Définition d'une plaque	29
II.3. Différents types des plaques	30
II.4. Différents types de comportements des plaques	30
II.5. Etat membranaire et état flexionnel.....	31
II.6. Classement des théories de déformation en cisaillement	32
II.7. Modèles des plaques pour les matériaux à gradient de propriétés	33
II.7.1. Modèle classique de la plaque de Kirchhoff-Love (CPT).....	33
II.7.1.1. Hypothèses de la théorie classique des plaques.....	33
II.7.1.2. Champ de déplacement de la théorie classique des plaques (CPT).....	34
II.7.1.3. Limitation de la théorie classique	35
II.7.2. Théorie de déformation et de cisaillement du premier ordre (FSDT).....	35
II.7.2.1. Champ de déplacement	36
II.7.3. Théorie de déformation et de cisaillement d'ordre élevé (HSDT).....	37
II.7.3.1. Champs de déplacement des HSDT.....	38
II.7.3.2. La fonction de forme de la théorie d'ordre élevé.....	39
II.7.4. Théorie raffinée de déformation des plaques	41
II.7.5. Théorie quasi-3D de déformation des plaques	41
II.8. Conclusion.....	42
III.1. Introduction	44
III.2. Champ de déplacement	44
III.3. Équations constitutives.....	45
III.4. Équations gouvernantes.....	46
III.5. Solutions exactes	49
III.6. Conclusion.....	51

IV.1. Introduction.....	52
IV.2. Propriétés matérielles.....	52
IV.3. Validation de la présente théorie.....	53
IV.4. Etude paramétrique.....	55
IV.5. Conclusion.....	64
Conclusion générale et perspectives.....	65
Références bibliographiques.....	66

Liste des figures

Figure. I.1 : Gradation de la microstructure FGM avec des constituants céramique -métal [2] 5

Figure. I.2 : Concept des matériaux gradient de propriétés [2]..... 6

Figure. I.3 : Rôle de l’interface sur la ténacité des composites..... 7

Figure. I.4 : Distribution composante des matériaux [20]..... 9

Figure I.5 : Illustration conceptuelle d'une méthode de projection par plasma pour former un matériau thermoélectrique gradué. (La composition est graduée dans la direction plane) [30]..... 12

Figure. I.6: Schéma de l'installation pour la préparation d'un SiC/CFGM par le dépôt chimique en phase vapeur (CVD) [31]. 13

Figure. I.7: Disposition du procédé frittage laser différentiel [34] 14

Figure I.8 : Vue schématique de l’installation d’EPD pour la production des matériaux FGM [35]. . 15

Figure I.9 : Caractéristiques du béton durci en fonction d'une augmentation progressive de la porosité [36] 16

Figure. I.10 : Réacteur nucléaire [2] 17

Figure. I.11 : Pièces multi matériaux dans le domaine aérospatial 18

Figure. I.12 : Pièces multi matériaux dans le domaine biomédical..... 19

Figure. I.13 : géométrie d’une plaque FGM. 22

Figure. I.14 : Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM..... 23

Figure. I.15 : Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM..... 25

Figure I.16 : Variation du module de Young dans une plaque E-FGM. 26

Figure II.1 : Modèle d’une plaque FGM..... 29

Figure. II.2 : Efforts intérieurs dans une plaque 32

Figure II.3 : Illustration du modèle de la plaque de Love-Kirchhoff [62]. 34

Figure II.4 : Déformation avec cisaillement transverse (schéma du premier ordre FSĐT). 36

Figure II.5: Schématisation des déformations de la théorie des plaques du premier ordre..... 37

Figure II.6 : Schématisation des déformations dans le cas de la théorie des plaques d’ordre élevé... 38

Figure.III.1: Géométrie de la plaque rectangulaire en FGM 44

Figure IV.1 : Influence du rapport d’aspect a/b sur la variation de la flèche adimensionnelle \bar{w} d’une plaque en FGM..... 55

Figure IV.2 : Influence du rapport coté sur épaisseur a/h sur la variation de la flèche adimensionnelle \bar{w} d’une plaque en FGM. 56

Figure IV.3 : Influence du rapport d’aspect a/b sur la variation du déplacement adimensionnelle \bar{u} d’une plaque en FGM..... 57

Figure IV.4 : Influence du rapport coté sur épaisseur a/h sur la variation du déplacement adimensionnelle \bar{u} d’une plaque en FGM. 58

Figure IV.5 : Variation du déplacement adimensionnelle \bar{u} suivant l'épaisseur d'une plaque carrée en FGM. 59

Figure IV.6 : Variation de la flèche adimensionnelle \bar{w} suivant la longueur (x/a) d'une plaque FGM.60

Figure IV.7 : Variation des contraintes normales $\bar{\sigma}_x$ suivant l'épaisseur d'une plaque en matériaux à gradient de propriétés FGM. 61

Figure IV.8 : Variation des contraintes normales $\bar{\sigma}_y$ suivant l'épaisseur d'une plaque en matériaux à gradient de propriétés FGM 61

Figure IV.9 : Variation des contraintes tangentielles $\bar{\tau}_{xy}$ suivant l'épaisseur d'une plaque en matériaux à gradient de propriétés FGM..... 62

Figure IV.10 : Variation des contraintes tangentielles $\bar{\tau}_{zx}$ suivant l'épaisseur d'une plaque en matériaux à gradient de propriétés FGM..... 63

Figure IV.11 : Variation des contraintes tangentielles $\bar{\tau}_{zy}$ suivant l'épaisseur d'une plaque en matériaux à gradient de propriétés FGM..... 63

Liste des tableaux

Tableau I.1 : Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal [2]	5
Tableau I.2 : Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels [19]	8
Tableau IV.1 : Propriétés mécaniques des matériaux constituant la plaque FGM.	52
Tableau IV.2 : Influence des propriétés matériels (degré d'homogénéité P) sur les contraintes et le déplacement adimensionnel d'une plaque carrée en FGM soumise à une charge sinusoïdale ($a/h = 10$).	53
Tableau IV.3 : Influence des propriétés matérielles (degré d'homogénéité P) sur la flèche \bar{w} et la contrainte adimensionnelle $\bar{\sigma}_x$ pour une plaque carrée Al/Al ₂ O ₃ FG soumise à une charge sinusoïdale.	54

Liste des abréviations

a	Longueur de la plaque
b	Largeur de la plaque
h	Épaisseur de la plaque
E	Module de Young
ν	Coefficient de Poisson
$V(z)$	Fraction volumique
P	Indice de la loi de puissance
U	Energie de déformation
V	Energie due aux charges extérieures
u, v, w	Déplacements dans les directions x, y, z
u_0, v_0	Composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque
ϕ_x, ϕ_y, ϕ_z	Rotations autour des axes x, y et z
$f(z)$	Fonction de cisaillement
$g(z)$	Dérivée de la fonction de cisaillement
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Contraintes normales suivant les directions x, y et z
$\tau_{xy}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$	Contraintes de cisaillement
$\varepsilon_x, \varepsilon_y$	Déformations dans les directions x, y
$\gamma_{xy}, \gamma_{zx}, \gamma_{zy}$	Déformations de distorsion
$\delta u_0, \delta v_0, \delta w_b, \delta w_s$	Champ virtuel de déplacement
w_b	Composante de la flèche due à la flexion
w_s	Composante de la flèche due au cisaillement
$\delta \varepsilon_x, \delta \varepsilon_y, \delta \varepsilon_z$	Champ de déformation longitudinal virtuel
$\delta \gamma_{zx}, \delta \gamma_{zy}$	Champ de déformation transversal virtuel
N_x, N_y, N_{xy}	Efforts normaux de membrane
M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b	Moments de flexion pure
M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s	Moments de flexion supplémentaire due au cisaillement transverse
Q_{zx}^s, Q_{zy}^s	Efforts de cisaillement pur

k_x^b	Courbure de flexion suivant x
k_x^s	Courbure de cisaillement suivant x
k_y^b	Courbure de flexion suivant y
k_y^s	Courbure de cisaillement suivant y
k_{xy}^b	Courbure de flexion suivant xy
k_{xy}^s	Courbure de cisaillement suivant xy
n, m	Nombres de modes
A_{ij}	Termes de rigidité en membrane de la plaque
B_{ij}	Termes de rigidité de couplage de la plaque
D_{ij}	Termes de rigidité de flexion de la plaque
A_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
B_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
D_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
H_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
Ω	Surface supérieure de la plaque
Q_{ij}	Coefficients de rigidité
S_{ij}	Valeurs propres

Introduction générale

Introduction générale

La croissance du monde industriel ne peut se réaliser sans le progrès de la science, qui permet d'établir de nouvelles procédures qui soutiennent le développement industriel en mettant les résultats de la recherche scientifique à la disposition de l'industrie. Les matériaux sont donc considérés comme un axe de recherche très prometteur car chaque partie, chaque composant, chaque machine est à la base d'un matériau, et innover dans ce domaine, c'est transformer le monde de l'industrie.

Les matériaux composites, qui sont généralement constitués de deux ou plusieurs matériaux de natures différentes, sont d'une grande importance par rapport aux matériaux traditionnels, car leur combinaison confère à l'ensemble des performances supérieures à celles des composants pris séparément; ils offrent de nombreux avantages, y compris la résistance mécanique, la résistance chimique, la légèreté et le faible entretien, ainsi que la liberté de forme. En raison de leurs caractéristiques mécaniques et chimiques, ils peuvent prolonger la durée de vie de certains équipements.

Cependant, en raison du changement brusque des propriétés mécaniques d'une couche à l'autre, le principal inconvénient des matériaux composites est la discontinuité des propriétés et des contraintes à l'interface entre les couches. Cette discontinuité provoque des concentrations de contraintes élevées, des fissures de matrice et un grave problème de délamination dû à la transition abrupte de la composition, en particulier à des températures élevées. Les matériaux à gradient de propriétés (en anglais: Functionally Graded Material FGM) ont été proposés en 1984 par un groupe de chercheurs japonais pour résoudre ces défis en créant un matériau dont les caractéristiques mécaniques varient lentement et uniformément sur toute l'épaisseur de la structure. Depuis lors, la recherche sur le FGM a été activement menée dans un certain nombre de pays à travers le monde.

Les plaques en matériaux fonctionnellement gradués font partie d'une tendance relativement nouvelle dans la recherche sur les matériaux. Sont des matériaux composites complexes avec une modification progressive et continue des fractions volumétriques de chaque ingrédient, ce qui entraîne des changements des attributs des matériaux et élimine les discontinuités aux interfaces pendant que les caractéristiques des matériaux constituants sont conservées. En conséquence, ils peuvent intégrer les caractéristiques de deux composants complètement distincts sans l'un d'eux faire des compromis à l'autre.

Par conséquent, une FGM composée de métal et de céramique combinera la dureté et l'usinabilité du métal avec la résistance à la chaleur, à l'usure et à l'oxydation de la

céramique. En conséquence, les chercheurs développent des matériaux capables de satisfaire des exigences multicritères, permettant la combinaison de fortes qualités thermiques et mécaniques. Ces matériaux de contrôle du flux thermique doivent pouvoir garantir et gérer le transfert de chaleur afin de maintenir les composants fonctionnels à leur température de fonctionnement nominale.

Les plaques en matériaux fonctionnellement gradués (FGM) sont largement utilisées dans divers domaines du génie, y compris le génie mécanique, aéronautique, chimique, électrique et civil, entre autres.

L'objectif de ce travail consiste à étudier l'analyse du comportement mécanique en flexion des plaques FGM en utilisant une théorie raffinée d'ordre élevé à quatre variables, où une fonction de cisaillement sinusoidale est adoptée dans la présente théorie. Pour atteindre notre objectif, ce travail présenté dans ce mémoire s'articule autour de quatre chapitres :

Des renseignements généraux sur les matériaux fonctionnellement gradués FGM, y compris leur définition et leurs caractéristiques, l'historique de développement, les techniques de production et de nombreux domaines d'application, sont présentés dans le premier chapitre.

Le second chapitre sera dédié à un rappel sur les différentes théories des plaques existantes, que soit la théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT), la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT), la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT), la théorie raffinée de déformation des plaques, et enfin la théorie quasi-3D de déformation des plaques.

Dans le troisième chapitre, nous avons construit un modèle analytique pour prédire le comportement en flexion de la plaque FGM. Ce modèle est basé sur une étude à quatre variables de la théorie améliorée de la déformation et de cisaillement d'ordre élevé.

Le quatrième chapitre se concentrera sur la validation du modèle suggéré que nous avons développé dans le chapitre précédent, ainsi que sur la présentation et la comparaison des résultats obtenus avec ceux obtenus à partir d'autres théories actuelles dans la littérature. Par la suite, une analyse paramétrique sera effectuée pour établir les divers facteurs qui influent sur le comportement mécanique en flexion des plaques FGM.

Enfin, ce travail tire une conclusion générale sur l'étude menée et met en évidence les différents constats.

Chapitre I :
Généralités sur
les matériaux à gradient
de propriétés FGM

I.1. Introduction

Les matériaux modernes tendent à devenir «multifonctionnels», même si leur objet premier permet en général de les classer en «Matériaux de structure » et en « matériaux fonctionnels ». Le problème du concepteur est qu'il demande non pas une propriété, mais un ensemble. [1]. Les matériaux sont inventés à la suite de nouvelles découvertes et analyses de matériaux, et l'utilisation scientifique des matériaux de base disponibles dans divers composés inorganiques et organiques a ouvert la voie à des polymères, alliages, céramiques de génie structurel de pointe, et d'autres matériaux. Les matériaux composites sont un type de matériau avancé composé d'un ou de plusieurs matériaux qui ont des propriétés physiques et chimiques différentes lorsqu'ils sont combinés à l'état solide. Le matériau composite présente un excellent équilibre entre les propriétés des matériaux d'origine et est également plus léger. En raison d'un processus connu sous le nom de délamination, les matériaux composites échoueront dans des conditions de travail difficiles (séparation des fibres de la matrice). Cela peut arriver par exemple, dans une application à haute température où deux matériaux avec un coefficient de dilatation différent sont utilisés [2]

De fortes contraintes inter-laminaires peuvent être causées par un changement soudain des propriétés des matériaux à l'interface entre deux matériaux, ce qui entraîne la délimitation, la fissuration et d'autres mécanismes de dommages. Pour remédier à ces défauts, des matériaux à gradient de propriétés (FGM) ont été suggérés, dans lesquels les propriétés des matériaux changent continuellement. Des chercheurs japonais [3], confrontés à ce défi dans un projet d'avion spatial hypersonique nécessitant une barrière thermique (température extérieure de 2000 K et température intérieure de 1000K sur moins de 10 mm d'épaisseur), est venu avec un nouveau matériau appelé Matériau Fonctionnellement Gradué «en anglais : Functionally Graded Material» (FGM) [3].

I.2. Concept des matériaux fonctionnellement gradués (FGM)

Le concept des FGM a été proposé en 1984 par un groupe des spécialistes des matériaux, à Sendai, au Japon, pour les barrières thermiques ou propriétés de blindage de chaleur [4]. À l'origine, la FGM devait servir de barrière thermique dans les réacteurs aérospatiaux et les réacteurs à fusion. Ils ont par la suite été conçues pour les industries militaires, automobiles, biomédicales et semi-conductrices, ainsi que pour être utilisées comme une caractéristique structurelle générale dans des environnements à haute température. Le FGM est une substance

de pointe à haute température qui peut résister à des températures intenses dans des conditions de température élevée. À l'échelle microscopique, les matériaux à gradient de propriété (FGM) sont inhomogènes, avec des propriétés mécaniques qui diffèrent graduellement et continuellement d'une surface à l'autre. Ceci est accompli en modifiant progressivement la fraction de densité des composants, qui sont constitués d'un mélange de céramique et de métal ou d'un mélange de divers matériaux.

En raison de sa faible conductivité thermique, la partie du matériau céramique offre une résistance à haute température et protège le métal de l'oxydation. La partie en métal ductile, par contre, prévient la rupture induite par les contraintes dans un court laps de temps en raison du gradient de haute température. En outre, un mélange d'une céramique et d'un métal avec une fraction de volume variant de façon continue peuvent être facilement fabriqué [5] [6]. Un certain nombre de revues traitant de divers aspects de la FGM ont été publiés au cours des dernières années [5] [7] [8] [9] [10] [11] [12] Ils démontrent que la majorité des premières recherches sur les FGM étaient axées sur l'analyse des contraintes thermiques et le comportement mécanique.

Généralement, les FGM sont des matériaux multicouches qui comprennent une variété de matériaux comme la céramique et les métaux. Les vides sont également considérés comme une composante des matériaux FGM [13]. Ce sont donc des composites aux propriétés macroscopiques hétérogènes. La figure I.1 illustre une microstructure graduée continue avec des constituants métalliques/céramiques. En effet, les composants céramiques des FGM peuvent résister à des températures élevées en raison de leurs propriétés de résistance thermique supérieures, tandis que les composants métalliques ont une meilleure efficacité mécanique et réduisent le risque de fracture catastrophique. Récemment, [14] ont présenté une revue des principaux développements des FGM, notamment les problèmes de transfert de chaleur, le stress, la stabilité dynamiques, les essais, la fabrication et la conception, les applications et les fractures.

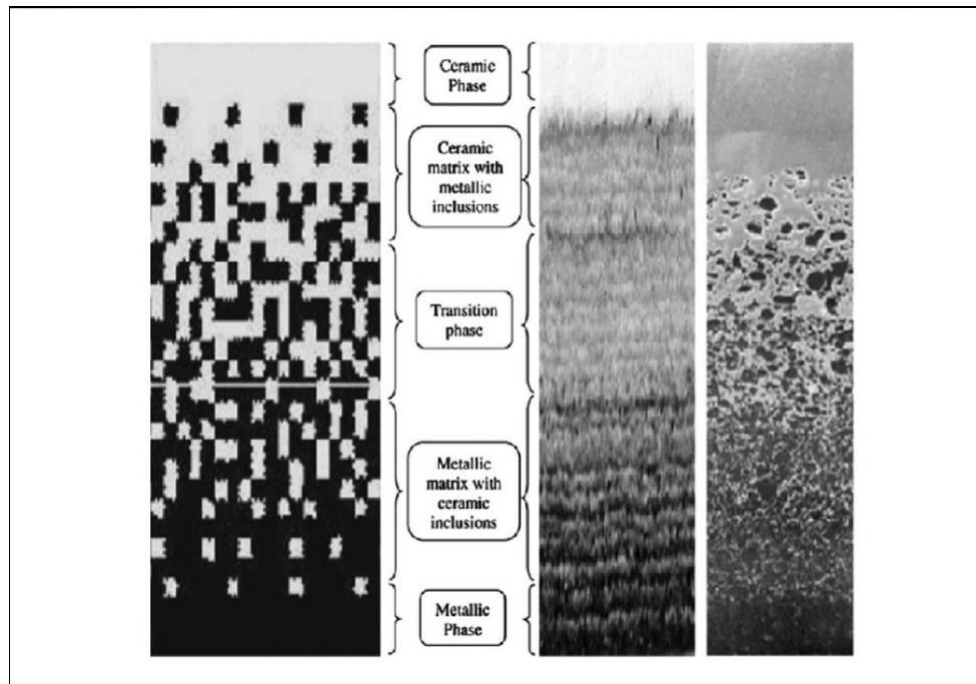


Figure. I.1 : Gradation de la microstructure FGM avec des constituants céramique -métal [2]

La majorité des FGM sont constitués de céramiques et de métaux, dont les propriétés mécaniques sont comparées dans le tableau I.1.

Tableau I.1 : Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal [2]

La face à haute température	Céramique	-Bonne résistance thermique -Bonne résistance à l'oxydation -Faible conductivité thermique.
Continuité du matériau d'un point à l'autre «couches intermédiaires»	Céramique-métal	-Élimination des problèmes d'interface -Relaxer les contraintes thermiques.
La face à basse température	Métal	-Bonne résistance thermique -Conductivité thermique élevée -Très bonne ténacité à la rupture.

La composition d'un matériau "FGM", et donc sa microstructure, est en constante évolution. En conséquence, les propriétés des FGM seront déterminées par un gradient. Un exemple d'un tel matériau est montré dans la figure I.2 [15] où des particules sphériques ou presque sphériques sont incorporées dans une matrice isotrope. Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de micro structure différente [16]

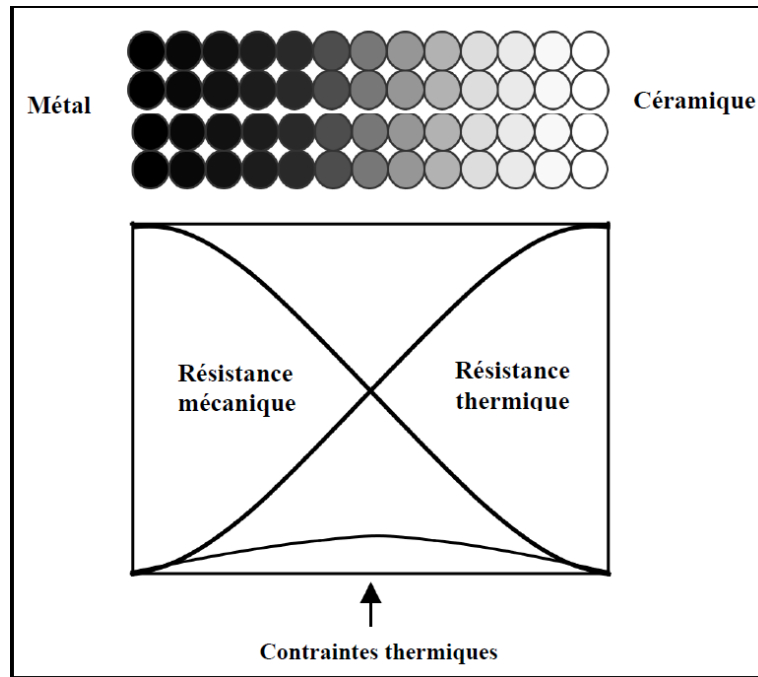


Figure. I.2 : Concept des matériaux gradient de propriétés [2].

Le principe des FGM a été mis en œuvre avec succès dans les revêtements de barrière thermique pour accroître la résistance thermique, l'oxydation et la résistance à la corrosion. Deux matériaux importants dans la technologie de fabrication des FGM sont: les couches céramiques protectrices extérieures Alumina ' Al_2O_3 ' et Zircone ' ZrO_2 ' sur les substrats Ni-super alloy ' NiCrAlY ' [2]

I.3. Différence entre FGM et les matériaux composites traditionnels

Les laboratoires de recherche ont poursuivi leurs objectifs techniques pour répondre à la demande d'efficacité et de qualité résultant des progrès technologiques et de la concurrence économique. Les matériaux purs ne peuvent pas produire ces résultats nécessaires en raison de leurs propriétés, qui ne sont pas suffisamment flexibles pour certaines applications. Pour résoudre ce problème, un alliage est créé en combinant un métal avec d'autres métaux ou des matériaux non métalliques à l'état de fusion. Il en résulte des propriétés qui diffèrent de celles des matériaux d'origine. L'utilisation de l'alliage est limitée par l'équilibre thermodynamique [17], car il y'a une limite à laquelle un matériau peut être dissous dans une solution d'un autre. Par conséquent, l'utilisation de cette méthode pour combiner deux matériaux avec des températures de fusion différentes est prohibitive. La métallurgie des poudres (powdered metallurgy PM) est un moyen de fabriquer un composant qui ne peut pas être fabriqué avec un alliage traditionnel, dans lequel l'alliage est fabriqué sous forme de

poudre et fritté. Malgré les excellentes caractéristiques de la métallurgie des poudres, il existe quelques limitations telles que des formes complexes qui ne peuvent être réalisées à l'aide des PM ; Les pièces sont poreuses et ont une faible résistance [17] alors que certaines applications (telles que les applications filtrantes et non structurelles) bénéficient de ces inconvénients, d'autres en souffrent. Une autre façon de faire des matériaux avec plusieurs propriétés est de les combiner à l'état solide, résultant en des matériaux composites.

Les matériaux composites sont constitués de deux ou trois matériaux distincts qui, une fois combinés, ont un rendement global plus élevé que les composants individuels. Ces tissus sont constitués d'une matrice et d'un isolant, qui est principalement sous forme de fibres. En conséquence, les propriétés mécaniques de la substance obtenue, telles que la légèreté, la rigidité, la résistance à l'usure, et bien d'autres, peuvent être améliorées. Les composites ont des interfaces, ou des surfaces d'interaction entre la matrice et le renfort, car ce sont des matériaux hétérogènes. Les deux éléments se conforment parfaitement l'un à l'autre tant que le composite est intact, de sorte que l'interface ne joue aucun rôle. Cependant, l'interface joue un rôle important lorsque le composite subit des dégradations mécaniques et commence à se fissurer suite à une surcharge, à la fatigue ..., etc. [18]. En effet, les interfaces ont la propriété de dévier les fissures : comme une fracture se propage à travers la matrice et rencontre l'interface (Figure I.3a), elle ne croise généralement pas cette dernière, n'entraînant aucun dommage aux armatures. La crique inverse plutôt sa trajectoire et suit l'interface (figure I.3b). En d'autres termes, plutôt qu'une rupture soudaine, nous voyons un détachement constant entre les renforts et la matrice, que nous appelons la décohésion. En raison du déplacement soudain de la structure, les matériaux composites s'enroulent dans des conditions difficiles en raison de la phase de délamination (séparation des fibres de la matrice). Par exemple, dans une application à haute température impliquant deux matériaux avec des coefficients de dilatation thermique différents, cela peut se produire.

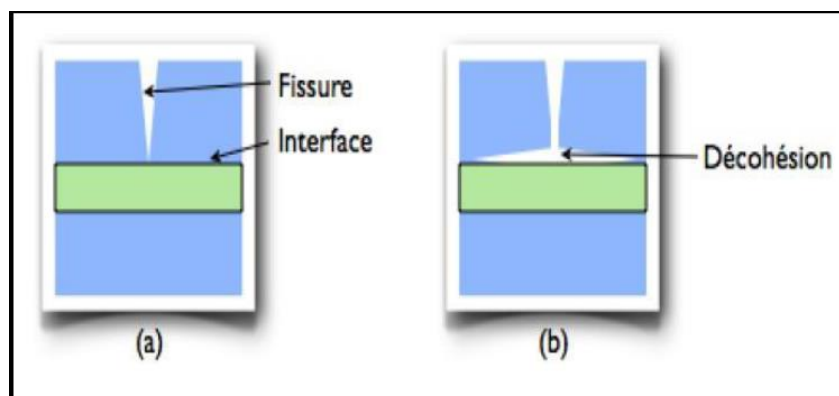
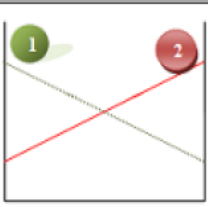
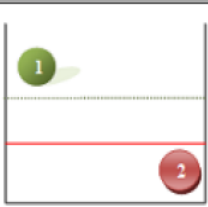
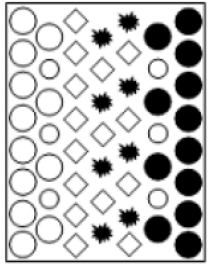
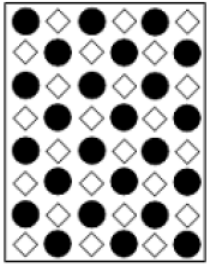


Figure. I.3 : Rôle de l'interface sur la ténacité des composites.

Lorsqu'une fissure atteint l'interface (a), elle est déviée (b). Plutôt qu'une rupture soudaine, les constituants décodent régulièrement.

Les FGM sont des matériaux multicouches qui comprennent une variété de matériaux comme la céramique et les métaux. Ce sont donc des composites aux propriétés macroscopiques hétérogènes. Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure du matériau distingue les FGM des matériaux composites conventionnels comme illustré sur le tableau (I.2) [19]. En conséquence, les propriétés matérielles de FGM peuvent être déterminées par un gradient. Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente [16]

Tableau I.2 : Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels [19]

Propriétés	<p>1 Résistance mécanique</p> <p>2 Conductivité thermique</p>		
Structure	<p>Éléments constitutifs:</p> <p>Céramique ○</p> <p>Métal ●</p> <p>Microporosité ○</p> <p>Fibre ◇*</p>		
Matériaux	Exemple	FGM	NON-FGM

La figure I.4 illustre le modèle le plus élémentaire pour démontrer les distinctions entre les matériaux de gradient (FGM) et les matériaux plus traditionnels. La substance associée (figure I.4b) a une limite sur l'interface entre deux composants, tandis que la matière plane (figure I.4a) a une caractéristique plane. Les FGM ont des propriétés exceptionnelles qui les distinguent des matériaux plats composites et liés. En conséquence, les FGM attirent l'intérêt en termes d'applications industrielles car ils ont la double propriété de combiner deux matières premières et de classer la livraison des composants sans interruption. Une FGM, par exemple, est constituée de métal et de céramique et présente une conductivité thermique et une force métallique du côté métallique et une résistivité à haute température du côté céramique.

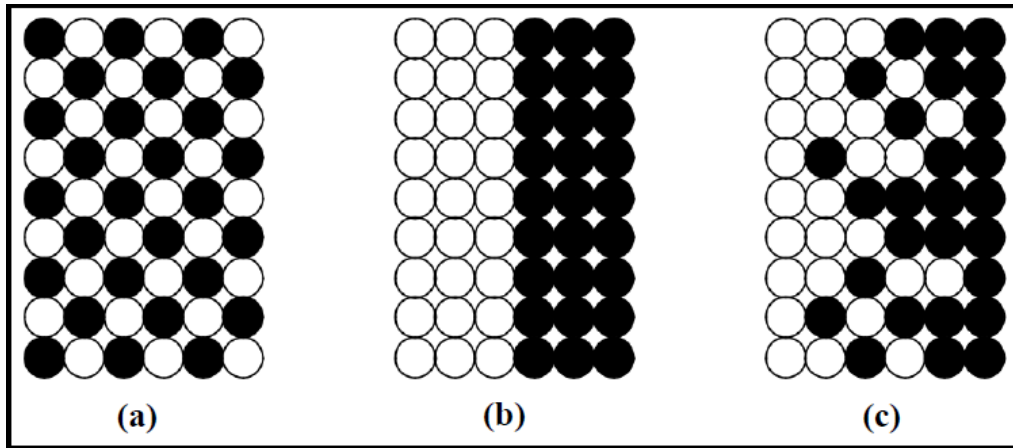


Figure. I.4 : Distribution composante des matériaux [20]

Matériau plan composé(a), Matériau relié (b), Matériau à gradient de propriété(c)

I.4. Procédés de fabrication FGM

L'utilité des composites à gradient de propriétés avec une structure à gradient a été identifiée dans les articles théoriques par Bever et Duwez, Shen et Bever [21]. Leur travail, cependant, a un impact minimal, en raison d'un manque de méthodes de fabrication appropriées pour les FGM à l'époque. Il a fallu encore 15 ans pour que des études approfondies sur les processus de production de matériaux de gradient soient menées dans le cadre d'un programme national de recherche sur les FGM au Japon. Depuis lors, une partie de la recherche sur FGM a été consacrée au traitement de ces matériaux et une grande variété de méthodes de production a été développée [22]

L'établissement de la structure dans l'espace non homogène de "gradation" et la transformation de cette structure en un matériau de bloc de "consolidation" séparent normalement la phase de fabrication d'une FGM. Les processus constitutifs dépendent du revêtement de la structure graduée avec des matériaux précurseurs ou des poudres, étape par étape. Les pages suivantes montrent les procédés les plus populaires pour produire des matériaux FGM aujourd'hui : coulée de barbotine séquentielle (coulée par glissement), coulée de bande (coulée par bande), projection thermique (plasma), dépôt chimique et physique de vapeur (CVD et PVD), et frittage laser différentiel.

I.4.1. Coulage séquentiel en barbotine (slip casting)

Morinaga a également réussi à fabriquer un $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{W}$ FGM en utilisant une méthode de coulée en barbotine. Il a obtenu un matériau de gradient avec une composition sans

interruption changeante en contrôlant le taux d'arrangement de fines particules, qui dépend de la densité et de la taille du grain. La couche Al_2O_3 et la couche W ont été séparées lorsqu'une faible densité de barbotine (5% ou 10%) a été utilisée, confirmant des couches inclinées continues et transparentes. Le dépôt de vapeur, l'implantation d'ions et la diffusion ont tous été utilisés pour fabriquer des matériaux de gradient dans le passé, mais cette méthode a piqué l'intérêt et peut permettre la production d'une série des FGM utilisant des densités minces dans la barbotine et des particules fines comme matière première avec des densités particulières variables.

L'addition d'une pression pendant la coulée en barbotine augmente le taux de dépôt du matériau et à permet de fabriquer des pièces à plus grandes dimensions; ceci a été trouvé dans une étude réalisée par Grazzini et Wilkinson [23]. Leurs recherches ont porté sur le traitement des composés monolithiques Al_2O_3 et $\text{Al}_2\text{O}_3\text{-Si}$ avec des formulations de coulée de barbotine à base de boues émoussées dispersées et coagulées. Ils ont constaté que l'utilisation de boues émoussées coagulées produisait d'excellents résultats sans craquage après séchage. La pression a eu pour effet d'augmenter la densité, ce qui a entraîné une augmentation de l'intensité du feu. De plus, compte tenu de la variation significative de la taille des particules utilisées, des microstructures homogènes ont été obtenues dans la méthode composite.

I.4.2. Coulage en bande (tape casting)

Le processus de coulage en bande connu sous la dénomination anglaise (Tape casting) a été employé pour préparer les diverses bandes de poudres fines en suspension non aqueuse, dont lequel les matériaux composites laminaires et les matériaux à gradient de propriétés (FGM $\text{Al}_2\text{O}_3\text{-Tic}$) ont été produits en coupant, en empilant, en stratifiant le matériau, ensuite en levant la reliure, et ont pressant les produits obtenus à chaud, le coulage en bande est une méthode propriétés mécaniques des composées céramique [24]

Les housses utilisées pour le baguage sont réalisées en plusieurs étapes : d'abord, un solvant à faible viscosité, un dispersant, et la poudre céramique sont mélangés soit dans un broyeur planétaire en pots d'alumine pour SiC, soit dans un mélangeur à rouleaux avec des billes SiC pour B4C (problème d'usure); puis un liant acrylique et un plastifiant sont ajoutés et mélangés pendant la nuit; enfin, un autre agent est ajouté (uniquement pour B4C). Après avoir testé la viscosité des pignons, ils sont coulés sur un film Myler siliconé pour faciliter le détachement des bandes sur un banc de coulée avec un sabot à double couteau, ce qui donne des bandes d'épaisseur contrôlée (100-200 μm). Les bandes sont tranchées en disques (diamètre 20 mm) et carrés (côté 50 mm) puis empilées. Ainsi on obtient des matériaux soit

monolithiques (empilement de couches identiques) soit alternés (empilement symétrique des couches denses et poreuses) après thermocompression sous 60MPa [25].

I.4.3. Compactage des couches (poudre d'empilement)

Dans cette méthode simple et bien établie un gradient est constitué par le dépôt des couches de poudre avec les compositions changeantes dans la matrice de compactage [26] [27]. Les inconvénients de cette méthode sont évidents : nombre limité de couches (jusqu'à dix en laboratoire, mais pas plus de deux ou trois en production possible), faible épaisseur des différentes couches (normalement pas moins d'un mm), taille limitée des composants (100cm^2) en raison des limites de force de compactage, fabrication discontinue avec une faible productivité. Néanmoins cette méthode permet des études de laboratoire efficaces des systèmes à gradient de propriétés [28],

I.4.4. Coulée par centrifugation

Dans la coulée par centrifugation des particules d'une phase réfractaire sont dispersées dans un métal fondu. Ces particules peuvent être formées in situ pendant le refroidissement du fondant [28] être dispersées dans une étape précédente. Si le flux est coulé dans une centrifugeuse, le différentiel de densité entre les particules et le métal liquide provoque la formation d'un gradient de concentration des particules. Particules avec une plus faible densité (Mg_2Si), [28] et une densité plus élevée (Al_3Ti), que le fondant a été utilisé pour préparer les tubes en aluminium à gradient de propriétés qui sont sélectivement la particule renforcée sur la surface intérieure ou externe du tube.

I.4.5. Projection plasma

L'injection de particules solides (environ 100 m de moins) dans un jet de gaz à une température de 11000 C et à une vitesse de 1000 à 1500 m/s est connue sous le nom de projection de plasma. Le dépôt est ainsi formé par l'empilement des lamelles solidifiées obtenues par l'impact des particules sur le substrat préalablement préparé. Cette méthode est particulièrement utile pour le dépôt de matériaux de fusion à haute température comme les alliages réfractaires et les céramiques. La résistance à l'usure et à la corrosion, ainsi que l'isolation thermique et électrique, sont toutes des propriétés des dépôts de pulvérisation de plasma.

La microstructure et la régulation des propriétés des particules fines pulvérisées par plasma

sont étudiées en profondeur. La projection par plasma est un processus rapide et fournit la formation de film sur une large zone, mais a habituellement un inconvénient avec sa microstructure approximative [29]. Fukumoto a employé les poudres mécaniquement alliées des matériaux thermoélectriques, et a réussi à bien contrôler la teneur dépôt dans le SiC pour former un matériau thermoélectrique transporteur-concentration-gradué avec une microstructure homogène [30]. Sa configuration de pulvérisation est schématiquement montrée sur la figure I.5.

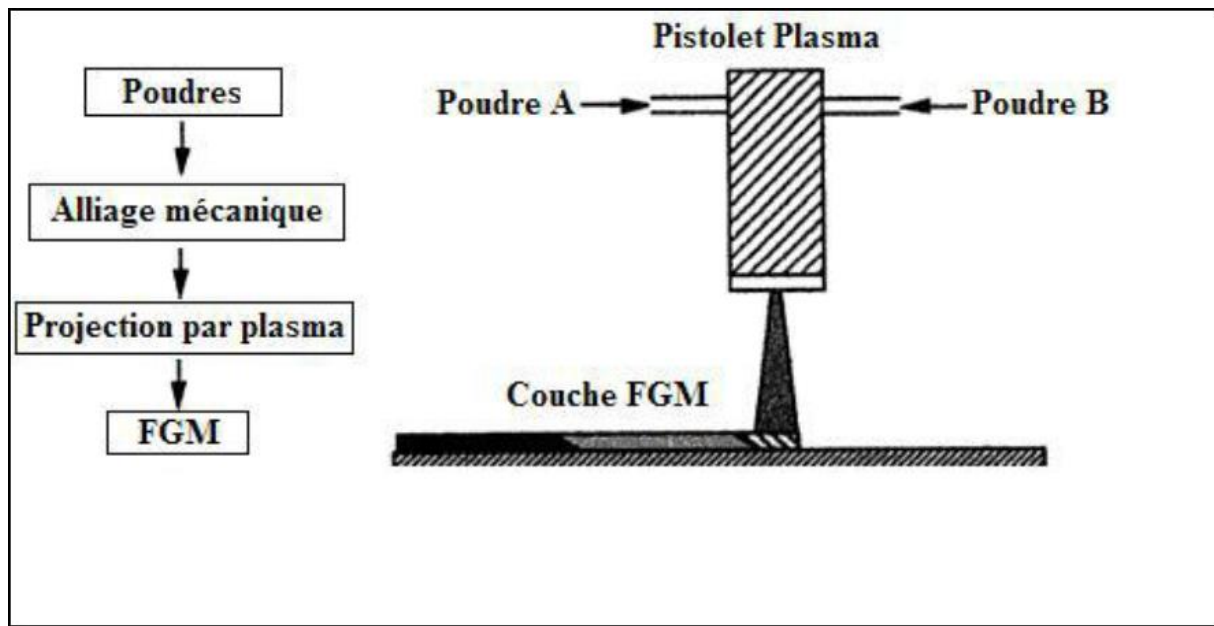


Figure I.5 : Illustration conceptuelle d'une méthode de projection par plasma pour former un matériau thermoélectrique gradué. (La composition est graduée dans la direction plane) [30]

I.4.6. Dépôt physique en phase vapeur (pvd)

Pour la fabrication de revêtements de barrière thermique, le dépôt physique de vapeur est une technologie cruciale (prometteuse). Les surfaces lisses sont l'un des avantages des revêtements PVD qui sont traités, et il n'est pas nécessaire de fermer les trous de refroidissement à la fin du processus. Le plus grand avantage, cependant, est leur excellente sensibilité aux chocs thermiques, ainsi que leur durée de vie significativement plus longue. L'équipement utilisé pour déposer les revêtements d'isolation thermiques par l'intermédiaire de PVD, se compose de plusieurs récipients pour le chargement, le préchauffage, et le dépôt plus un dispositif de rotation et la manipulation des échantillons...etc. [31].

Une autre façon de faire une structure de gradient est d'utiliser une combinaison chimiquement réglée d'aluminium, d'alumine et de zircone, qui peut être commodément faite en pulvérisant à partir de plusieurs sources avec un ou plusieurs bras électroniques. En

ajustant les paramètres de faisceau d'électrons, différents taux de dépôt peuvent être obtenus pour chaque source [31]. La FGM est obtenue lorsque les taux d'évaporation de deux éléments, tels que l'alumine et la zircone, sont modifiés sans interférence, ce qui donne un gradient de composition donné.

La pulvérisation thermique n'est pas utilisée dans le cas des dispositifs de barrière thermique qui sont plus vulnérables à l'environnement oxydant, comme les pales mobiles des turbines aéronautiques ou terrestres; dans le cas du ZrO_2 , cependant, un mécanisme distinct est utilisé. En l'occurrence, il s'agit de la technique de l'évaporation sous faisceau d'électrons (EB-PVD) qui conduit à des microstructures et des propriétés thermomécaniques assez différentes de celles obtenues par la technique de la projection thermique [32].

I.4.7. Dépôt chimique en phase vapeur (cvd)

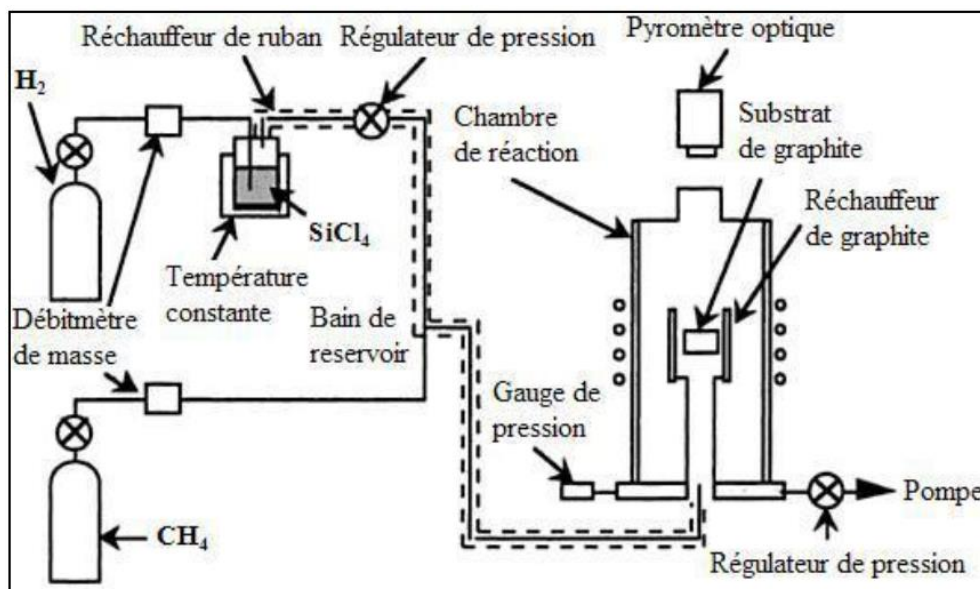


Figure. I.6: Schéma de l'installation pour la préparation d'un SiC/CFGM par le dépôt chimique en phase vapeur (CVD) [31].

Dans la technique de dépôt chimique en phase vapeur (Chemical Vapor Deposition), représenté schématiquement à la figure I.6, un dépôt est formé sur un substrat en soumettant la source des gaz (par exemple, des hydrures, bromures ou chlorures) qui occupent la chambre de réaction, à différents types d'énergie comme la chaleur, la lumière et le plasma [31]. La pulvérisation thermique n'est pas utilisée pour les instruments à barrière thermique qui sont plus sensibles à l'atmosphère oxydante, comme les pales mobiles dans les turbines aéronautiques ou terrestres; toutefois, un mécanisme différent est utilisé dans le cas du ZrO_2 .

Le développement d'un revêtement gradué de carbure de silicium SiC sur graphite, avec

une transition continue du SiC au C, est un exemple typique d'application de FGM par CVD. À des températures de dépôt allant de 1400 °C à 1500 °C et à des pressions allant de 1,3 à 6,5 KPa, on utilise des formulations qui régissent la source des mélanges de gaz ($\text{CH}_4\text{-SiC}_{14}\text{-H}_2$)

I.4.8. Frittage et infiltration

Le frittage, en revanche, est la méthode de fabrication de pièces en chauffant une poudre sans la faire fondre. Les grains sont soudés ensemble sous l'influence du feu, ce qui assure la cohésion de la pièce. Cette méthode se compose de deux phases qui peuvent être utilisées pour faire un composite de gradient de travail de deux matériaux qui fondent à des températures très différentes. La première étape consiste à créer une matrice frittée de la substance avec un gradient de porosité à un point de fusion élevé. La deuxième étape consiste à remplir ces porosités de matière la contrainte thermique [33]. Cette méthode peut être utilisée pour une variété de matériaux chimiquement inertes avec des points de fusion très disparates fondue provenant du processus ou le résultat est excellent pour la diminution de d'infiltration.

I.4.9. Frittage laser différentiel

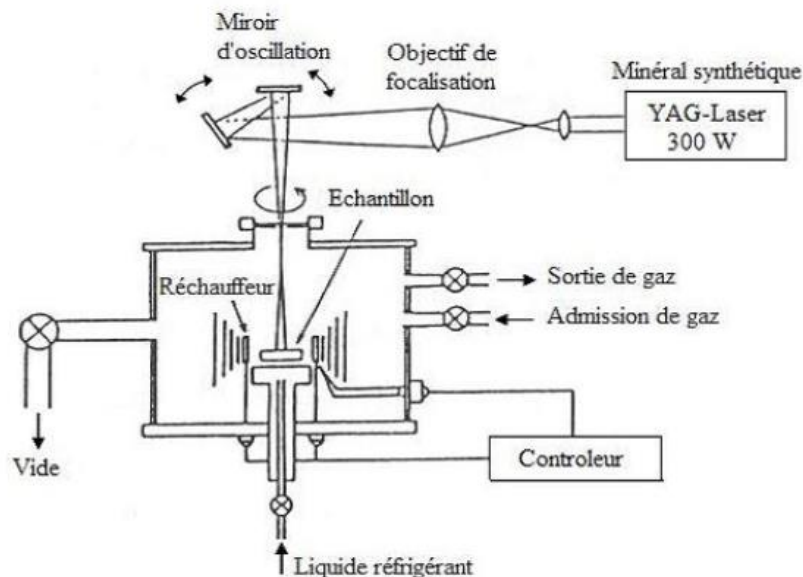


Figure. I.7: Disposition du procédé frittage laser différentiel [34]

Le rayonnement thermique du laser permet la modulation de la température et le chauffage de la concentration du point. Le frittage différentiel le long du composant est causé par des différences dans la résistance de l'irradiation à différents points de la substance, résultant en

des microstructures différentes en fonction de l'emplacement de l'étape irradiée. Yuki et al. [34] ont utilisé cette technique pour élaborer un FGM de PSZ/Mo. La figure I.7 montre schématiquement la disposition du procédé utilisé par ces auteurs.

I.4.10. Dépôt par électrophorèse

L'électrophorèse par dépôt (EPD), une méthode relativement rapide et peu coûteuse capable de produire des matériaux de gradient avec des propriétés en constante évolution et une géométrie complexe, a été appliquée aux différentes techniques de production de FGM. EPD se compose de deux processus, c'est-à-dire le mouvement des particules chargées en suspension dans un champ électrique entre deux électrodes (électrophorèse) et le dépôt de particules sur l'un des électrodes [35]. En déposant une suspension en poudre sur laquelle une seconde suspension est appliquée en continu pendant le processus, EPD permet de concevoir des propriétés de matériaux de gradient sous la forme d'une couche binaire. Le dépôt est un contrat de poudre comprimée qui nécessite une agglomération pour obtenir des composants de matériaux totalement denses.

Depuis lors, de nombreuses applications EPD pour la fabrication de céramiques ont été produites, y compris l'application de matériaux à gradient continu tels que la céramique-céramique ZrO_2/Al_2O_3 et la céramique-métal, WC/Co, car la composition des couches de dépôt est déterminée par la composition de la suspension au moment du dépôt. La figure I.8 montre une installation générale de cette théorie

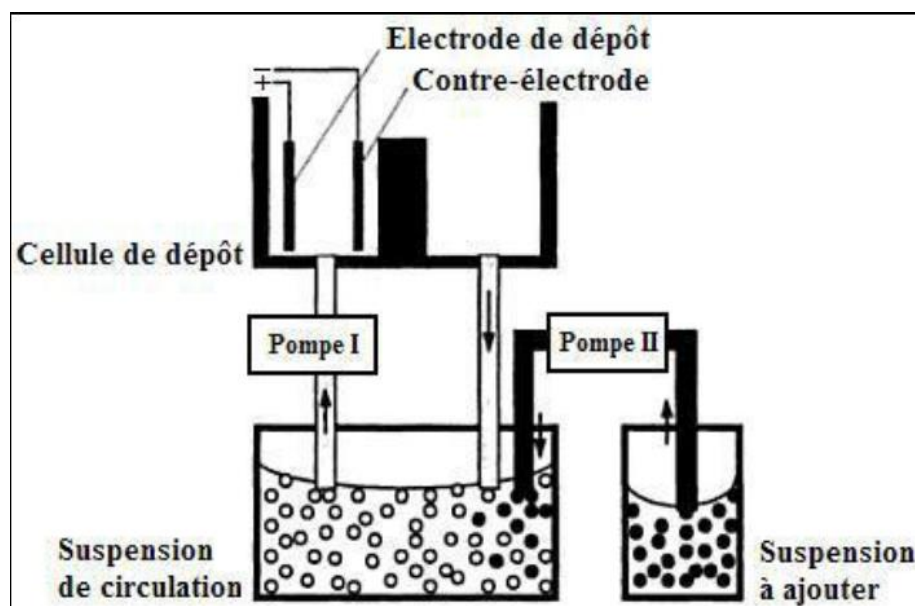


Figure I.8 : Vue schématique de l'installation d'EPD pour la production des matériaux FGM [35].

I.5. Application des matériaux fonctionnellement gradués (FGM)

Les FGM sont très prometteurs dans les systèmes aux environnements de travail difficiles, comme les boucliers thermiques des vaisseaux spatiaux, les tubes d'échangeurs de chaleur, les implants biomédicaux, les revêtements plasmatiques dans les réacteurs de fusion, et ainsi de suite. De nouveaux matériaux pour l'aéronautique, les usines chimiques, les réacteurs nucléaires et d'autres applications peuvent être créés en combinant des caractéristiques généralement incompatibles.

I.5.1. Génie civil

Grâce à la gradation mécanique des éléments en béton, la structure interne des éléments de structure peut être adaptée aux critères de base de la structure et de l'efficacité thermique. Cet alignement est rendu possible en changeant les propriétés du matériau au fil du temps, telles que la porosité, la pression et la rigidité. La modification progressive des propriétés du béton dans toutes les dimensions spatiales est possible par l'ajustement progressif des composants du béton. Minimiser la porosité améliore les caractéristiques structurelles du composant, tandis que la maximisation de la porosité optimise ses propriétés d'isolation thermique et son propre poids (Figure I.9) [2]

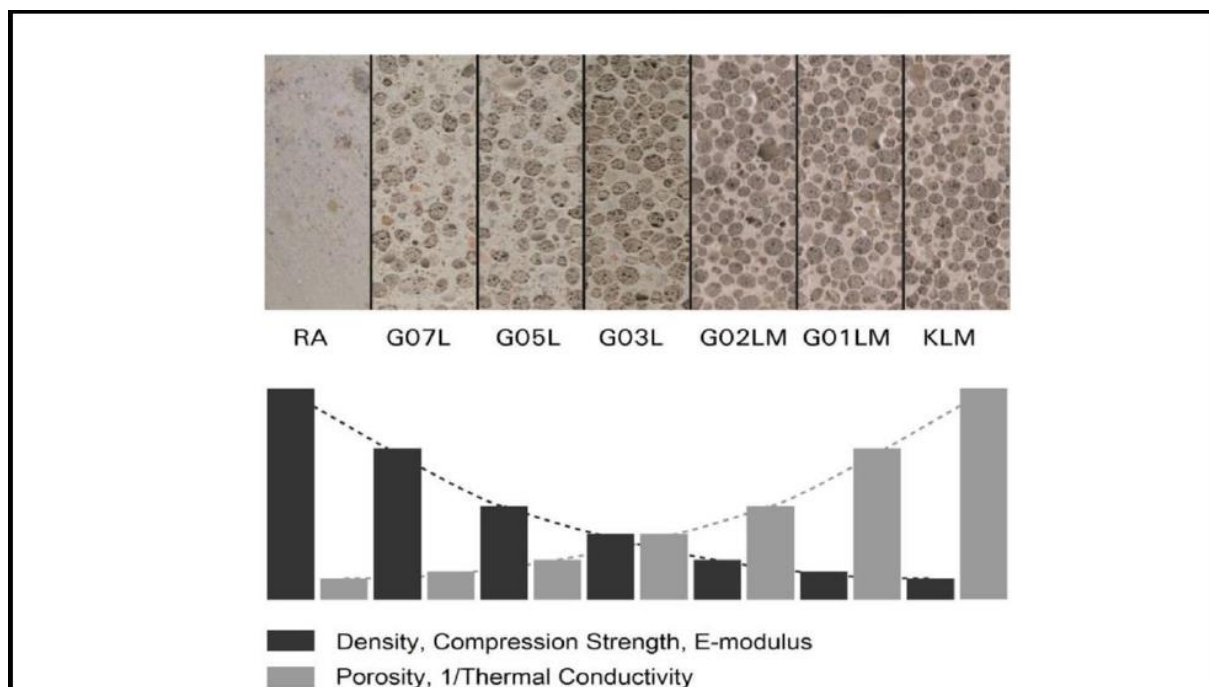


Figure I.9 : Caractéristiques du béton durci en fonction d'une augmentation progressive de la porosité [36]

I.5.2. Réacteur nucléaire

Les parois internes des réacteurs nucléaires sont constituées de FGM (Céramique /Métal) dont la face exposée à très haute température posséderait des propriétés de résistance aux fortes sollicitations thermiques et à l'oxydation, tel que la céramique, et dont la face intérieure serait très bonne conductrice de la chaleur et posséderait une bonne résistance mécanique et une meilleure ténacité, comme le métal comme le montre la figure I.10 [2]

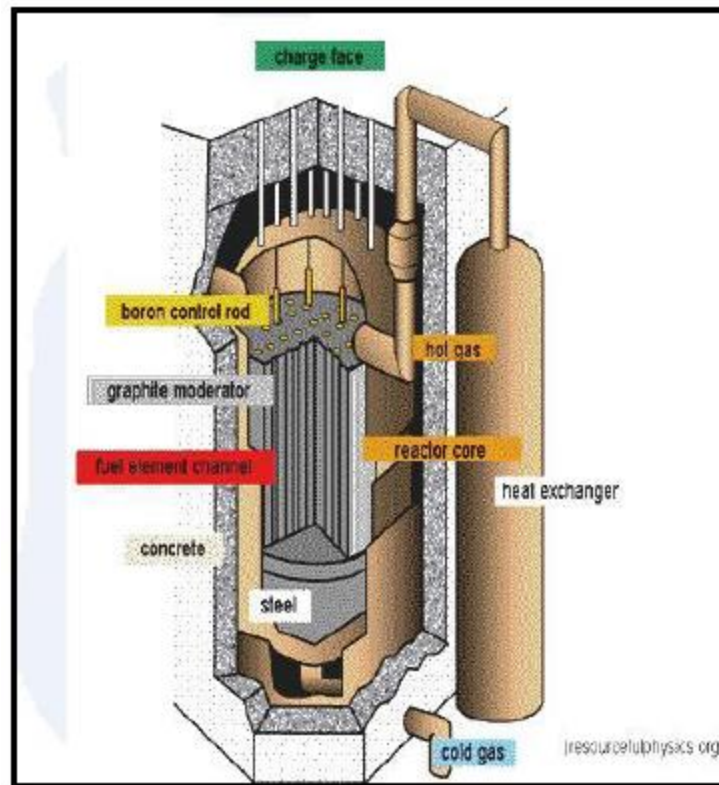
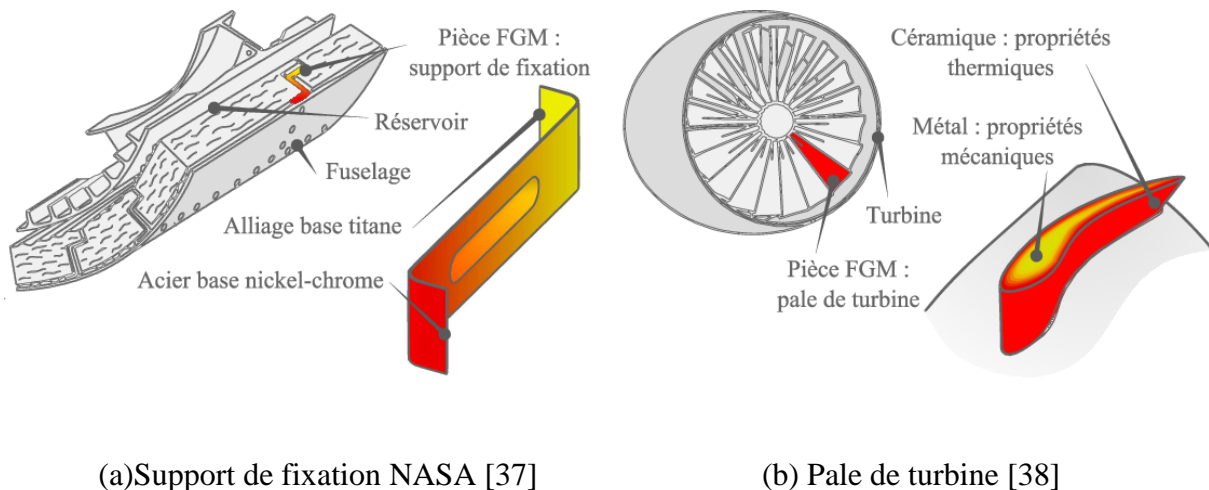


Figure. I.10 : Réacteur nucléaire [2]

I.5.3. Domaine aérospace

La majorité des composants multi-matériaux ont été produits dans l'industrie aérospace, où l'idée de l'ajustement des FGM est apparue pour la première fois, dans le but de résister aux contraintes thermiques et mécaniques. Le centre de recherche de la NASA propose, par exemple, de développer des pièces FGM pour des navettes spatiales [37]. La figure I.11(a) montre les supports de montage qui relient le réservoir au fuselage. La température du fuselage dépassera 1000 °C pendant les phases de vol, tandis que la température du réservoir est semblable à 400 °C, selon l'analyse thermique. Ces supports de montage doivent être conçus de manière à pouvoir supporter ces contraintes thermiques tout en limitant les forces de cisaillement et de flexion qui peut réduire leur durée de vie. Par rapport à un composant en

alliage à base de nickel-chrome, l'utilisation d'un gradient de matériau d'un alliage à base de titane à un alliage à base de nickel-chrome minimisera les concentrations de contraintes et augmentera la durée de vie. Des problématiques similaires existent sur d'autres pièces aérospatiales telles que les pales de turbines (figure I.11(b)) [38]. Ils sont également exposés à des pressions thermiques et mécaniques élevées, qui peuvent entraîner des déformations structurales et des fractures. Dans ce cas, un gradient de contenu peut être utilisé pour résoudre les problèmes.



(a) Support de fixation NASA [37]

(b) Pale de turbine [38]

Figure. I.11 : Pièces multi matériaux dans le domaine aérospatial

I.5.4. Domaine biomédical

Dans le domaine biomédical, les raisons pour utiliser un gradient sont plus variées [39] [40] [41] [42]. Il est possible, par exemple, d'utiliser un gradient de matériau pour combiner les propriétés mécaniques et la résistance à l'usure sur une prothèse de hanche [43]. Un acier inoxydable peut alors être utilisé pour la tige tandis qu'un alliage base chrome-cobalt peut être utilisé pour la tête (Figure. I.12(a)). L'acier inoxydable est utilisé en raison de ses propriétés mécaniques, tandis que l'alliage chrome-cobalt est utilisé en raison de sa tolérance de frottement supérieure. Les applications, comme sur les implants dentaires (figure I.12(b)), sont également réalisables à mesure que les propriétés mécaniques et de biocompatibilité évoluent.

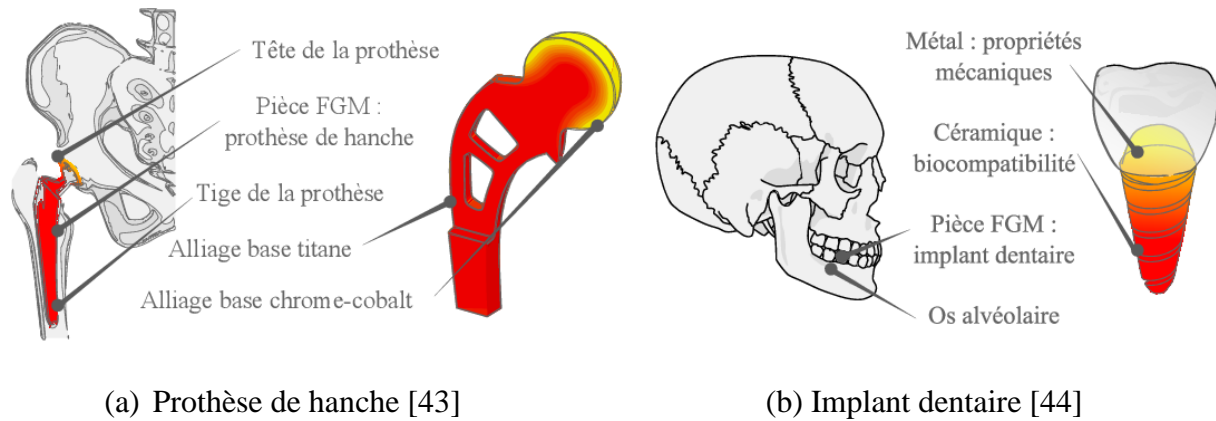


Figure. I.12 : Pièces multi matériaux dans le domaine biomédical

On trouve également des applications dans le domaine de l'électronique [45], de la défense [46] ou de la production d'outillage [47]. Cette liste n'est manifestement pas complète, et on s'attend à ce qu'à mesure que la recherche technologique progressera, les concepteurs utiliseront de plus en plus ce type de système. Par définition, le nombre de combinaisons possibles est presque infini, et chaque combinaison aboutit à un système avec son propre ensemble de propriétés. Par conséquent, il est raisonnable de s'attendre à ce que les systèmes multi-matériaux modifient fondamentalement le domaine de l'architecture en élargissant considérablement les options disponibles au niveau stratégique de la sélection des matériaux.

I.6. Avantage et inconvénients de la FGM

Les matériaux fonctionnellement gradués présentent des avantages et des inconvénients on peut citer par exemple:

I.6.1. Avantages de la FGM

Outre l'atteinte de son objectif principal, qui est d'avoir les diverses propriétés nécessaires à divers points et surfaces du produit potentiel, ce qui pourrait être accompli avec un simple revêtement, le projet a également un objectif secondaire. Suresh et une foule d'autres soulignent une variété d'avantages supplémentaires des FGM. Ils énumèrent certains avantages qui en résultent principalement de la non-existence d'une interface forte, tels que :

- ☑ Diminuer les contraintes thermiques causées par les différences de coefficients de dilatation thermique des matériaux utilisés ;
- ☑ Absence d'une interface nette devrait conduire à un contrôle d'ensemble mieux des contraintes;

- ☑ Meilleure cohésion entre différents matériaux, par exemple un métal et une céramique;
- ☑ Extension de la région fonctionnelle avant d'atteindre la valeur limite de la déformation plastique;
- ☑ Suppression de délaminage;
- ☑ Augmentation de la ténacité à la rupture;
- ☑ Elimination des singularités des contraintes à divers endroits, tels que les surfaces libres, des coins, des racines des fissures, etc.

I.6.2. Inconvénients de la FGM

L'insuffisance de diverses propriétés, comme la température de fusion, les différentes affinités pour divers autres matériaux, la taille des particules, la morphologie, etc., est le principal obstacle à une mise en œuvre plus large des FGM. Un exemple courant est un mélange d'un métal avec une température de fusion (T_1) et une céramique avec une température de fusion (T_2). Dans la plupart des cas, un tel couple est habituellement ($T_1 \ll T_2$). Puis, si la température de fabrication est d'environ (T_1). Les céramiques n'ont pas encore été fondues, mais la structure finale est composée de fragments de céramique non lavés dans une matrice métallique. Dans certains cas, un tel système présente une porosité élevée et une faible adhérence entre les différents composants, ce qui limite son utilisation. Cependant, l'inclusion de particules très dures (carbures) dans une matrice solide peut être idéale pour des applications spécifiques. Travailler autour (T_2), d'autre part, entraînerait presque inévitablement une oxydation accélérée et l'évaporation de nombreux métaux. Formation d'étapes défavorables, et ainsi de suite. Les matériaux doivent être fabriqués dans une atmosphère protectrice ou à une basse pression et ces deux technologies sont très coûteuses [48].

I.7. Lois de distribution des propriétés matérielles des plaques FGM

Les structures de gradients fonctionnels des FGM sont constituées de deux ou plusieurs matériaux ayant diverses propriétés structurelles et fonctionnelles avec une transformation de préférence continue dans la composition de la structure et une distribution des porosités entre eux pour maximiser l'efficacité de la structure qu'ils composent.

Les matériaux FGM se distinguent par leurs microstructures non uniformes et leurs macropropriétés graduées dans l'espace. La structure multi phase autour de l'épaisseur est l'un des

principaux paramètres à décider lors de la fabrication de ces matériaux.

La dépendance des propriétés des positions et réduit par la prise en compte de la loi des mélanges correspondant au modèle de Voigt [49]:

$$P = \sum_{i=1}^n P_i V_i \quad (\text{I.1})$$

P : Propriété le long de l'axe z;

P_i : La propriété mécanique du constituant (i) ;

V_i : La fraction volumique du constituant (i) ;

Avec:

$$\sum_{i=1}^n V_i = 1 \quad (\text{I.2})$$

Dans la pratique, la plupart des structures FGM sont à deux constituants : de la céramique et du métal inoxydable. Dans ce cas, la loi de Voigt se réduit à :

$$P = P_m V_m + P_c V_c \quad (\text{I.3})$$

P : Propriété le long de l'axe z ;

P_m : La propriété mécanique du métal ;

P_c : La propriété mécanique de la céramique ;

V_m : La fraction volumique du métal ;

V_c : La fraction volumique de la céramique ;

Avec :

$$V_c + V_m = 1 \quad (\text{I.4})$$

La variété des fractions de volume peut être utilisée pour décrire une FGM. Pour définir les fractions de volume, la plupart des chercheurs utilisent la fonction puissance, la fonction exponentielle ou la fonction sigmoïde. À l'intérieur, les liaisons entre les particules doivent être assez fortes pour résister à la rupture, et à l'extérieur, elles doivent être assez fortes pour prévenir l'usure.

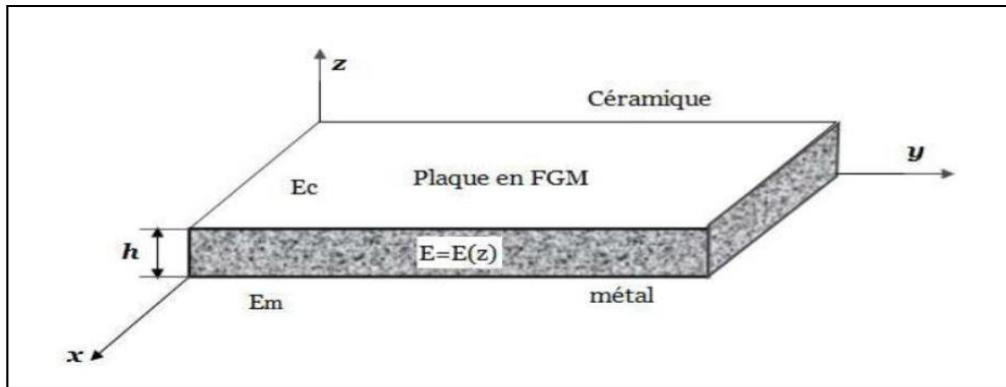


Figure. I.13 : géométrie d'une plaque FGM.

Les coordonnées x et y décrivent le plan de la plaque, tandis que l'axe z est perpendiculaire à la surface moyenne de la plaque et dans la direction de l'épaisseur. Les propriétés du matériau sur les faces supérieure et inférieure, où le module Young et le coefficient de Poisson sont distincts. Ils varient de façon continue, suivant l'épaisseur $E(z)$ et $\nu(z)$

Par rapport au module Young, l'influence du coefficient du poisson sur la déformation est marginale. Par conséquent, le coefficient de Poisson peut être considéré comme constant. Dans la direction de l'épaisseur du disque FGM, cependant, le module de Young varie selon soit la loi de puissance (P-FGM), l'équation exponentielle (E-FGM), ou la fonction sigmoïde (S-FGM).

1.7.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM

La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance:

$$V(z) = \left(\frac{z + \frac{h}{2}}{h} \right)^p \quad (I.5)$$

Où p est un paramètre matériel (paramètre de puissance) et h est l'épaisseur de la plaque. Une fois la fraction volumique locale est définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges [50]

$$P(z) = P_m + (P_c - P_m) V(z) \quad (I.6)$$

Où P_m et P_c sont respectivement les propriétés de la surface inférieure $z = \frac{-h}{2}$ et de la

surface supérieure $z = \frac{h}{2}$ de la plaque FGM.

$V(z)$ étant la fraction volumique du P-FGM défini par la relation (I-5).

La variation de la fraction volumique dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la figure (I.14). Il apparaît clairement que la fraction volumique change rapidement près de surface inférieure pour $P < 1$, et augmenté rapidement près de la surface supérieure pour $P > 1$.

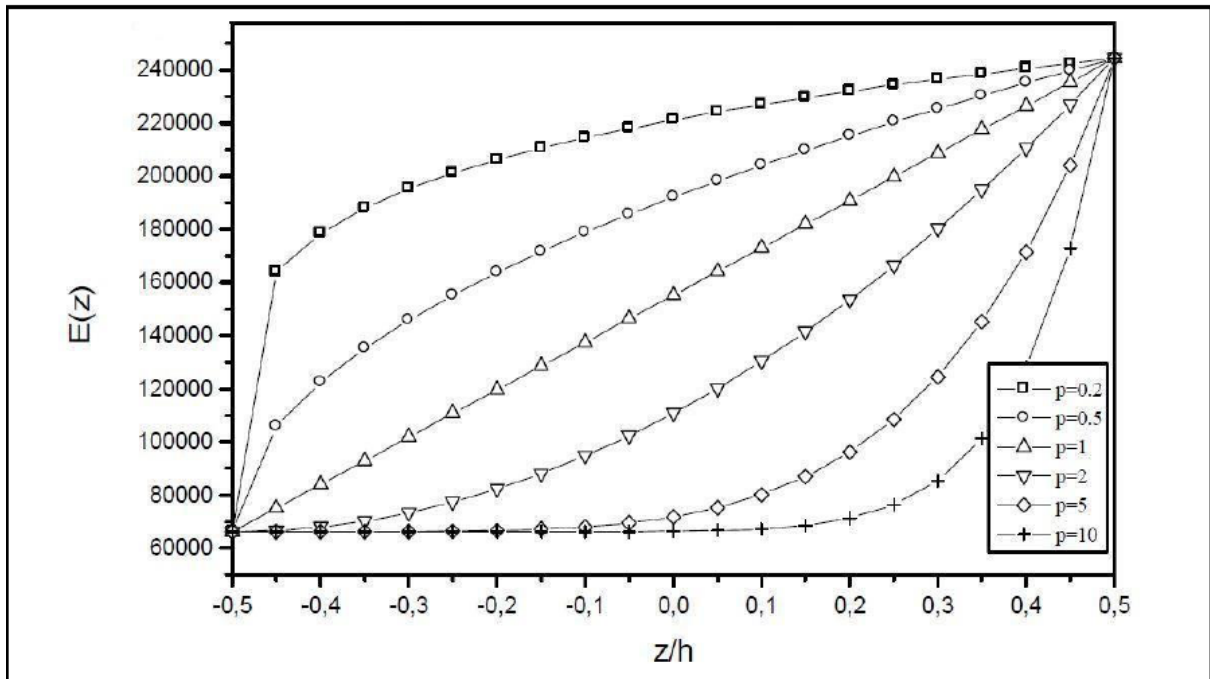


Figure. I.14 : Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.

En considérant la loi de variation P-FGM métal-céramique (surface supérieure 100% céramique (indice c) et surface inférieure 100% métal (indice m)), les propriétés s'écrivent alors comme suit :

$$\rho(z) = \rho_m + (\rho_c - \rho_m)V(z) \quad (I.7)$$

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m)V(z) \quad (I.8)$$

$E(z)$: La variation du module de Young le long de l'axe z ;

E_m : Module de Young du métal ;

E_c : Module de Young de la céramique ;

$\rho(z)$: La variation de la masse volumique le long de l'axe z ;

ρ_m : La masse volumique du métal ;

ρ_c : La masse volumique de la céramique

Lorsque ($P = 1$) la composition change linéairement à travers l'épaisseur, tandis que

Lorsque $\left(P = \frac{1}{2} \text{ ou } 2\right)$, la composition change d'une manière quadratique ou parabolique.

Dans le cas d'un revêtement d'isolation thermique (barrière thermique), par exemple, il est idéal de fournir autant de céramique que possible sur la surface exposée à des températures élevées pour augmenter l'isolation sans perdre les aspects techniques des régions nivelées. Pour répondre à cette exigence, un profil parabolique enrichi en céramique est idéal.

I.7.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM

La fraction de volume de la plaque FGM est définie par deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par [51]

$$V(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{z + \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \right)^p \text{ pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.9a})$$

$$V'(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{z - \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \right)^p \text{ pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.9b})$$

On utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé par :

$$E(z) = V(z)E_1 + (1 - V(z))E_2 \text{ Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.10a})$$

$$E(z) = V'(z)E_1 + (1 - V'(z))E_2 \text{ Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.10b})$$

La figure (I.15) montre que la variation de la fraction volumique définie par les équations

(1.9a) et (1.9b) représente les distributions sigmoïdes, et cette plaque FGM est appelée (Plaque S-FGM)

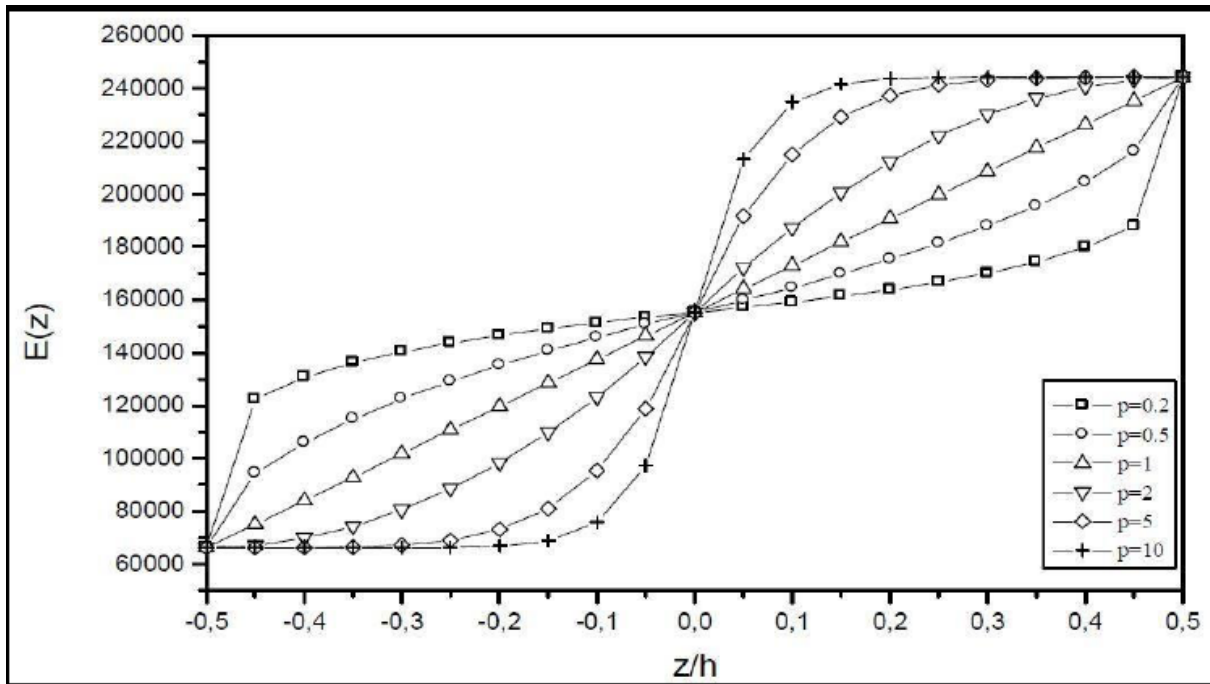


Figure. I.15 : Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM

I.7.3. Propriétés matérielles de la plaque E-FGM

Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme [52]

$$E(z) = E_2 e^{B \left(z + \frac{h}{2} \right)} \quad (I.11)$$

Avec :

$$B = \frac{1}{h} \ln \left(\frac{E_1}{E_2} \right) \quad (I.12)$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée sur la figure (I.16).

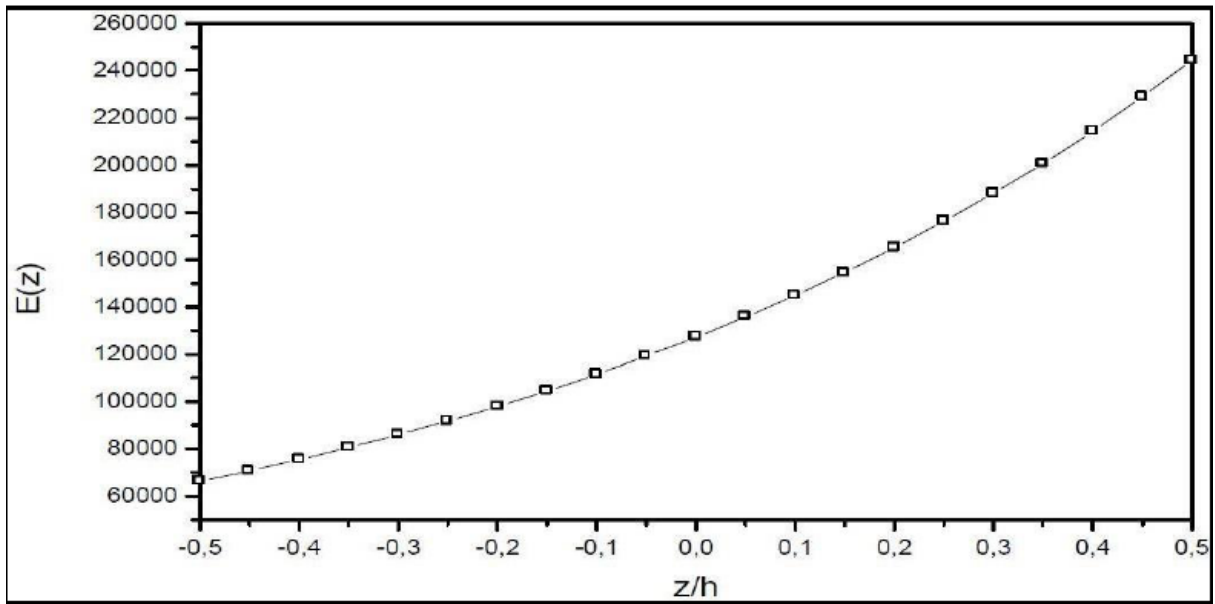


Figure I.16 : Variation du module de Young dans une plaque E-FGM.

I.7.4. Autres propriétés matérielles des plaques FGM

Les lois de mélange P-FGM, S-FGM et E-FGM sont fonctionnelles et faciles à utiliser, mais elles ne permettent pas de déterminer la taille, la forme et la distribution des particules à l'étape de la microstructure. Il existe également d'autres modèles pour évaluer les propriétés globales de la structure.

Le modèle le plus utilisé est basé sur le schéma de Mori et Tanaka [53], ce modèle tient compte de l'interaction des champs élastiques des inclusions voisines. Pour une distribution aléatoire de particules isotropes (indice 2) dans une matrice isotrope (indice1). Les propriétés s'écrivent alors comme suit :

$$\frac{K - K_1}{K_2 - K_1} = \frac{V_2}{1 + V_1 (K_2 - K_1) \left(K_1 - \frac{4}{3} G_1 \right)} \tag{I.13}$$

$$\frac{G - G_1}{G_2 - G_1} = \frac{V_2}{1 + V_1 (G_2 - G_1) (G_1 - f)} \tag{I.14}$$

$$f = \frac{G_1 (9K_1 + 8G_1)}{6(K_1 + 2G_2)} \tag{I.15}$$

Avec:

K : Module de compressibilité ;

V : Fraction volumique ;

G : Module de cisaillement.

Un autre modèle (diagramme auto-cohérent de Hill) suggère que chaque inclusion de renfort est intégrée dans une substance continue avec des propriétés composites. La phase matricielle et la phase de renforcement ne sont pas distinguées dans ce système. Voici des exemples de modules élastiques :

$$K = \frac{1}{\frac{V_1}{\left(K_1 + \left(\frac{4}{3}\right)G\right)} + \frac{V_2}{\left(K_2 + \left(\frac{4}{3}\right)G\right)}} - \left(\frac{4}{3}\right)G \quad (\text{I.16})$$

Le module G est obtenu en résolvant l'équation suivant :

$$\left[\frac{V_1 K_1}{\left(K_1 + \left(\frac{4}{3}\right)G\right)} + \frac{V_2 K_2}{\left(K_2 + \left(\frac{4}{3}\right)G\right)} \right] + 5 \left[\frac{V_1 G_2}{(G - G_2)} + \frac{V_2 G_1}{(G - G_1)} \right] + 2 = 0 \quad (\text{I.17})$$

Pour les deux schémas précédents, le module de Young est calculé par :

$$E = \frac{9KG}{(3K + G)} \quad (\text{I.18})$$

La masse volumique est évaluée à partir de la loi de Voigt (I.3)

Lorsque la continuité de la matrice et la discontinuité d'inclusion sont bien définies, le modèle Mori-Takana est mieux adapté au calcul précis des propriétés mécaniques, tandis que le modèle Hill est bien adapté à une microstructure squelettique marquée par une grande zone de transition entre les régions où l'une ou l'autre partie prédomine.

I.8. Conclusion

Le but de ce chapitre était de fournir un aperçu des matériaux à gradient de propriétés, ou FGM. Nous avons appris leurs origines, leurs significations, leurs propriétés et leurs domaines d'application. Les différentes lois de mélange ont été discutées, et la variation spatiale et progressive des propriétés de ces matériaux permet le développement de structures nouvelles.

Il est essentiel de comprendre certains aspects mécaniques des FGM afin de faire face à différents problèmes plaquettaires plus tard. La théorie générale des plaques et de la formulation mathématique sera discutée dans les chapitres suivants.

Chapitre II :
Revue sur
les différentes théories
des plaques

II.1. Introduction

L'utilisation généralisée de plaques composites et de plaques isotropes dans diverses industries, en particulier dans l'aérospatiale, l'automobile et la construction navale, a incité les chercheurs à développer des théories qui pourraient expliquer avec précision leur comportement structurel.

Le sujet de l'analyse des plaques est en trois dimensions. Presque toutes les idées formulées avaient comme objectif principal la réduction d'un problème tridimensionnel (3D) à un problème bidimensionnel (2D) en utilisant des hypothèses simplifiées sur la cinématique des déformations et l'état des contraintes à travers l'épaisseur.

Différentes théories pour la modélisation et l'étude des plaques fonctionnellement graduées sont discutées dans ce chapitre. La revue est dédiée au développement des modèles théoriques pour prédire les réponses finales des plaques à gradient de propriétés sous charges mécaniques.

II.2. Définition d'une plaque

Une plaque est un solide avec une surface de référence lisse (plan x, y) et une épaisseur minimale noté h par rapport aux autres dimensions, qui sont la longueur et la largeur. Les plaques épaisses et minces reçoivent l'adjectif fin basé sur l'ordre de grandeur de h en comparaison aux autres mesures. Cependant, ce terme désigne non seulement une caractéristique géométrique, mais aussi une fonction spécifique des déformations dites de cisaillement transversal (CT). Comme l'épaisseur h varie dans la direction opposée de l'effet CT, cette influence est beaucoup plus importante lorsque les structures sont petites. La plaque peut être constituée d'une seule substance homogène ou d'une pile de matériaux orthotropes.

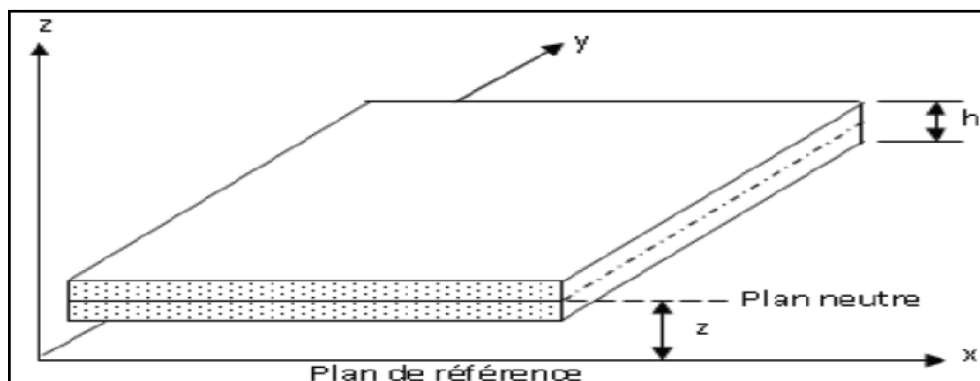


Figure II.1 : Modèle d'une plaque FGM

II.3. Différents types des plaques

Les plaques peuvent être divisées en trois groupes en fonction de la qualité des matériaux qui les composent et de la géométrie de leurs sections transversales :

- ☒ **Les plaques isotropes:** Elles sont construites en matériaux isotropes (acier, béton, ...etc) et ont une section homogène. Deux paramètres élastiques les définissent (E et ν sont respectivement le module d'élasticité et le coefficient de Poisson). Ils peuvent être utilisés dans une variété de structures civiles (bâtiments, ouvrages d'art, ...).
- ☒ **Les plaques orthotropes:** Dans deux directions perpendiculaires, leurs propriétés élastiques varient. L'orthotropie peut être normale (dans le cas du bois) ou technologique (dans le cas du métal) (carreaux créés). Le comportement de ces dalles est défini par quatre paramètres élastiques et on les retrouve dans les constructions navales, aéronavales, de réservoirs de l'industrie chimique, des bâtiments et d'ouvrages d'art [54]
- ☒ **Les plaques anisotropes:** De toute façon, leurs propriétés élastiques varient. Il suffit de neuf paramètres élastiques pour les construire. Ils sont également utilisés dans l'industrie de l'aviation maritime et sont faits de matériaux composites ou autres.

II.4. Différents types de comportements des plaques

L'énergie de déformation d'une plaque peut être divisée en trois catégories : flexion, membrane et cisaillement. À mesure que l'épaisseur de la plaque est réduite à zéro, l'énergie de cisaillement disparaît et la plaque se déforme en l'un des trois groupes asymptotiques, en fonction de la géométrie, des conditions limites et des forces appliquées:

- La flexion dominante;
- La membrane dominante;
- Le cas mixte;

Dans les deux premières catégories, c'est la partie correspondante de l'énergie de déformation qui est dominante, tandis que dans les cas mixtes aucune partie n'est négligeable par rapport à l'autre. En considérant la même force, matériau et conditions aux limites, une plaque peut exhiber des comportements asymptotiques complètement différents en fonction

de la nature géométrique de la surface moyenne. [55] [56]

V_0 Est le nom donné à l'espace continu de déplacements in extensionnels «avec énergies membranaires et cisaillement zéro», ce qui est important dans la description décrite ci-dessus : Le problème de frontière est formulé dans cet espace, qui doit être différent de zéro dans le cas dominant, alors que dans le cas de la membrane dominante, cet espace est réduit au champ nul.

II.5. Etat membranaire et état flexionnel

Les efforts internes spécifiés au niveau de la surface moyenne décrivent l'état de contrainte par lequel l'unité structurelle résiste à l'action externe. La ligne moyenne est la trace de cette surface dans une rangée droite. Dans les parties droites, les forces internes sont définies par unité de longueur de ligne moyenne.

L'état membranaire est lié aux forces naturelles et tangentielles agissant sur la surface moyenne en tant que forces de force internes.

L'état flexionnel regroupe les efforts intérieurs de caractère flexionnel, soit les moments de flexion, les moments de torsion et les efforts tranchants.

Quatre types de composants structuraux peuvent être distingués en fonction du style de comportement : La géométrie plane de la surface moyenne (plan moyen) et son épaisseur décrivent l'élément de paroi : Il résiste à l'état de membrane lorsqu'il est sollicité par des charges agissant dans son plan moyen (Figure II.2a); les forces naturelles et tangentielles proviennent de l'état de contrainte du plan.

L'aspect de la tôle est caractérisé par la géométrie plane de sa surface moyenne (feuille plane ou moyenne) ; elle résiste aux charges normales agissant sur son plan moyen par flexion (figure II.2b).

La partie membrane-plaque réunit l'état de la membrane de la paroi et l'état flexionnel de la plaque (figure II.2c); bien qu'elle soit lisse, elle fonctionne spatialement, étant soumise à certaines charges, à la fois parallèles et perpendiculaires à son plan central; c'est la fondation de structures repliées.

En fin l'élément structural de la plaque est, par nature, la courbe spatiale; il utilise les deux états d'effort, membranaire et flexionnel, pour s'opposer aux actions arbitraires pouvant le solliciter (figure. II.2d); exceptionnellement grâce à sa courbure, une plaque peut ne résister aux charges que par l'état membranaire (structure gonflable, textile, peau, etc....) [57].

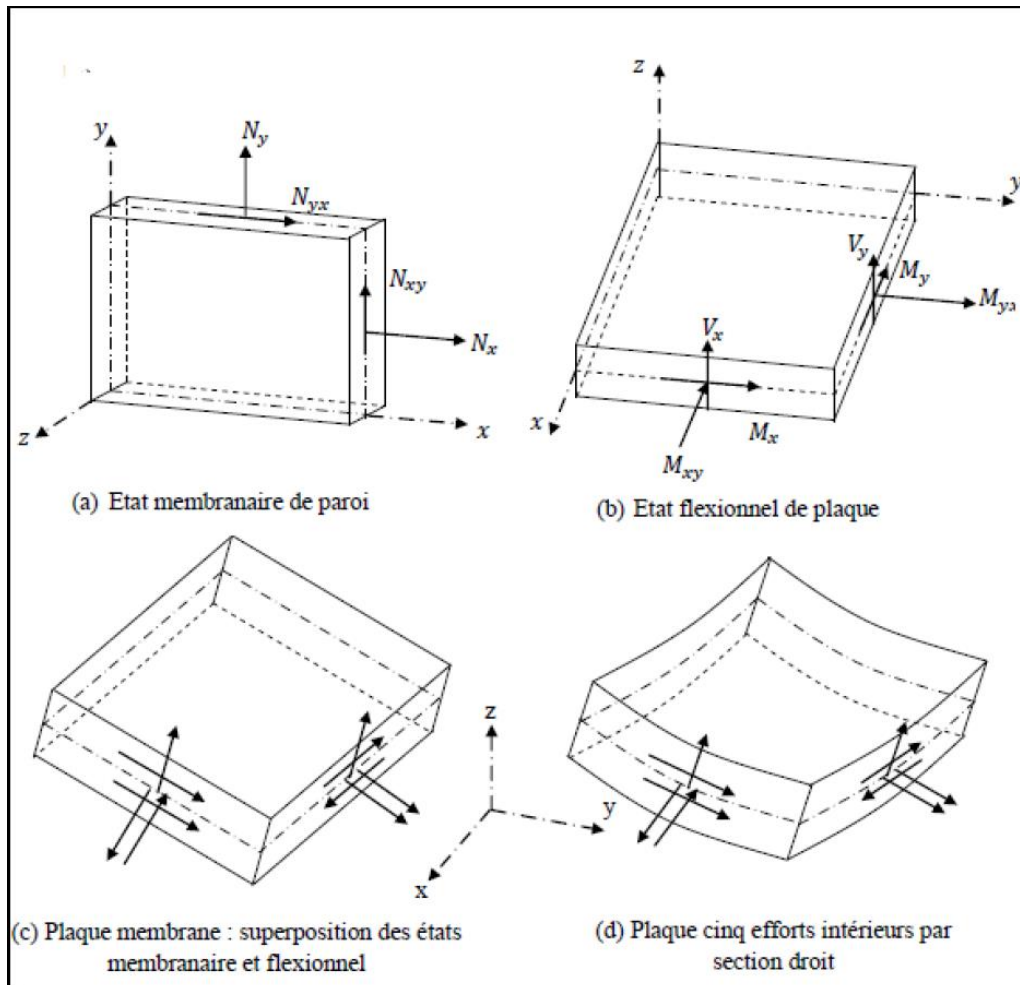


Figure. II.2 : Efforts intérieurs dans une plaque

II.6. Classement des théories de déformation en cisaillement

Afin de résoudre les problèmes dans le domaine élastique impliquant des structures avec des poutres et des plaques FGM comme composants structurels, la bonne théorie expliquant le comportement statique et dynamique du système, ainsi que l'approche de résolution à utiliser, doit être choisie. En 1888, Love a développé une théorie des plaques minces basée sur les hypothèses de Gustav Kirchhoff, qui ont été influencés par Euler-hypothèses. Bernoulli (aussi appelé théorie classique ou théorie de Kirchhoff-Love). La théorie des plaques semi-épaisses (théorie des déformations du premier ordre) a été consolidée par Mindlin à partir des travaux de [58], [59], [60]. Ensuite, des théories d'ordre supérieur sont venues améliorer les hypothèses des théories classiques et du premier ordre lorsque l'épaisseur de la plaque devient importante. Il existe aussi la théorie basée sur l'élasticité tridimensionnelle (théorie 3D) qui ne fait aucune hypothèse restrictive sur les déplacements de la plaque.

Les différentes théories existantes peuvent donc être classées en quatre principales

catégories: théorie classique des plaques minces (appelée aussi théorie de Kirchhoff-Love), théorie des plaques semi-épaisses du premier ordre (appelée aussi théorie de Mindlin-Reissner), théorie d'ordre supérieur applicables aux plaque épaisses (comme celle de Reddy) et la théorie basée sur l'élasticité tridimensionnelle (3D).

II.7. Modèles des plaques pour les matériaux à gradient de propriétés

II.7.1. Modèle classique de la plaque de Kirchhoff-Love (CPT)

Avec une distribution linéaire des déplacements d'épaisseur, le modèle de plaque basé sur la théorie classique des plaques (CPT) répond à l'hypothèse de Love-Kirchhoff.

Comme conséquence de l'absence d'un effet de cisaillement transversal dans ce principe, la déformation est due à la flexion et à la déformation de la membrane. Ce modèle est référencé dans [61]; [62] [63].

II.7.1.1. Hypothèses de la théorie classique des plaques

Kirchhoff cinématique sa théorie pour les plaques minces, qu'il a généralisé à deux dimensions de celles pour les poutres sans déformation par cisaillement, tels que Euler-Bernoulli dans le cas des poutres. Voici quelques-unes des théories de Kirchhoff que Love a repris

- ☑ La plaque est d'épaisseur petite devant les autres dimensions (rapport d'élancement ou $\frac{h}{a}$ ou $\frac{h}{b} \leq 0.05$). Elle possède un plan moyen
- ☑ Hypothèse dite de section droite (section plane) figure (II.3): Les sections droites, initialement normale au plan neutre, restent planes et normales à celui-ci après déformations. La déformation en cisaillement transverse est donc négligée.
- ☑ Les termes non linéaires du déplacement U et V sont négligés, et l'inertie de rotation est négligée. Seul le déplacement transversal W est considéré.

La déformée de la normale au plan moyen (oxy), est alors un segment de droite normale à la déformée du plan moyen, l'ensemble des notations est schématisé sur la figure (II.3)

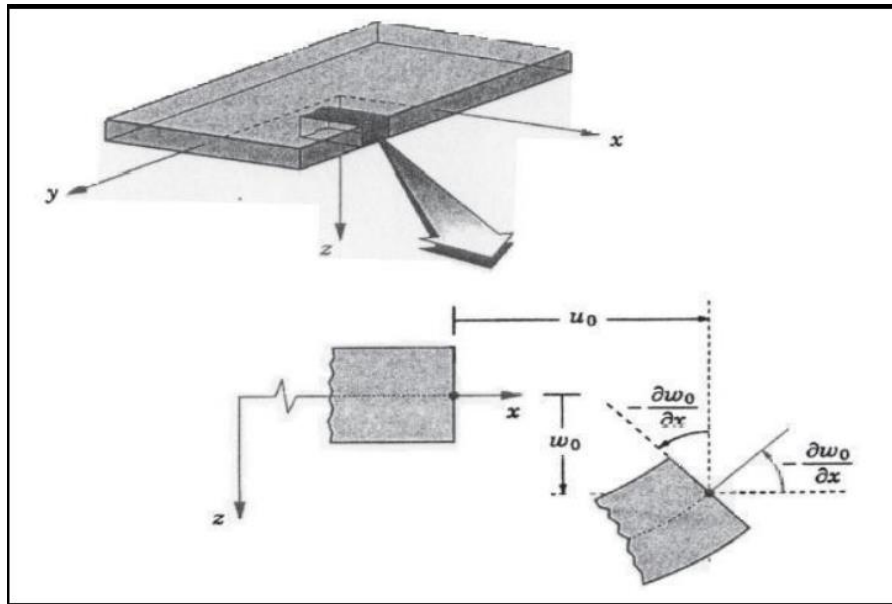


Figure II.3 : Illustration du modèle de la plaque de Love-Kirchhoff [62].

Lorsque le rapport h/a ou h/b est supérieur ou égal à 0,05, l'influence de la déformation par cisaillement transversal augmente considérablement. Comme ce principe ne tient pas compte de la déformation due au cisaillement transversal, la rigidité en flexion est surestimée, ce qui entraîne une surestimation des taux de vibration et une sous-estimation du déplacement.

II.7.1.2. Champ de déplacement de la théorie classique des plaques (CPT)

Kirchhoff a établi la théorie la plus connue des plaques, connue sous le nom de «théorie classique des plaques», en 1850. Au moment, le champ de déplacement d'un point de coordonnées (x, y, z) s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned}
 U(x, y, z) &= u(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial x} \\
 V(x, y, z) &= v(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial y} \\
 W(x, y, z) &= w(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{II.1}$$

Où u, v, w sont les déplacements le long des axes de coordonnées x, y et z d'un point du plan moyen (plan $z=0$).

Comme les théories de Kirchhoff ignorent le cisaillement transversal et l'influence de la déformation axiale dans la direction transversale, la déformation de la plaque est principalement causée par la flexion et les déformations planes (figure II.3), limitant l'applicabilité de la théorie aux plaques épaisses.

II.7.1.3. Limitation de la théorie classique

L'hypothèse de Kirchhoff permet à la théorie classique des plaques d'expliquer avec une grande précision les champs de contraintes et de déformation des plaques minces. Dans le cas des plaques épaisses, par contre, le principe classique est mal adapté à l'explication du comportement mécanique. Le cisaillement transversal est considéré comme un premier développement. Une deuxième modification consiste à modifier ce principe en ajoutant des facteurs correctifs aux modules de cisaillement transversaux.

II.7.2. Théorie de déformation et de cisaillement du premier ordre (FSDT)

Là où l'épaisseur de la plaque ne permet plus de vérifier les théories de flexion de Kirchhoff (c'est-à-dire qu'elle n'est plus très petite par rapport aux dimensions de la plaque), une théorie plus complète centrée sur les hypothèses de Timoshenko est nécessaire (théorie des plaques d'épaisseur moyenne).

Rayleigh a affirmé en 1877 que l'inertie de rotation doit être incluse dans chaque étude de vibration des structures. La thèse de Timoshenko, quarante ans plus tard, montre comment les effets de l'inertie de rotation et du cisaillement transversal influencent les fréquences de flexion appropriées des faisceaux.

En raison de l'inertie et de la stabilité accrue du dispositif, ces deux résultats semblent réduire les fréquences de résonance mesurées. Dans le cas statique, Reissner a suggéré une extension à la théorie des plaques sur le cisaillement en 1945. Uflyand a proposé une première explication du cas dynamique en 1948, qui comprenait les effets de l'inertie de cisaillement et de rotation.

Contrairement à la théorie des plaques minces, la théorie de Mindlin suggère que les sections droites qui sont à l'origine normales au plan neutre restent dans le plan et ne lui sont pas intrinsèquement normales après la figure des déformations (II.4), alors que d'autres versions de la théorie suggèrent que ces sections ne sont pas droites ou normales après déformation. Un facteur de correction de cisaillement à travers l'épaisseur est nécessaire car la théorie de la plaque de premier ordre (FSDT) ne remplit pas les conditions limites aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque (contraintes de traction non nulles). La valeur du facteur de correction est déterminée par la géométrie de la plaque, la variance du coefficient de poisson par épaisseur, la charge appliquée et les conditions aux limites imposées.

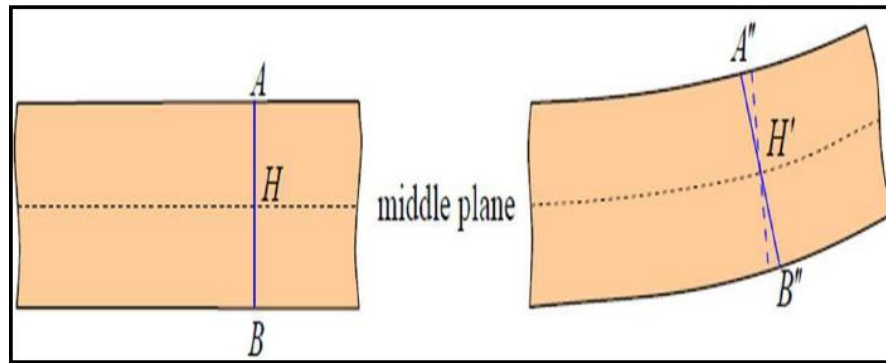


Figure II.4 : Déformation avec cisaillement transverse (schéma du premier ordre FSDT).

II.7.2.1. Champ de déplacement

Cette hypothèse (également connu sous le nom de théorie de Mindlin) est un développement de travail de Timoshenko et est pensé pour être une meilleure version de la théorie de Kirchhoff des plaques minces. Les déformations transversales de cisaillement sont maintenant incluses dans les théories cinématiques, ce qui est un développement significatif. On considère que la distribution de cette déformation suivant l'épaisseur est constante. Le champ de déplacement est donc le suivant (voir figure (II.5)) :

$$\begin{aligned}
 U(x, y, z) &= u(x, y) + z\varphi_x(x, y) \\
 V(x, y, z) &= v(x, y) + z\varphi_y(x, y) \\
 W(x, y, z) &= w(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{II.2}$$

Où u, v, w sont les déplacements suivant les coordonnées (x, y, z) d'un point du plan moyen (plan $z=0$) (déplacement en membrane); φ_x et φ_y sont les rotations de la normale à la section transversale par rapport aux axes x et y respectivement.

En raison de sa dépendance à la géométrie, au coefficient des poissons par épaisseur, aux charges appliquées et aux conditions limites, le principe de déformation de premier ordre nécessite un facteur de correction de cisaillement difficile à calculer.

Timoshenko a été le premier à avoir étudié les effets des déformations de cisaillement et de l'inertie de rotation dans l'analyse des poutres, c'est pourquoi le modèle de la poutre avec une théorie du premier ordre est aussi appelé modèle ou poutre de Timoshenko.

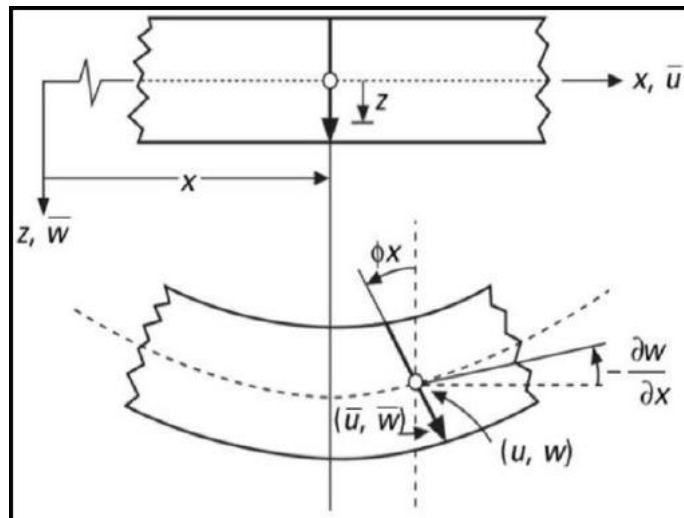


Figure II.5: Schématisation des déformations de la théorie des plaques du premier ordre.

II.7.3. Théorie de déformation et de cisaillement d'ordre élevé (HSDT)

La théorie de l'ordre supérieur est fondée sur une distribution non linéaire des champs de déplacement à travers l'épaisseur, contrairement à la théorie traditionnelle des plaques (CPT) et à la théorie du premier ordre (FSDT), qui sont axées sur la distribution linéaire du déplacement à travers l'épaisseur. Par conséquent, les effets du cisaillement transversal et/ou de la déformation transversale sont pris en compte.

Ces modèles n'ont pas besoin de coefficients de correction de cisaillement, et ils font des prédictions plus rationnelles que celles de Kirchhoff. Plusieurs chercheurs ont suggéré un certain nombre d'hypothèses d'ordre supérieur. Ils dépendent de la progression des changements de puissance en série sur toute l'épaisseur. Voici les conclusions qui ont motivé la croissance de cette théorie :

- ☑ Les déplacements sont petits comparés à l'épaisseur de la plaque
- ☑ Les sections transversales, initialement planes et normales au plan moyen, ne restent pas nécessairement planes et normales à celui-ci après déformations.
- ☑ La déformation axiale dans la direction transversale n'est pas négligeable.
- ☑ Les contraintes normales dans la direction transversale ne sont pas négligeables.

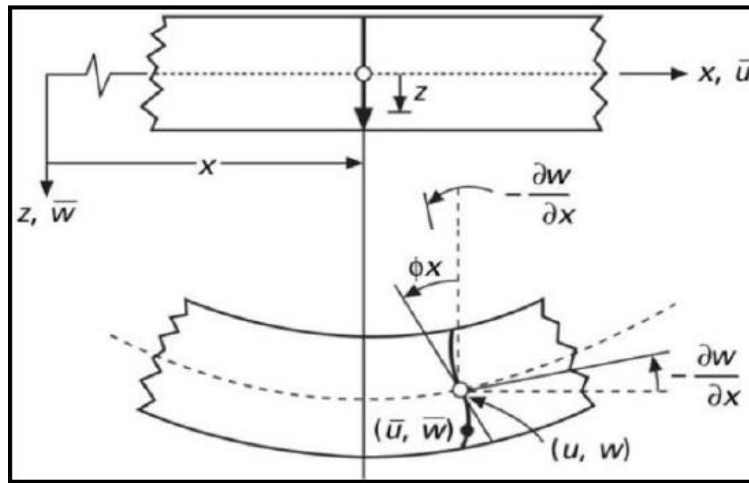


Figure II.6 : Schématisation des déformations dans le cas de la théorie des plaques d'ordre élevé.

II.7.3.1. Champs de déplacement des HSDT

Théories des plaques du second ordre:

Le champ des déplacements de la théorie du second ordre s'exprime par :

$$\begin{aligned}
 U(x, y, z) &= u(x, y) + z\varphi_x(x, y) + z^2\psi_x(x, y) \\
 V(x, y, z) &= v(x, y) + z\varphi_y(x, y) + z^2\psi_y(x, y) \\
 W(x, y, z) &= w(x, y) + z\varphi_z(x, y) + z^2\psi_z(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{II.3}$$

Où $u, v, w, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z, \psi_x, \psi_y, \psi_z$ sont des fonctions inconnues dépendant des coordonnées x et y .

Bien que nécessitant un facteur de correction comme le FSDT, ce principe est une amélioration significative par rapport à la théorie du premier ordre.

Théories des plaques du troisième ordre:

De nouvelles théories d'un ordre supérieur sont apparues dans la recherche des théories plus raffinées et dans une tentative de surmonter les lacunes des théories précédentes. Le champ des déplacements de la théorie du troisième ordre est donné par :

$$\begin{aligned}
 U(x, y, z) &= u(x, y) + z\varphi_x(x, y) + z^2\psi_x(x, y) + z^3\chi_x(x, y) \\
 V(x, y, z) &= v(x, y) + z\varphi_y(x, y) + z^2\psi_y(x, y) + z^3\chi_y(x, y) \\
 W(x, y, z) &= w(x, y) + z\varphi_z(x, y) + z^2\psi_z(x, y) + z^3\chi_z(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{II.4}$$

Ou $u, v, w, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z, \psi_x, \psi_y, \psi_z, \chi_x, \chi_y, \chi_z$ sont des fonctions inconnues dépendant des coordonnées x et y .

II.7.3.2. La fonction de forme de la théorie d'ordre élevé

Le champ de déplacement d'un point matériel centré aux coordonnées (x, y, z) dans la plaque est écrit comme suit pour les théories d'ordre élevé basées sur la théorie classique des plaques (CPT) et satisfaisant les conditions de contrainte zéro sur les faces inférieure et supérieure de la plaque :

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= u(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial x} + f(z) \Phi_x(x, y) \\ V(x, y, z) &= v(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial y} + f(z) \Phi_y(x, y) \\ W(x, y, z) &= w(x, y) \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

$U(x, y, z), V(x, y, z), W(x, y, z)$ Sont les déplacements dans les directions x, y, z .

u, v, w Sont les déplacements du plan médian (plan $z = 0$).

$$\Phi_x = \phi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (\text{II.6a})$$

$$\Phi_y = \phi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (\text{II.6b})$$

φ_x , et φ_y Sont les rotations des plans yz et xz .

$f(z)$ Représente la fonction de forme déterminant la distribution des contraintes et des déformations transversales suivant l'épaisseur.

Le champ de déplacement de la théorie classique des plaques (CPT) est obtenu en posant $f(z) = 0$. La théorie du premier ordre (first-order shear deformation theory ou FSDT) est obtenue en posant $f(z) = z$. En plus, Le champs de déplacement de la théorie de déformation de cisaillement du troisième ordre de Reddy est obtenu par la prise de la fonction suivante:

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.7})$$

Le champ de déplacement de la membrane dans le modèle Reddy est cubique, et le déplacement normal w est constant. Par rapport à la solution d'élasticité tridimensionnelle, ce modèle donne une bonne approximation des contraintes transversales de cisaillement. La répartition des contraintes transversales de cisaillement suivant l'épaisseur est parabolique. Les conditions limites de surface libre sont satisfaites.

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{z\pi}{h}\right) \quad (\text{II.8})$$

Comme il n'utilise pas d'équation polynomiale, Touratier a suggéré le modèle sinusoïdal (The sinusoidal shear deformation theory SSDT), qui diffère des autres modèles d'ordre supérieur. Pour modéliser la propagation des contraintes de cisaillement sur l'épaisseur, une fonction trigonométrique sinusoïdale est utilisée.

Par l'épaisseur de la couche, les contraintes transversales de cisaillement définies par le modèle (sinus) prennent une forme cosinus. Ce modèle est plus précis que l'hypothèse de Reddy en termes de solution précise.

La version exponentielle de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The exponential shear deformation plate theory ESDT) développée par Karma en 2003 [64] est obtenue en prenant:

$$f(z) = z e^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad (\text{II.9})$$

La version hyperbolique de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The Hyperbolic shear deformation plate theory HSDT) développée par Ait Atmane en 2010 [65] est obtenue en prenant:

$$f(z) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-1} z - \frac{\frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{z\pi}{h}\right) - z}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-1} \quad (\text{II.10})$$

La théorie dominante, utilisée dans les études de flexion, de flambage et de vibrations des

plaques FGM est la théorie du troisième ordre de Reddy.

Une variation parabolique des déformations transversales de cisaillement et des contraintes connexes est incluse dans le champ de déplacement. Sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque, les contraintes de cisaillement sont nulles. Étant donné que cette théorie donne une distribution plus pratique des déformations et des contraintes à travers l'épaisseur, elle ne nécessite pas de facteur de correction des contraintes. Elle fournit également une meilleure estimation des déformations moyennes, des charges critiques de flambement et des fréquences de vibration des plaques minces et épaisses.

II.7.4. Théorie raffinée de déformation des plaques

En 2002, Un modèle raffiné de déformation des plaques RPT a été développé par le chercheur Shimpi pour les plaques isotropes dans un but de réduire le nombre de variables par rapport aux théories d'ordre élevé existantes. [66]

Cette théorie raffinée de déformation présente une similitude par rapport à la théorie classique des plaques (CPT) et ne nécessite pas de coefficient de correction de cisaillement. Plusieurs chercheurs ont démontré la fiabilité de cette théorie tels que Kim et Thai [67] et [65] ou ils ont appliqué cette théorie dans le cas de la flexion des plaques FGM dans le cas statique ainsi que d'autre travaux de Thai et Kim [68] dans le cas du flambement des plaques orthotropes

De ce fait, le champ de déplacement de cette théorie est présenté comme suit :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial x} + f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial y} + f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial y} \\ w(x, y, z) &= w_b(x, y) + w_s(x, y) \end{aligned} \quad (\text{II.11})$$

Ou (u_0, v_0) sont les composantes du champ de déplacement dans les directions x et y

(w_b, w_s) sont les composantes du déplacement de flexion et de cisaillement transversal

$f(z)$ est la fonction de cisaillement transverse

II.7.5. Théorie quasi-3D de déformation des plaques

Le déplacement transversal est divisé en trois composantes dans la théorie quasi-3D : la flexion, le cisaillement et l'effet d'étirement de l'épaisseur de la plaque (aussi connu sous le

nom de «stretching effect»). Plusieurs chercheurs ont travaillé sur ce type de théorie, comme Kim et Thai [67], qui ont proposé une théorie à cinq variables pour la déformation de cisaillement de premier ordre au lieu des théories à six variables de haut ordre. D'autres chercheurs, comme, [69], [70] [71], [72], ont proposé la quasi-3D. À la lumière du jour, des théories quasi-3D avec quatre variables ont été introduites, en raison de l'introduction de nouvelles idées pour les théories quasi-3D de six inconnues, à la suite du travail de Zenkour pour établir une nouvelle hypothèse. Pour divers types de plaques, la quasi-3D comporte quatre inconnues : En plus des FGM [73], des plaques sandwich [74], et des plaques composites laminées [75], Mantari et Guedes Soares [76] a établi une théorie Quasi-3D à quatre inconnues en introduisant l'effet de cisaillement transversal et l'effet d'étirement avec une fonction hyperbolique.

En conséquence, le champ de déplacement dans cette théorie ressemble à ceci :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial x} + f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial y} + f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial y} \\ w(x, y, z) &= w_b(x, y) + w_s(x, y) + g(z)\phi(x, y) \end{aligned} \quad (\text{II.12})$$

(u_0, v_0) sont les composantes du champ de déplacement dans les directions x et y

(w_b, w_s) sont les composantes de flexion et de cisaillement du déplacement transversal

ϕ est un déplacement supplémentaire qui prend en considération l'effet d'étirement

$g(z)$ Et $f(z)$ sont des fonctions de cisaillement transverse avec :

$$g(z) = 1 - f'(z) \quad (\text{II.13})$$

II.8. Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre, un aperçu général sur les différentes théories des Plaques (la théorie classique CPT de Love-Kirchhoff, la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre FSDT et la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé HSDT ainsi que la théorie de déformation de cisaillement quasi-3D).

Nous concluons que l'approche monocouche équivalente (CPT, FSDT et HSDT) est mieux adaptée pour les matériaux FGM et les plaques peu épaisses ; mais contrairement dans le cas des

plaques épaisses ces théories deviennent assez mal adaptées à décrire le comportement mécanique.

Dans le chapitre suivant nous attacherons à présenter la théorie raffinée d'ordre élevé à quatre variables pour l'étude de comportement mécanique des plaques FGM.

Chapitre III :
Etude de l'influence des
propriétés Mécaniques
sur le comportement des
plaques FGM

III.1. Introduction

Cette étude vise à établir une nouvelle théorie de déformation de cisaillement sinusoïdal pour l'analyse du comportement mécanique des plaques FGM. Cette théorie tenait en compte de la distribution parabolique des contraintes de cisaillement et satisfaisait les conditions de nullité de ces contraintes dans les faces supérieure et inférieure de la plaque. Le principe des travaux virtuels est appliqué pour construire les équations d'équilibre et la solution de Navier est employée pour résoudre ces équations. La précision et l'efficacité de la théorie proposée sont prouvées grâce à plusieurs études de validation. Ensuite, la théorie proposée est utilisée pour étudier l'influence des propriétés mécaniques sur le comportement des plaques FGM.

III.2. Champ de déplacement

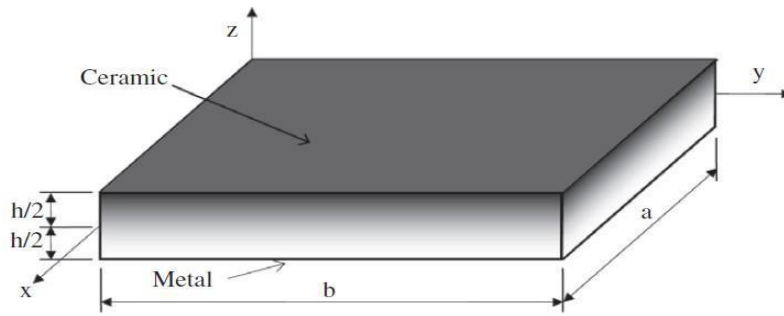


Figure.III.1: Géométrie de la plaque rectangulaire en FGM

Considérons une plaque d'épaisseur totale h et composée d'un matériau à gradient de propriétés (Figure.III.1). On suppose que le matériau est transversalement isotrope et que la gradation des propriétés ne se fait que par l'épaisseur. Le plan xy est considéré comme étant le plan moyen de la plaque avec l'axe z positif vers le haut à partir du plan moyen.

Le champ de déplacement est supposé comme suit :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - \left(z - \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{z\pi}{h}\right) \right) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - \left(z - \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{z\pi}{h}\right) \right) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\
 w(x, y, z) &= w_b(x, y) + w_s(x, y)
 \end{aligned} \tag{III.1a}$$

Où u_0 et v_0 sont les déplacements à mi-plan de la plaque dans la direction x et y ,

respectivement, w_b et w_s sont les composants de flexion et de cisaillement du déplacement transversal, respectivement, tandis que $f(z)$ représente les fonctions de forme déterminant la distribution des déformations et des contraintes transversales de cisaillement le long de l'épaisseur est donnée comme suit :

$$f(z) = z - \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{z\pi}{h}\right) \quad (\text{III.1b})$$

Il convient de noter que contrairement à la théorie de la déformation de cisaillement de premier ordre, cette théorie ne nécessite pas de facteurs de correction de cisaillement. Les relations cinématiques peuvent être obtenues comme suit:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_x^0 + z k_x^b + f(z) k_x^s \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_y^0 + z k_y^b + f(z) k_y^s \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}^0 + z k_{xy}^b + f(z) k_{xy}^s \\ \gamma_{yz} &= g(z) \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz} &= g(z) \gamma_{xz}^s \\ \varepsilon_z &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III.2})$$

Où

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x}, k_x^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}, k_x^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}, \varepsilon_y^0 = \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ k_y^b &= -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2}, k_y^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}, \gamma_{xy}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}, k_{xy}^b = -2 \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \\ k_{xy}^s &= -2 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y}, \gamma_{yz}^s = \frac{\partial w_s}{\partial y}, \gamma_{xz}^s = \frac{\partial w_s}{\partial x}, g(z) = 1 - f'(z) \\ \text{et } f'(z) &= \frac{df(z)}{dz} \end{aligned} \quad (\text{III.3})$$

III.3. Équations constitutives

La plaque FGM est graduée du métal à la céramique est soumise à une charge sinusoïdale répartie $q(x, y)$. Les propriétés du matériau $V(z)$ de la plaque FGM, telles que le module de Young E , le coefficient de Poisson ν , sont donnés selon la loi de mélange comme :

$$V(z) = V_m + (V_c - V_m) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^P \quad (\text{III.4})$$

Où V_m et V_c sont les propriétés correspondantes de la céramique et du métal, respectivement, et P est l'exposant de fraction de volume qui prend des valeurs supérieures ou égales à zéro. Les relations constitutives linéaires sont :

$$\begin{cases} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{cases} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{cases} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{cases} \quad (\text{III.5})$$

$$\begin{cases} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{cases} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{cases} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{cases}$$

Où $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy})$ et $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy})$ sont les composantes des contraintes et des déformations, respectivement. En utilisant les propriétés du matériau définies dans l'équation. (III.4), les coefficients de rigidité, Q_{ij} , peuvent être exprimés en :

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z)}{1 - \nu^2}$$

$$Q_{12} = \frac{\nu E(z)}{1 - \nu^2}$$

$$Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z)}{2(1 + \nu)} \quad (\text{III.6})$$

III.4. Équations gouvernantes

Les équations gouvernantes peuvent être dérivées en utilisant le principe des travaux virtuels qui est donné par:

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{\Omega} [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}] d\Omega dz - \int_{\Omega} q \delta w dz = 0 \quad (\text{III.7})$$

Où Ω est la surface supérieure.

En remplaçant les équations. (III.2) et (III.5) dans l'équation. (III.7) et en intégrant suivant l'épaisseur de la plaque, l'équation. (III.7) peut être réécrit comme suit :

$$\int_{\Omega} \left[N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_y^b \delta k_y^b + M_{xy}^b \delta k_{xy}^b \right. \\ \left. + M_x^s \delta k_x^s + M_y^s \delta k_y^s + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + S_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^s + S_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^s \right] d\Omega - \int_{\Omega} (q)(\delta w_b + \delta w_s) = 0 \quad (III.8)$$

Les moments et efforts normaux résultants N, M et S sont définis par :

$$\begin{Bmatrix} N_x & N_y & N_{xy} \\ M_x^b & M_y^b & M_{xy}^b \\ M_x^s & M_y^s & M_{xy}^s \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \end{Bmatrix} dz \quad (III.9a)$$

$$\begin{pmatrix} S_{xz}^s & S_{yz}^s \end{pmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) g(z) dz \quad (III.9b)$$

En substituant l'équation. (III.5) dans l'équation. (III.9) et en intégrant suivant l'épaisseur de la plaque, les contraintes résultantes sont données comme suit :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ B & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix} \quad (III.10a)$$

$$\begin{Bmatrix} S_{yz}^s \\ S_{xz}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} \quad (III.10b)$$

Où

$$N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^t, M^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}^t, M^s = \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\}^t \quad (III.11a)$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0\}^t, k^b = \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\}^t, k^s = \{k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s\}^t \quad (III.11b)$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \quad (III.11c)$$

$$\mathbf{B}^S = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11}^S & \mathbf{B}_{12}^S & 0 \\ \mathbf{B}_{12}^S & \mathbf{B}_{22}^S & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{B}_{66}^S \end{bmatrix}, \mathbf{D}^S = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11}^S & \mathbf{D}_{12}^S & 0 \\ \mathbf{D}_{12}^S & \mathbf{D}_{22}^S & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{D}_{66}^S \end{bmatrix}, \mathbf{H}^S = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11}^S & \mathbf{H}_{12}^S & 0 \\ \mathbf{H}_{12}^S & \mathbf{H}_{22}^S & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{H}_{66}^S \end{bmatrix} \quad (\text{III.11d})$$

Où $\mathbf{A}_{ij}, \mathbf{B}_{ij},$ et \mathbf{D}_{ij} etc., sont la rigidité de la plaque, définie par :

$$\left\{ \begin{matrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{B}_{11} & \mathbf{D}_{11} & \mathbf{B}_{11}^s & \mathbf{D}_{11}^s & \mathbf{H}_{11}^s \\ \mathbf{A}_{12} & \mathbf{B}_{12} & \mathbf{D}_{12} & \mathbf{B}_{12}^s & \mathbf{D}_{12}^s & \mathbf{H}_{12}^s \\ \mathbf{A}_{66} & \mathbf{B}_{66} & \mathbf{D}_{66} & \mathbf{B}_{66}^s & \mathbf{D}_{66}^s & \mathbf{H}_{66}^s \end{matrix} \right\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mathbf{Q}_{11} (1, z, z^2, f(z), zf(z), f^2(z)) \left\{ \begin{matrix} 1 \\ \nu \\ \frac{1-\nu}{2} \end{matrix} \right\} \quad (\text{III.12a})$$

$$(\mathbf{A}_{22}, \mathbf{B}_{22}, \mathbf{D}_{22}, \mathbf{B}_{22}^s, \mathbf{D}_{22}^s, \mathbf{H}_{22}^s) = (\mathbf{A}_{11}, \mathbf{B}_{11}, \mathbf{D}_{11}, \mathbf{B}_{11}^s, \mathbf{D}_{11}^s, \mathbf{H}_{11}^s) \quad (\text{III.12b})$$

$$\mathbf{A}_{44}^s = \mathbf{A}_{55}^s = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\mathbf{E}(z)}{2(1+\nu)} [\mathbf{g}(z)]^2 dz \quad (\text{III.12c})$$

Les équations gouvernantes peuvent être dérivées d'équation (III.8) en intégrant les déplacements par parties et en mettant les coefficients $\delta u_0, \delta v_0, \delta w_b$ et δw_s zéro séparément. On peut ainsi obtenir les équations d'équilibre associées à la présente théorie de déformation et de cisaillement:

$$\begin{aligned} \delta u_0 : \frac{\partial \mathbf{N}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{N}_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \delta v_0 : \frac{\partial \mathbf{N}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{N}_y}{\partial y} &= 0 \\ \delta w_b : \frac{\partial^2 \mathbf{M}_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \mathbf{M}_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \mathbf{M}_y^b}{\partial y^2} + \mathbf{q} &= 0 \\ \delta w_s : \frac{\partial^2 \mathbf{M}_x^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \mathbf{M}_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \mathbf{M}_y^s}{\partial y^2} + \frac{\partial \mathbf{S}_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{S}_{yz}^s}{\partial y} + \mathbf{q} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III.13})$$

En remplaçant l'équation. (III.10) par l'équation. (III.13), nous obtenons l'équation suivante :

$$\begin{aligned} A_{11}d_{11}u_0 + A_{66}d_{66}u_0 + (A_{12} + A_{66})d_{12}v_0 - B_{11}d_{111}w_b - (B_{12} + 2B_{66})d_{122}w_b \\ - (B_{12}^s + 2B_{66}^s)d_{122}w_s - B_{22}^s d_{111}w_s = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.14a})$$

$$\begin{aligned} A_{22}d_{22}v_0 + A_{66}d_{11}v_0 + (A_{12} + A_{66})d_{12}u_0 - B_{22}d_{222}w_b - (B_{12} + 2B_{66})d_{122}w_b \\ - (B_{12}^s + 2B_{66}^s)d_{112}w_s - B_{22}^s d_{222}w_s = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.14b})$$

$$\begin{aligned} B_{11}d_{111}u_0 + (B_{12} + 2B_{66})d_{122}u_0 + (B_{12} + 2B_{66})d_{122}v_0 + B_{22}d_{222}v_0 - D_{11}d_{1111}w_b \\ - 2(D_{12} + 2D_{66})d_{1122}w_b - D_{22}d_{2222}w_b - D_{11}^s d_{1111}w_s - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)d_{1122}w_s \\ - D_{22}^s d_{2222}w_s = q \end{aligned} \quad (\text{III.14c})$$

$$\begin{aligned} B_{11}^s d_{111}u_0 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s)d_{122}u_0 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s)d_{122}v_0 + B_{22}^s d_{222}u_0 - D_{11}^s d_{1111}w_b \\ - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)d_{1122}w_b - D_{22}^s d_{2222}w_b - H_{11}^s d_{1111}w_s - 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s)d_{1122}w_s \\ - H_{22}^s d_{2222}w_s + A_{55}^s d_{11}w_s + A_{44}^s d_{22}w_s = q \end{aligned} \quad (\text{III.14d})$$

Où q est une charge sinusoïdale, d_{ij} , d_{ijl} , et d_{ijlm} , sont les opérateurs différentiels suivants :

$$d_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, d_{ijl} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}, d_{ijlm} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m}, d_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (i, j, l, m = 1, 2) \quad (\text{III.15})$$

III.5. Solutions exactes

Conformément à la procédure de Navier, la force externe répartie sinusoïdale est présentée sous la forme d'une série double trigonométrique. Nous sommes ici préoccupés par la solution exacte des équations (III.14) pour une plaque en FGM simplement supportée. Pour résoudre ce problème, Navier a supposé que la charge sinusoïdale répartie $q(x, y)$ sous la forme d'un dans la double série Fourier comme :

$$q = q_0 \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \quad (\text{III.16})$$

Où $\lambda = \frac{\pi}{a}$, $\mu = \frac{\pi}{b}$ et q_0 , sont des constantes. Suivant la procédure Navier, nous supposons

la solution suivante pour u_0 , v_0 , w_b et w_s satisfait les conditions aux limites :

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_b \\ w_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_{mn} \cos(\lambda x) \sin(\mu y) \\ V_{mn} \sin(\lambda x) \cos(\mu y) \\ W_{bmn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \\ W_{smn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \end{Bmatrix} \quad (\text{III.17})$$

Avec U_{mn} , V_{mn} , W_{bmn} et W_{smn} sont des paramètres arbitraires à déterminer pour que la solution dans l'équation (III.17) satisfait les conditions citées dans l'équation (III.14). D'où, on obtient le système d'équations suivant à résoudre :

$$[\mathbf{K}]\{\Delta\} = \{\mathbf{Q}\} \quad (\text{III.18})$$

Où $\{\Delta\} = \{U_{mn}, V_{mn}, W_{bmn}, W_{smn}\}^t$ et $[\mathbf{K}]$ est la matrice symétrique donnée par :

$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} & k_{34} \\ k_{14} & k_{24} & k_{34} & k_{44} \end{bmatrix} \quad (\text{III.19})$$

Dans lequel:

$$\begin{aligned} k_{11} &= -(A_{11} \lambda^2 + A_{66} \mu^2), \quad k_{22} = -(A_{66} \lambda^2 + A_{22} \mu^2) \\ ,k_{33} &= -(D_{11} \lambda^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \lambda^2 \mu^2 + D_{22} \mu^4), \quad k_{12} = -\lambda \mu (A_{12} + A_{66}) \\ k_{13} &= \lambda [B_{11} \lambda^2 + (B_{12} + 2B_{66}) \mu^2], \quad k_{14} = \lambda [B_{11}^s \lambda^2 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \mu^2] \\ k_{23} &= \mu [(B_{12} + 2B_{66}) \lambda^2 + B_{22} \mu^2], \quad k_{24} = \mu [(B_{12}^s + 2B_{66}^s) \lambda^2 + B_{22}^s \mu^2] \\ k_{34} &= -(D_{11}^s \lambda^4 + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \lambda^2 \mu^2 + D_{22}^s \mu^4) \\ k_{44} &= -(H_{11}^s \lambda^4 + 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s) \lambda^2 \mu^2 + H_{22}^s \mu^4 + A_{55}^s \lambda^2 + A_{44}^s \mu^2) \end{aligned} \quad (\text{III.20})$$

Les composants du vecteur de force généralisé sont donnés par $\{\mathbf{Q}\} = \{0, 0, q, q\}^t$

III.6. Conclusion

En conclusion, la nouvelle théorie de la plaque de déformation et de cisaillement sinusoïdale a été développée avec succès, cette théorie présente nombreux avantages tel que la simplicité, l'efficacité et la grande précision dans la prédiction du comportement mécanique des plaques FGM. La théorie proposée se compose de seulement quatre variables inconnues et tiens en compte l'effet de cisaillement dans le calcul des déplacements et des déformations, en permettant de réduire le temps de calcul. En outre, la théorie proposée n'exige pas des facteurs de correction de cisaillement et donne une description parabolique des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur tout en satisfaisant les conditions de la nullité de ces contraintes de cisaillement sur les bords inférieure et supérieure de la plaque FGM.

Une série des résultats sous forme des tableaux et des graphes explicites sera présenté dans le chapitre suivant pour valider la présente théorie et d'identifier les différents paramètres qui influent sur le comportement mécanique des plaques FGM

Chapitre IV :

Résultats et discussion

IV.1. Introduction

Dans ce chapitre, des résultats numériques de la flèche, du déplacement et des contraintes normales et tangentielles d'une plaque FGM sont présentés sous forme des tableaux et des graphes explicites. D'où une validation est présentée en premier lieu en comparant les résultats obtenus en utilisant la présente théorie avec celles issues des autres théories de déformation et de cisaillement comme : la théorie classique (CPT), du premier ordre (FSDT) et d'ordre élevé (HSDT, TSDT, SSDT) ainsi que des différentes théories Quasi-3D. Ensuite, une étude paramétrique sera présentée pour montrer les différents paramètres qui influent sur le comportement mécanique des plaques FGM.

IV.2. Propriétés matérielles

Les propriétés mécaniques des matériaux (céramique et métal) qui constituent la plaque FGM considérée dans cette étude sont données comme suit :

Tableau IV.1 : Propriétés mécaniques des matériaux constituant la plaque FGM.

Propriétés mécaniques	Métal	Céramique
	<i>Aluminium (Al)</i>	<i>Alumina (Al₂O₃)</i>
E (GPa)	70	380
ν	0.3	0.3

Les solutions de référence sont données sous forme adimensionnelle. Il s'agit respectivement de la flèche, du déplacement longitudinal et des contraintes normales (axiales) et tangentielles (cisaillement) :

$$\begin{aligned}
 \bar{w} &= \frac{10Ec h^3}{a^4 q_0} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z\right), \quad \bar{u}(z) = \frac{100Ec h^3}{a^4 q_0} u\left(0, \frac{b}{2}, z\right) \\
 \bar{\sigma}_x(z) &= \frac{h}{a q_0} \sigma_x\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z\right), \quad \bar{\sigma}_y(z) = \frac{h}{a q_0} \sigma_y\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z\right) \\
 \bar{\sigma}_{xy}(z) &= \frac{h}{a q_0} \sigma_{xy}(0, 0, z), \quad \bar{\sigma}_{xz}(z) = \frac{h}{a q_0} \sigma_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, z\right) \\
 \bar{\sigma}_{yz}(z) &= \frac{h}{a q_0} \sigma_{yz}\left(\frac{a}{2}, 0, z\right)
 \end{aligned} \tag{IV.1}$$

IV.3. Validation de la présente théorie

Tableau IV.2 : Influence des propriétés matériels (degré d'homogénéité **P**) sur les contraintes et le déplacement adimensionnel d'une plaque carrée en FGM soumise à une charge sinusoidale ($a/h = 10$).

P	Théorie	$\bar{u}\left(\frac{-h}{4}\right)$	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x\left(\frac{h}{3}\right)$	$\bar{\tau}_{xy}\left(\frac{-h}{3}\right)$	$\bar{\tau}_{xz}\left(\frac{h}{6}\right)$
1	Quasi-3D [81]	0.6436	0.5875	1.5062	0.6081	0.2510
	Quasi-3D [82]	0.6436	0.5876	1.5061	0.6112	0.2511
	SSDT [83]	0.6626	0.5889	1.4894	0.6110	0.2622
	HSDT [84]	0.6398	0.5880	1.4888	0.6109	0.2566
	TSDT [85]	0.6414	0.5890	1.4898	0.6111	0.2599
	Présente	0.6410	0.5889	1.4894	0.6110	0.2621
2	Quasi-3D [81]	0.9012	0.7570	1.4147	0.5421	0.2496
	Quasi-3D [82]	0.9013	0.7571	1.4133	0.5436	0.2495
	SSDT [83]	0.9281	0.7573	1.3954	0.5441	0.2763
	HSDT [84]	0.8957	0.7564	1.3940	0.5438	0.2741
	TSDT [85]	0.8984	0.7573	1.3960	0.5442	0.2721
	Présente	0.8977	0.7573	1.3954	0.5441	0.2763
4	Quasi-3D [81]	1.0541	0.8823	1.1985	0.5666	0.2362
	Quasi-3D [82]	1.0541	0.8823	1.1841	0.5671	0.2362
	SSDT [83]	1.0941	0.8819	1.1783	0.5667	0.2580
	HSDT [84]	1.0457	0.8814	1.1755	0.5662	0.2623
	TSDT [85]	1.0502	0.8815	1.1794	0.5669	0.2519
	Présente	1.0492	0.8818	1.1783	0.5667	0.2580
8	Quasi-3D [81]	1.0830	0.9739	0.9687	0.5879	0.2262
	Quasi-3D [82]	1.0830	0.9739	0.9622	0.5883	0.2261
	SSDT [83]	1.1340	0.9750	0.9466	0.5865	0.2121
	HSDT [84]	1.0709	0.9737	0.9431	0.5850	0.2140
	TSDT [85]	1.0763	0.9747	0.9477	0.5858	0.2087
	Présente	1.0751	0.9749	0.9465	0.5856	0.2120

Le tableau IV.2 contient les résultats de déplacement et des contraintes non-dimensionnelles d'une plaque carrée en FGM soumise à une charge sinusoidale ($a/h=10$). Les résultats obtenus sont comparés avec la théorie de déformation de cisaillement quasi-3D [81] [82] et les théories de SSDT [83], HSDT [84] et TSDT [85]. A partir de ce tableau, on peut observer que les résultats obtenus par le présent théorique sont en excellent accord avec ceux obtenus par les autres théories d'ordre élevé. Ce tableau montre également que la flèche maximale \bar{w} et le déplacement \bar{u} augmentent avec l'augmentation du degré d'homogénéité **P**, tandis que la contrainte normale $\bar{\sigma}_x$ diminue avec l'augmentation de ce dernier, ce qui est logique puisque par l'augmentation de l'indice de propriété matériel **P** on va du céramique vers le métal c'est-à-dire on va du matériau plus rigide ($E=380\text{GPa}$) au matériau moins rigide

(E=70GPa).

Tableau IV. 3 : Influence des propriétés matérielles (degré d'homogénéité **P**) sur la flèche \bar{w} et la contrainte adimensionnelle $\bar{\sigma}_x$ pour une plaque carrée Al/Al₂O₃ FG soumise à une charge sinusoïdale.

P	Théorie	$\bar{\sigma}_x \left(\frac{h}{3} \right)$			\bar{w}		
		a/h=4	a/h=10	a/h=100	a/h=4	a/h=10	a/h=100
1	Quasi-3D [86]	0.5925	1.4945	14.9690	0.6997	0.5845	0.5624
	Quasi-3D [87]	0.5910	1.4917	14.9440	0.7020	0.5868	0.5648
	Quasi-3D [88]	0.5911	1.4917	14.9450	0.7020	0.5868	0.5647
	Quasi-3D [81]	0.6211	1.5064	14.9690	0.7171	0.5875	0.5625
	Quasi-3D [89]	0.6221	1.5064	14.9690	0.7171	0.5875	0.5625
	FSDT [81]	0.8060	2.0150	20.1500	0.7291	0.5889	0.5625
	CPT [81]	0.8060	2.0150	20.1500	0.5623	0.5623	0.5623
	Présente	0.5803	1.4894	14.9675	0.7280	0.5889	0.5625
4	Quasi-3D [86]	0.4404	1.1783	11.9320	1.1178	0.8750	0.8286
	Quasi-3D [87]	0.4340	1.1593	11.7380	1.1095	0.8698	0.8241
	Quasi-3D [88]	0.4330	1.1588	11.7370	1.1108	0.8700	0.8240
	Quasi-3D [81]	0.4877	1.1971	11.9230	1.1585	0.8821	0.8286
	Quasi-3D [89]	0.4877	1.1971	11.9230	1.1585	0.8821	0.8286
	FSDT [81]	0.6420	1.6049	16.0490	1.1125	0.8736	0.8286
	CPT [81]	0.6420	1.6049	16.0490	0.8281	0.8281	0.8281
	Présente	0.4423	1.1784	11.9208	1.1619	0.8818	0.8286
10	Quasi-3D [86]	0.3227	1.1783	11.9320	1.3490	0.8750	0.8286
	Quasi-3D [87]	0.3108	0.8467	8.6013	1.3327	0.9886	0.9228
	Quasi-3D [88]	0.3097	0.8462	8.6010	1.3334	0.9888	0.9227
	Quasi-3D [81]	0.3695	0.8965	8.6077	1.3745	1.0072	0.9361
	Quasi-3D [89]	0.3695	0.8965	8.6077	1.3745	1.0072	0.9361
	FSDT [81]	0.4796	1.1990	11.9900	1.3178	0.9966	0.9360
	CPT [81]	0.4796	1.1910	11.9900	0.9354	0.9354	0.9354
	Présente	0.3234	0.8776	8.9058	1.3917	1.0089	0.9361

Le tableau IV.3 représente la variation du contrainte normale non-dimensionnelle $\bar{\sigma}_x$ et la flèche Maximale non-dimensionnelle \bar{w} d'une plaque carrée en FGM soumise à une charge sinusoïdale pour différentes valeurs du rapport d'épaisseur a/h. Les résultats obtenus sont comparés avec la théorie classique CPT [81], la théorie de déformation et de cisaillement du premier ordre FSDT [81] ainsi que les théories de déformation de cisaillement quasi-3D [86] [88] [87] [81] [89] qui incluent à la fois le cisaillement transversal et la déformation normale. Les résultats obtenus par la présente théorie s'accordent très bien avec ceux fournis par d'autres modèles d'ordre élevé. Ce tableau montre également que la flèche maximale \bar{w} diminue avec l'augmentation du rapport d'épaisseur **a/h**, où la flèche est maximale pour les

plaques minces et minimale pour les plaques épaisses. On observe aussi que la contrainte normale $\bar{\sigma}_x$ augmente avec l'augmentation du rapport d'épaisseur a/h .

IV.4. Etude paramétrique

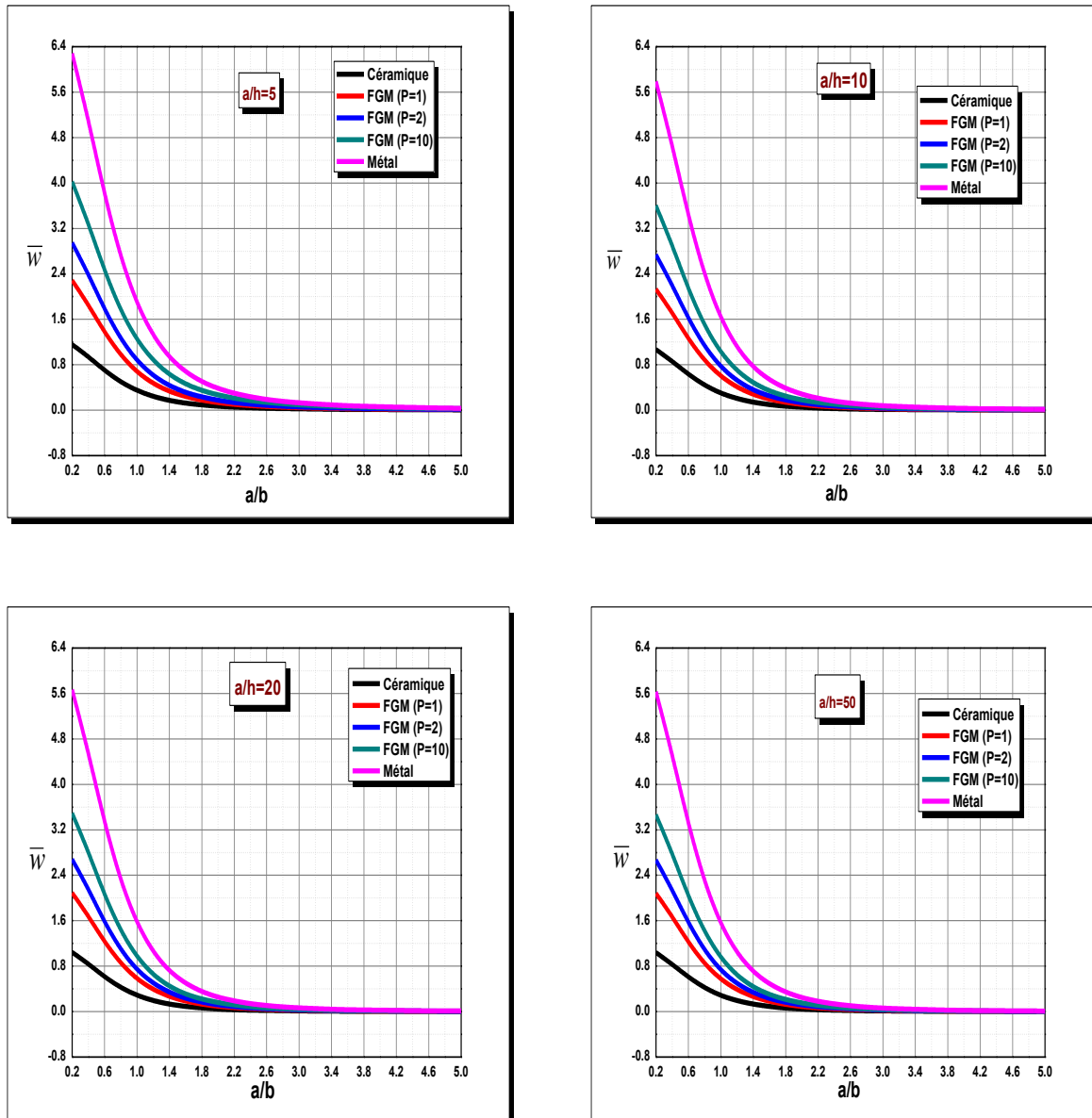


Figure IV.1 : Influence du rapport d'aspect a/b sur la variation de la flèche adimensionnelle \bar{w} d'une plaque en FGM.

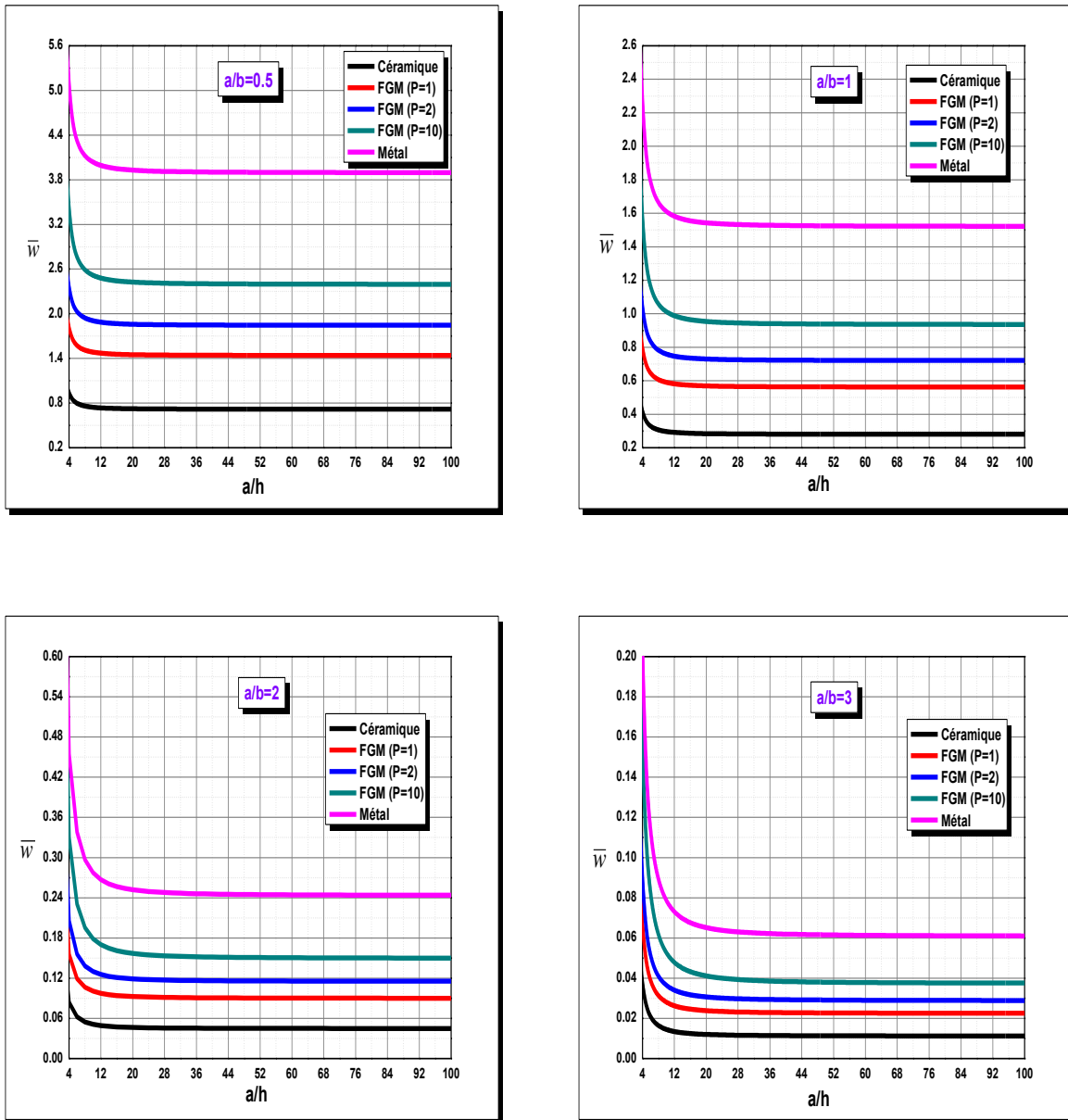


Figure IV.2 : Influence du rapport coté sur épaisseur a/h sur la variation de la flèche adimensionnelle \bar{w} d'une plaque en FGM.

La figure IV.1 représente la variation de la flèche adimensionnelle \bar{w} d'une plaque FGM sous l'influence des propriétés mécanique du matériau et du rapport longueur sur largeur (a/b) soumise à une charge mécanique pour différentes valeurs du rapport coté sur épaisseur ($a/h=5, 10, 20$ et 50).

La figure IV.2 représente la variation de la flèche adimensionnelle \bar{w} d'une plaque FGM sous l'influence des propriétés mécanique du matériau ainsi que le rapport coté sur épaisseur (a/h) soumise à une charge mécanique pour différentes valeurs du rapport d'aspect longueur sur largeur ($a/b=0.5, 1, 2$ et 3).

A partir de ces figures (IV.1 et IV.2), on observe clairement que la flèche adimensionnelle diminue avec l'augmentation des rapports a/b et a/h ce signifie que la géométrie de la plaque (longueur, largeur et épaisseur) influe d'une façon significative sur le comportement mécanique de plaque FGM.

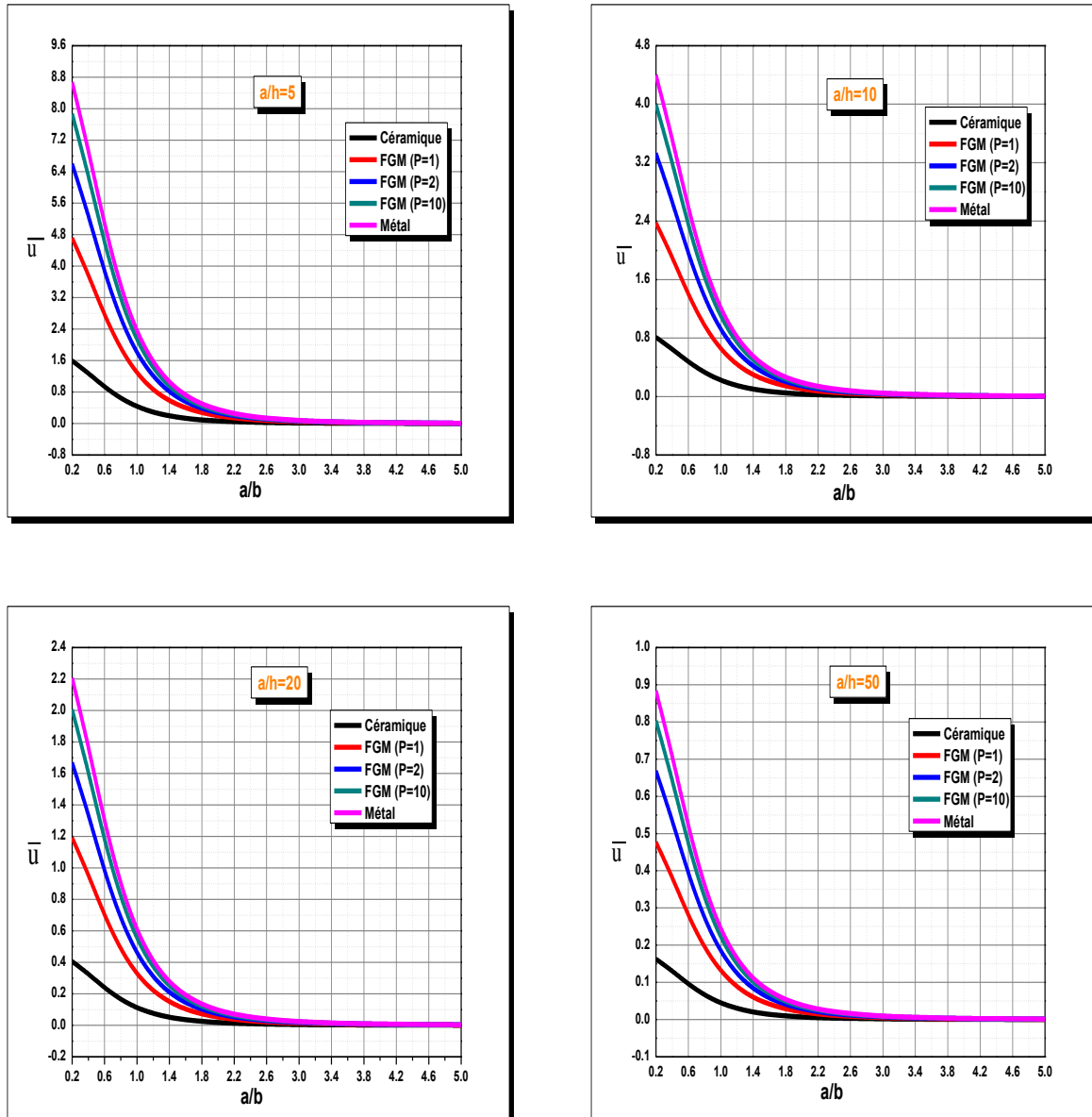


Figure IV.3 : Influence du rapport d'aspect a/b sur la variation du déplacement adimensionnelle \bar{u} d'une plaque en FGM.

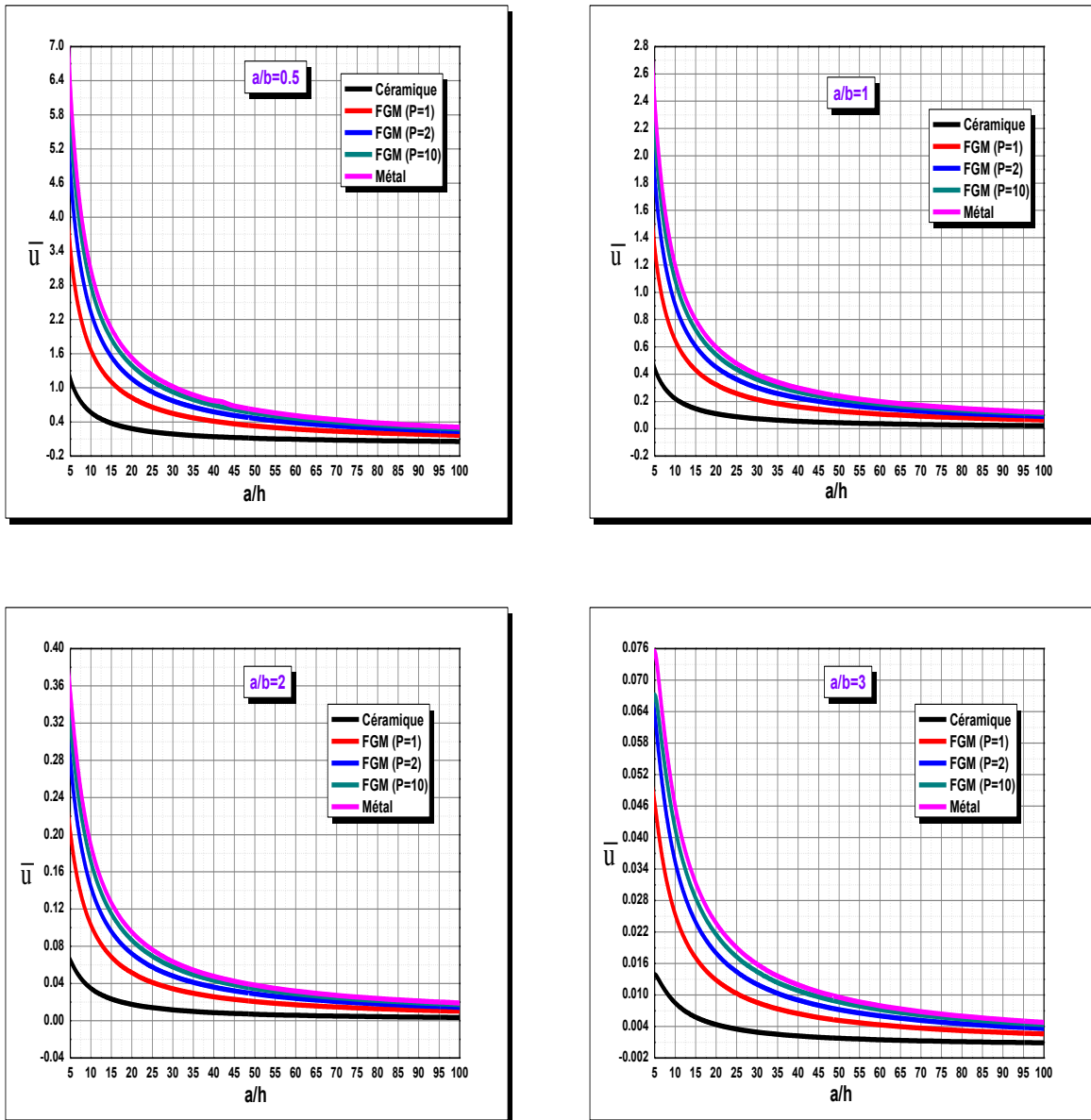


Figure IV.4 : Influence du rapport coté sur épaisseur a/h sur la variation du déplacement adimensionnelle \bar{u} d'une plaque en FGM.

La figure IV.3 représente la variation du déplacement adimensionnelle \bar{u} d'une plaque FGM sous l'influence des propriétés mécaniques du matériau et du rapport longueur sur largeur (a/b) soumise à une charge mécanique pour différentes valeurs du rapport coté sur épaisseur ($a/h=5, 10, 20$ et 50).

La figure IV.4 représente la variation du déplacement adimensionnelle \bar{u} d'une plaque FGM sous l'influence des propriétés mécaniques du matériau ainsi que le rapport coté sur épaisseur (a/h) soumise à une charge mécanique pour différentes valeurs du rapport d'aspect longueur sur largeur ($a/b=0.5, 1, 2$ et 3).

A partir de ces figures (IV.3 et IV.4), on observe que le déplacement longitudinal \bar{u} diminue avec l'augmentation des rapports a/b et a/h ce signifie que la géométrie de la plaque (longueur, largeur et épaisseur) influe d'une façon significative sur la variation des déplacements de la plaque FGM.

De plus, nous constatons que les déplacements (la flèche et déplacements longitudinales) sont maximales pour le cas d'une plaque entièrement en métal et minimales pour le cas d'une plaque en céramique et varient entre les deux pour le cas d'une plaque en FGM selon le degré d'homogénéité P , où l'augmentation de ce degré conduit à la diminution des propriétés mécanique de la plaque FGM et par conséquent l'augmentation des déplacements, ce qui est logique puisqu'en passe du céramique (qui est plus rigide) vers le métal (qui est moins rigide).

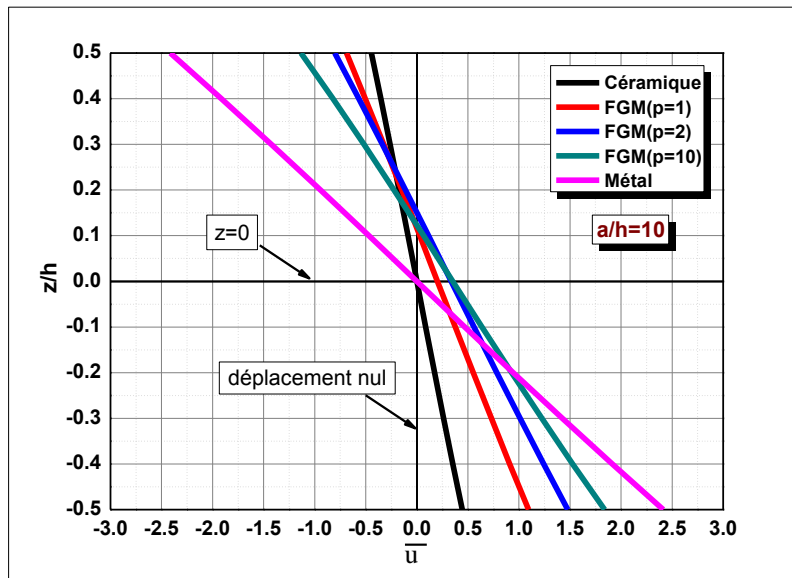


Figure IV.5 : Variation du déplacement adimensionnelle \bar{u} suivant l'épaisseur d'une plaque carrée en FGM.

La figure IV.5 représente la variation du déplacement adimensionnelle \bar{u} suivant l'épaisseur d'une plaque carrée en FGM ($a/h=10$) soumise à une charge sinusoïdale pour différentes valeurs de degré d'homogénéité P . A partir de ce déplacement on constate que la plaque est comprimée en partie supérieure (pour z/h positif) et tendue dans partie inférieure (pour z/h négatif)

De plus, l'axe neutre est située au milieu de la plaque ($z=0$) pour le cas des plaques entièrement métalliques et céramiques, et décalé vers le haut pour le cas d'une plaque en FGM ($P \neq 0$ et $P \neq \infty$), ce qui est due à la dissymétrie des propriétés mécaniques de la plaque

FGM ($E=380$ GPa dans la face supérieure de la plaque et $E=70$ GPa dans la partie inférieure).

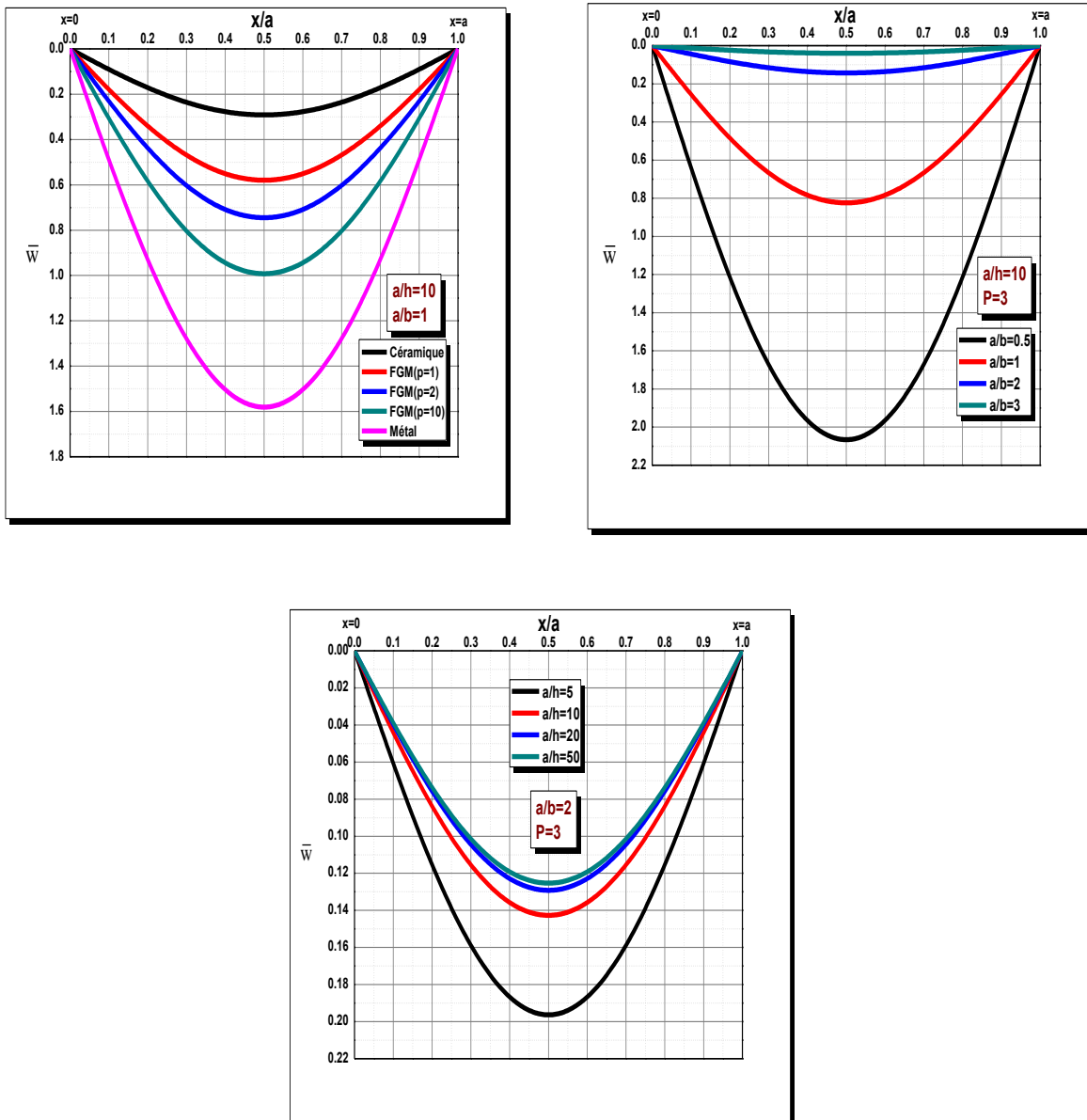


Figure IV.6 : Variation de la flèche adimensionnelle \bar{w} suivant la longueur (x/a) d'une plaque FGM.

La figure IV.6 représente la variation de la flèche adimensionnelle \bar{w} suivant la longueur d'une plaque FGM soumise à une charge mécanique, où la flèche est maximale au milieu de la plaque ($x=a/2$) et diminue en allant vers les bords (gauche et droite) de la plaque jusqu'à atteindre la valeur zéro à $x=0$ et $x=a$, ce qui est logique puisque la plaque est simplement appuyée.

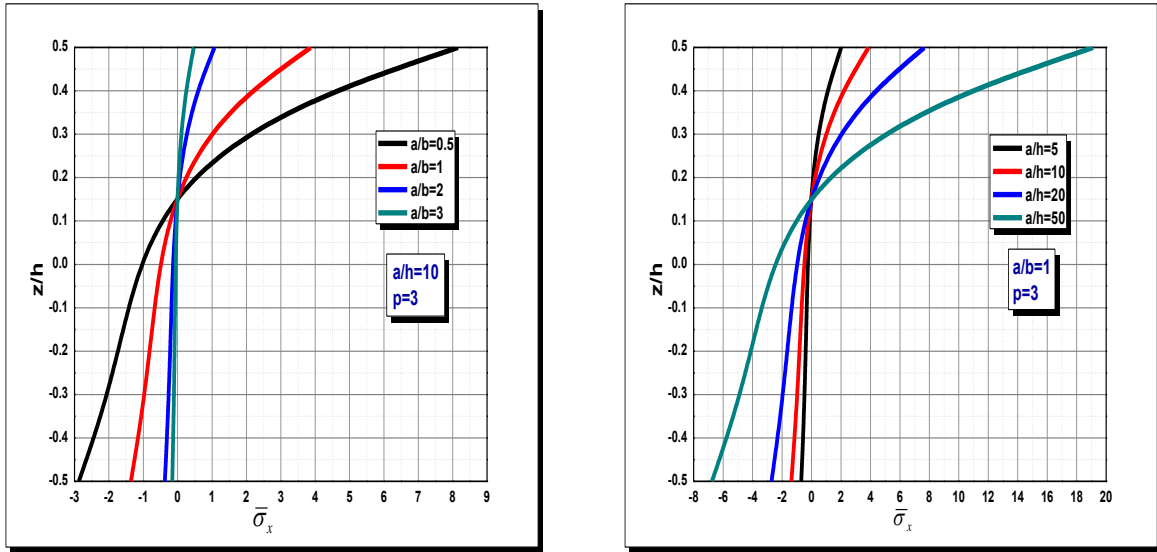


Figure IV.7 : Variation des contraintes normales $\bar{\sigma}_x$ suivant l'épaisseur d'une plaque en matériaux à gradient de propriétés FGM.

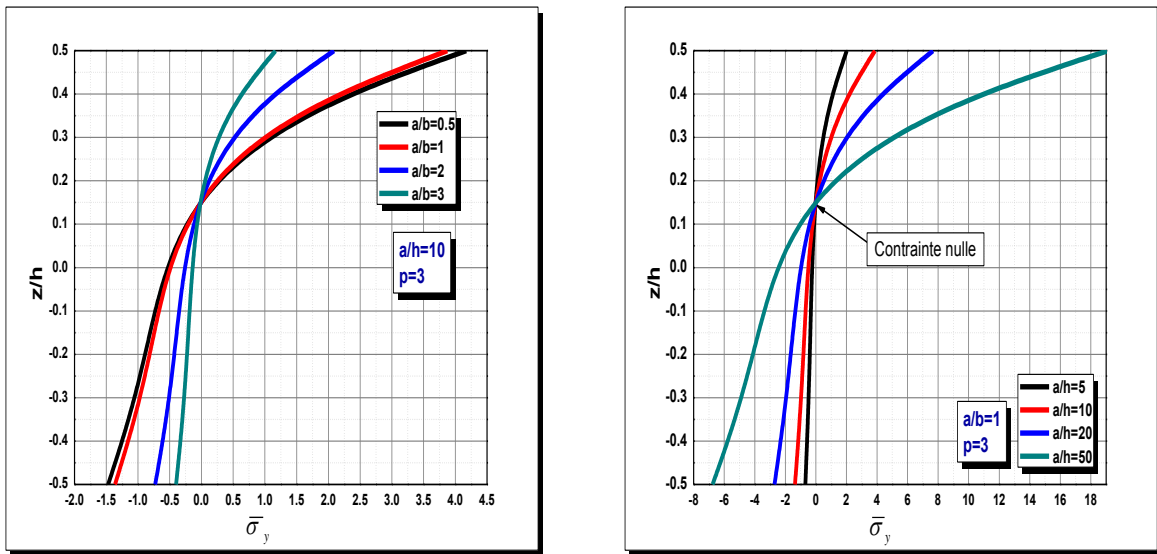


Figure IV.8 : Variation des contraintes normales $\bar{\sigma}_y$ suivant l'épaisseur d'une plaque en matériaux à gradient de propriétés FGM

Les figures IV.7 et IV.8 représentent la distribution des contraintes normales adimensionnelles $\bar{\sigma}_x$ et $\bar{\sigma}_y$ suivant l'épaisseur d'une plaque en FGM (degré d'homogénéité égal à trois) soumise à une charge mécanique sinusoïdale pour différentes valeurs du rapport d'aspect de la plaque a/b ainsi que différentes valeurs du rapport coté sur épaisseur a/h . D'où on constate que ces contraintes normales sont en compression dans la partie inférieure de la plaque et diminuent suivant l'épaisseur jusqu'à atteindre la valeur zéro au point $z=0.15$, à

partir de ce point les contraintes normales devienne en traction jusqu'à la face supérieure de la plaque FGM.

Il est clair que l'axe neutre est décalé vers le haut par rapport à l'axe moyen de la plaque FGM et précisément au point $z=0.15$ (l'axe neutre se situe au point où $\bar{\sigma}_{x,y} = 0$), ce qui est logique puisque on a une plaque fonctionnellement graduée avec $P=3$ qui présente des propriétés mécaniques non symétriques à travers l'épaisseur, et que la partie la plus rigide se trouve dans la partie haute de la plaque (partie céramique), cela conduit au décalage de cet axe neutre.

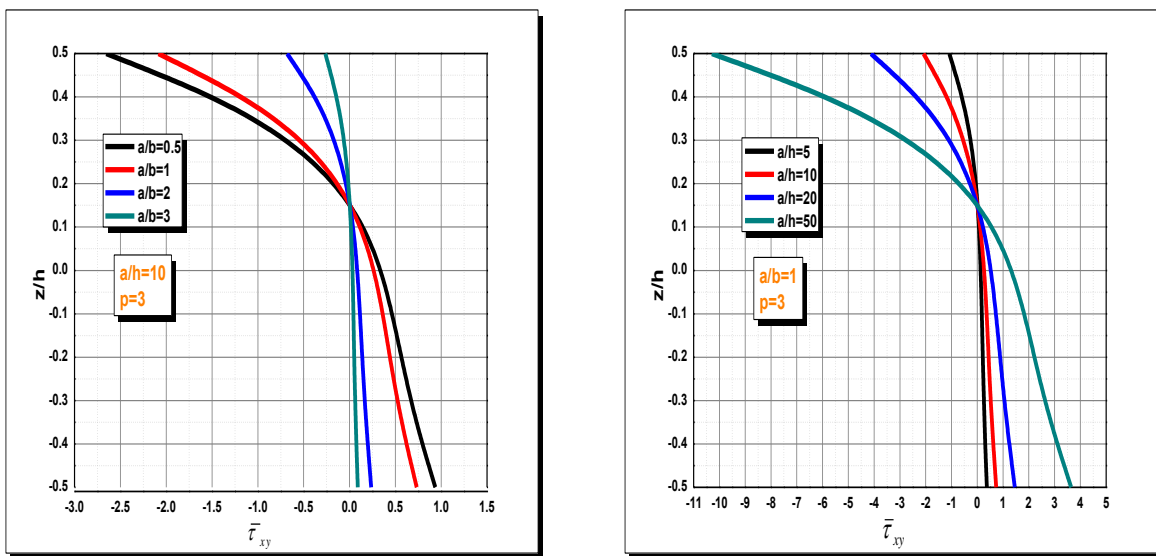


Figure IV.9 : Variation des contraintes tangentielles $\bar{\tau}_{xy}$ suivant l'épaisseur d'une plaque en matériaux à gradient de propriétés FGM

Les figures IV.9 représentent la distribution de la contrainte tangentielle adimensionnelle $\bar{\tau}_{xy}$ à travers l'épaisseur d'une plaque fonctionnellement graduée FGM ($P=3$) soumise à une charge mécanique sinusoïdale pour différentes valeurs du rapport d'aspect de la plaque a/b ainsi que différentes valeurs du rapport coté sur épaisseur a/h . D'où on constate que cette contrainte tangentielle est en traction dans la partie inférieure de la plaque et diminue suivant l'épaisseur jusqu'à atteindre la valeur zéro au point $z=0.15$, à partir de ce point la contrainte devient en compression jusqu'à la face supérieure de la plaque FGM.

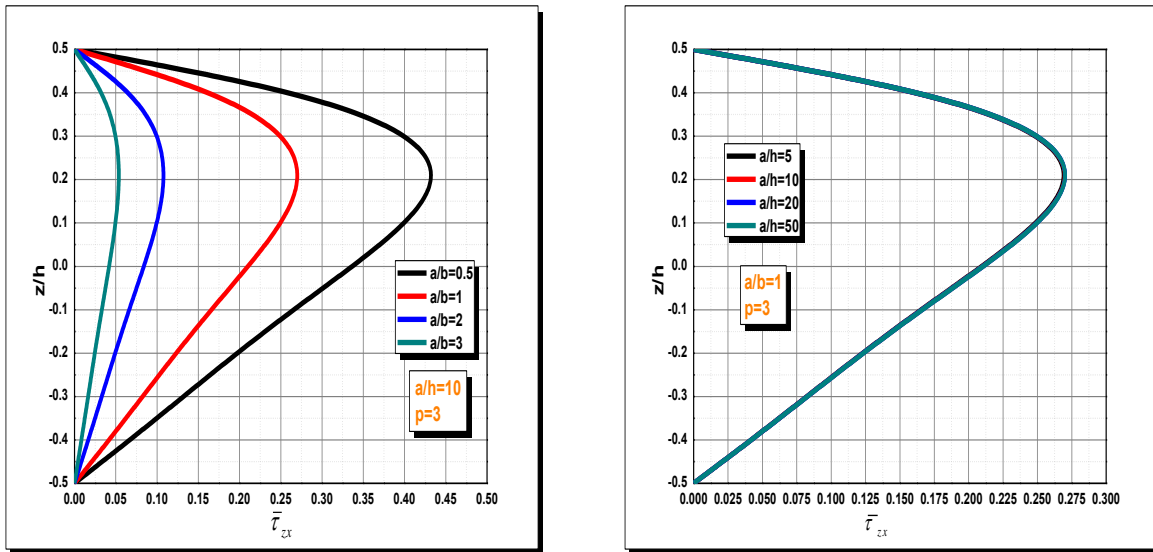


Figure IV.10 : Variation des contraintes tangentielles $\bar{\tau}_{zx}$ suivant l'épaisseur d'une plaque en matériaux à gradient de propriétés FGM

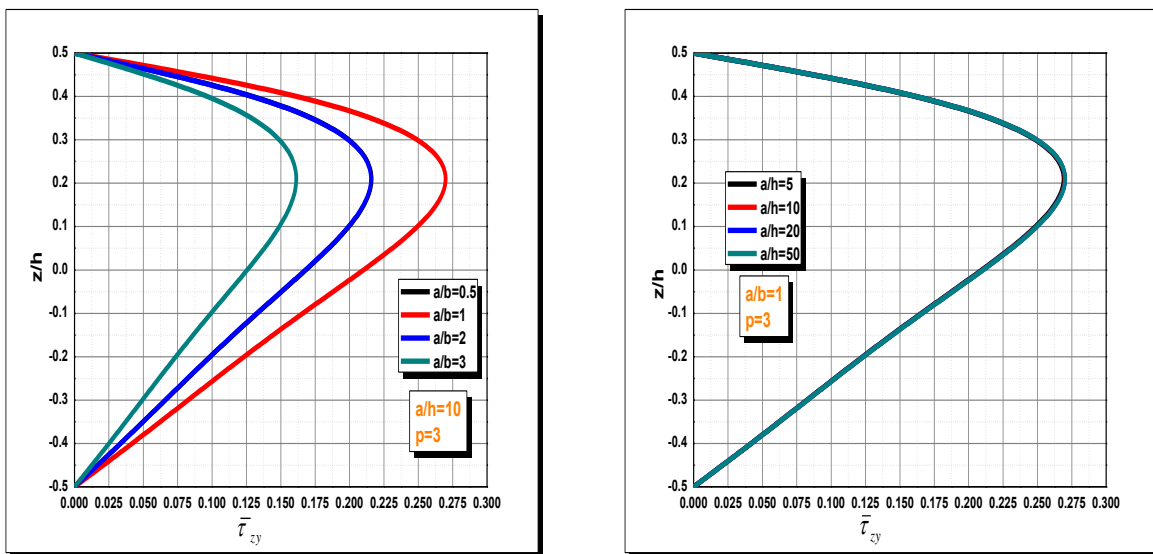


Figure IV.11 : Variation des contraintes tangentielles $\bar{\tau}_{zy}$ suivant l'épaisseur d'une plaque en matériaux à gradient de propriétés FGM

Les figures IV.10 et IV.11 représentent la distribution des contraintes tangentielles adimensionnelles $\bar{\tau}_{zx}$ et $\bar{\tau}_{zy}$ à travers l'épaisseur d'une plaque fonctionnellement graduée FGM (avec $P=3$) soumise à une charge mécanique sinusoïdale pour différentes valeurs du rapport d'aspect de la plaque a/b ainsi que différentes valeurs du rapport coté sur épaisseur a/h . D'où on constate que ces contraintes tangentielles sont distribuées d'une façon parabolique suivant l'épaisseur de la plaque et qui sont nulles dans les faces supérieure et

inférieure de la plaque FGM, ce qui confirme l'hypothèse de la présente théorie raffinée de cisaillement et de déformation d'ordre élevé, et qui met en évidence sa précision et son efficacité pour l'étude du comportement mécanique des plaques FGM soumises aux chargements mécaniques

IV.5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les résultats numériques de l'analyse de la flexion des plaques FGM simplement appuyées en utilisant la présente théorie raffinée (quatre variables).

Des solutions analytiques sont obtenues pour des plaques FG afin d'étudier les déplacements, les contraintes et les flèches pour différentes valeurs de degré d'homogénéité P , le rapport d'aspect géométrique a/b et du rapport coté sur épaisseur a/h .

Par la suite, une étude paramétrique a été présentée pour déterminer l'influence de quelques paramètres géométriques et matériels sur le comportement mécanique des plaques FGM.

La présente théorie donne une forte similitude avec les autres théories de déformation de cisaillement et d'autres modèles d'ordre élevé.

On peut conclure que la théorie proposée est précise et efficace pour prédire le comportement mécanique des plaques FGM.

Conclusion générale et perspectives

Conclusion générale et perspectives

L'un des domaines de recherche les plus importants en modélisation solide et structurale est le développement théorique pour l'analyse des plaques. Avec l'avancement rapide de l'utilisation de matériaux de gradient de propriétés dans divers domaines de l'industrie, il est nécessaire de mettre en évidence une théorie adéquate qui permet une analyse de haute précision des plaques en FGM sous diverses configurations géométriques et matérielles, et qu'ils répondent aux exigences techniques relatives à divers problèmes d'ingénierie.

La présente analyse utilise une théorie raffinée de cisaillement d'ordre élevé avec une équation de cisaillement trigonométrique pour étudier le comportement en flexion des plaques FGM.

Nous avons pu acquérir un certain nombre de résultats numériques intrigants grâce à notre analyse paramétrique, qui sont illustrés dans des graphiques pour faciliter la compréhension.

Plusieurs conclusions peuvent être tirées à la suite de ces constatations :

- ☑ La flèche adimensionnelle \bar{w} et le déplacement longitudinal \bar{u} dépendent des rapports a/b et a/h , où la variation de la géométrie de la plaque FGM influe sur son comportement mécanique ;
- ☑ Les propriétés mécaniques des FGM (degré d'homogénéité P) influent significativement sur la variation des déformations et de contraintes de la plaque, où la flèche est maximale pour les plaques métalliques, minimale pour les plaques en céramiques et varie entre les deux pour le cas des plaques FGM selon le degré d'homogénéité P .

Pour finir, on peut dire que les résultats de la recherche comparative actuelle ont révélé que la flèche, les contraintes et le déplacement produits par cette théorie sont compatibles avec ceux d'autres auteurs. Cela montre que les hypothèses de la théorie proposée peuvent produire des résultats corrects et, par conséquent, ils peuvent être utilisés efficacement pour les études de comportement mécanique des plaques FGM.

En perspective à ce travail nous proposons :

- ☑ D'étudier les différentes structures en utilisant la présente théorie raffinée ;
- ☑ Etudier l'influence des différentes combinaisons de charges mécaniques sur le comportement des plaques ;
- ☑ Etudier l'influence de la température et l'humidité sur le comportement des plaques.

Références bibliographiques

Références bibliographiques

- [1] B. Sellai, «Etude et Analyse des Structures en FGM: Comparaison entre E-FGM, P-FGM et S-FGM,» Sidi Bel Abbès., 2011.
- [2] A. Mahmoudi, «Etude de l'influence des modèles micromécaniques sur la réponse globale des structures FGM,» Sidi Bel Abbès, 2018.
- [3] M. Niino et H. a. R. T, The functionally gradient materials, vol. 13, J. J. S. C. Mat, Éd., 1987, pp. 257-264.
- [4] Koizumi, FGM activities in japan, vol. 28, Compos. Part B-Eng, 1997, p. 1–4.
- [5] M. J. Pindera, M. A. S, A. J et H. D, «Use of Composites in Functionally Graded Materials,» Charlottesville, 1994.
- [6] M. Pindera, A. J, M. G. A et M. A. S, Use of Composites in Multi-Phased and Functionally Graded Materials, vol. 28, 1997, p. 1–175..
- [7] O. Biest, G. M et V. J, Functionally Graded Materials VIII, Uetikon-Zuerich: Trans Tech Publications Ltd, Materials Science Forum, 2004, p. 492–493.
- [8] T. Fuchiyama et N. Noda, Analysis of thermal stress in a plate of functionally gradient material, JSAE Review éd., vol. 16, 1995, p. 263–268.
- [9] A. Markworth, K. Ramesh et W. and Parks, Review: modeling studies applied to functionally graded materials, vol. 30, Journal of Material Sciences, 1995, p. 2183–2193.
- [10] Y. Tanigawa, —Some basic thermoelastic problems for nonhomogeneous structural materials, vol. 48, Applied Mechanics Reviews, 1995, p. 287–300..
- [11] N. Noda, Thermal stresses in functionally graded material, vol. 22, Journal of Thermal Stresses., 1999, p. 477–512.
- [12] G. Paulino, Z. Jin et J. R. and Dodds, Failure of functionally graded Materials, in Comprehensive Structural Integrity, vol. 2, K. eds. B et G. K. and W, Éd., New York: Elsevier Science., 2003, p. 607–644..
- [13] k. Kokini et Y. Takeuchi, Multilayer ceramic thermal barrier coatings under transient thermal loads, Sendai, 1990, pp. 31-36.
- [14] V. Birman et L. and Byrd, Modeling and analysis of functionally graded materials and structures, vol. 60, Applied Mechanics Reviews, 2007, p. 195–216.
- [15] H. Yin, L. Sun et G. Paulino, Micromechanics-based elastic model for functionally graded materials with particle interactions, vol. 52, ActaMaterialia, 2004, p. 3535–3543..
- [16] P. Boch, H. Chartier et T. M, casting of AL2O3/ZrO2laminated composites., 1986.
- [17] M. Rasheedat, Mahamood, T. Esther, AkinlabiMember, IAENG, MukulShukla et a. SisaPityana, Functionally Graded Material: An Overview", vol. III WCE, 2012, pp. 4 - 6..
- [18] G. Lionel, «"Materiaux composites et structures composites",» 17 03 2011..
- [19] M. Koizumi, FGM activities in Japan, Ohtsu, department of materials chemistry/ Ryukoku University, 1996, pp. 20-21.
- [20] U. Yoshihisa, «Properties of functionally graded materials, Manufactured by Progressive Lamination Method for Applications,» Vols. %1 sur %239-B, pp. 39-51-B, Mar 2004.
- [21] B. Kieback, A. Neubrand et R. H, Processing techniques for functionally graded materials, Materials Science and Engineering, vol. A362, 2003, p. 81–105..
- [22] Mostensen et Hirai, 1995. [En ligne].
- [23] H. H. Grazzini et D. and Wilkinson, Slip Casting under pressure, Dept. of Mater. Sci. and Engrg, Hamilton, Ontario L8S 4L7, , McMaster University, 1992.
- [24] Y. Zeng, D. JIANG et T. WATANABE, Fabrication and properties of tape-cast laminated and functionally gradient alumina-titanium carbide materials, vol. 83, Journal of the American

- Ceramic Society, 2000, pp. 2999-3003.
- [25] C. Reynaud, F. Thévenot et T. Chartier, Processing and microstructure of SiC laminar composites,, vol. 19, International Journal of Refractory Metals and Hard Materials, 2001, pp. 425-435.
- [26] K. Atarashiya et Y. Ishida, Functionaly graded materials, Westerville: American ceramic society, 1993, pp. 141-148.
- [27] U. Leushake, A. Winter, B. Rabin, B. Corff et W. in: Kaysser, «sProceedings of the 5th International Symposium on FGM,» chez *Functionally Graded Material*, Trans Tech Publications, 1998, p. 13–18.
- [28] J. Zhang, Y. Wang, B. Zhou, X. Wu, J. Mater et L. Sci., vol. 17, 1998, p. 677–1679.
- [29] M. Omori, T. Kakita, A. Okubo, T. and Hirai, J. J et M.). Inst., vol. 62, 1998, pp. 986-991..
- [30] K. Ichikawa, Functionally graded materials in the 21ST CENTURY, Hardcover: A Workshop on Trends and Forecasts, 2000, p. 264.
- [31] Y. Miyamoto, W. Kaysser, B. Rabin, A. Kawasaki et R. Ford, Functionally graded materials: design, processing and applications, Materials Technology Series, vol. 5, 1999.
- [32] R. Mévrel, Les systèmes barrières thermiques pour aubes de turbine, Morinaga,K;Toto K.U: Fabricate thick Alumina-Tungsten FGM using slip cast method, Sci. Technol., 1993, p. 4.
- [33] M. Takahashi, Y. Itoh et H. Kashiwaya, Fabrication and evaluation of W/Cu gradient material by sintering and infiltration technique, in proceeding of the first international symposium on functionally gradient materials FGM, Sendai, 1990, pp. 129-134.
- [34] M. Yuki, T. Murayama et T. Irisawa, Temperature gradient sintering of PSZ/Mo Functionally Gradient Material by laser beam heating, in proceeding of the first international symposium on functionally gradient materials FGM,, Sendai, 1991, pp. 203-208.
- [35] R. Aldo, O. Boccaccini, V. D. Biest, B. Jan et Talbot, Electrophoretic Deposition, Fundamentals and Applications:, Electrophoretic Deposition, Fundamentals and Applications:, 2002.
- [36] M. Herrmann et W. Sobek, Functionally graded concrete: Numerical design methods and experimental tests of mass-optimized structural components, vol. 18, StructConcr, 2017, pp. 54-66.
- [37] M. Domack et J. Baughman, Development of nickel-titanium graded compo-sition components, vol. 11(1), Rapid Prototyping Journal, 2005, p. 41–51.
- [38] X. Qian et D. Dutta, «Design of heterogeneous turbine blade,» vol. 35, pp. 319-329, 2003.
- [39] W. H. E. M. Pompe W., W. Friess, M. Gelinsky, P. Greil, U. Hempel, D. Scharnweber et K. Schulte, Functionally graded materials for biomedical applications., Ma-terials Science and Engineering, 2003, p. 40–60.
- [40] F. Watari, A. Yokoyama, M. Omori, T. Hirai, H. Kondo, M. Uo et T. Kawasaki, Bio-compatibility of materials and development to functionally graded implant for bio-medical application, vol. 64(6), Composites Science and Technology, 2004., p. 893–908.
- [41] V. Balla, S. Banerjee, S. Bose et A. Bandyopadhyay, Direct laser processing of a tantalum coating on titanium for bone replacement structures, vol. 6(6), ActaBiomaterialia., 2010., p. 2329– 2334.
- [42] F. España, V. Balla, S. Bose et A. Bandyopadhyay, Design and fabrication of CoCrMo alloy based novel structures for load bearing implants using laser engineered net shaping, Vols. %1 sur %2C, 30(1), Materials Science and Engineering, 2010., p. 50–57.
- [43] A. Bandyopadhyay, B. Krishna, W. Xue et S. Bose, Application of Laser Engineered Net Shaping (LENS) to manufacture porous and functionally graded structures for load bearing implants., vol. 20, Journal of Materials Science, 2009, p. 29–34.
- [44] F. Watari, A. Yokoyama, F. Saso, M. Uo et T. Kawasaki, Fabrication and properties of functionally graded dental implant, Vols. %1 sur %228(1-2), Composites Part B : Engineering, 1997, p. 5–11.
- [45] E. Müller, C. Drasar, J. Schilz et W. Kaysser, Functionally graded materials for sensor and energy

- applications, Vols. %1 sur %2A, 362(1-2):, Materials Science and Engineering, 2003, p. 17–39.
- [46] L. Lu, M. Chekroun, O. Abraham, V. Maupin et G. Villain, Mechanical properties estimation of functionally graded materials using surface waves recorded with a laser interferometer., vol. 44(2), NDT&E International., 2011, p. 169–177.
- [47] W. Jiang, R. Nair et P. Molian, Functionally graded mold inserts by laser-based flexible fabrication : processing modeling, structural analysis, and performance evaluation., vol. 166(2), Journal of Materials Processing Technology., 2005., p. 286–293.
- [48] Z. Boukhelif, «Modélisation analytique de la vibration libre des plaques FGM posées sur fondation élastique,» SIDI BEL ABBES, 2019.
- [49] H. Shen, "Functionally Graded Materials - Nonlinear Analysis of Plates and Shells", T. & FrancisGroup, Éd., New York: CRC Press., 2009.
- [50] G. Bao et L. Wang, Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings, Int. J; Solids Structures;., vol. 32 (19), 1995, p. 2853–2871..
- [51] S.-h. Chi et C. Yen-Ling, Cracking in coating-substrate composites of multi-layered and sigmoid FGM coatings, vol. 70 (10), Engineering Fracture Mechanics, 2003, p. 1227–1243.
- [52] F. Delale et F. Erdogan, The crack problem for a non homogeneous planel., ASME Journal of Applied Mechanics:50 (3):609-614., 1983.
- [53] T. e. T. K. Mori, « average stress in matrix and average élastic energy of material withe misfitting inclusions, Actametall, 1973, pp. 571-574.
- [54] K. J. Bathe, C. D et S. L. and P, « A shell problem 'highly sensitive' to thickness changes. Internat »,., J. Numer. Methods Engrg, Éd., 2003.
- [55] J. Sanchez-Palencia, Sanchez-Hubert et a. E., « Coques Elastiques Mincees- Propriétés Asymptotiques »,., Masson, Paris., 1997.
- [56] J. PITKÀRANTA, O. LEINO, OVASKAINEN et P. and J, « Shell deformation states and the finite element method: a benchmark study of cylindrical shells »,., Comput. Methods Appt. Mech. Engrg, 1995..
- [57] C. Baiocchi et L. and C, « A shell classification by interpolation »,., Math. Models Methods Appt. Sci., 2002.
- [58] L. Rayleigh, "The theory of sound",., The Macmillan Company, 1877.
- [59] S. Timoshenko, Timoshenko" On the Correction of Transverse Shear Deformation of the Differential Equations for Transverse Vibration of Prismatic Bars ", vol. 41 (series 6), Philosophical Magazine., 1921, pp. 744 -746.
- [60] E. Reissne, " The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates"., vol. 12, J. of appl. Mech, 1945, pp. A69-A77.
- [61] S. P. Timoshenko et S. Woinowsky-Kreiger, "Theory of plates and Shells", New York: Mc Graw-Hill, 1959.
- [62] J. Reddy, Mechanics of Laminated composites plates. Theory and analysis., Boca Raton.: CRC Press, 1997.
- [63] J. Reddy, Theory and Analysis of Elastic plates|, Taylor & Francis, Éd., Philadelphia, 1999.
- [64] M. Karama, K. Afaq et M. S, "Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multilayered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity"., vol. 40(6), Int. J. Solids Structures;., 2003, pp. 1525-1546..
- [65] H. Ait Atmane, A. Tounsi, I. Mechab et B. A. Adda, free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory, vol. 6, Int. J Mech. Mater., 2010, p. 113–121.
- [66] R. Shimpi, "Refined plate theory and its variants, AIAA Journal, 2002, pp. 137-146.
- [67] S. Kim, H. Thai et J. et Lee, "Buckling analysis of plates using the two variable refined plate theory", vol. 47(4), 2009, p. 455–462.
- [68] H. Thai et S. et Kim, «"Levy-type solution for buckling analysis of orthotropic plates based on

- two variable refined plate theory",» chez *Composite Structures*, 2011, p. 1738–1746..
- [69] H. Hebali, A. Tounsi, M. Houari, A. Bessaim et E. Adda Bedia, "New quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates",, vol. 140, *Journal of Engineering Mechanics(ASCE)*,, 2014, p. 374 – 383.
- [70] M. Bennoun, M. Houari et A. and Tounsi, "A novel five variable refined plate theory for vibration analysis of functionally graded sandwich plates",, vol. 23(4), *Mech. Adv. MaterStruct.*,, 2016, pp. 423-431..
- [71] H. Abdelaziz, M. Ait Amar Meziane, A. Bousahla, A. M. S. Tounsi et A. and Alwabli, , "An efficient hyperbolic shear deformation theory for bending, buckling and free vibration of FGM sandwich plates with various boundary conditions",, vol. 25(6), *Steel Compos. Struct.*, 2017, pp. 693-704.
- [72] M. Benchohra, H. Driz, A. Bakora, A. Tounsi, E. Adda Bedia et S. Mahmoud, "A new quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for functionally graded plates", vol. 65(1), *Struct. Eng. Mech.*,, 2018, pp. 19-31.
- [73] A. Zenkour, "A simple four-unknown refined theory for bending analysis of functionally graded plates ", vol. 37(20–21), *Appl Math Model*;, 2013, p. 9041–9051..
- [74] A. Zenkour, "Bending analysis of functionally graded sandwich plates using a simple four-unknown shear and normal deformations theory",, vol. 15(6), *J Sandwich Struct Mater*, 2013, p. 629–656.
- [75] A. Zenkour, "Thermal bending of layered composite plates resting on elastic foundations using fourunknown shear and normal deformations theory",, vol. 70, *Compos Struct*, 2015, pp. 122-260.
- [76] J. Mantari et C. and Guedes Soares, "Four-unknown quasi-3D shear deformation theory for advanced composite plates",, vol. 109, *Compos. Struct*, 2014, pp. 231-239..
- [77] E. Carrera et M. et petrolo, « Guidelines and recommendations to constuct theories for metallic and composite plates »,., vol. 48(12)., 2010.
- [78] M. D’Ottavio et E. et Carrera, «variable-kinematics approach for linearized buckling analysis of laminated plates and shells»,., vol. 48(9)., *AIAA journal*, 2010.
- [79] H. Thai et S. et Kim, "Free vibration of laminated composite plates using two variable refined plate theory",, *International Journal of Mechanical Sciences*, 2010.
- [80] N. Wattanasakulpong, B. Prusty, D. Kelly et M. and Hoffman, "Free vibration analysis of layered functionally graded beams with experimental validation",, vol. 36, *Mater. Des.*,, 2012, pp. 182-190..
- [81] E. Carrera, S. Brischetto et A. Robaldo, Variable kinematic model for the analysis of functionally graded material plates., vol. 46(1), *AIAA J*, 2008, p. 194–203..
- [82] C. Wu, K. Chiu et Y. Wang, RMVT-based meshless collocation and element free Galerkin methods for the quasi-3D analysis of multilayered composite and FGM plates, vol. 93(2), *Compos Struct*, 2011, p. 923–43..
- [83] A. Zenkour, Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates, vol. 30(1), *Appl Math Modell*, 2006, pp. 67-84.
- [84] J. Mantari, A. Oktem et C. Guedes Soares, Bending response of functionally graded plates by using a new higher order shear deformation theory., vol. 94(2), *Compos Struct*, 2012, p. 714–23..
- [85] C. Wu et H. Li, An RMVT-based third-order shear deformation theory of multilayered functionally graded material plates. *Struct*, vol. 92(10), *Compos Struct*, 2010, p. 2591–605..
- [86] A. Neves, A. Ferreira, E. Carrera, C. Roque, M. Cinefra, R. e. Jorge et al, A quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates., vol. 43(2), *Compos Part B: Eng* , 2012, p. 711–25..
- [87] A. Neves, A. Ferreira, E. Carrera, M. Cinefra, C. Roque, R. Jorge et e. al., A quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates., vol. 94(5), *Compos Struct*, 2012, p. 1814–25..
- [88] A. Neves, A. Ferreira, E. Carrera, M. Cinefra, C. Roque, R. Jorge et e. al., Static, free vibration

- and buckling analysis of isotropic and sandwich functionally graded plates using a quasi-3D higher-order shear deformation theory and a meshless technique., *Compos Part B*, 2012.
- [89] E. Carrera, S. Brischetto, M. Cinefr et M. Soave, Effects of thickness stretching in functionally graded plates and shells, vol. 42(2), *Compos Part B*, 2011, pp. 123-33.
- [90] R. Benferhat, T. Daouadji et a. Mansour, "A higher order shear deformation model for bending analysis of functionally graded plates", vol. 68(1), *Transact. Indian Inst. Metal.*, 2015, pp. 7-16..

Résumé

Ce travail présente une étude du comportement mécanique des plaques fonctionnellement graduées FGM en utilisant la théorie raffinée de quatre variables. La présente théorie prend en compte les effets de cisaillement transversal et la distribution parabolique des contraintes de cisaillement transversales à travers l'épaisseur de la plaque FGM.

Les équations d'équilibres pour les plaques FGM sont obtenues en utilisant le principe des travaux virtuels, la solution analytique est obtenue en utilisant la solution de Navier. Où les résultats obtenus par la présente analyse de la flexion des plaques FGM sont en bon accord avec ceux trouvés dans la littérature.

D'où, on peut dire que la théorie raffinée proposée est exacte et simple pour la résolution du comportement de flexion des plaques FGM

Mots clés : Plaques FGM, Flexion, Travaux virtuels, Solution de Navier

Abstract

This work presents a study of the mechanical behavior of functionally graduated FGM plates using the refined theory of four variables. This theory takes into account the transverse shear effects and the parabolic distribution of the transverse shear stresses through the thickness of the FGM plate.

The equilibrium equations for FGM plates are obtained using the principle of virtual works; the analytical solution is obtained using the Navier's solution. Where the results obtained by this analysis of the bending of the FGM plates are in good agreement with those found in the literature.

Hence, we can say that the proposed refined theory is accurate and simple for the resolution of the bending behavior of FGM plates.

Keywords: FGM plates, Bending, Virtual works, Navier's solution

ملخص

يقدم هذا العمل دراسة للسلوك الميكانيكي للألواح ذات المواد المتدرجة وظيفيا باستخدام النظرية المكررة بأربعة متغيرات. تأخذ هذه النظرية في الاعتبار تأثيرات القص العرضي والتوزيع بشكل قطع مكافئ لضغوط القص على طول سمك الألواح ذات المواد المتدرجة وظيفيا

ويتم الحصول على معادلات التوازن للألواح ذات المواد المتدرجة وظيفيا باستخدام مبدأ الأعمال الافتراضية ؛ ويتم الحصول على الحل التحليلي باستخدام حل نافير. حيث تتفق النتائج المحصل عليها باستخدام النظرية الحالية مع النتائج الواردة في المراجع.

و من ثم، يمكن أن نقول أن النظرية المكررة المقترحة دقيقة وبسيطة لحل سلوك الصفائح ذات المواد المتدرجة وظيفيا

الكلمات المفتاحية : لوحات ذات المواد المتدرجة وظيفيا ، الانحناء ، الأعمال الافتراضية ، حل نافير