



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la
Recherche Scientifique
Université de Tissemsilt



Faculté de Sciences et de la Technologie
Département des Sciences et de la technologie

Mémoire de fin d'études pour l'obtention du diplôme
de Master académique en

Filière : **Génie Civil**

Spécialité : **Structures**

Présenté par : **BOUHADJ FADHILA**
SIBACHIR LAMIA

Thème

**Analyse des cylindres multicouches et température par l'élément
fini à champ de déformation**

Soutenu le

Devant le Jury :

Bouderba Bachir	Président	M.C.A.	U-Tissemsilt
Bouzriba Asma	Encadrante	M.C.B.	U-Tissemsilt
Abdelhamid Abdelmalek	Examineur	M.A.A.	U-Tissemsilt

Année universitaire : 2020-2021

Remerciements

Tout d'abord, nous tenons à exprimer notre profonde gratitude et nos remerciements à notre encadrante de mémoire .Dr Asma Bouzriba, qui nous' a dirigé durant la période de préparation du mémoire avec une grande patience et bonne humeur. On tient en particulier le remercier pour sa motivation et son enthousiasme constants à nous faire partager ses connaissances, son Expérience et ses projets.

Nous tenons à remercier les membres de jury professeur Boudarba Bachir et Dr Abdelhamid Abdelmalek .

J'exprime mes vifs remerciements aux enseignants du département de génie civil de l'université de Tissemsilt.

Résumé

Dans ce mémoire, l'analyse des cylindres multicouches exposés à la pression et à la température en utilisant un élément secteur en coordonnées polaires basé sur l'approche en déformation a été présentée. Cet élément possède quatre nœuds et trois degrés de liberté en chaque nœud (deux translations et une rotation dans le plan). Le matériau de chaque couche est considéré élastique linéaire, homogène et isotrope. Les résultats numériques de déplacement et de contrainte sont comparés avec les solutions analytiques disponibles dans la littérature et une bonne précision a été montrée.

Mots clés : Cylindres multicouches, pression, température, élément secteur, l'approche en déformation.

Abstract

In this thesis, the analysis of multilayer cylinders exposed to pressure and temperature using a sector element polar coordinates based on the strain approach was presented. This element has four nodes and three degrees of freedom for each node (two translations and one rotation in the plane). The material of each layer is considered elastic linear, homogeneous and isotropic. Numerical results in term of displacement and stresses are compared with the analytical solutions available in the literature . And good precision has been shown.

Keywords: Multilayer cylinders, pressure, temperature, sector element, strain approach.

ملخص

في هذه المذكرة، تم تقديم تحليل الأسطوانات متعددة الطبقات المعرضة للضغط ودرجة الحرارة باستخدام مقطع في الإحداثيات القطبية على أساس نهج التشوه. يحتوي هذا العنصر على أربع عقد وثلاث درجات من الحرية في كل عقدة (انتقالات ودوران في المستوى). تعتبر مادة كل طبقة مرنة خطية متجانسة ومتماثلة. تتم مقارنة النتائج العددية للانتقالات والاجهادات مع النتائج التحليلية المتوفرة في المؤلفات وقد تم عرض ذلك بدقة جيدة بينهما.

الكلمات المفتاحية: الاسطوانات متعددة الطبقات ، الضغط ، درجة الحرارة ، مقطع عنصري ، نظرية التشوه

Table des matières

Résumé	i
Abstract	ii
ملخص	iii
Table des matières	iv
Liste des figures	viii
Liste des tableaux	xiii
Notations	xviii
Introduction générale	1
1. Introduction	1
2. Objectifs du mémoire	2
3. Plan du mémoire.....	3

Chapitre 1 : Etude bibliographique

1.1 Introduction.....	4
1.2 Etude bibliographique sur l'analyse des cylindres sous pression et température .	5
1.3 Etude bibliographique sur les éléments finis basés sur l'approche en déformation en coordonnées cartésiennes.....	6
1.4 Etude de la théorie d'élasticité plane	7
1.4.1 Relation contraintes –déformations.....	8
1.4.2 Hypothèse de l'état plan de contraintes.....	9
1.4.3 Hypothèse de l'état plan de déformation.....	10
1.4.4 Déformation initiale.....	11
1.4.5 Relation déformation –Déplacement	12
1.5 Formulation des éléments finis basés sur l'approche en déformation	13
1.5.1 Les critères de convergence	14
1.5.2 L'avantage de l'approche en déformation	15

1.5.3	Le développement des éléments finis basés sur l'approche en déformation.....	16
1.6	Conclusion.....	17

Chapitre 2 : Les éléments secteurs en coordonnées polaires

2.1	Introduction.....	18
2.2	Les éléments secteurs en coordonnées polaires	19
2.3	Formulation des éléments secteurs basés sur l'approche en déformation ...	20
2.4	Les équations basiques en coordonnées polaires	21
2.4.1	Equation d'équilibre en coordonnées polaires.....	22
2.4.2	Relation déformation –déplacement en coordonnées polaires	23
2.4.3	L'équation de compatibilité en coordonnées polaire.....	24
2.4.4	Distribution symétrique des contraintes le long d'un axe.....	25
2.5	Précédent éléments secteurs développée.....	26
2.5.1	Elément de Raju et Rai.....	27
2.5.2	Elément de Sabir et Salhi.....	28
2.5.3	Elément de Djoudi et Sabir	29
2.5.4	Elément de Belarbi SBS4.....	30
2.5.5	Elément de Bouzrira et al.....	31
2.5.6	Elément de Bouzriba et Bouzrira.....	32
2.5.7	Elément de Abderrahmani et al.....	33
2.6	Formulation de la matrice de rigidité élémentaire.....	34
2.6.1	Calcul des contraintes.....	35
2.7	Conclusion.....	36

Chapitre 3 : Les cylindres multicouches sous chargement combinées de pression et de température.

3.1	Introduction.....	37
3.2	Cylindre monocouche sous pression et température	38
3.2.1	Solution analytique.....	39
3.3	Cylindre composé sous pression et température	40
3.3.1	Solution analytique	41
3.4	Cylindres multicouches sous pression.....	42
3.4.1	Solution analytique	43
3.5	Conclusion.....	44

Chapitre 4 : Résultats et discussions

4.1	Introduction	45
4.2	Résultats et discussion	46
4.2.1	Cylindre monocouche.....	47
	Cas1: Cylindre monocouche sous pression	48
	Cas 2: Cylindre monocouche sous température.....	49
	Cas 3: Cylindre monocouche sous pression et température.....	50
4.2.2	Cylindre composé sous pression et température.....	51
4.2.3	Cylindres multicouches sous pression.....	52
4.3	Conclusion.....	53
4.5	Conclusion générale.....	54

Liste des figures

Chapitre 1 : Etude bibliographique

- Figure 1.1** : Le mouvement du corps rigide Sabir [12].....12
- Figure 1.2** : Comportement d'un élément à quatre nœuds lors de la flexion dans le plan Sabir [12].....15

Chapitre 2 : Les éléments secteurs en coordonnées polaires

- Figure 2.1:** (a)coordonnées polaires(b) élément de contrainte dans les coordonnées polaires.....18
- Figure 2.2** : Déformation et déplacement d'un élément en coordonnées polaires..19
- Figure 2.3** : Système de coordonnées et déplacements Sabir et Salhi [19].....21
- Figure 2.4** : L'élément secteur en coordonnées polaires Bouzriba et Bouzrira[16].. 26
- Figure 2.5** : Géométrie de l'élément secteur Abderrahmani et al. [17].....28

Chapitre 3 : Les cylindres multicouches sous chargement de pression et de température.

- Figure 3.1** : Cylindre monocouche sous pression et température.....33
- Figure 3.2** : Cylindre composé.....35
- Figure 3.3** : Cylindre creux avec N couches Xiang et al.[1].....39

Chapitre 4 : Résultats et discussions

- Figure 4.1** : Cylindre épais sous pression interne et température.....45
- Figure 4.2** : Idéalisations du cylindre par éléments finis Bouzriba et Bouzrira [16].....45
- Figure 4.3** : Variation de u sous pression.....46
- Figure 4.4** : Variation de σ_r sous pression.....47
- Figure 4.5** : Variation de σ_θ sous pression..... 47

Figure 4.6 : Variation de u sous température.....	48
Figure 4.7 : Variation de σ_r sous température	49
Figure 4.8 : Variation de σ_θ sous température	49
Figure 4.9 : Variation de u sous pression et température	50
Figure 4.10 : Variation de σ_r sous pression et température	50
Figure 4.11 : Variation de σ_θ sous pression et température	51
Figure 4.12 : Variation de u sous pression et température.....	52
Figure 4.13 : Variation de σ_r sous pression et température.....	53
Figure 4.14 : Variation de σ_θ sous pression et température.....	53
Figure 4.15 : Variation de u sous pression.....	55
Figure 4.16 : Variation de σ_r sous pression	55
Figure 4.17 : Variation de σ_θ sous pression	56

Liste des tableaux

Tableau 4.1 : Propriétés mécaniques de cylindre composé.....52

Tableau 4.2: Propriétés mécaniques de cylindre multicouche.....54

Notations

E	Module d'Young
T	Le gradient de température.
α	Coefficient de dilatation thermique
ν	Coefficient de Poisson
G	Module de cisaillement $=E/[2(1+\nu)]$
U	L'énergie de déformation
λ	La conductivité thermique
W	Le travail extérieur
x, y, z	Système des coordonnées cartésiennes
r, θ	système de coordonnées polaire
ϕ	La rotation plane
$u ; v$	Déplacements dans les directions x, y
$\{\delta_e\}$	Le vecteur de déplacement nodal
$\{F^e\}$	Le vecteur force du au gradient thermique
$\{\varepsilon\}$	Le vecteur de déformation
$[K_e]$	Matrice de rigidité élémentaire
$[D]$	Matrice d'élasticité
$[c]$	Représente la matrice de transformation
P	La pression
σ_r	La contrainte radiale
σ_θ	La contrainte tangentielle
$[B]$	La matrice de déformation

Introduction générale

L'analyse par éléments finis est une méthode informatisée permettant de prédire comment une structure réagit aux forces réelles, aux vibrations, à la chaleur, à l'écoulement de fluide et à d'autres effets physiques. L'analyse par éléments finis montre si un produit va se fonctionner comme il a été conçu. C'est ce qu'on appelle l'analyse, elle est utilisée pour prédire ce qui va se passer lorsque la structure est utilisée.

Après plusieurs années de développement, la méthode des éléments finis est devenue l'un des outils les plus puissants et les plus populaires pour la simulation numérique dans divers domaines des sciences et de l'ingénierie.

Ces dernières années, une attention considérable a été accordée au développement de nouveaux éléments finis basés sur l'approche en déformation dans lequel les champs de déplacement peuvent être obtenus en intégrant des composantes assumées de déformation [6-11].

Cette approche permet de développer des éléments finis ayant des performances similaires aux éléments d'ordre élevé. Dans ce contexte, beaucoup d'éléments finis membranaires quadrilatères et triangulaires ont été développés par cette approche.

Le succès de développement des éléments secteurs en coordonnées cartésiennes a motivé les chercheurs pour le développement des éléments secteurs en coordonnées polaires destinés à l'analyse des problèmes d'élasticité plane générale [13-20].

En raison de l'importance des cylindres composites multicouches dans divers domaines technologiques, plusieurs études ont été menées pour déterminer les contraintes et le déplacement dans des cylindres multicouches exposés à la pression et à la température [1-5].

Les objectifs de mémoire :

Ce travail porte sur l'analyse des cylindres multicouches sous chargement thermomécanique en utilisant un élément secteur en coordonnées polaires basé sur l'approche en déformation.

Les objectifs de ce travail sont :

- L'analyse des cylindres monocouches sous pression et température logarithmique y compris la température extérieure.
- L'extension de l'approche en déformation à l'analyse des cylindres multicouches.

Plan de mémoire :

Notre travail est organisé en quatre chapitres :

Le premier chapitre présente un aspect théorique sur l'analyse des cylindres à parois épaisses sous chargement combinée de pression et de température ainsi que l'approche en déformation en coordonnées cartésiennes, et nous rappelons certaines équations de base de l'élasticité linéaire utilisable pour notre analyse.

Dans le deuxième chapitre, nous aborderons les éléments secteurs basés sur l'approche en déformation en coordonnées polaires ainsi que ses formulations.

Le troisième chapitre porte sur les solutions analytiques relatives aux cylindres multicouches sous pression et température

Le quatrième chapitre présente une comparaison des résultats numériques avec les résultats analytiques.

CHAPITRE 1

ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE

1.1 Introduction :

Dans ce chapitre introductif, Nous présentons dans un premier temps un aspect théorique sur l'analyse des cylindres à parois épaisses sous chargement combinée de pression et de température et l'approche en déformation. Dans un deuxième temps, Nous rappelons certaines équations de base de l'élasticité linéaire utilisable pour notre analyse.

1.2 Etude bibliographique sur l'analyse des cylindres sous pression et température :

Depuis Lamé a trouvé la distribution des contraintes dans un cylindre creux soumis à des pressions intérieures et extérieures, cette solution a été largement utilisée pour résoudre de nombreux problèmes d'ingénierie.

Les récipients axisymétriques sous pression ont une large application dans l'ingénierie industrielle. Ils sont souvent soumis à des charges mécaniques et charges thermiques. Afin d'améliorer leur capacité portante, en particulier ceux de forme cylindrique, certaines techniques de base sont utilisés tels que l'augmentation de l'épaisseur de paroi, et les cylindres composés.

Dans ce contexte, Xiang et al. [1] ont étudié deux types différents cylindres creux élastiques hétérogènes, l'un est un cylindre multicouche avec des propriétés différentes en chaque couche (le module d'élasticité, le coefficient de Poisson) et l'autre est un cylindre creux élastique avec des propriétés matérielles graduées continues, en introduisant deux algorithmes récursifs. Les contraintes de contact entre deux couches voisines dans le cylindre multicouche soumis à des pressions uniformes sur les surfaces intérieure et extérieure peuvent être simplement déterminées. Ensuite, les solutions exactes de la structure multicouche peuvent être trouvées sur la base de la solution de Lamé. Les résultats obtenus sont comparés aux solutions numériques et bons accords sont trouvés.

Shi et al. [2] ont développé une nouvelle solution analytique par la méthode récursive pour évaluer les contraintes et les déplacements dans un cylindre creux multicouche sous chargement thermomécanique dont les résultats de la distribution de la température, des déplacements et des contraintes obtenues en utilisant la solution proposée se sont avérées en bon accord avec les résultats numériques.

Zhang et al. [3] ont rapporté des travaux limités sur la détermination des contraintes thermomécaniques dans un récipient composite multicouche sous pression en considérant ses extrémités fermées. Ils ont dérivée une solution analytique pour déterminer la distribution des contraintes dans un récipient composite multicouche soumis à une pression de fluide interne et à une charge thermique sur la base de la théorie de la thermo-élasticité, et ils ont discuté l'effet des extrémités fermées du récipient sous pression. Pour valider la solution analytique, la distribution des contraintes a été également calculée à l'aide de la méthode des éléments finis (EF). Il a été constaté que les résultats analytiques étaient en bon accord avec les calculs et la solution analytique proposée fournit un moyen précis pour concevoir des récipients composites multicouches sous pression.

Ensuite, une solution analytique pour le champ de déplacement et l'état de contrainte correspondant dans des cylindres multicouches soumis à une pression et à une charge thermique sont développés par Solund et al. [4]. Les résultats analytiques sont vérifiées par les éléments finis en trois dimensions et ils sont adaptés aux applications d'ingénierie.

Bahoum et al. [5] présente un modèle de base qui peut être utilisé pour étudier les effets de la température et de la pression interne sur les distributions de contraintes et les champs de déplacement dans les cylindres composés. Le modèle analytique proposé est basé sur la théorie des cylindres à parois épaisses et les résultats de l'approche analytique développée sont comparés et validés à un modèle d'éléments finis axisymétrique.

1.3 Etude bibliographique sur les éléments finis basés sur l'approche en déformation en coordonnées cartésiennes :

L'utilisation de la méthode des éléments finis s'est avérée efficace pour trouver des solutions précises en élasticité linéaire, conduisant les chercheurs à

l'utiliser pour développer des éléments rectangulaires et triangulaires dans les coordonnées cartésiennes.

Les éléments finis basés sur l'approche en déformation montrent une convergence plus rapide avec un petit nombre d'éléments en maillage. Ce qui a motivé les chercheurs pour développer cette approche. Cette approche est basée sur des fonctions assumées pour les différentes composantes de déformation, et les fonctions de déplacement obtenu satisfaisaient la représentation exacte des mouvements du corps rigide.

Djouidi et Bahai [6] ont étudié le comportement dynamique des panneaux cylindriques, à l'aide d'un nouvel élément fini à base de déformation. L'élément développé est basé sur l'approche de déformation et n'a que cinq degrés de liberté nécessaires à chaque nœud de coin. Les champs de déplacement de l'élément satisfont l'exigence exacte de déplacements rigides du corps. L'efficacité de l'élément est testée en l'appliquant au calcul des fréquences naturelles des cylindres. Des recherches sont d'abord effectuées pour tester la convergence de l'élément et établir la taille du maillage à utiliser. L'élément est ensuite appliqué pour analyser les panneaux cylindriques.

Belounar et Guenfoud [7] ont développé un nouvel élément fini rectangulaire à quatre nœuds pour l'analyse linéaire de la flexion des plaques avec l'effet de cisaillement transversal. Le champ de déplacements de l'élément a été développé par l'utilisation de l'approche en déformation et il est basé sur des fonctions indépendantes supposées pour les différentes composantes de la déformation en satisfaisant les équations de compatibilité. L'élément possède trois degrés de liberté externes à chacun des quatre nœuds de coin et satisfait la représentation exacte du mouvement du corps rigide. Cet élément se révèle numériquement plus efficace que l'élément basé sur le déplacement correspondant et sa précision est évaluée à travers une série de tests relatifs aux plaques épaisses et minces.

Belarbi et Maalem [8] ont développé un élément rectangulaire basé sur l'approche en déformation, possédant deux d.d.l essentiels pour chacun des nœuds de coin, pour la résolution des problèmes plan d'élasticité linéaire en permettant d'améliorer la précision des éléments. Des tests numériques d'une poutre soumise à la

flexion et au cisaillement et en utilisant le concept de condensation statique, des solutions exactes ont été obtenues.

Rebiai et Belouar [9] ont développé, un nouvel élément fini membranaire pour l'analyse linéaire et matérielle non linéaire. Le champ des déplacements de cet élément a été développé par l'utilisation de l'approche basée sur la déformation, cet élément fini rectangulaire a trois degrés de liberté à chacun des quatre nœuds d'angle (les deux translations et la rotation dans le plan) et les fonctions de déplacement de l'élément développé satisfont la représentation exacte des modes corps rigide.

Belouar et al. [10] ont développé un élément ayant trois degrés de libertés à chacun des trois nœuds et se fondant sur la théorie Reissner/Mindlin et basée sur l'approche des déformations. L'évaluation de la performance de l'élément se fait à l'aide de plusieurs tests relatifs à des plaques de type modéré et à des plaques de différentes formes, où ils ont constaté que les résultats trouvés sont numériquement plus efficaces que l'élément bilinéaire.

1.4 Etude de la théorie d'élasticité plane :

Cette section est une généralité inspirée des références Zienkiewics et al. [11].

1.4.1 Relation contraintes –déformations:

Pour un matériau donné, sa relation de comportement ou sa loi constitutive permet de déterminer les contraintes en fonction des déformations, des variables internes ... Pour les matériaux dits élastiques linéaires, les contraintes sont des fonctions linéaires des déformations. Ces relations se traduisent sous la forme simple générale :

$$\sigma = D.\varepsilon + \sigma_0 \quad (1.1)$$

Où D est la matrice d'élasticité, σ_0 est le tenseur de contrainte à l'état initial (pour simplifier l'écriture du problème, nous supposons que $\sigma_0 = 0$ dans la suite).

L'équation (1.1) peut être écrite comme suit :

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = D \left(\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix} - \varepsilon_0 \right) \quad (1.2)$$

D'où :

$$[\varepsilon] = [D]^{-1}[\sigma] \quad (1.3)$$

1.4.2 Hypothèse de l'état plan de contraintes

Une structure est en état plan de contraintes quand elle est plane et mince et que les charges appliquées le sont dans le plan de la structure. L'épaisseur de la structure est toujours très petite par rapport aux autres dimensions.

Au niveau des contraintes, on parle d'un état plan de contraintes si les composantes de contrainte suivant la direction z sont nulles ($\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$).

Donc, on a les hypothèses suivantes :

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} + \varepsilon_{x0} \quad (1.4.a)$$

$$\varepsilon_y = -\frac{\nu\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} + \varepsilon_{y0} \quad (1.4.b)$$

$$\gamma_{xy} = 2\frac{(1+\nu)}{E}\tau_{xy} + \varepsilon_{xy0} \quad (1.4.c)$$

Et:

$$\sigma_z = 0 \quad (1.5)$$

Nous obtenons :

$$[D] = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

1.4.3. Hypothèse de l'état plan de déformations :

Ce modèle s'applique à un corps de section quelconque, constante, infiniment long, conventionnellement d'axe z, encastré à ses deux extrémités. Le corps est soumis à un chargement orthogonal à z uniforme sur toute sa longueur. Dans ces conditions, aucune dilatation suivant l'axe z n'est possible : chaque tranche ne se déformé que dans son plan.

D'où on peut écrire :

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} + \varepsilon_{x0} \quad (1.7.a)$$

$$\varepsilon_y = -\frac{\nu\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} + \varepsilon_{y0} \quad (1.7.b)$$

$$\gamma_{xy} = 2\frac{(1+\nu)}{E}\tau_{xy} + \varepsilon_{xy0} \quad (1.7.c)$$

Avec :

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E} + \varepsilon_{z0} = 0 \quad (1.8)$$

Ce qui nous donne :

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) - E\varepsilon_{z0} \quad (1.9)$$

En remplaçant cette équation dans l'équation (1.7), Nous obtenons :

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

Et le vecteur de déformation initiale :

$$\varepsilon_0 = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x0} & + & \nu\varepsilon_{z0} \\ \varepsilon_{y0} & + & \nu\varepsilon_{z0} \\ \gamma_{xy0} \end{Bmatrix} \quad (1.11)$$

Où :

E: est le module d'Young

ν : est le coefficient de Poisson.

1.4.5. Déformation initiale

En général, le matériau compris à l'intérieur des frontières de l'élément peut être soumis à des déformations initiales ε_0 telles que celle pouvant être provoquées par les changements de température, retrait, croissance cristallines etc....

$$\varepsilon_0 = [\varepsilon_{x0} \quad \varepsilon_{y0} \quad \varepsilon_{z0} \quad \gamma_{xy0} \quad \gamma_{yz0} \quad \gamma_{zx0}]^0 \quad (1.12)$$

Pour un matériau isotrope dans un élément soumis à une élévation de température T avec un coefficient de dilatation thermique α nous aurons :

$$\varepsilon_0 = \alpha T [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (1.13)$$

Car aucune déformation de cisaillement n'est provoquée par une dilatation thermique, donc pour l'état plan de contrainte :

$$\varepsilon_0 = \alpha T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \alpha T m \quad (1.14)$$

Pour l'état plan de déformation :

$$\varepsilon_0 = (1 + \nu) \alpha T m \quad (1.15)$$

1.4.6. Relation déformation –Déplacement :

La déformation totale en tout point à l'intérieur de l'élément peut être définie par :

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = S u \quad (1.16)$$

1.5 Formulation des éléments finis basés sur l'approche en déformation :

1.5.1 Les critères de convergence :

Le critère de convergence est une condition qui garantit la solution exacte avec les suppositions faites. Elle est obtenue en modélisant la structure par un nombre croissant d'éléments. Evidemment, la fonction de forme doit représenter que possible la distribution du champ de déplacement.

Le premier critère auquel la fonction de forme doit obéir est :

1. La fonction de forme choisie ne permet pas la déformation dans un élément quand le déplacement nodal est causé par un déplacement du corps rigide. Cette condition évidente peut être violée facilement si certains types de fonction de forme sont utilisés. Par conséquent, une attention doit être prise dans le choix de ces fonctions.

Le deuxième critère peut être formulé comme suit :

2. La fonction de déplacements doit être d'une telle forme que si les déplacements nodaux sont compatibles avec une condition de déformation constante, cette constante en fait doit être obtenue. On constate que pour passer au deuxième critère il faut d'abord satisfaire les exigences du premier critère, parce que les déplacements du corps rigide sont un cas particulier des déformations constantes avec une valeur nulle. Strictement, les deux critères nécessitent seulement d'être satisfaits dans la limite où la taille de l'élément tend vers zéro. Cependant, l'imposition de ces critères sur la taille de l'élément mène à une convergence rapide. Par conséquent, il est nécessaire que le critère suivant soit inclus aussi :

3. La fonction de forme doit être choisie de façon que la déformation à l'interface entre éléments soit très petite. Ce critère implique une certaine continuité de déplacements entre éléments. Dans le cas des déformations qui sont définies par les premières dérivées, les déplacements doivent être continus. Cependant, si les déformations sont définies par les deuxièmes dérivés, comme dans les cas des plaques et coques, les premières dérivées doivent être continues. Si le critère satisfait les conditions de compatibilité entre éléments, l'élément est dit compatible et la solution est assurée par le principe d'énergie minimale. Plusieurs éléments proposés sont incompatibles, cependant ces éléments doivent satisfaire la compatibilité entre éléments dans les limites du maillage raffiné.

1.5.2 L'avantage de l'approche en déformation :

Les avantages des éléments à modèle de déformation sont :

- satisfaction plus facile des deux principaux critères de convergences liées directement aux déformations (mode de déformations constantes et le mode de corps rigides).
- découplage plus facile des différentes composantes des déformations (un champ de déplacement découplé engendre des déformations couplées).
- possibilité d'enrichir le champ de déplacement par des termes d'ordre élevé sans l'introduction des nœuds intermédiaires.

1.5.3 Le développement des éléments finis basés sur l'approche en déformation :

Un élément basé sur le modèle de déformation signifie que sa formulation s'obtient en intégrant un champ de déformation défini auparavant, dont les fonctions sont indépendantes.

Cette idée est basée sur un calcul exact des termes représentant les modes rigides, les autres composantes du champ de déplacement sont basées sur l'intégration de présumées fonctions indépendantes de déformation et le tout vérifie les équations de compatibilité.

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{kl}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_l} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jl}}{\partial x_i \partial x_k} = 0 \quad (1.17)$$

Pour bien comprendre la procédure de développement du champ de déplacement par cette approche, on prend comme exemple l'élément **SBRIE** (**S**train **B**ased **R**ectangular **I**nplane **E**lasticity) développé par Sabir [12], en comparant le champ de déplacement obtenu par cette approche et celui obtenu par le modèle de déplacement.

Cet élément est de forme rectangulaire avec quatre nœuds et chaque nœud possède trois degrés de liberté, ainsi le champ de déplacement doit contenir huit constantes indépendantes.

Les trois constantes (a_1, a_2, a_3) représentent les composantes de déplacement du corps rigide de l'élément, et les cinq constantes (a_4, a_5, \dots, a_8) expriment le déplacement dû à la déformation de l'élément.

Les trois composantes de la déformation à un point quelconque sont donnés en termes de déplacements \bar{u} et \bar{v} par :

$$\varepsilon_x = \partial \bar{u} / \partial x \quad (1.18.a)$$

$$\varepsilon_y = \partial \bar{v} / \partial y \quad (1.18.b)$$

$$\gamma_{xy} = \partial \bar{u} / \partial y + \partial \bar{v} / \partial x \quad (1.18.c)$$

Si les déformations données par les équations (1.18) sont égales à zéro, l'intégration de ces équations différentielles conduit à :

$$\bar{u}_R = a_1 + f_1(y) \quad (1.19)$$

$$\bar{v}_R = a_2 + g_1(x) \quad (1.20)$$

Faisons les dérivées de ces deux équations et remplaçons dans l'équation (1.18.C), nous obtenons :

$$\frac{\partial g_1(x)}{\partial x} + \frac{\partial f_1(y)}{\partial y} = 0 \quad (1.21)$$

D'où :

$$\frac{\partial f_1(y)}{\partial y} = -a_3 \quad (1.22)$$

$$\frac{\partial g_1(x)}{\partial x} = a_3 \quad (1.23)$$

Après intégration des équations différentielles (1.22) et (1.23) on trouve:

$$f_1(y) = -a_3 y \quad (1.24)$$

$$g_1(x) = a_3 x \quad (1.25)$$

Si on remplace dans les équations (1.19) et (1.20), on trouve ces deux équations qui représentent les déplacements du corps rigide.

$$\bar{u}_R = a_1 - a_3 y \quad (1.26)$$

$$\bar{v}_R = a_2 + a_3 x \quad (1.27)$$

Où les composantes a_1 et a_2 représentent les mouvements de translation dans les directions x et y respectivement, a_3 représente la rotation dans le plan (figure 1.1).

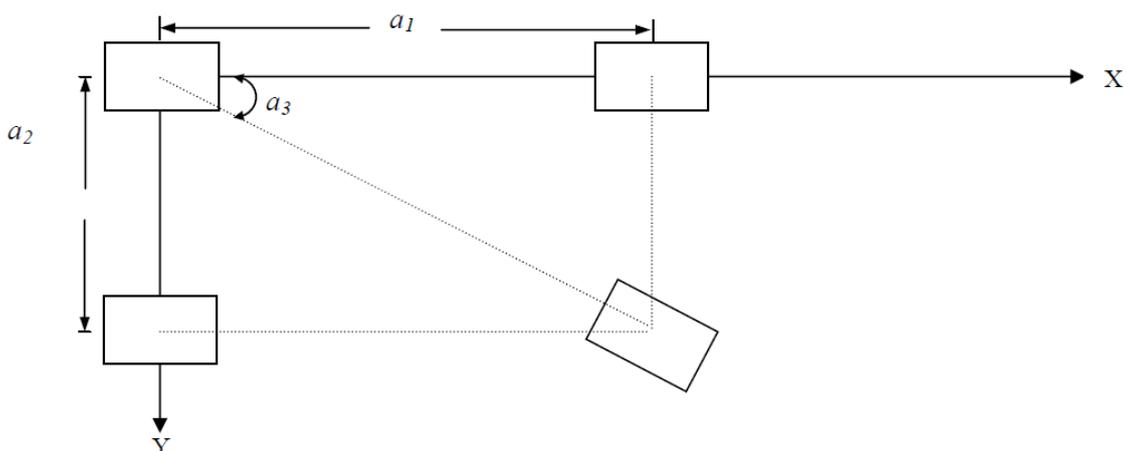


Figure 1.1 : le mouvement du corps rigide Sabir [12].

Les cinq constantes restantes doivent être employées pour décrire l'état déformé de l'élément et qui peuvent être arrangées comme suite :

$$\varepsilon_x = a_4 + a_5 y \quad (1.28.a)$$

$$\varepsilon_y = a_6 + a_7 x \quad (1.28.b)$$

$$\gamma_{xy} = a_8 \quad (1.28.c)$$

Ces déformations doivent vérifier l'équation de compatibilité pour l'élasticité plane formée en éliminant \bar{u} et \bar{v} de l'équation (1.18).

$$\frac{\delta^2 \varepsilon_x}{\delta^2 y} + \frac{\delta^2 \varepsilon_y}{\delta^2 x} = \frac{\delta^2 \gamma_{xy}}{\delta x \delta y} \quad (1.29)$$

En intégrant les équations différentielles (1.28), on trouve :

$$\bar{u}_s = a_4 x + a_5 xy + f_2(y) \quad (1.30)$$

$$\bar{v}_s = a_6 y + a_7 xy + g_2(x) \quad (1.31)$$

Les fonctions $f_2(y)$ et $g_2(x)$ sont obtenues en substituant (1.30) et (1.31) dans (1.28.c):

$$a_5 x + a_7 y + \frac{\partial g_2(x)}{\partial x} + \frac{\partial f_2(y)}{\partial y} = a_8 \quad (1.32)$$

Séparant cette équation en x et y respectivement, on obtient:

$$\frac{\partial g_2(x)}{\partial x} + a_5 x = c_1 \quad (1.33)$$

$$\frac{\partial f_2(y)}{\partial y} + a_7 y = c_2 \quad (1.34)$$

Telle que :

$$c_1 + c_2 = a_8 \quad (1.35)$$

Intégrant les équations différentielles (1.33) et (1.34), on obtient:

$$g_2(x) = c_1 x - a_5 \frac{x^2}{2} \quad (1.36)$$

$$f_2(y) = c_2 y - a_7 \frac{y^2}{2} \quad (1.37)$$

D'où :

$$\bar{u}_s = a_4 x + a_5 xy + \frac{a_8}{2} y - a_7 \frac{y^2}{2} \quad (1.38)$$

$$\bar{v}_s = a_6 y + a_7 xy + \frac{a_8}{2} x - a_5 \frac{x^2}{2} \quad (1.39)$$

En rajoutant ces deux équations aux équations (1.26) et (1.27), on trouve le champ de déplacement de cet élément :

$$\bar{u}(x, y) = \bar{u}_R + \bar{u}_s = a_1 - a_3y + a_4x + a_5xy + \frac{a_8}{2}y - a_7\frac{y^2}{2} \quad (1.40)$$

$$\bar{v}(x, y) = \bar{v}_R + \bar{v}_s = a_2 + a_3x + a_6y + a_7xy + \frac{a_8}{2}x - a_5\frac{x^2}{2} \quad (1.41)$$

On note que les déformations sont indépendantes l'une de l'autre, de sorte qu'aucun couplage inutile existe entre l'effet de flexion et celui de cisaillement. Par conséquent un état de flexion pur peut être obtenu. En plus, les fonctions de déplacement contiennent des termes du second degré pour tenir compte des changements de courbure.

Il est intéressant de comparer quelques caractéristiques de cet élément avec l'élément équivalent basé sur le modèle de déplacement, soit l'élément rectangulaire bilinéaire *BR* le plus utilisé dont le nom dérive de sa capacité de représenter des déplacements linéaires sur les deux cotés du rectangle, ses fonctions de déplacement sont données par :

$$\bar{u}(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy \quad (1.42)$$

$$\bar{v}(x, y) = a_5 + a_6x + a_7y + a_8xy \quad (1.43)$$

Puisqu'il n'existe que deux nœuds sur chaque coté de l'élément, seuls les déplacements linéaires peuvent être interpolés si la continuité inter éléments reste conservée. Donc sous charge, l'élément demeure continu, sans se chevaucher.

Les déformations sont données en différenciant les fonctions des déplacements.

D'où

$$\varepsilon_x = a_2 + a_4y \quad (1.44.a)$$

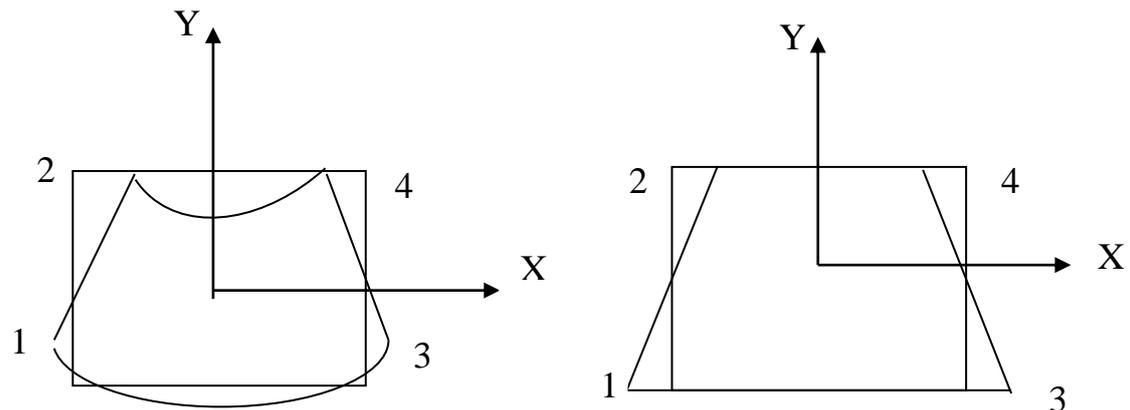
$$\varepsilon_y = a_7 + a_8x \quad (1.44.b)$$

$$\gamma_{xy} = a_3 + a_6 + a_4x + a_8y \quad (1.44.c)$$

Ces déformations ne sont pas indépendantes, depuis qu'elles sont couplées par les constantes a_4 et a_8 . Par conséquent, il est clair que l'élément bilinéaire ne peut pas représenter un état de cisaillement indépendant à moins que $a_4 = a_8 = 0$, ce cas représente les champs ε_x et ε_y comme des constantes, d'ici un état de flexion pure

associé avec des déformations directes ε_x et ε_y linéaires et une déformation tangentielle γ_{xy} , nulle ne peut pas être obtenu avec l'élément bilinéaire.

Dans cet élément les déformations proposées satisfaisaient automatiquement les équations de compatibilités.



(a) Etat déformation pour le modèle basé sur la déformation

(b) Etat déformation pour le modèle basé sur le déplacement

Figure 1.2: Comportement d'un élément à quatre nœuds lors de la flexion dans le plan Sabir [12].

1.6 Conclusion:

En conclusion, l'étude bibliographique nous a permis de constater l'efficacité et les performances de l'approche en déformation à l'analyse des structures d'après la grande diversité des résultats obtenus

CHAPITRE 2

LES ELEMENTS SECTEUR EN COORDONNEES POLAIRES

2.1 Introduction :

L'étude des structures ayant une frontière circulaire nécessite d'utiliser les coordonnées polaires. Dans ce contexte, nous aborderons dans ce chapitre quelques équations de base coordonnées polaire ainsi que les éléments secteurs en coordonnées polaires basés sur l'approche en déformation.

2.2 Les élément secteurs en coordonnées polaires :

Comme dans le première chapitre, concernant la structure courbe doit être divisée en un grand nombre d'éléments, dans les cas des cylindres, il est plus approprié et économique d'employer les éléments secteurs en coordonnées polaires.

Dans le cas des frontières circulaires, il est plus d'utiliser des éléments secteurs en coordonnées polaires. Par conséquent, beaucoup de chercheurs ont utilisé l'approche en déformation pour développés les éléments secteurs en coordonnées polaires. Raju et Rao [13] ont présenté la matrice de rigidité pout déterminer l'état plan dans la zone élastique par l'analyse des cylindres sous pression interne, tout en déterminant l'efficacité de cet élément. Plusieurs secteurs élément ont été développés en coordonné polaire pour l'analyse des problèmes d'élasticité générale [14-17].

2.3 Formulation des éléments secteurs basés sur l'approche en déformation :

Pour le développement des éléments secteurs à modèle de déformation, trois approches peuvent être utilisées :

➤ **Intégration directe :**

Les variables cinématiques sont directement exprimées en coordonnées polaires par intégration des équations reliant les déformations aux déplacements en coordonnées polaire. Cette approche a été employée par Bouzrira et al. [18].

➤ **Transformation de coordonnées :**

Les variables cinématiques sont développées en coordonnées cartésiennes, puis transformées en coordonnées polaires. Cette approche a été employée par Sabir et Salhi [19].

➤ **Approche directe :**

Cette approche consiste à utiliser le champ des déplacements obtenu en coordonnées cartésiennes et remplacer x et y par r et θ (les coordonnées polaires). Cette approche a été employée par Raju et Rao [13].

2.4 Les équations basiques en coordonnées polaires :

En général, les coordonnées polaires sont utilisées avantageusement lorsqu'il existe un degré de symétrie axiale. Les exemples comprennent les cylindres, les disques, les anneaux des poutres courbes, et les plaques à ouvertures circulaires.

Le système de coordonnées polaire (r, θ) et le système cartésien (x, y) sont liés entre eux par les expressions suivantes:

$$x = r \cos \theta \quad r^2 = x^2 + y^2 \quad (2.1)$$

$$y = r \sin \theta \quad \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad (2.2)$$

Ces équations donnent :

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos \theta, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin \theta \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y}{r^2} = -\frac{\sin \theta}{r}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{r^2} = \frac{\cos \theta}{r} \quad (2.4)$$

Tout dérivé par rapport à x et y dans le système cartésien peut être transformé en dérivés par rapport à r et θ comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \theta} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (2.6)$$

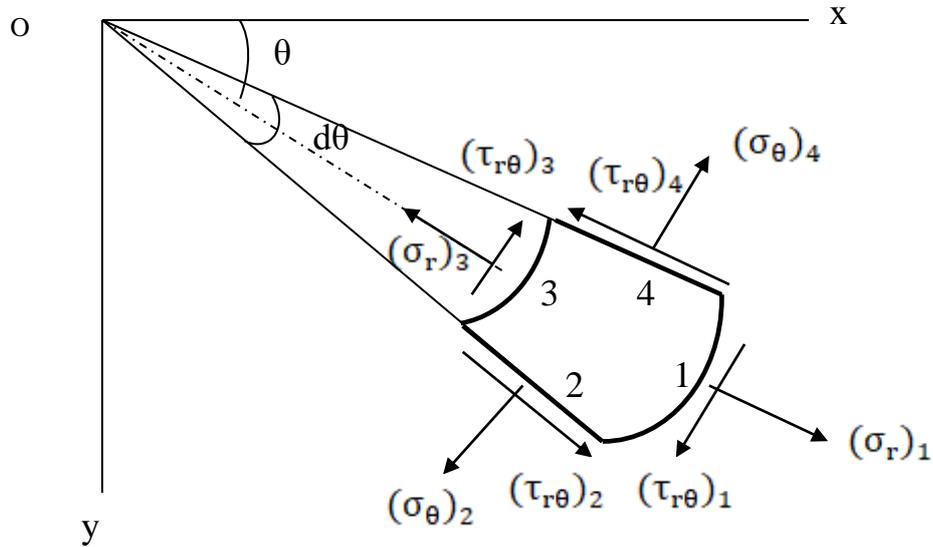


Figure 2.1 : Elément de contrainte dans les coordonnées polaires.
(Timocshenko et Goodier [21]).

2.4.1 Equation d'équilibre en coordonnées polaires

L'équation d'équilibre de l'élément abcd (figure.2.1) dans la direction radiale et circonférentielle en tenant compte les composantes de force de volume F_r et F_θ est :

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + F_r = 0 \quad (2.7)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + F_\theta = 0 \quad (2.8)$$

2.4.2 Relation déformation - déplacement en coordonnées polaires

Considérez maintenant la déformation de l'élément infinitésimal abcd, désignons par u et v le déplacement radial et circonférentielle respectivement. Et par ε_r , ε_θ et $\gamma_{r\theta}$ les composantes de la déformation (figure 2.2).

Sous l'action de déplacement radial, on observe une dilatation radiale de bc :

$$(\varepsilon_r)_u = \frac{u + \frac{\partial u}{\partial r} dr - u}{dr} = \frac{\partial u}{\partial r} \quad (2.9)$$

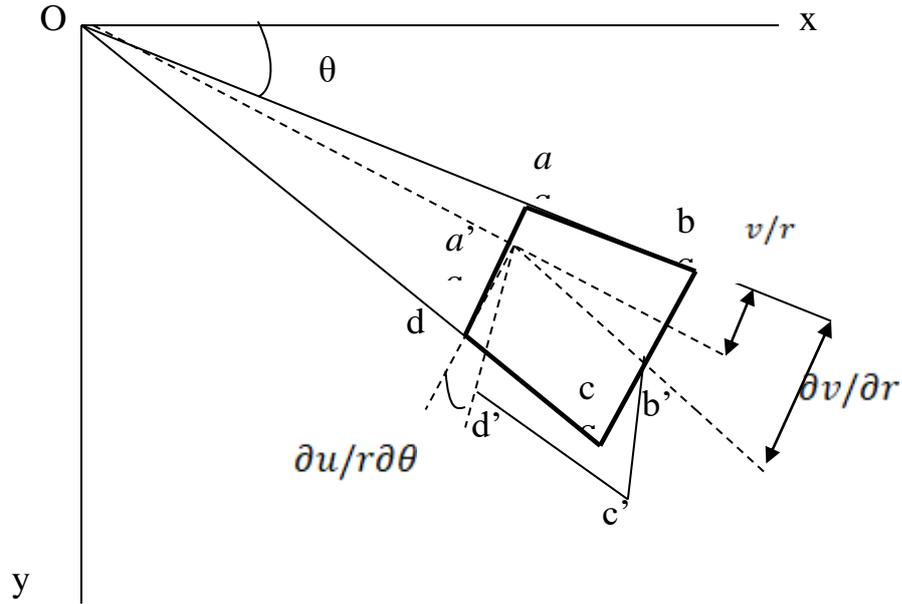


Figure 2.2 : Déformation et déplacement d'un élément en coordonnées polaires
(Timocshenko et Goodier [21])

Une dilatation circonférentielle de ad :

$$(\varepsilon_{\theta})_u = \frac{(r+u)d\theta - rd\theta}{rd\theta} = \frac{u}{r} \quad (2.10)$$

Une variation d'angle cda (diminution) :

$$(\gamma_{r\theta})_u = \frac{u + \left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)d\theta - u}{rd\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \quad (2.11)$$

Sous l'action de déplacement circonférentielle, on observe une dilatation circonférentielle d'ad :

$$(\varepsilon_{\theta})_v = \frac{v + \left(\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)d\theta - v}{rd\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad (2.12)$$

Une variation angulaire :

$$(\gamma_{r\theta})_v = \frac{v + \frac{\partial v}{\partial \theta}d\theta - v}{\partial r} - \frac{v}{r} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \quad (2.13)$$

En résumés, les équations géométriques sont :

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \quad (2.14.a)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} \quad (2.14.b)$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r} \quad (2.14.c)$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{r\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ \frac{1}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (2.15)$$

Ou :

$$\varepsilon = Su \quad (2.16)$$

2.4.3 L'équation de compatibilité en coordonnées polaires

Cette équation peut être formée par l'élimination de u , v à partir des équations (2.14), d'où:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{r\theta}}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial^2 \theta} - r \frac{\partial^2 \varepsilon_\theta}{\partial^2 r} - 2 \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r} + \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \gamma_{r\theta}}{\partial \theta} = 0 \quad (2.17)$$

2.4.4 Distribution symétrique des contraintes le long d'un axe

Si la distribution des contraintes est symétrique par rapport à un axe, les composantes des contraintes ne dépend pas de θ mais uniquement de r , et par conséquence, $\tau_{r\theta} = 0$ et les équations d'équilibre devient :

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + F_r = 0 \quad (2.18)$$

Et les équations géométriques s'écrivent :

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \quad (2.19.a)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} \quad (2.19.b)$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \quad (2.19.c)$$

2.5 Précédent éléments secteurs développés :

Parmi les éléments secteurs en coordonnées polaires basés sur l'approche en déformation, on peut citer :

2.5.1 Élément de Raju et Rao [13]:

L'un des éléments finis les plus utilisés dans l'analyse des problèmes de l'élasticité plane est l'élément quadrilatère bilinéaire.

En coordonnées cartésiennes les fonctions de déplacement sont données par :

$$u = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy \quad (2.20.a)$$

$$v = a_5 + a_6x + a_7y + a_8xy \quad (2.20.b)$$

Raju et Rao ont développé un élément secteur en utilisant le champ de déplacement (2.20) :

$$u = a_1 + a_2r + a_3\theta + a_4r\theta \quad (2.21.a)$$

$$v = a_5 + a_6r + a_7\theta + a_8r\theta \quad (2.21.b)$$

Cet élément donne de mauvais résultats quand il s'agit d'étudier un problème de flexion pure.

2.5.2 Élément de Sabir et Salhi [19]

Sabir et Salhi ont utilisé la deuxième approche pour développer un élément secteur ayant deux degrés de liberté en chaque nœud. Le système des coordonnées et des déplacements sont montrées sur la figure (2.3) :

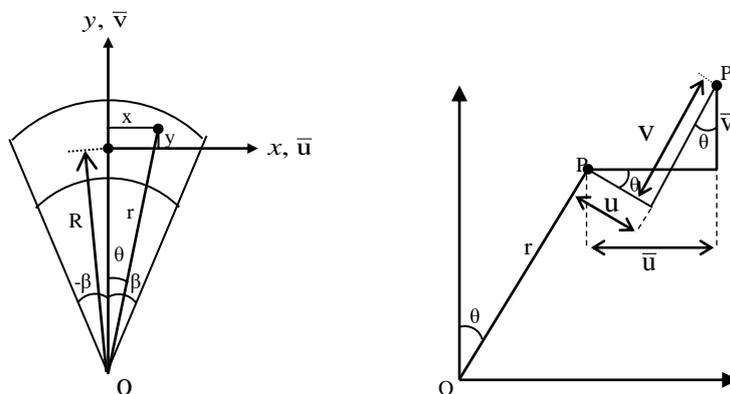


Figure 2.3 : Système de coordonnées et déplacements (Sabir et Salhi [19]).

Les fonctions de déplacement sont données par :

$$\bar{u} = a_1 - a_3 y + a_4 x + a_5 xy + a_8 y/2 - a_7 y^2/2 \quad (2.22.a)$$

$$\bar{v} = a_2 + a_3 x + a_6 y + a_7 xy + a_8 x/2 - a_5 x^2/2 \quad (2.22.b)$$

Cet élément secteur sans rotation dans le plan développé en coordonnées cartésiennes peut être transformé en un élément secteur en coordonnées polaires en utilisant les relations suivantes :

$$x = r \sin \theta \quad (2.23.a)$$

$$y = r \cos \theta - R \quad (2.23.b)$$

Où R est le rayon de courbure de la ligne circonférentielle moyenne.

Aussi, les déplacements \bar{u} et \bar{v} d'un point P déplacé au point P' dans un système de coordonnées polaire (figure 2.3) s'écrivent sous la forme suivante :

$$u = \bar{u} \sin \theta + \bar{v} \cos \theta \quad (2.24.a)$$

$$v = \bar{u} \cos \theta - \bar{v} \sin \theta \quad (2.24.b)$$

Les fonctions finales de déplacement sont données en termes de coordonnées polaires par :

$$\begin{aligned} u = & a_1 \sin \theta + a_2 \cos \theta + a_3 R \sin \theta + a_4 r \sin^2 \theta \\ & + a_5 r \sin^2 \theta (r \cos \theta/2 - R) + a_6 \cos \theta (r \cos \theta - R) \\ & + a_7 \sin \theta (r^2 \cos^2 \theta - R^2) + a_8 \sin \theta (r \cos \theta - R/2) \end{aligned} \quad (2.25.a)$$

$$\begin{aligned} v = & a_1 \cos \theta - a_2 \sin \theta + a_3 (R \cos \theta - r) + a_4 r \sin \theta \cos \theta \\ & + a_5 r \sin \theta (r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta/2) + a_6 \sin \theta (R - r \cos \theta) \\ & - a_7 (r^2 \cos^3 \theta - R^2 \cos \theta + 2r^2 \sin^2 \theta \cos \theta - 2rR)/2 + a_8 (\cos 2\theta - R \cos \theta)/2 \end{aligned} \quad (2.25.b)$$

2.5.3 Élément de Djoudi [14] , Sabir et Salhi [20] :

Dans cette section, la même approche est utilisée pour développer un élément secteur de douze degrés de liberté où la rotation dans le plan est introduite.

Le champ de déformation est donné par :

$$\varepsilon_x = a_4 + a_6 y + a_{10} y^2 + 2a_{11} xy^3 \quad (2.26.a)$$

$$\varepsilon_y = a_7 + a_8 x - a_{10} x^2 - 2a_{11} yx^3 \quad (2.26.b)$$

$$\gamma_{xy} = 2a_5 + a_6 x + a_8 y + 2a_9 y + 2a_{12} x \quad (2.26.c)$$

Ces équations doivent satisfaire l'équation de compatibilité et la singularité de la matrice de transformation.

Après intégration de ces équations, le champ du déplacement final en coordonnées

cartésiennes est donnée par:

$$\bar{u} = a_1 - a_2 y + a_4 x + a_5 y + a_6 xy + a_9 y^2 + a_{10} xy^2 + a_{11} x^2 y^2 \quad (2.27.a)$$

$$\bar{v} = a_1 + a_3 x + a_5 x + a_7 y + a_8 xy - a_{10} y x^2 - a_{11} y^2 x^3 + a_{12} x^2 \quad (2.27.b)$$

$$\phi = a_3 - a_6 x/2 + a_8 y/2 - a_9 y - 2a_{10} xy - 3a_{11} x^2 y^2 + a_{12} x \quad (2.27.c)$$

Il est évident que la compatibilité du déplacement le long des côtés n'est pas satisfaite. Parce qu'il y a deux nœuds à chaque côté, ce qui autorise seulement la variation linéaire de déplacements. Et puisque la fonction des déplacements de l'équation (2.27) n'est pas linéaire, la compatibilité du déplacement le long des côtés communs est violée.

Les fonctions de formes obtenues en coordonnées cartésiennes sont transformées en coordonnées polaires, par les relations (2.23), pour obtenir la fonction de forme de l'élément dans un système en coordonnées polaires :

$$u = a_1 \sin\theta + a_2 \cos\theta + a_3 R \sin\theta + a_4 r \sin^2\theta - a_5 \sin\theta (R - 2r \cos\theta) - a_6 r \sin^2\theta (R - r \cos\theta) + a_7 \cos\theta (r \cos\theta - R) + a_8 r \sin\theta \cos\theta (r \cos\theta - R) + a_9 \sin\theta (r \cos\theta - R)^2 \quad (2.28)$$

$$+ a_{10} R r \sin^2\theta (R - r \cos\theta) - a_{11} R r^2 \sin^3\theta (R - r \cos\theta)^2 + a_{12} r^2 \sin^2\theta \cos\theta$$

$$v = a_1 \cos\theta - a_2 \sin\theta - a_3 (r - R \cos\theta) + a_4 r \sin\theta \cos\theta - a_5 (r + R \cos\theta - 2r \cos^2\theta) + a_6 r \sin\theta \cos\theta (r \cos\theta - R) + a_7 \sin\theta (R - r \cos\theta) + a_8 r \sin^2\theta (R - r \cos\theta) \quad (2.29)$$

$$+ a_9 \cos\theta (r \cos\theta - R)^2 + a_{10} r \sin\theta (r \cos\theta - R) (r - R \cos\theta)$$

$$- a_{11} r^2 \sin^2\theta (r - R \cos\theta) (r \cos\theta - R)^2 - a_{12} r^2 \sin^3\theta.$$

La rotation plane ϕ devient :

$$\phi = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{r \partial \theta} - \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right) \right) \quad (2.30)$$

$$\phi = a_3 - a_6 r/2 \sin\theta - a_8 (R - r \cos\theta)/2 - a_9 (r \cos\theta - R) - 2a_{10} r \sin\theta (r \cos\theta - R) - 3a_{11} r^2 \sin^2\theta (R - r \cos\theta) + a_{12} r \sin\theta \quad (2.31)$$

2.5.4 Élément de Belarbi SBS4 [15]

Belarbi et Charif [15] ont employé la même approche que Raju et Rao [13], et ont développé un élément secteur basé sur le modèle de déformation. Cet élément ayant trois degrés de liberté à chaque nœud.

Le champ de déplacement proposé en coordonnées cartésiennes est :

$$\bar{u} = a_1 - a_3 y + a_4 x + a_5 y + a_6 xy + a_8 \frac{y^2}{2} + a_9 y^2 + a_{10} xy^2 + a_{11} x^2 y^3 \quad (2.32.a)$$

$$\bar{v} = a_2 + a_3 x + a_5 x + a_6 \frac{x^2}{2} + a_7 y + a_8 xy - a_{10} x^2 y - a_{11} y^2 x^3 + a_{12} x^2 \quad (2.32.b)$$

$$\phi = a_3 - a_9 y - 2a_{10} xy - 3a_{11} x^2 y^2 + a_{12} x \quad (2.32.c)$$

En remplaçant x et y par r et θ , le champ de déplacement devient :

$$u = a_1 - a_3 \theta + a_4 r + a_5 \theta + a_6 r \theta + a_8 \frac{\theta^2}{2} + a_9 \theta^2 + a_{10} r \theta^2 + a_{11} r^2 \theta^3 \quad (2.33.a)$$

$$v = a_2 + a_3 r + a_5 r + a_6 \frac{r^2}{2} + a_7 \theta + a_8 r \theta - a_{10} r^2 \theta - a_{11} \theta^2 r^3 + a_{12} r^2 \quad (2.33.b)$$

$$\phi = a_3 - a_9 \theta - 2a_{10} r \theta - 3a_{11} r^2 \theta^2 + a_{12} r \quad (2.33.c)$$

2.5.5 Élément de Bouzrira et al. [18]:

Bouzrira et al. [18] ont employé la première approche pour développer un élément secteur annulaire de quatre nœuds avec trois degrés de liberté en chaque nœud.

u représente le déplacement radial, v représente le déplacement tangentiel et ϕ représente la rotation dans le plan. Puisque, il y a trois degrés de liberté dans chaque nœud l'ensemble des fonctions de déplacement doit avoir douze termes.

Le déplacement du corps rigide en coordonnées polaires est représenté par les équations suivantes :

$$u = a_1 \cos \theta + a_2 \sin \theta \quad (2.34.a)$$

$$v = -a_1 \sin \theta + a_2 \cos \theta + a_3 r \quad (2.34.b)$$

$$\phi = a_3 \quad (2.34.c)$$

Pour un élément secteur de quatre nœuds avec trois degrés de liberté en chaque nœud, le champ du déplacement doit avoir douze termes. Le déplacement du corps rigide est exprimé en trois termes a_1 , a_2 et a_3 déjà obtenus. Pour représenter les déformations de l'élément secteur, il reste neuf constantes, ces neuf constantes ont été réparties entre les trois déformations comme suit :

$$\varepsilon_r = a_4 + a_5\theta + a_6r \quad (2.35.a)$$

$$\varepsilon_\theta = a_7 + a_8\theta + a_9/r + (a_6r) \quad (2.35.b)$$

$$\gamma_{r\theta} = a_{10} + a_{11}\theta/r + a_{12}r + (a_6r\theta/2) \quad (2.35.c)$$

Après intégration de ces équations, les fonctions des déplacements de l'élément secteur en coordonnées polaires sont données par :

$$u = a_1\cos\theta + a_2\sin\theta + a_4r + a_5r\theta + 1/2 a_6r^2 + a_9 + a_{11} \quad (2.36)$$

$$v = -a_1\sin\theta + a_2\cos\theta - a_4r\theta - a_5r\frac{\theta^2}{2} + \frac{1}{2}a_6r^2\theta + a_7r\theta + a_8r\frac{\theta^2}{2} - a_{11}\theta + (a_{10} - a_5)r\log r + a_{12}r^2 \quad (2.37)$$

La rotation dans le plan est donnée par :

$$\phi = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right) \right) \quad (2.38)$$

En remplaçant u et v, on obtient:

$$\phi = a_3 - a_4\theta - a_5 \left(\frac{2 + \theta^2 + 2\log r}{2} \right) + \frac{3}{4}a_6r\theta + a_7\theta + \frac{1}{2}a_8\theta^2 + a_{10} \left(\frac{1}{2} + \log r \right) - \frac{1}{2}a_{11} \frac{\theta}{r} + \frac{3}{2}a_{12}r \quad (2.39)$$

2.5.6 Élément de Bouzriba et Bouzrira [16], Bouzriba [22]:

Bouzriba et Bouzrira [16] ont employé la première approche pour développer un élément secteur de quatre nœuds et ayant trois degrés de liberté chacune destiné à l'analyse des cylindres sous pression et changement de température. L'efficacité de l'élément à été établie et la convergence des résultats pour les contraintes et les déplacements de cet élément s'est révélée plus rapide en comparissant avec ceux disponible dans la littérature.

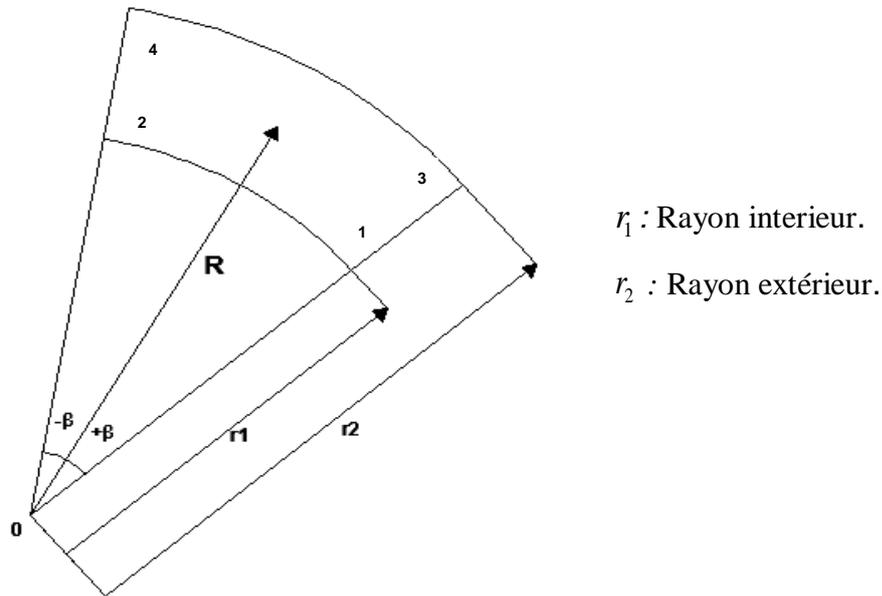


Figure 2.4 : L'élément secteur en coordonnées polaires (Bouzirba et Bouzirra[16]).

Le déplacement du corps rigide en coordonnées polaires est représenté par les équations suivantes :

$$u_R = \cos \theta a_1 + \sin \theta a_2 \quad (2.40.a)$$

$$v_R = -\sin \theta a_1 + \cos \theta a_2 + r a_3 \quad (2.40.b)$$

$$\phi_R = a_3 \quad (2.40.c)$$

Le champ de déplacement correspondant au mouvement du corps rigide est donné par les équations (2.40). Où les composantes a_1 et a_2 représentent les mouvements de translation dans les directions r et θ respectivement, a_3 représente la rotation dans le plan.

Cet élément possède quatre nœuds avec trois degrés de liberté en chaque nœud (u, v, ϕ), ainsi le champ du déplacement doit contenir douze constantes indépendantes. Trois d'entre elles représente le mouvement du corps rigide (a_1, a_2, a_3), il reste neuf constantes (a_4, a_5, \dots, a_{12}) pour exprimer le déplacement dû à la déformation de l'élément.

Soit :

$$\varepsilon_r = a_4 + 2ra_6 + \theta a_{10} + 3r^2 a_{11} \quad (2.41.a)$$

$$\varepsilon_\theta = a_5 + ra_6 - \frac{\theta r^3}{3} a_8 + \theta a_9 + r^2 a_{11} \quad (2.41.b)$$

$$\gamma_{r\theta} = a_7 + \frac{\theta}{r} a_6 - \frac{r^3 \theta^2}{2} a_8 + \frac{\theta}{r} a_{10} - 2ra_{12} \quad (2.41.c)$$

Après intégration de ces équations, les déplacements u et v de l'élément secteur, dus à la contribution des déformations :

$$u_s = ra_4 + (1 + r^2)a_6 + (1 + \theta r)a_{10} + r^3 a_{11} \quad (2.42.a)$$

$$v_s = -r\theta a_4 + r\theta a_5 - \theta a_6 - \frac{r^4 \theta^2}{6} a_8 + \frac{r\theta^2}{2} a_9 - \left(\frac{r\theta^2}{2} + \theta \right) a_{10} - r \log(r)(a_{10} - a_7) - 2r^2 a_{12} \quad (2.42.b)$$

$$\begin{aligned} \phi_s = & -\theta a_4 + \theta a_5 - \frac{\theta}{2r} a_6 + \left(\frac{1}{2} + \log(r) \right) a_7 - \frac{5r^3 \theta^2}{12} a_8 \\ & + \frac{\theta^2}{2} a_9 - \left(1 + \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta}{2r} + \log(r) \right) a_{10} - 3ra_{12} \end{aligned} \quad (2.42.c)$$

Ajoutant les fonctions du corps rigide aux expressions des déplacements dus aux déformations, les fonctions des déplacements de l'élément secteur en coordonnées polaires deviennent :

$$u = a_1 \cos \theta + a_2 \sin \theta + ra_4 + (1 + r^2)a_6 + (1 + \theta r)a_{10} + r^3 a_{11} \quad (2.43.a)$$

$$\begin{aligned} v = & -a_1 \sin \theta + a_2 \cos \theta + a_3 r - r\theta a_4 + r\theta a_5 - \theta a_6 - \frac{r^4 \theta^2}{6} a_8 + \frac{r\theta^2}{2} a_9 \\ & - \left(\frac{r\theta^2}{2} + \theta \right) a_{10} - r \log(r)(a_{10} - a_7) - 2r^2 a_{12} \end{aligned} \quad (2.43.b)$$

$$\begin{aligned} \phi = & a_3 - \theta a_4 + \theta a_5 - \frac{\theta}{2r} a_6 + \left(\frac{1}{2} + \log(r) \right) a_7 - \frac{5r^3 \theta^2}{12} a_8 + \frac{\theta^2}{2} a_9 \\ & - \left(1 + \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta}{2r} + \log(r) \right) a_{10} - 3ra_{12} \end{aligned} \quad (2.43.c)$$

2.5.7 Élément d'Abderrahmani et al. [17]

Abderrahmani et al. [17] ont développé un nouvel élément fini rectangulaire pour la flexion de plaques minces basé sur l'approche en déformation avec un comportement élastique linéaire. Cet élément possède les trois principaux degrés de liberté par nœud, à savoir, un déplacement transversal (w) et deux rotation normales

(θ_x, θ_y) autour des axes x et y respectivement. La première méthode « approche directe » mentionnée ci-dessus est utilisé pour développer un nouvel élément secteur basé sur les fonctions de forme de l'élément SBRPK [17]. Cet élément a quatre nœuds et trois degrés de liberté par nœud (Figure.2.5), en remplaçant x et y avec r et Θ ; Par conséquent :

Les fonctions de déplacement sont données par :

$$w = a_1 - a_2 r - a_3 \theta - a_4 \frac{r^2}{2} - a_5 \frac{r^3}{6} - a_6 \frac{r^2 \theta}{2} - a_7 \frac{r^3 \theta}{6} - a_8 \frac{\theta^2}{2} - a_9 \frac{\theta^3}{6} - a_{11} \frac{r \theta^3}{6} - a_{12} \frac{r \theta}{2} \quad (2.44.a)$$

$$\beta_r = a_2 + a_4 r + a_5 \frac{r^2}{2} + a_6 r \theta + a_7 \frac{r^2 \theta}{2} + a_9 \frac{\theta^2}{2} + a_{11} \frac{\theta^3}{6} + a_{12} \frac{\theta}{2} \quad (2.44.b)$$

$$\beta_\theta = a_3 + a_6 \frac{r^2}{2} + a_7 \frac{r^3}{6} + a_8 \theta + a_9 r \theta + a_{10} \frac{\theta^2}{2} + a_{11} \frac{r \theta^2}{2} + a_{12} \frac{r}{2} \quad (2.44.c)$$

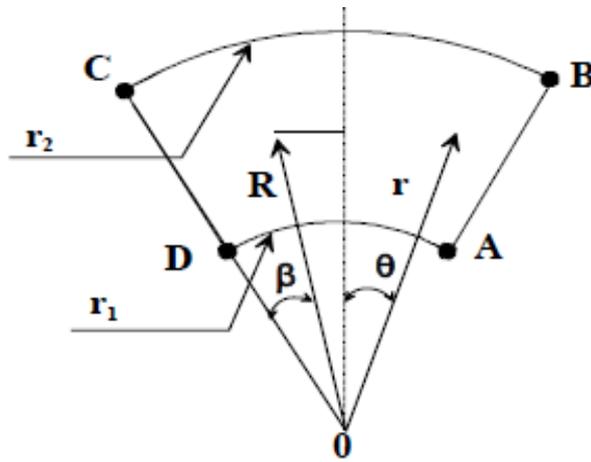


Figure 2.5 : Géométrie de l'élément secteur SBRPK (Abderrahmani et al. [17]).

Où :

r_1 : Rayon interne.

r_2 : Rayon extérieur.

R : Le rayon de courbure de la ligne circonférentielle centrale de l'élément.

La relation de déplacement de déformation dans les coordonnées polaire écrite comme suit :

$$\varepsilon_{rr} = -\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \quad (2.45.a)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = -\left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right) \quad (2.45.b)$$

2.6 Formulation de la matrice de rigidité élémentaire

Dans notre étude, nous utiliserons l'élément secteur développée par Bouzriba et Bouzriba [16].

Ecrivons les équations (2.43) sous forme matricielle :

$$\{u_e\} = [p]\{\alpha_i\} \quad (2.46)$$

Exprimons le vecteur de déplacement nodaux $\{\delta_e\}$ d'après l'équation (2.46). comme suit :

$$\{\delta_e\} = [c]\{\alpha_i\} \quad (2.47)$$

Avec :

$$\{\delta_e\} = \{u_1, v_1, \phi_1, \dots, u_4, v_4, \phi_4\}^T \quad (2.48)$$

$$\{\alpha_i\} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{12}\}^T \quad (2.49)$$

$[c]$: Représente la matrice de transformation de dimension 12×12

L'équation (2.47) nous a permis d'écrire :

$$\{\alpha_i\} = [c]^{-1}\{\delta_e\} \quad (2.50)$$

Donc :

$$\{u_e\} = [p][c]^{-1}\{\delta_e\} \quad (2.51)$$

Et le vecteur de déformation peut être exprimé comme suit :

$$\{\varepsilon\} = [s]\{u_e\} = [s][p][c]^{-1}\{\delta_e\} = [B][c]^{-1}\{\delta_e\} \quad (2.52)$$

$[B]$: la matrice de déformation

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2r & 0 & 0 & 0 & \theta & 3r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & r & 0 & -\frac{\theta r^3}{3} & \theta & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\theta}{r} & 1 & -\frac{\theta^2 r^3}{2} & 0 & \frac{\theta}{r} & 0 & -2r \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

Utilisons la méthode énergétique pour dériver la matrice de rigidité élémentaire. En égalisant l'énergie de déformation avec le travail extérieure exercé par les forces et les chargements extérieurs.

L'énergie de déformation est donnée par :

$$U = 1/2 \int_v \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dv \quad (2.54)$$

Le travail extérieur W est :

$$W = 1/2 \{\delta_e\}^T \{p_e\} \quad (2.55)$$

Egalisons les équations (2.54) et (2.55), nous obtenons :

$$1/2 \int_v \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dv = 1/2 \{\delta_e\}^T \{p_e\}. \quad (2.56)$$

Avec :

$$\{\sigma\} = [D] (\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}) \quad (2.57)$$

On a :

$$\{\varepsilon\} = [B][c]^{-1} \{\delta_e\} \text{ et } \{\varepsilon\}^T = \{\delta_e\}^T [c^{-1}]^T [B]^T \quad (2.58)$$

D'où :

$$\begin{aligned} & 1/2 \{\delta_e\}^T [c^{-1}]^T \int_v [B]^T [D][B][c^{-1}] \{\delta_e\} dv \\ & - 1/2 \{\delta_e\}^T [c^{-1}]^T \int_v [B]^T [D] \{\varepsilon_0\} dv = 1/2 \{\delta_e\}^T \{p_e\} \end{aligned} \quad (2.59)$$

$$[c^{-1}]^T \int_v [B]^T [D][B] dv [c^{-1}] \{\delta_e\} - [c^{-1}]^T \int_v [B]^T [D] \{\varepsilon_0\} dv = \{p_e\} \quad (2.60)$$

$$\Rightarrow [K^e] \{\delta_e\} + \{F^e\} = \{p_e\} \quad (2.61)$$

$[K^e]$: La matrice de rigidité élémentaire.

$\{F^e\}$: Le vecteur force dû au gradient thermique.

En coordonnées polaire :

$$[K^e] = [c^{-1}]^T \left[\int_{r_1-\beta}^{r_2} \int_{-\beta}^{\beta} [B]^T [D][B] t r d r d \theta \right] [c^{-1}] \quad (2.62)$$

$$\{F^e\} = -[c^{-1}]^T \left[\int_{r_1-\beta}^{r_2} \int_{-\beta}^{\beta} [B]^T [D] \{\varepsilon_0\} t r d r d \theta \right]. \quad (2.63)$$

Pour une déformation initiale provoquée par un changement de température, le vecteur force dû au gradient thermique devient :

$$\{F^e\} = -[c^{-1}]^T \left[\int_{r_1-\beta}^{r_2} \int_{-\beta}^{\beta} [B]^T [D] (1+\nu) \alpha T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} t r d r d \theta \right]. \quad (2.64)$$

T : Le gradient de température.

α : Coefficient de dilatation thermique.

2.6.1 Calcul des contraintes

Pour ce modèle, La relation contrainte – déformation est donnée par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \tau_{r\theta} \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{r\theta} \end{Bmatrix} - (1+\nu)[D] \alpha T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.65)$$

2.7 Conclusion :

Dans ce chapitre, la formulation de l'élément secteur développé par Bouzriba et Bouzrira [16] basé sur l'approche en déformation a été abordée, où il y a quatre nœuds avec trois degrés de liberté en chaque nœud, cet élément sera employé pour l'analyse des cylindres sous l'influence de la pression et de la température.

CHAPITRE 3

LES CYLINDRES MULTICOUCHES SOUS CHARGEMENT DE PRESSION ET DE TEMPERATURE

3.1 Introduction :

Les cylindres sont des structures qui peuvent confiner des fluides sous pression. Ils sont largement utilisés dans les usines chimiques et nucléaires ainsi que l'industrie pétrolière et gazière.

Dans ce chapitre, nous aborderons les solutions analytiques de déplacement et des contraintes dans des cylindres multicouches supportant des pressions et sous l'effet de température disponibles dans la littérature.

3.2 Cylindre monocouche sous pression et température :

3.2.1 Solution analytique :

Nous allons présenter dans cette section l'état de contrainte et de déplacement dans un cylindre monocouche à paroi épaisse de rayons a et c selon Timoshenko et Goodier [21], et soumis à une pression intérieure P_i et une pression extérieure P_e . Les faces de cylindre sont à des températures T_a et T_b comme le montre la figure (3.1).

Le module de Young, le coefficient de poisson, et le coefficient de dilatation thermique sont donnés respectivement par : E , ν , et α .

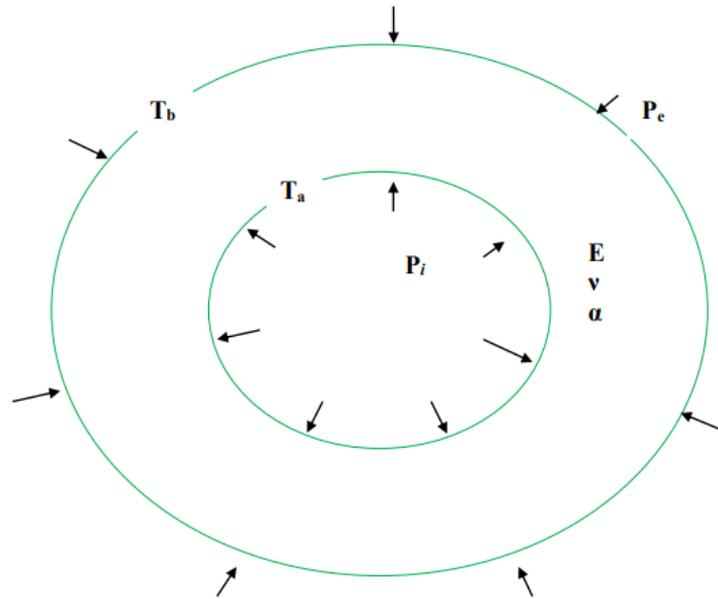


Figure 3.1 : Cylindre monocouche sous pression et température

Les équations de déplacement radial u , et des contraintes normales (σ_r , σ_θ) sont :

$$u = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \frac{1}{r} \int_a^r T r dr + C_1 r + \frac{C_2}{r} \quad (3.1)$$

$$\sigma_r = -\frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{1}{r^2} \int_a^r T r dr + \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{C_1}{1-2\nu} - \frac{C_2}{r^2} \right) \quad (3.2)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{1}{r^2} \int_a^r T r dr - \frac{\alpha E T}{1-\nu} + \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{C_1}{1-2\nu} + \frac{C_2}{r^2} \right) \quad (3.3)$$

C_1 et C_2 : sont des constantes d'intégration à déterminer en appliquant les conditions aux limites.

Le changement de température prend une forme logarithmique comme suit:

$$T = (T_a - T_b) \frac{\ln\left(\frac{b}{r}\right)}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} + T_b \quad (3.4)$$

Appliquons les conditions aux limites suivantes :

$$\sigma_r(r = a) = -P_i \quad (3.5.a)$$

$$\sigma_r(r = b) = -P_e \quad (3.5.b)$$

Remplaçons ces équations dans (3.2), on obtient:

$$\frac{-\alpha E}{1-\nu} \frac{1}{a^2} \int_a^a T r dr + \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{C_1}{1-2\nu} - \frac{C_2}{a^2} \right) = -P_i \quad (3.6.a)$$

$$\frac{-\alpha E}{1-\nu} \frac{1}{b^2} \int_a^b T r dr + \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{C_1}{1-2\nu} - \frac{C_2}{b^2} \right) = -P_e \quad (3.6.b)$$

Ecrivons les équations (3.6) sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{1-2\nu} & -\frac{1}{a^2} \\ \frac{1}{1-2\nu} & \frac{1}{b^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P_i \left(\frac{1+\nu}{E} \right) \\ \frac{1+\nu}{E} \left(-P_e + \frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{1}{b^2} \int_a^b T r dr \right) \end{Bmatrix} \quad (3.7)$$

Ou autrement :

$$[K]\{C\} = \{B\} \quad (3.8)$$

Ce qui nous a permis d'écrire :

$$\{C\} = [K]^{-1} \{B\} \quad (3.9)$$

3.3 Cylindre composé sous pression et température :

Les cylindres composés sont fabriqués à partir de deux cylindres ou plus. Bahoum et al. [5] ont analysé comment la température et la pression interne influencent la distribution des contraintes et les déplacements dans des cylindres composés sous l'état plan de déformation.

3.3.1 Solution analytique

Nous allons présenter dans cette section l'état de contrainte et de déplacement dans un cylindre composé à parois épaisses [5], de rayon intérieur a et de rayon extérieur c , soumis à une pression intérieure P_i et une pression extérieure P_e . Les parois intérieure et extérieure de cylindre composé sont maintenues à des températures T_a et T_b respectivement (figure 3.2).

Le module de Young, le coefficient de poisson, le coefficient de dilatation thermique, et la conductivité thermique de chaque cylindre sont présentés par E_i , ν_i , α_i , et λ_i respectivement ($i=1,2$).

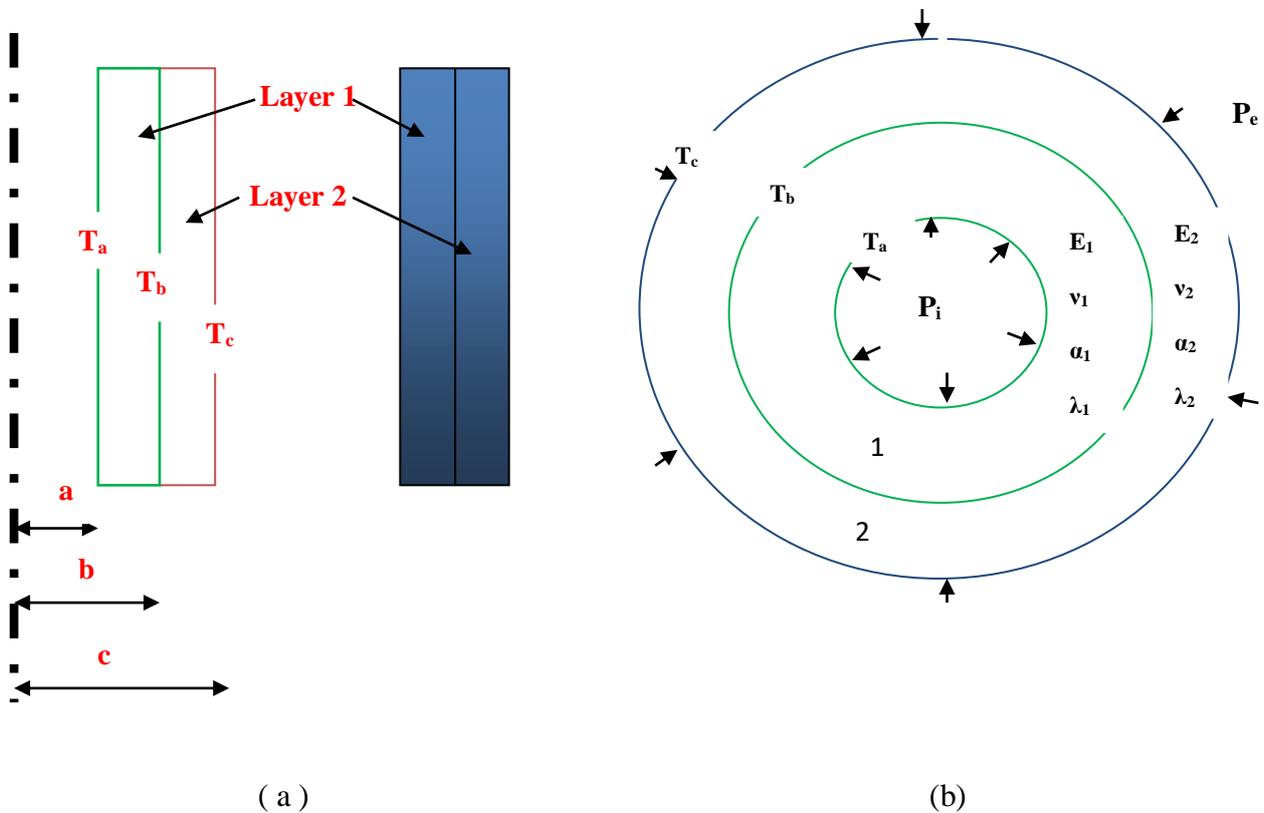


Figure 3.2 : Cylindre composé

L'équation (3.10) donne la variation radiale de température $T(r)$ pour chaque cylindre

C_{yi} ($i=1,2$):

$$T_{cyi}(r) = (T_{in} - T_{ou}) \frac{\ln\left(\frac{r_{ou}}{r}\right)}{\ln\left(\frac{r_{ou}}{r_{in}}\right)} + T_{ou} \quad (3.10)$$

T_{in} , T_{ou} , r_{in} , et r_{ou} présente la température interne, température externe, le rayon interne et le rayon externe pour chaque cylindre C_{yi} .

Considérons l'un des deux cylindres, $C_{yi}=1,2$ soumis à la variation radiale de température T_{cyi} , Les relations contrainte-déformation sont données par :

$$\sigma_r^i = \frac{E_i}{(1+\nu_i)(1-2\nu_i)} \left[(1-\nu_i)\varepsilon_r^i + \nu_i\varepsilon_\theta^i - (1+\nu_i)\alpha_i T_{cyi} \right] \quad (3.11 .a)$$

$$\sigma_\theta^i = \frac{E_i}{(1+\nu_i)(1-2\nu_i)} \left[(1-\nu_i)\varepsilon_\theta^i + \nu_i\varepsilon_r^i - (1+\nu_i)\alpha_i T_{cyi} \right] \quad (3.11 .b)$$

L'équation d'équilibre pour chaque cylindre C_{yi} avec une distribution symétrique des contraintes le long d'un axe est :

$$\frac{d\sigma_r^i}{dr} + \frac{\sigma_r^i}{r} - \frac{\sigma_\theta^i}{r} = 0 \quad (3.12)$$

Et les relations déformation-déplacement sont :

$$\varepsilon_r^i = \frac{du_i}{dr}; \varepsilon_\theta^i = \frac{u_i}{r}; \varepsilon_z^i = 0 \quad (3.13)$$

À partir des équations (3.11.a), (3.11.b) et (3.13), l'équation. (3.12) devient, en terme de déplacement radial comme suit:

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{du_i}{dr} \right] = \left(\frac{1+\nu_i}{1-\nu_i} \right) \alpha_i \frac{dT_{cyi}}{dr} \quad (3.14)$$

L'intégration de l'équation. (3.14) donne l'équation de déplacement radial pour chaque cylindre.

$$u_i(r) = \left(\frac{1+\nu_i}{1-\nu_i} \right) \left(\frac{\alpha_i}{r} \right) \int_{r_m}^r r T_{cyi} dr + C_{i1} r + \frac{C_{i2}}{r} \quad (3.15)$$

Avec :

C_{i1} et C_{i2} : sont les constantes d'intégration pour le cylindre $C_{yi} = 1, 2$.

En utilisant le déplacement, donné par équation (3.15) et les relations déformation-déplacement à partir de l'équation (3.13), les contraintes radiales et tangentielles, données par l'équation (3.11) deviennent :

$$\sigma_r^i(r) = E_i \left[-\frac{\alpha_i}{(1-\nu_i)r^2} \int_{r_m}^r r T_{cyi} dr + \frac{C_{i1}}{(1+\nu_i)(1-2\nu_i)} - \frac{C_{i2}}{(1+\nu_i)r^2} \right] \quad (3.16.a)$$

$$\sigma_\theta^i(r) = E_i \left[-\frac{\alpha_i}{(1-\nu_i)r^2} \int_{r_m}^r r T_{cy1} dr + \frac{C_{i1}}{(1+\nu_i)(1-2\nu_i)} + \frac{C_{i2}}{(1+\nu_i)r^2} - \frac{\alpha_i T_{cyi}}{(1+\nu_i)} \right] \quad (3.16.b)$$

Les constantes d'intégration C_{ij} sont déterminées en utilisant les conditions aux limites dans le cylindre composé. Ces conditions aux limites sont liées à l'application de la pression interne, p_i , à la continuité du déplacement radial et à la contrainte radiale à l'interface des deux cylindres. Elles sont résumées comme suit :

$$\sigma_r^1(a) = -P_i \quad ; \quad \sigma_r^2(c) = 0 \quad (3.17.a)$$

$$\sigma_r^1(b) = \sigma_r^2(c) \quad ; \quad u_1(b) = u_2(b) \quad (3.17.b)$$

Il en résulte :

$$\begin{bmatrix} 1 & K_{12} & -1 & K_{24} \\ 1 & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ 1 & K_{32} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & K_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{21} \\ C_{12} \\ C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Autre écriture

$$[C] = [K]^{-1} [B] \quad (3.19)$$

Avec :

$$K_{22} = \frac{(1-2\nu_1)}{b^2} = \frac{a^2}{b^2} K_{22} = \frac{C^2}{b^2} K_{44} \quad (3.20)$$

$$K_{23} = -\left(\frac{E_1}{E_2}\right) \left(\frac{1+\nu_1}{1+\nu_2}\right) \left(\frac{1-2\nu_1}{1-2\nu_2}\right) = -K_{24} \left(\frac{b^2}{1-2\nu_2}\right) \quad (3.21)$$

$$B_1 = -\left(\frac{1+\nu_1}{1-\nu_1}\right) \left(\frac{\alpha_1}{b^2}\right) \int_a^b \rho T_{cy1} dr = -B_2 \frac{1}{1-2\nu_1} \quad (3.22)$$

$$B_3 = -\frac{(1-2\nu_1)(1+\nu_1)}{E_1} P_i \quad (3.23)$$

$$B_4 = \alpha_2 \left(\frac{1+\nu_2}{1-\nu_2}\right) \left(\frac{1-2\nu_2}{C^2}\right) \int_a^b r T_{cy2} dr \quad (3.24)$$

La température à l'interface des deux cylindre peut être calculée en fonction de la température interne et externe par :

$$T_b = \frac{\lambda_1 \ln\left(\frac{c}{b}\right) T_a + \lambda_2 \ln\left(\frac{b}{a}\right) T_c}{\lambda_1 \ln\left(\frac{c}{b}\right) + \lambda_2 \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \quad (3.25)$$

3.4 Cylindres multicouches sous pression :

Dans cette section, nous présentons la méthode pratique développée par Xiang et al. [1] pour trouver la solution exacte dans un cylindre creux à N couche soumis à des pressions uniformes sur les surfaces intérieure et extérieure. La pression de contact entre deux couches voisines peut être évaluée simplement en se basant sur deux algorithmes récursifs simples.

3.4.1 Solution analytique :

Considérons un cylindre creux circulaire avec N couches soumis à des pressions uniformes sur les surfaces intérieures et extérieures P_i et P_e respectivement (figure 3.3). L'épaisseur de chaque couche i est définie par les rayons R_0, R_1, \dots, R_N , et le matériau de chaque couche est supposé être homogène, isotrope, et linéaire élastique.

Le module de Young et le coefficient de poisson de chaque couche sont notés par E_i et ν_i respectivement.

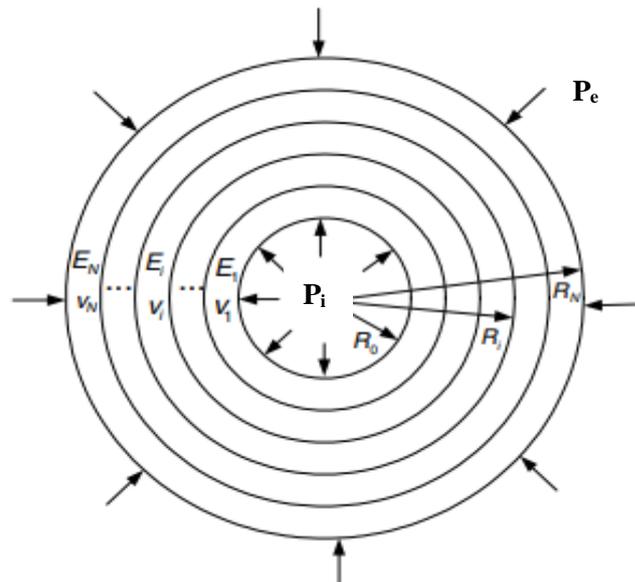


Figure 3.3: Cylindre creux avec N couches.

Selon Lamé, les contraintes normales ($\sigma_{r,i}, \sigma_{\theta,i}$) et le déplacement radial u_i pour chaque couche i peut être s'exprimer par:

$$\sigma_{r,i} = \frac{A_i}{r^2} + C_i \quad (3.26.a)$$

$$\sigma_{\theta,i} = -\frac{A_i}{r^2} + C_i \quad (3.26.b)$$

$$u_i = \alpha_i \frac{A_i}{r} + \beta_i C_i r + I_i \cos(\theta) + K_i(\theta) \quad (3.26.c)$$

$\alpha_i ; \beta_i ; I_i ; K_i$: Sont des constants à déterminer.

Vu la symétrie de ce problème, $I_i = K_i = 0$.

$$\alpha_i = -\frac{1+\nu_i}{E_i}; \beta_i = \frac{(1-2\nu_i)(1+\nu_i)}{E_i} \quad (\text{Etat plan de déformation}) \quad (3.27)$$

La continuité des contraintes et des déplacements aux interfaces permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \sigma_{r,i} \Big|_{r=R_i} &= \sigma_{r,i+1} \Big|_{r=R_i} \\ u_i \Big|_{r=R_i} &= u_{i+1} \Big|_{r=R_i} \end{aligned} \quad (3.28)$$

Ce qui donne les relations entre les constantes (A_{i+1}, C_{i+1}) en fonction des constantes (A_i, C_i) comme suit :

$$C_{i+1} = \frac{\alpha_{i+1} - \alpha_i}{\alpha_{i+1} - \beta_{i+1}} \frac{A_i}{R_i^2} + \frac{\alpha_{i+1} - \beta_i}{\alpha_{i+1} - \beta_{i+1}} C_i \quad (3.29.a)$$

$$A_{i+1} = \frac{\alpha_i - \beta_{i+1}}{\alpha_{i+1} - \beta_{i+1}} A_i + \frac{\beta_i - \beta_{i+1}}{\alpha_{i+1} - \beta_{i+1}} C_i R_i^2 \quad (3.29.b)$$

Et les constantes A_i et C_i sont lié par les pressions de contact à l'interface de deux couches voisines i et $i-1$ comme suit:

$$\frac{A_i}{R_{i-1}^2} + C_i = -q_{i-1} \quad (3.30)$$

$$\frac{A_{i+1}}{R_{i+1}^2} + C_{i+1} = -q_{i+1} \quad (3.31)$$

Avec : q_{i-1} ($i = 2, \dots, N$) est la pression de contact entre la couche $i-1$ et la couche i .

Considérons $q_0 = p_i$ et $q_N = p_e$, on trouve :

$$\frac{A_i}{R_o^2} + C_i = -q_o = -P_i \quad (3.32.a)$$

$$\frac{A_N}{R_N^2} + C_N = -q_N = -P_e \quad (3.32.b)$$

A partir les équations (3.29.a) et (3.29.b), la relation entre $(A_i ; C_i)$ et $(p_{i-1} ; p_{i+1})$ prend la forme suivante :

$$\left\{ \frac{A_i}{R_i^2} = \frac{T_i q_{i-1} - q_{i+1} (\alpha_{i+1} - \beta_{i+1})}{S_i - T_i} \gamma_i \right. \quad (3.33.a)$$

$$C_i = \frac{S_i q_{i-1} - q_{i+1} (\alpha_{i+1} - \beta_{i+1})}{S_i - T_i} \quad (3.33.b)$$

Où :

$$\{S_i = (\alpha_i - \beta_{i+1}) \gamma_{i-1} \gamma_i + (\alpha_{i-1} + \alpha_i) \gamma_i \quad (3.34.a)$$

$$\{T_i = (\alpha_{i+1} - \beta_i) + (\beta_i + \beta_{i+1}) \gamma_{i+1} \quad (3.34.b)$$

$$\left\{ \gamma_{i+1} = \frac{R_i^2}{R_{i+1}^2} \right. \quad (3.34.c)$$

En gardant les équations (3.33.a) et (3.33.b) et en notant $\sigma_{r,i} \Big|_{r=R_i} = \frac{A_i}{R_i^2} + C_i = -q_i$, la relation entre les pressions de contact est présentée par :

$$q_{i+1} = \frac{(S_i - T_i) q_i - (S_i - \gamma_i T_i) q_{i-1}}{(\alpha_{i+1} - \beta_{i+1}) (\gamma_i - 1)} \quad (3.35)$$

Et l'équation (3.33) s'écrit :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{A_i}{R_i^2} &= \frac{\gamma_i}{\gamma_i - 1} (q_{i-1} - q_i) \\ C_i &= -\frac{1}{\gamma_i - 1} (\gamma_i q_{i-1} - q_i) \end{aligned} \right. \quad (3.36)$$

Pour établir l'expression (A_i, C_i) en termes de P_i et P_e , exprimons d'abord q_i en termes de q_0 et q_1 . et introduisons les dénnotations suivantes:

$$a_0 = 0 ; a_I = 1 ; b_0 = 1 ; b_I = 0$$

Deux algorithmes récursifs simples sont proposés comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{i+1} = \frac{(S_i - T_i)a_i - (S_i - \gamma_i T_i)a_{i-1}}{(\alpha_{i+1} - \beta_{i+1})(\gamma_i - 1)} \\ b_{i+1} = \frac{(S_i - T_i)b_i - (S_i - \gamma_i T_i)b_{i-1}}{(\gamma_i - 1)(\alpha_{i+1} - \beta_{i+1})} \end{array} \right. \quad (3.37)$$

$$i = 1, 2, \dots, (N-1).$$

Donc, les équations (3.35) sont données par:

$$p_i = a_i q_1 + b_i q_0 \quad (3.38.a)$$

Considérons $q_N = P_e$:

$$q_1 = \frac{Q - b_N q_0}{a_N} \quad (3.38.b)$$

Et la pression de contact peut être obtenue comme suit:

$$p_i = \frac{a_i}{a_N} P_e + \left(b_i - \frac{b_N}{a_N} a_i \right) p_i \quad (3.39)$$

Conclusion :

Les solutions analytiques relatives aux cylindres multicouches sous chargement combiné de pression et de température disponibles dans la littérature sont présentées dans ce chapitre, afin de comparer les résultats numériques obtenues par l'approche en déformation avec ceux évaluées par ces solutions.

CHAPITRE 4

RESULTATS ET DISCUSSIONS

4.1 Introduction :

Après avoir présenté les solutions analytiques des contraintes et de déplacement dans des cylindres multicouche indiqués dans la littérature, Nous comparons les résultats obtenus par ces solutions avec ceux obtenus par l'élément secteur développé par Bouzriba et Bouzrira [16].

4.2 Mise en œuvre de l'approche en déformation:

Ce qui suit est un sommaire des étapes de base pour la résolution complète d'un problème par l'approche en déformation :

Début du programme

1. Lecture des données
2. Initialisation des matrices de rigidité, des vecteurs forces, et contraintes.
3. Construction de la matrice de rigidité élémentaire K et les vecteurs forces élémentaires F .
4. Appliquer les conditions aux limites
5. Résolution du système: $K U=F$.
6. Évaluer les contraintes.
7. Impression des résultats

Fin du programme

4.3 Résultats et discussion :

4.3.1 cylindre monocouche :

Etant donné un cylindre monocouche supportant des pressions et des températures uniformes.

Les caractéristiques géométriques et mécaniques sont présentées sur la figure (4.1).

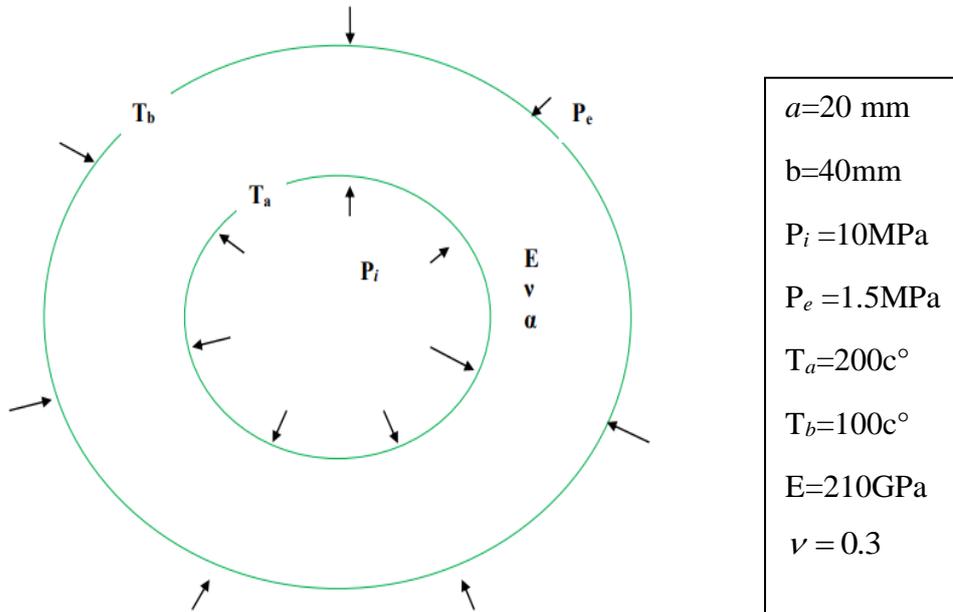


Figure 4.1 : Cylindre épais sous pression interne et température.

Pour des raisons de symétrie, seul un quart du cylindre est modélisé (figure (4.2)).

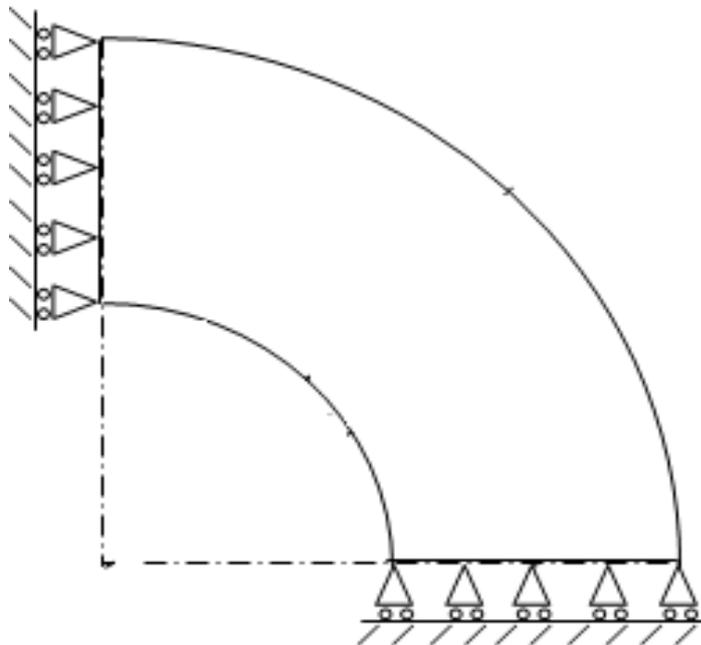


Figure 4.2: Idéalisaton du cylindre par éléments finis Bouzriba et Bouzrira [16].

Les résultats de déplacement radial, et des contraintes normales obtenus par l'élément secteur utilisé seront comparés avec ceux obtenues par les équations (3.1), (3.2) et (3.3).

Trois cas ont été présentés, le premier cas est concerné par un cylindre monocouche sous l'effet de pression, le deuxième est d'un cylindre sous l'effet de température, puis sous l'effet de pression et température.

Cas 1 : Cylindre monocouche sous pression :

Les figures (4.3), (4.4) et (4.5) représentent la variation de déplacement radial u , de la contrainte radiale σ_r et de la contrainte tangentielle σ_θ dans le cylindre sous chargement de pression.

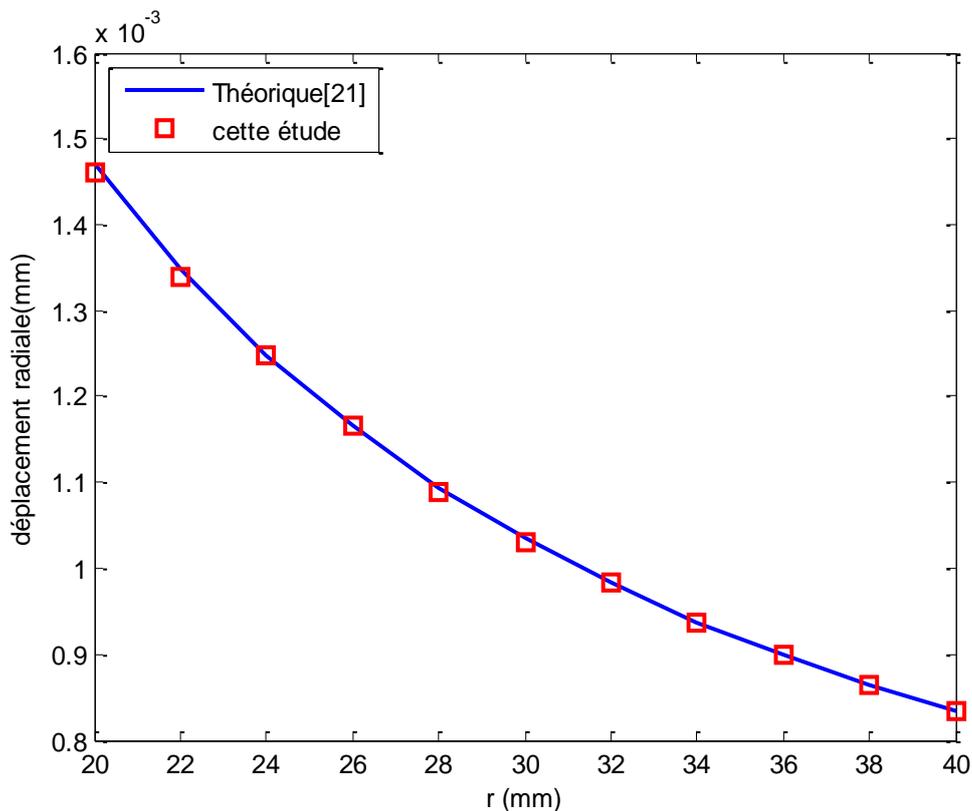


Figure 4.3 : Variation de u sous pression

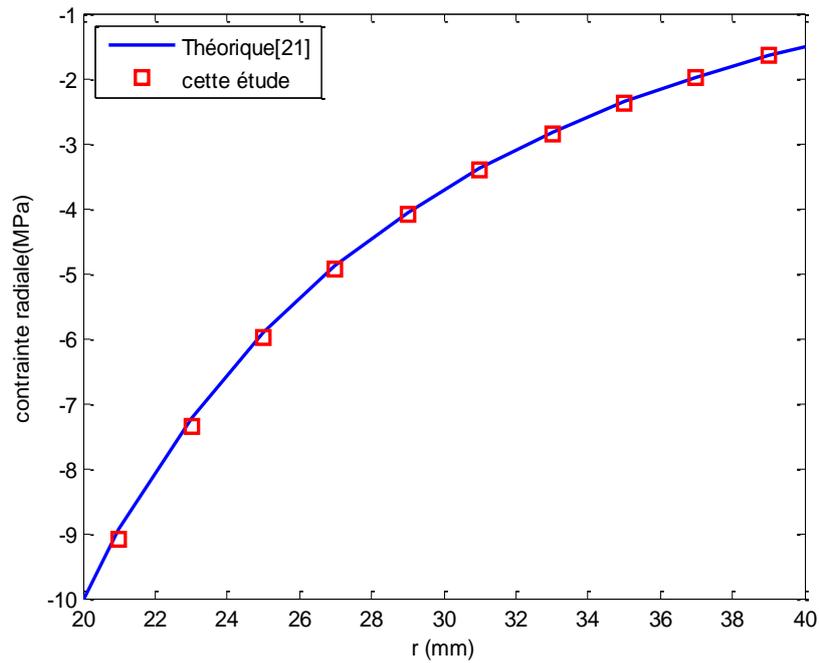


Figure 4.4 : Variation de σ_r sous pression

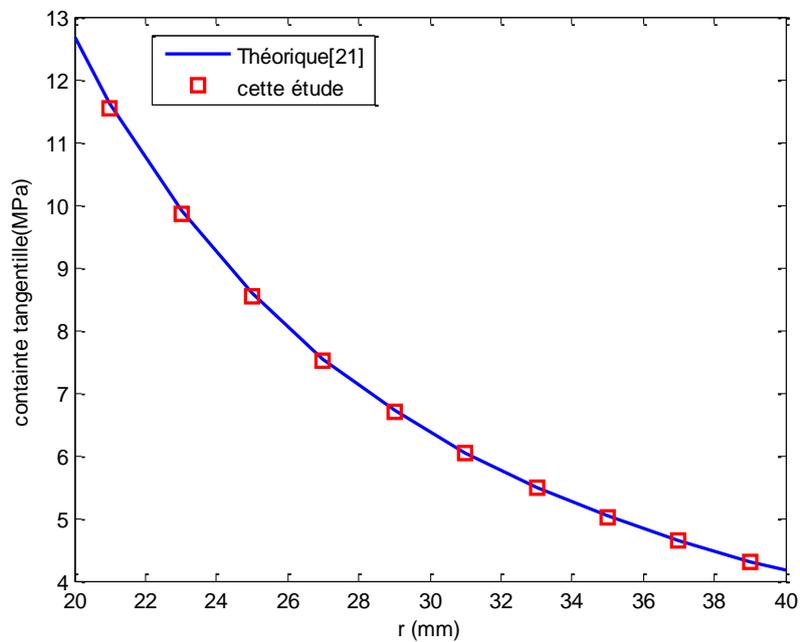


Figure 4.5 : Variation de σ_θ sous pression

D'après ces figures, on peut constater que les résultats numériques sont confondus avec les résultats théoriques, ce qui montre la performance de l'élément secteur développé par Bouzriba et Bouzira [16].

Cas2 : Cylindre monocouche sous température :

Considérons le même cylindre soumis seulement à un gradient de température. Les figures (4.6), (4.7) et (4.8) représentent la variation de déplacement radial u , de la contrainte radiale σ_r et de la contrainte tangentielle σ_θ dans le cylindre sous chargement de température obtenus par l'élément secteur et comparés par les résultats théoriques.

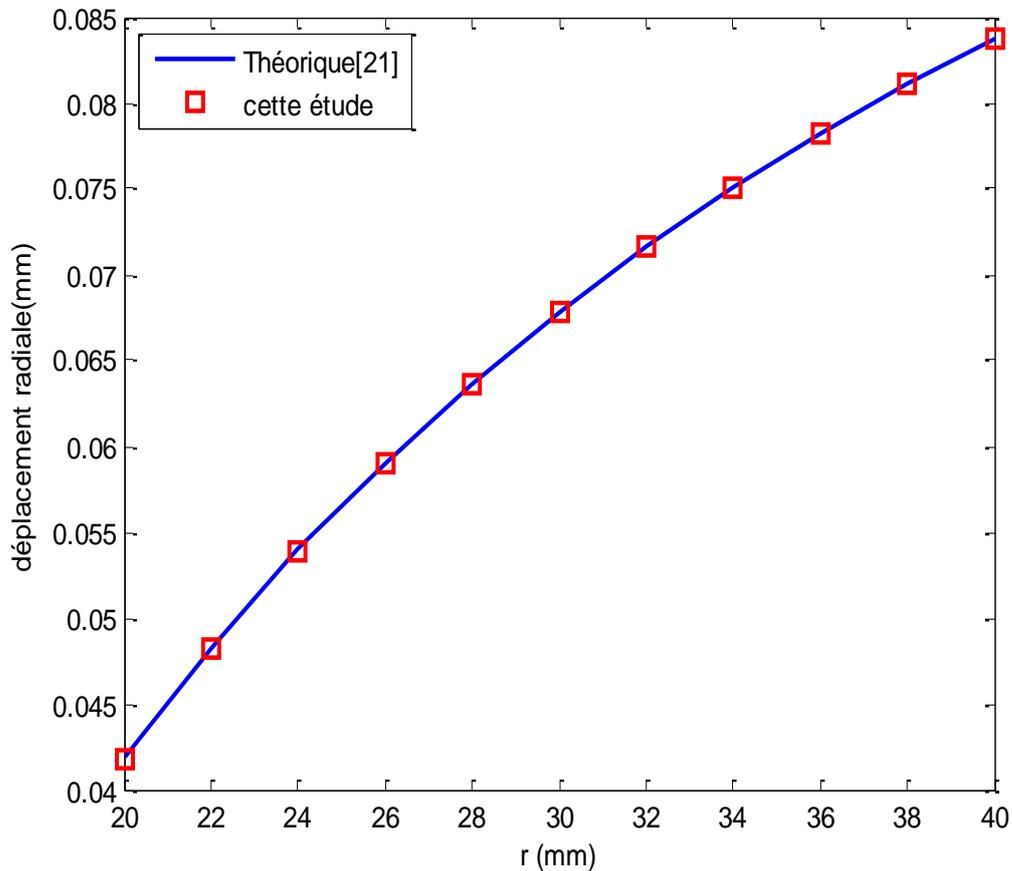


Figure 4.6 : Variation de u sous température

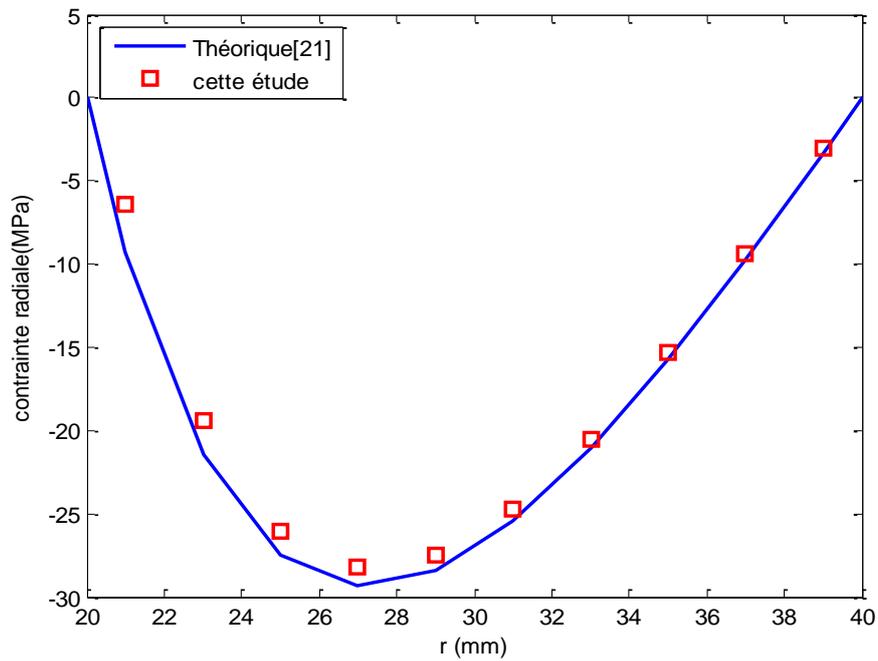


Figure 4.7 : Variation de σ_r sous température

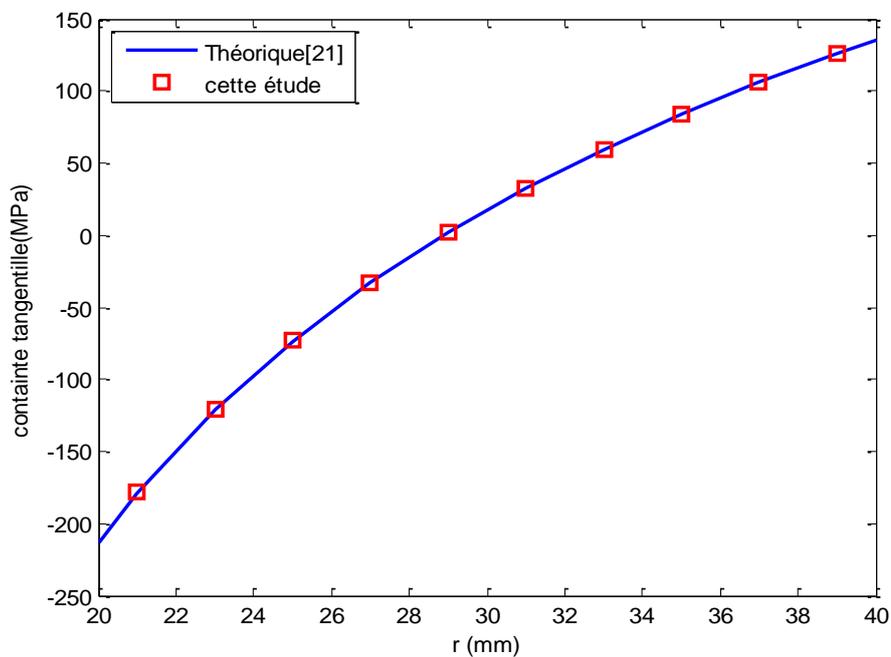


Figure 4.8 : Variation de σ_θ sous température.

D'après ces figures, on peut constater que les résultats numériques de déplacement et des contraintes dans le cylindre monocouche sous l'effet de température sont en bon accord avec ceux obtenus par la théorie et la performance de présent élément est démontrée.

Cas3 : Cylindre monocouche sous pression et température

Le même cylindre est considéré maintenant exposé à la pression et à la température. Les figures (4.9), (4.10) et (4.11) représentent la variation de déplacement radial u , de la contrainte radiale σ_r et de la contrainte tangentielle σ_θ dans le cylindre sous chargement combiné de pression et de température obtenus par l'élément secteur utilisé et comparés avec les solutions analytiques

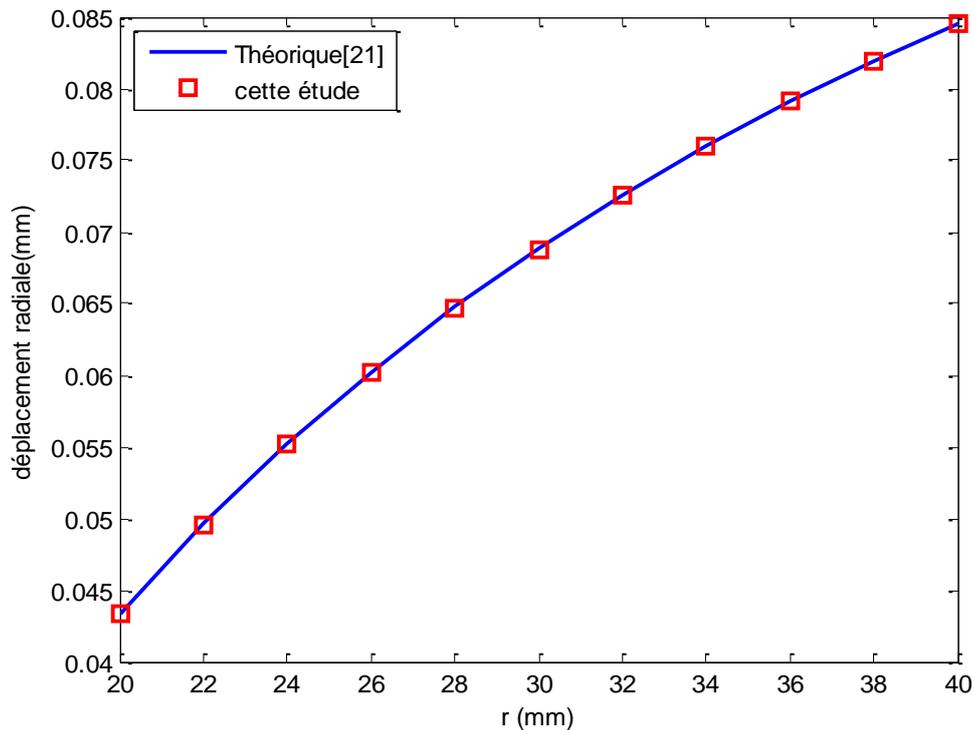


Figure 4.9 : Variation de u sous pression et température

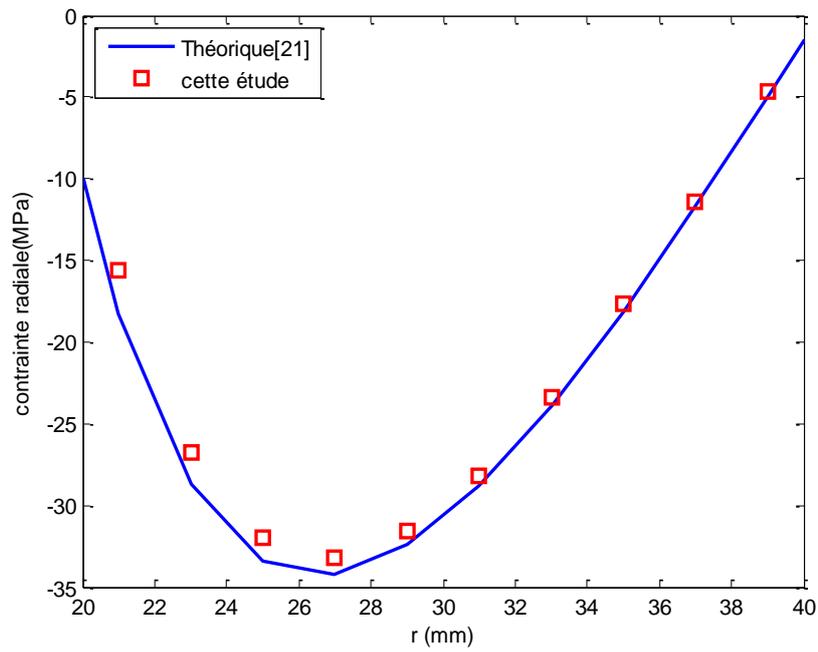


Figure 4.10 : Variation de σ_r sous pression et température

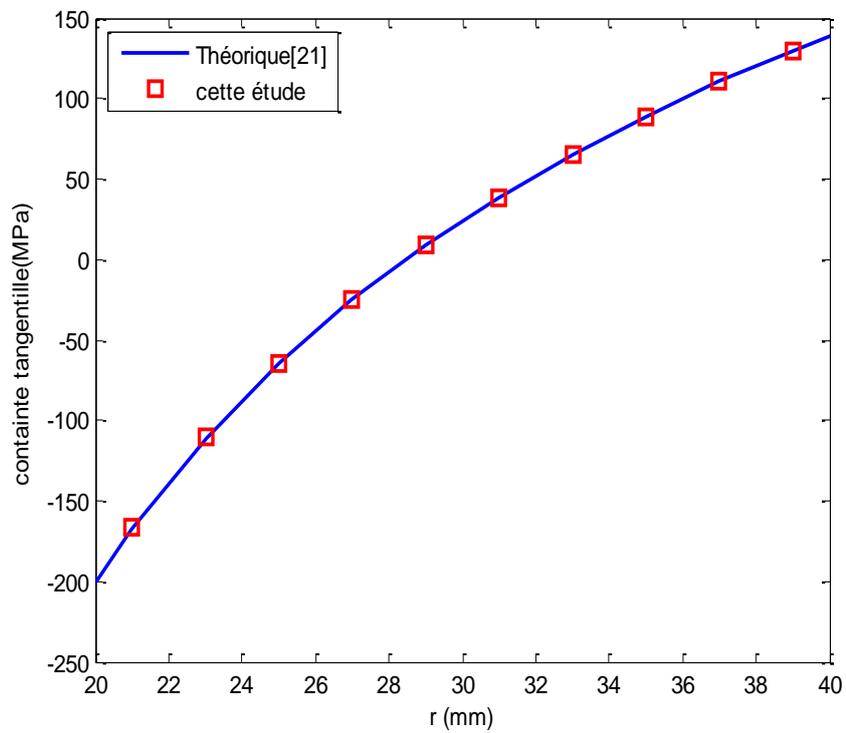


Figure 4.11 : Variation de σ_θ sous pression et température.

D'après ces figures, on peut constater que les résultats numériques de déplacement et des contraintes dans le cylindre monocouche sont en bon accord avec ceux obtenus par la théorie, ce qui montre la performance de cet élément à l'analyse de ce type de problèmes.

4.3.2 Cylindre composé sous pression et température

Le deuxième exemple à étudier est un cylindre composé, Construite de deux matériaux différent d'acier et de l'Aluminium , de rayon interne $a=20$ mm, et de rayon externe $c=40$ mm, et soumis à une pression uniforme interne de 10MPa.

Les parois intérieure et extérieure de cylindre sont maintenues à des températures intérieure $T_a=150^\circ\text{C}$ et extérieure $T_c=25^\circ\text{C}$.

Les caractéristiques mécaniques du cylindre sont regroupées dan le tableau 4.1.

Tableau 4.1 : Propriétés mécaniques de cylindre composé.

Matériau	Module de Young E(GPa)	Coefficient de poisson ν	Coefficient de dilatation thermique $\alpha(c^{-1})$	Conductivité thermique λ (W.m ⁻¹ .K ⁻¹)
Acier	210	0.3	11.6×10^{-6}	19.5
Aluminium	72	0.33	24×10^{-6}	234

Les résultats numériques de déplacement radial u , et des contraintes normales (σ_r, σ_θ) obtenus par le présent élément secteur sont comparés avec les résultats analytiques obtenues par les équations (3.11) et (3.15) de troisième chapitre, ils sont présentés par les figures (4.12), (4.13) et (4.14).

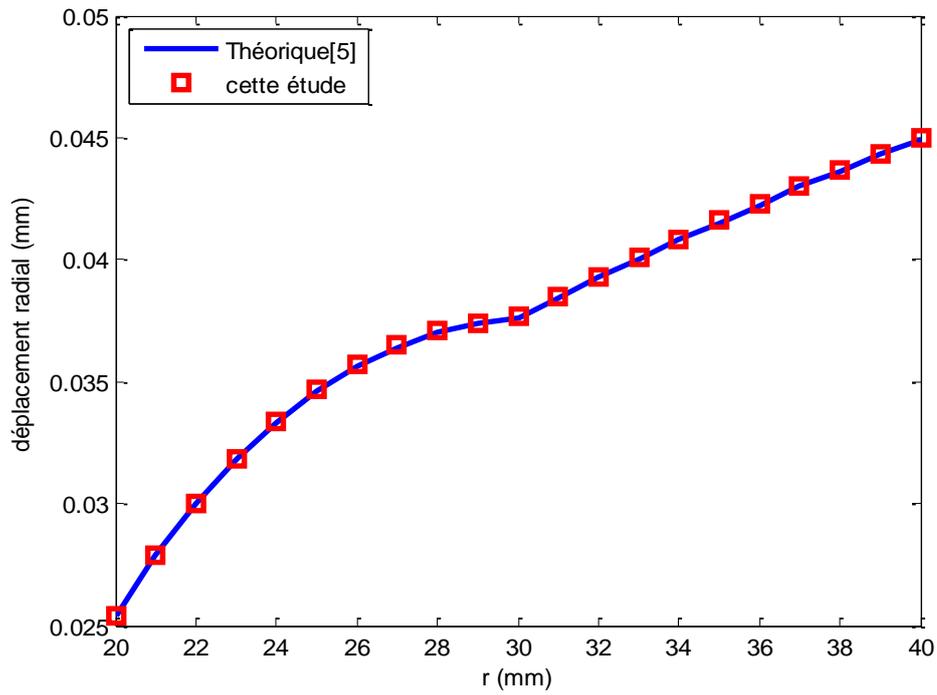


Figure 4.12 : Variation de u sous pression et température

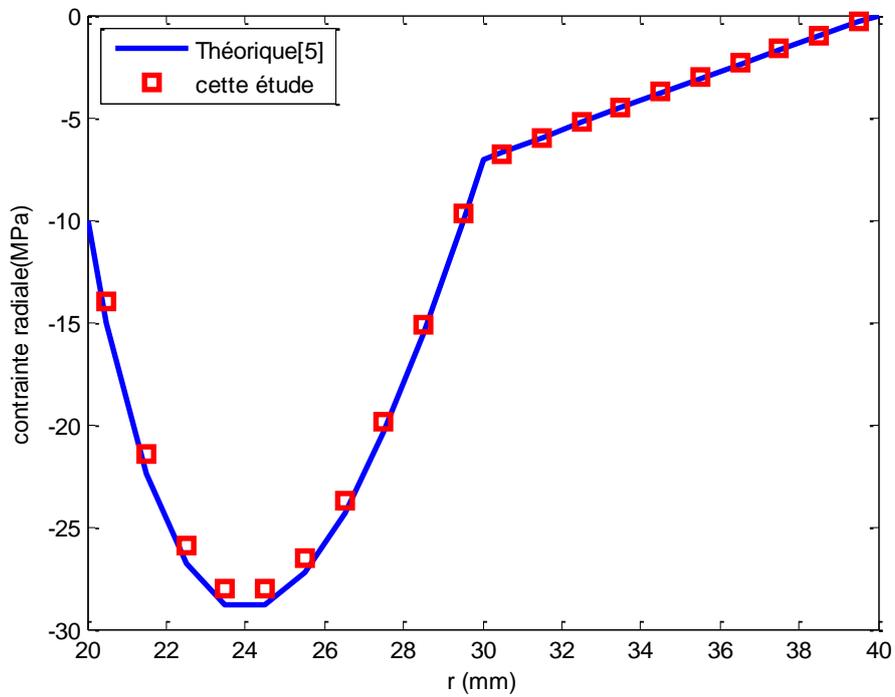


Figure 4.13 : Variation de σ_r sous pression et température

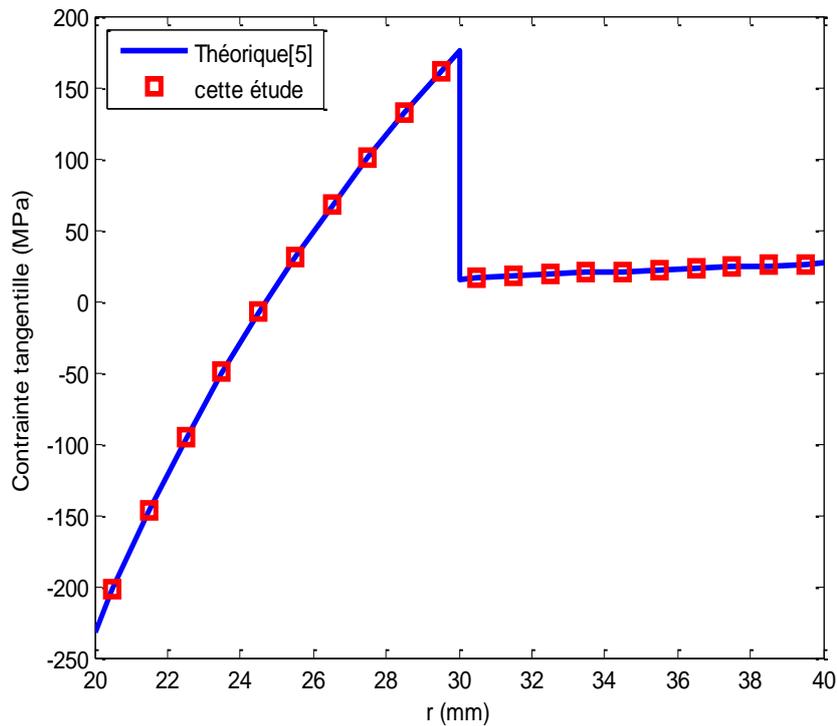


Figure 4.14 : Variation de σ_{θ} sous pression et température

Ces courbes nous permettent de conclure que l'élément secteur utilisé permet un bon encadrement des solutions analytiques associées aux déplacements et aux contraintes. Ce qui montre l'efficacité du présent élément dans l'analyse des cylindres composés sous l'effet de pression et de température.

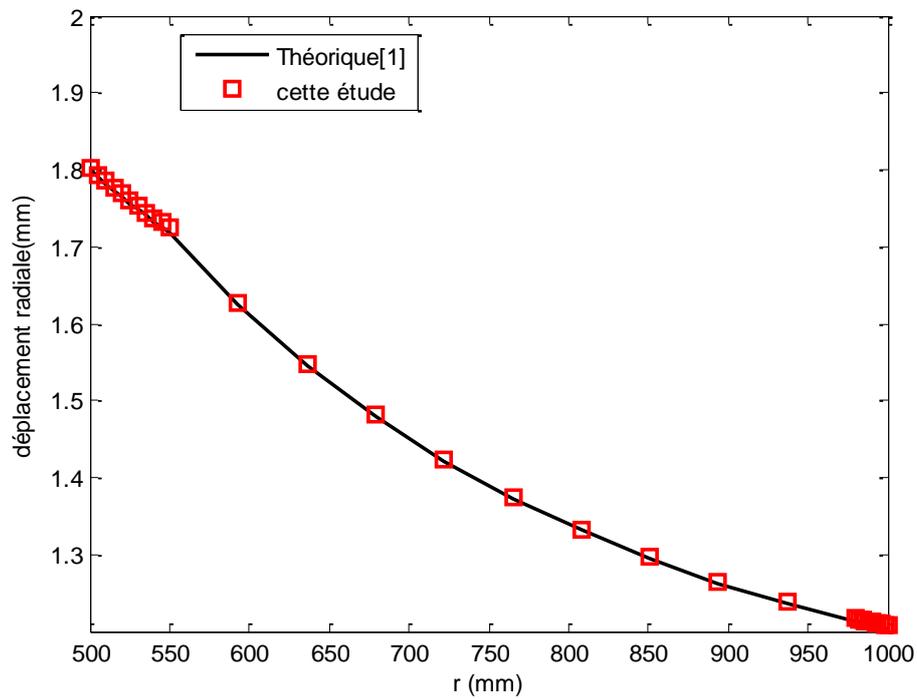
4.3. 3 Cylindres multicouches sous pression :

Il s'agit d'un cylindre creux à trois couches de rayon intérieur 100mm, et sous pression interne $P_i = 120\text{MPa}$. Les propriétés du matériau de chaque couche sont données par le tableau 4.2.

La distribution de déplacement radial et des contraintes normales obtenus par le présent élément secteur sont tracés sur les figures (4.15), (4.16) et (4.17), Ces résultats sont comparés avec les solutions théoriques obtenues par les équations (3.26) et une bonne précision a été observée dans ce type de problèmes.

Tableau 4.2: Propriétés mécaniques de cylindre multicouche.

Matériaux	Module de Young E(GPa)	Coefficient de poisson ν	Epaisseur de chaque couche i (mm)
Acier	210	0.28	50
Béton	23	0.18	430
Acier	210	0.28	20

**Figure 4.15 :** Variation de u sous pression.

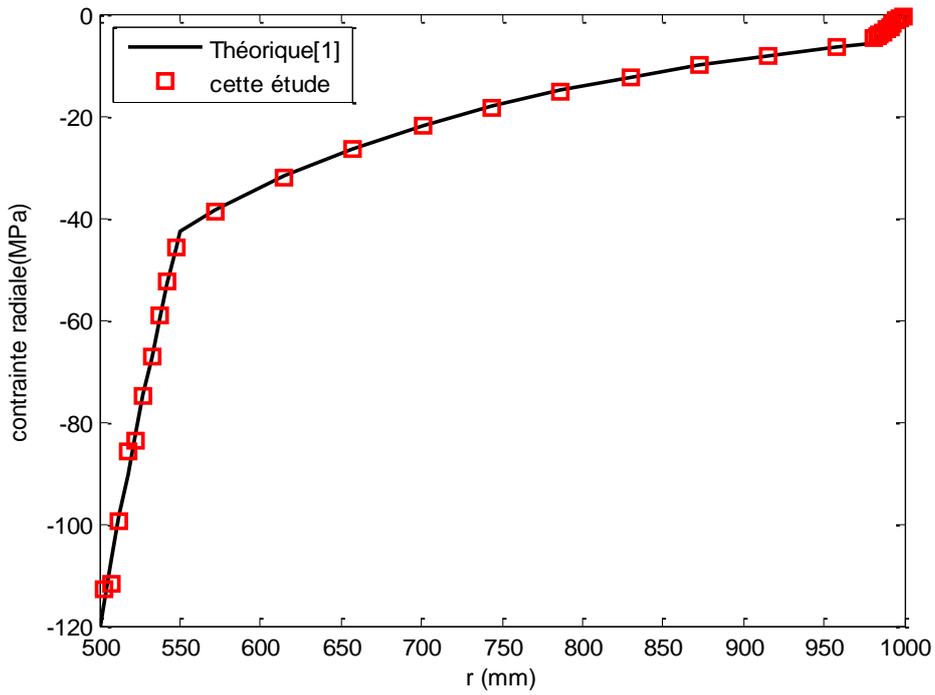


Figure 4.16 : Variation de σ_r sous pression.

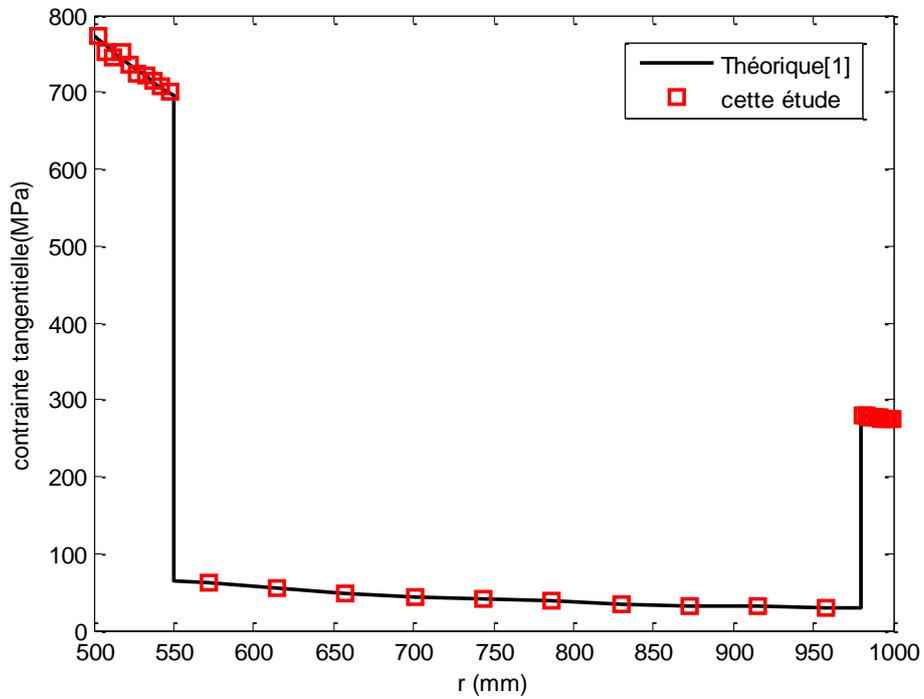


Figure 4.17 : Variation de σ_θ sous pression.

4.3 Conclusion :

Dans ce chapitre, l'analyse des cylindres multicouches sous pression et température par un élément secteur basé sur l'approche en déformation a été présentée, et la comparaison des résultats numériques de déplacement et des contraintes avec les résultats analytiques a montré la performance de l'élément secteur utilisé dans ce type de problème.

Conclusion générale

Notre travail présenté dans ce mémoire s'articule sur l'analyse des cylindres multicouches sous chargement combiné de pression et de température en utilisant un élément secteur en coordonnées polaires, basé sur l'approche en déformation.

L'élément fini utilisé basé sur la déformation ayant quatre nœud et trois degrés de liberté en chaque nœud (deux translations et une rotation dans le plan). Il peut prédire la contrainte et le déplacement à n'importe quel point du cylindre soumis à la pression et à la température, chaque couche est supposée élastique linéaire, homogène, et isotrope.

Les résultats numériques de l'analyse, comparés aux valeurs théoriques disponibles dans la littérature, montrent une bonne performance de cet élément dans l'analyse des cylindres sous chargement thermomécanique avec une grande économie de calcul et un effort de programmation réduit. Et cet élément peut être incorporé dans un code de calcul.

En perspectives, notre travail peut être exploité à l'étude du comportement non-linéaire des cylindres en béton sous chargement de pression.

BIBLIOGRAPHIE



- [1] Xiang, H., Shi, Z., & Zhang, T. : Elastic analyses of heterogeneous hollow cylinders. *Mechanics Research Communications*, 33(2006)5, pp. 681-691.
- [2] Shi, Z., Zhang, T., & Xiang, H. : Exact solutions of heterogeneous elastic hollow cylinders. *Composite structures*, 79(2007)1, pp.140-147.
- [3] Zhang, Q., Wang, Z. W., Tang, C. Y., Hu, D. P., Liu, P. Q., & Xia, L. Z. : Analytical solution of the thermo-mechanical stresses in a multilayered composite pressure vessel considering the influence of the closed ends. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 98(2012), pp.102-110.
- [4] Sollund, H. A., Vedeld, K., & Hellesland, J. : Efficient analytical solutions for heated and pressurized multi-layer cylinders. *Ocean engineering*, 92(2014), pp. 285-295.
- [5] Bahoum, K., Diany, M., & Mabrouki, M. : Stress analysis of compound cylinders subjected to thermo-mechanical loads. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 31(2017)4, pp.1805-1811.
- [6] Djoudi, M. S., & Bahai, H. : Strain based finite element for the vibration of cylindrical panels with openings. *Thin-walled structures*, 42(2004)4, pp.575-588.
- [7] Belounar, L., & Guenfoud, M. : A new rectangular finite element based on the strain approach for plate bending. *Thin-walled structures*, 43(2005)1, pp.47-63.
- [8] Belarbi, M. T., & Maalem, T. : On improved rectangular finite element for plane linear elasticity analysis. *Revue Européenne des Eléments*, 14(2005)8, pp.985-997.

- [9] Rebiai, C., & Belouar, L. : A new strain based rectangular finite element with drilling rotation for linear and nonlinear analysis. *archives of civil and mechanical engineering*, 13(2013), pp.72-81.
- [10] Belouar, A., Benmebarek, S., & Belouar, L. : Strain based triangular finite element for plate bending analysis. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 27(2020)8, pp. 620-632.
- [11] Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., Taylor, R. L., & Taylor, R. L. : The finite element method. *solid mechanics* ,2(2000). Butterworth-heinemann.
- [12] Sabir, A.B. : A new class of finite elements for plane elasticité problems, CAFEM 7th, Int. Conf. Struct. Mech. In reactor Technology, Chicago, 1983.
- [13] Raju, I.S., Rao, A. K. : Stiffness matrices for sector elements, *AIAA. J.*, 7(1969)1, pp.156-157.
- [14] Djoudi, M.S.: A strain based finite elements for linear and geometrically nonlinear analysis of structures, Ph.D thesis University of Wales College of Cardiff 1990.
- [15] Belarbi, M.T., Charif, A. : Nouvel élément secteur basé sur le modèle de déformation avec rotation dans le plan, *Revue Européenne des Eléments*, 7(1998)4, pp. 439-458.
- [16] Bouzriba, A., Bouzrira, C. : Sector element for analysis of thick cylinders exposed to internal pressure and change of temperature. *Grđevinar*, 67(2015)06, pp. 547-555
- [17] Abderrahmani, S., Maalem, T., Zatar, A., & Hamadi, D. : A new strain based sector finite element for plate bending problems. In *International Journal of Engineering Research in Africa* 31(2017), pp. 1-13.
- [18] Bouzrira, C., Sabir, A.B., Nemouchi, Z.: A sector inplane finite element in polar coordinates with rotational degree of freedom, *Archives of civil engineering*, LI (2005) 4, pp. 471-483.
- [19] Sabir A.B., Salhi, H.Y.: A strain based finite element for general plane elasticity in polar coordinates, *Res. Mechanica*, 19(1986)1, pp. 1-16.
- [20] Sabir, A. B., Djoudi, M.S.: A sector in plane finite element with a rotational degree of freedom, proceeding of the 5th International conference of the structural engineering. Technology Transfert series, pp. 55-62, 1990.

[21] Timoshenko, S., Goodier, J. N.: Theory of elasticity, Third edition, Mc Graw Hill, New York, 1951.

[22] Bouzriba, A.: Étude par éléments finis de l'état de contrainte des cylindres sous pression et température, Thèse de doctorat, Université de Béjaia, 2016.

Annexe

Ce travail nous a permis d'élaborer des programmes en langage Matlab pour évaluer les valeurs analytiques de déplacement et des contraintes dans des cylindres sous pression et température.

1. Cylindre monocouche

```
clear all
clc
syms r real
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%cylindre monocouche%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
format short
a=20;b=40;
Ta=200;Tb=100;
T=((Ta-Tb)*log(b/r))/(log(b/a))+Tb
E=210000;v=0.3;alpha=11.6e-6;pi=10;pe=1.5
K=[1/(1-2*v) -1/(a^2);(1/(1-2*v)) -1/(b^2)]
B=[(-pi/E)*(1+v);((-pe/E)*(1+v))+alpha*(1+v)*(int(T*r,r,a,b))/((1-v)*b^2)]
C=simple(inv(K)*B)
U=((1+v)/(1-v))*(alpha/r)*(int(T*r,r,a,r))+C(1)*r+C(2)/r;
Sr=E*((-alpha*int(T*r,r,a,r))/((1-v)*r^2))+C(1)/((1+v)*(1-2*v))-C(2)/(r^2*(1+v));
St=E*((alpha*int(T*r,r,a,r))/((1-v)*r^2))+C(1)/((1+v)*(1-2*v))+C(2)/(r^2*(1+v))-alpha*T/(1-v);
vel=a:(b-a)/10:b;
vet=[20,21,23,25,27,29,31,33,35,37,39,40];
ven=[21,23,25,27,29,31,33,35,37,39];
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%Variation de déplacement radial en fonction de rayon%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
depr=subs(U,r,vel)
deprn=[0.0433,0.0496,0.0552,0.0602,0.0647,0.0688,0.0726,0.07602,0.07913,0.0819,0.08459]
h=plot(vel,depr,vel,deprn,'rs')
xlabel('r (mm)')
ylabel('déplacement radiale(mm)')
set(h,'LineWidth',1.5)
k = legend('Théorique[21] ','cette étude',2)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%Variation de la contrainte radiale%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
sigrt=subs(Sr,r,vet)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%Variation de la contrainte tangentielle%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
sigtt=subs(St,r,vet)
```

2. Cylindre composé

```
clear all
clc
syms r real
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%cylindre composé%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
a=20;b=30;c =40;
limpda1=19.5 ;limpda2= 234
Ta=150;Tc=25;Tb=(log(c/b)*limpda1*Ta+log(b/a)*limpda2*Tc)/(log(c/b)*limpda1+log(b/a)*limpda2)
```

```
Tc1=((Ta-Tb)*log(b/r))/(log(b/a))+Tb
```

```
Tc2=((Tb-Tc)*log(c/r))/(log(c/b))+Tc
```

```
E1=210000;E2=72000;v1=0.3;v2=0.33;alpha1=11.6e-6;alpha2=24e-6;p=10;  
K12=1/b^2 ; K22=- (1-2*v1)/b^2 ;K23=- (E2/E1)*((1+v1)/(1+v2))*((1-  
2*v1)/(1-2*v2));
```

```
K24=-K23/(b^2/(1-2*v2));K32=K22/(a^2/b^2);K44=- (1-2*v2)/c^2;
```

```
B1=-((1+v1)/(1-v1))*(alpha1/b^2)*(int(Tc1*r,r,a,b));
```

```
B2=-B1*(1-2*v1);
```

```
B3=- (1-2*v1)*(1+v1)*p/E1;
```

```
B4=alpha2*((1+v2)/(1-v2))*((1-2*v2)/c^2)*(int(Tc2*r,r,b,c));
```

```
K=[1 K12 -1 -K12;1 K22 K23 K24;1 K32 0 0;0 0 1 K44];
```

```
B=[B1;B2;B3;B4];
```

```
C=inv(K)*B;
```

```
U1=((1+v1)/(1-v1))*(alpha1/r)*(int(Tc1*r,r,a,r))+C(1)*r+C(2)/r;
```

```
U2=((1+v2)/(1-v2))*(alpha2/r)*(int(Tc2*r,r,b,r))+C(3)*r+C(4)/r;
```

```
Sr1=E1*((-alpha1*int(Tc1*r,r,a,r)/((1-v1)*r^2))+C(1)/((1+v1)*(1-2*v1))-  
C(2)/(r^2*(1+v1)));
```

```
Sr2=E2*((-alpha2*int(Tc2*r,r,b,r)/((1-v2)*r^2))+C(3)/((1+v2)*(1-2*v2))-  
C(4)/(r^2*(1+v2)));
```

```
St1=E1*((alpha1*int(Tc1*r,r,a,r)/((1-v1)*r^2))+C(1)/((1+v1)*(1-  
2*v1))+C(2)/(r^2*(1+v1))-alpha1*Tc1/(1-v1));
```

```
St2=E2*((alpha2*int(Tc2*r,r,b,r)/((1-v2)*r^2))+C(3)/((1+v2)*(1-  
2*v2))+C(4)/(r^2*(1+v2))-alpha2*Tc2/(1-v2));
```

```
ve1=[20,21,22,23,24,25,26,27,28,29,30]
```

```
ve2=[30,31,32,33,34,35,36,37,38,39,40]
```

```
depl1=subs(U1,r,ve1)
```

```
depl2=subs(U2,r,ve2)
```

```
r1=[20,20.5,21.5,22.5,23.5,24.5,25.5,26.5,27.5,28.5,29.5,30]
```

```
r2=[30,30.5,31.5,32.5,33.5,34.5,35.5,36.5,37.5,38.5,39.5,40]
```

```
sr1=subs(Sr1,r,r1)
```

```
sr2=subs(Sr2,r,r2)
```

```
st1=subs(St1,r,r1)
```

```
st2=subs(St2,r,r2)
```

3 Cylindre multicouche

```
clear all
```

```
clc
```

```
%%%cylindre multicouche%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
syms rr
```

```
N=3;%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%nombre de couches
```

```
E=[210000;23000;210000]
```

```
v=[0.28;0.18;0.28]
```

```
r=[500;550;980;1000];pi=120;
```

```
for i=1:N
```

```
alp(i)=- (1+v(i))/E(i)
```

```
beta(i)=(1-2*v(i))*(1+v(i))/E(i)
```

```
gama(i)=r(i)^2/(r(i+1))^2
```

```
end
```

```
for j=1:N-1
```

```
s(j)=(alp(j)-beta(j+1))*gama(j+1)*gama(j)+(alp(j+1)-alp(j))*gama(j)
```

```
T(j)=(alp(j+1)-beta(j))+(beta(j)-beta(j+1))*gama(j+1)
```

```
end
```

```
a=zeros(N+1,1)
```

```
a(2)=1
```

```
b=zeros(N+1,1)
```

```

b(1)=1

q=zeros(N,1)
q(1)=pi
for k=1:N-1

a(k+2)=( (s(k)-T(k))*a(k+1)-(s(k)-gama(k)*T(k))*a(k))/(alp(k+1)-
beta(k+1))*(gama(k)-1))

b(k+2)=( (s(k)-T(k))*b(k+1)-(s(k)-gama(k)*T(k))*b(k))/(alp(k+1)-
beta(k+1))*(gama(k)-1))

end
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for i=1:N+1
q(i)=(b(i)-(b(N+1)/a(N+1))*a(i))*q(1)
end
for i=1:N
A(i)=(gama(i)/(gama(i)-1))*(q(i)-q(i+1))*(r(i+1)^2)
C(i)=-(1/(gama(i)-1))*(gama(i)*q(i)-q(i+1))
sigr(i)=(A(i)/(rr^2))+C(i)
sigt(i)=(-A(i)/(rr^2))+C(i)
dep(i)=alp(i)*(A(i)/(rr))+beta(i)*C(i)*rr
end
ve1=500:50/10:550
ve2=550:430/10:980
ve3=980:20/10:1000
vee1=[500,500+50/20:50/10:550-50/20,550]
vee2=[550,550+430/20:430/10:980-430/20,980]
vee3=[980,980+20/20:20/10:1000-20/20,1000]
%-----
sigrcouche1=subs(sigr(1),rr,vee1)
sigrcouche2=subs(sigr(2),rr,vee2)
sigrcouche3=subs(sigr(3),rr,vee3)
%-----
sigtcouche1=subs(sigt(1),rr,vee1)
sigtcouche2=subs(sigt(2),rr,vee2)
sigtcouche3=subs(sigt(3),rr,vee3)
%-----

Ucouch1=subs(dep(1),rr,ve1)
Ucouch2=subs(dep(2),rr,ve2)
Ucouch3=subs(dep(3),rr,ve3)

```