



République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur  
et de la Recherche Scientifique  
Université de Tissemsilt



Faculté des Sciences et de la Technologie  
Département des Sciences et de la Technologie

Mémoire de fin d'études pour l'obtention du diplôme  
de Master académique en

Filière : **Génie Civil**

Spécialité : **Structures**

Présentée par : **DERBAH Abdelkader**  
**KEBDI Djilali**

*Thème*

---

## **Influence de l'étirement de l'épaisseur sur la réponse dynamique des plaques non-homogènes**

---

Soutenu le, .....

**Devant le Jury :**

BOUBEKEUR Toufik	Président	M.C.A.	Univ-Tissemsilt
BOURADA Fouad	Encadreur	M.C.B.	Univ-Tissemsilt
BESSEGHIER Abderrahmane	Examineur	Prof	Univ-Tissemsilt

**Année universitaire : 2020-2021**

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

# *Remerciements*

## *Remerciement*

Tout d'abord, nous remercions Dieu Tout-Puissant pour sa supériorité sur nous dans la préparation de cet humble mémoire de fin d'études, comme nous adressons également tous nos remerciements et notre gratitude à son excellence Le docteur BOUARADA Fouad qui était estimé comme notre encadreur, et qui était toujours avec nous lorsque nous lui avons demandé de l'aide et il n'a pas été avare avec ce que nous avons demandé à tout moment et quand.

Nous remercions vivement le recteur de université de Tissemsilt ; Le doyen de Faculté et les membres du jury, qui ont été acceptés d'évaluer l'Approbation de cette présente thèse de soutenance.

Nous ne manquons pas non plus d'exprimer nos remerciements et notre respect à tous les docteurs et professeurs de l'Institut de génie civil, ainsi qu'à tous les responsables et superviseurs de cet Institut.

Nous adressons nos remerciements et notre gratitude à tous ceux qui nous ont aidés de loin ou de près, comme je remercie tous les étudiants(es) de la promotion.

Nous remercions également nos familles pour les sacrifices qu'elles ont faits que pour nous terminant nos études. Nous exprimons ma gratitude à nos amis pour leur patience, leur aide et leur encouragement.

# *Dédicace*

## *Dédicace*

Je dédie cette modeste travail à mon honorable épouse, qui à son tour m'a encouragé à continuer d'étudier moralement en master malgré l'existence d'obstacles humains odieux, n'eut été de l'intervention du vertueux Dr Bouras Mohamed à qui j'aurais tiens à dédier cette thème, et à l'âme pure de ma mère, qui ne m'a pas épargné un jour dans la prière , A mon cher père, que Dieu prolonge sa vie et lui procure santé et bien-être, et à mes chers frères et chers collègues, sans oublier mon espoir dans la vie et le réconfort de mes yeux dans ce monde, le plaisir de mon foie : Imane que je demande à Dieu d'accorder la réussite au baccalauréat avec excellence, Hebbat Al-Rahman, Abdel Djelil, Chifa, Abdel Hakim ,et à tous ceux qui m'ont soutenu dans cet humble travail , Le mérite en revient au respecté Dr Bourdaa Fouad, et à celui avec qui j'ai complété cette thème , mon collègue, Kebdi Djilali, et à sa famille, qui lui a donné le temps de terminer ce travail avec nous, et à tous mes collègues de la master 2 classe 2021.

DERBAH AEK

## *Dédicace*

Je dédie ce modeste et humble travail de thèse à :

- A ma très chère mère : honorable, affable et aimable ;
- A mon cher père : la personne la plus digne de mon estime et de mon respect ;
- A mon honorable épouse: ses sacrifices, son soutien moral, sa gentillesse sans égal, son aide et son attachement profond m'ont permis de réussir mes études.
- A mes chers enfants : Mohamed, Ayoub et Mondhir ;
- A tous les membres de ma famille, Mes frères et sœurs et leurs enfants ;
- A mon encadreur **Dr BOURAADA Fouad** et tous mes enseignants avec mes remerciements ;
- A mon collègue, DERBAH Abdelkader, et à sa famille, sans oublier mon frère BAGHDAD ;
- A tous mes amis, mes camarades d'études et mes collègues ;
- A tous ceux qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire.

KEBDI DJ

# *Résumé*

## ***Résumé***

Dans ce travail, la réponse dynamique des plaques fonctionnellement graduées est étudiée en utilisant une nouvelle théorie de déformation de cisaillement hyperbolique inverse quasi-3D. Le model développé est obtenue en devisant le déplacement transversal en parties de flexion, cisaillement et l'étirement de l'épaisseur. Le nombre des variables inconnues est réduit a cinq contre six ou plus dans le cas d'autres théories de déformation normale et de cisaillement. Les propriétés matérielles effectives comme le module de Young et la densité sont déterminé en utilisant une simple fonction de loi de puissance. Les équations de mouvement sont dérivées par le principe d'Hamilton et résolue par l'application des solutions analytiques de Navier. Les résultats obtenus sont comparée avec ceux existants dans la littérature pour confirmer l'exactitude de la formulation actuelle. Une panoplie des études paramétriques est présentée et discuté pour montrer les différents paramètres influençant la fréquence naturelle des plaques fonctionnellement graduée simplement appuyées.

***Mots clés*** : réponse dynamique, théorie hyperbolique inverse, effet d'étirement, fonction de loi de puissance, principe d'Hamilton, solution de Navier.

# *Abstract*

## ***Abstract***

In this work, dynamic response of the simply supported functionally graded (FG) plate is investigated using a novel quasi-three-dimensional (3D) inverse hyperbolic shear deformation theory. The developed model is obtained by dividing the transverse displacement into bending, shear, and thickness stretching parts. The number of unknown variables is reduced to five versus six or more in the case of other shear and normal deformation theories. The effective's material properties as Young modulus and density are determined using a simple power law function. The equations of motion are derived via Hamilton's principle and resolved by applying the analytical solutions of Navier. The obtained results are compared with those existing in the literature to confirm the accuracy of the current formulation. Panoply of the parametric studies are presented and discussed to show the various parameters influencing the natural frequency of the simply supported functionally graded (FG) plates.

***Keywords:*** Dynamic response, inverse hyperbolic theory, stretching effect, power-law function, Hamilton's principle, Navier solution.

ملخص

# ملخص

في هذا العمل، يتم دراسة الاستجابة الديناميكية للصفائح المتدرجة وظيفيا المدعمة ببساطة باستخدام نظرية جديدة لتشوه القص شبه ثلاثية الابعاد زائديه عكسية (hyperbolique inverse) .

يتم الحصول على النموذج المطور بتقسيم النزوح العرضي لجزء الانحناء التشوه وتمدد السماكة، يتم تقليص عدد المتغيرات المجهولة الى خمسة مقابل ستة او أكثر في نظرية التشوه العادي والقص الأخرى.

يتم تحديد الخواص الفعلية والكثافة كقياس لاستخدام قانون دالة القوى البسيطة، يتم استخدام معادلات الحركة بمبدأ هاملتون ويتم حلها بتطبيق الحلول التحليلية لنافين، يتم مقارنة النتائج المستخرجة مع تلك الموجودة من قبل لتأكيد دقة النموذج الحالي.

يتم تقديم ومناقشة عدة دراسات وسيطيه لإثبات مختلف العوامل المؤثرة على الترددات الطبيعية للصفائح المتدرجة وظيفيا المدعمة ببساطة.

**الكلمات المفتاحية:** الاستجابة الديناميكية، نظرية زائديه عكسية ، تأثير تمدد السماكة ،دالة قانون القوة، مبدا هاملتون، حلول نايفي.

# *Sommaire*

# *SOMMAIRE*

Remerciement.....	i
Dédicace.....	ii
Résumé.....	iii
Abstract.....	iv
ملخص.....	v
Liste des figures.....	vi
Liste des Tableaux.....	viii
Liste des Notations et symboles.....	ix
Introduction générale.....	1
<b>CHAPITRE I</b>	
I.1. Introduction :.....	4
I.2.Histoire sur les matériaux à gradient de propriétés (FGM).....	4
I.3.Concept des matériaux fonctionnellement gradués.....	5
I.4. Comparaison entre matériaux à gradient de propriétés et les matériaux composites traditionnels.....	7
I.5. Méthodes d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés.....	10
I.5.1. Procédé de poudre sèche.....	10
I.5.2. Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting).....	11
I.5.3. Coulage centrifuge (centrifugal casting).....	11
I.5.4. Coulage en bande.....	13
I.5.5. Pressage à chaud.....	14
I.5.6. Processus de frittage.....	14
I.5.7. Processus d'infiltration.....	14
I.5.8. Projection thermique.....	15
I.6. Avantages et inconvénients des matériaux fonctionnellement gradué FGM.....	15
I.6.1. Avantages de la FGM.....	15

<b>I.6.2. Inconvénient de la FGM.....</b>	<b>16</b>
<b>I.7. Domaines d'application des FGM (Mahmood et Akinlabi, 2017).....</b>	<b>16</b>
<b>I.7.1.Domaine aérospatial.....</b>	<b>17</b>
<b>I.7.2.Dans l'industrie :.....</b>	<b>18</b>
<b>I.7.3.Industrie automobile :.....</b>	<b>18</b>
<b>I.7.4. Industrie biomédical.....</b>	<b>19</b>
<b>I.7.5.Dans industrie marine.....</b>	<b>20</b>
<b>I.7.6.Dans les biomatériaux.....</b>	<b>20</b>
<b>I.7.7.Dans la défense.....</b>	<b>21</b>
<b>I.7.8.Dans les capteurs et les applications énergétiques.....</b>	<b>21</b>
<b>I.7.9.Dans l'optoélectronique.....</b>	<b>22</b>
<b>I.7.10.Articles de sports .....</b>	<b>22</b>
<b>I.7.11.Dans autres industries.....</b>	<b>22</b>
<b>I.8.Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM.....</b>	<b>23</b>
<b>I.8.1.La loi des mélanges.....</b>	<b>24</b>
<b>I.8.1.1.Propriétés matérielles de la plaque P-FGM.....</b>	<b>25</b>
<b>I.8.1.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM.....</b>	<b>26</b>
<b>I.8.1.3. Propriétés matérielles de plaque E-FGM.....</b>	<b>27</b>
<b>I.8.2.Le modèle auto-cohérent de Hill.....</b>	<b>28</b>
<b>I.8.3. Le modèle Mori-Tanaka.....</b>	<b>29</b>
<b>I.9. Conclusion.....</b>	<b>31</b>
<b>CHAPITRE II</b>	
<b>II.1 Introduction.....</b>	<b>33</b>
<b>II.2. Définition d'une plaque.....</b>	<b>33</b>
<b>II.3. Différents types de plaques .....</b>	<b>33</b>
<b>II.4. Les modèles des plaques pour les matériaux à gradient de propriétés.....</b>	<b>34</b>

<b>II.4.1 Théorie classique des plaques de Love-Kirchhoff (CPT).....</b>	<b>34</b>
<b>II.4.2. La théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT).....</b>	<b>36</b>
<b>II.4.3. La théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSDT).....</b>	<b>37</b>
<b>II.4.4. Revue sur les différents modèles fonction de la théorie d'ordre élevé.....</b>	<b>40</b>
<b>II.4.5. Nouvelle théorie raffinée de déformation des plaques.....</b>	<b>42</b>
<b>II.5. Conclusion.....</b>	<b>42</b>
<b>CHAPITRE III</b>	
<b>III.1 Introduction.....</b>	<b>43</b>
<b>III.2 Formulation mathématique.....</b>	<b>43</b>
<b>III.2.1. Les propriétés de la plaque FGM.....</b>	<b>43</b>
<b>III.2.2. La nouvelle théorie raffinée à cinq variables.....</b>	<b>43</b>
<b>III.2.2.1. Hypothèses de base et cinématique.....</b>	<b>43</b>
<b>III.2.2.2. Les déformation et équations constitutives.....</b>	<b>44</b>
<b>III.2.2.3. Les équations de mouvement.....</b>	<b>46</b>
<b>III.2.3. Solution analytique pour une plaque FGM simplement appuyées.....</b>	<b>50</b>
<b>III.3. Conclusion.....</b>	<b>52</b>
<b>CHAPITRE IV</b>	
<b>IV.1. Introduction.....</b>	<b>53</b>
<b>IV.2. Etude dynamique des plaques en FGM simplement appuyées.....</b>	<b>53</b>
<b>IV.3. Etude paramétrique.....</b>	<b>62</b>
<b>IV.4. Conclusion .....</b>	<b>66</b>
<b>CONCLUSION GENERALE.....</b>	<b>67</b>
<b>REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....</b>	<b>68</b>

# *Liste des figures*

## *Liste des figures*

### CHAPITRE I

<b>Figure I.1 :</b> Différentes exigences des propriétés des matériaux dans différents endroits (Hopkinson et al. 2006).....	6
<b>Figure I.2 :</b> Schéma d'une microstructure graduée avec les constituants céramique et métal (Jha et al. 2013).....	6
<b>Figure I.3 :</b> Les types de matériaux composites : (a) Monocouches, (b) stratifiés, (c) sandwichs.....	7
<b>Figure I.4 :</b> Une vue microscopique d'un matériau fonctionnellement gradué (Hashmi et al. 2014).....	8
<b>Figure I.5 :</b> La microstructure d'un matériau fonctionnellement gradué (Hashmi et al. 2014).....	9
<b>Figure I.6 :</b> Microphotographie d'un matériau fonctionnellement gradué Cu/Ni à l'aide d'un microscope optique (Hashmi et al. 2014).....	9
<b>Figure I.7 :</b> Organigramme de technique de la métallurgie des poudres pour la production des FGM.....	10
<b>Figure I.8 :</b> Représentation schématique du: (a)- procédure de coulage centrifuge Horizontale(b)- Le produit final obtenu (Al: haute ténacité et SiC: résistance à l'usure élevée) (Saiyathibrahim et al. 2015).....	12
<b>Figure I.9 :</b> Installation du coulage centrifuge verticale (Saiyathibrahim et al. 2015).....	12
<b>Figure I.10 :</b> Système de processus de coulage en bande (Saiyathibrahim et al. 2015).....	13
<b>Figure I.11 :</b> Les principaux domaines d'application des FGM.....	17
<b>Figure I.12 :</b> Utilisation dans le domaine aérospatial.....	18
<b>Figure I.13 :</b> Utilisation dans l'industrie automobile.....	19
<b>Figure I.14 :</b> Utilisation des FGM dans les implants dentaires (Sadollah et al., 2013).....	20
<b>Figure I.15:</b> Exemples des matériaux à gradient de propriétés (l'os et hanches).....	20
<b>Figure I.16 :</b> Utilisation dans l'industrie de la défense.....	21
<b>Figure I.17:</b> Plaque à gradient de propriété.....	24
<b>Figure I.18:</b> La variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur de la plaque P-FGM (Bao, 1995).....	26
<b>Figure I.19:</b> La variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur de la plaque S-FGM (Chi et al. 2003).....	27
<b>Figure I.20:</b> La variation de la fraction volumique dans une plaque E-FGM (Delale et al.1983).....	28
<b>Figure I.21:</b> Phase matérielles avec microstructure squelettique (Kanaun et al.2008).....	28
<b>Figure I.22:</b> Phase matérielles avec microstructure particulaire (Kanaun et al. 2008).....	30

### CHAPITRE II

<b>Figure II.1 :</b> Plaque de Love Kirchhoff (Reddy 1997).....	35
<b>Figure II.2 :</b> Plaque de Love Kirchhoff (Reddy 1997).....	37
<b>Figure II.3 :</b> Schématisation des déformations des plaques par la théorie « HSDT ».....	38
<b>Figure II.4 :</b> Variation de la fonction de forme $f(z)$ des différents modèles en fonction de l'épaisseur.....	41
<b>Figure. II.5 :</b> Variation de la dérivée de la fonction de forme $f'(z)$ des différents modèles suivant l'épaisseur.....	41

## CHAPITRE IV

<b>Figure IV.1 :</b> Géométrie d'une plaque en FGM (Nguyen, 2014).....	53
<b>Figure IV.2 :</b> l'effet du rapport de géométrie $a/h$ et le paramètre de puissance sur les fréquences fondamentale adimensionnelle $\bar{\omega}$ .....	62
<b>Figure IV.3 :</b> La variation des fréquences fondamentales adimensionnelles $\bar{\omega}$ des plaques fonctionnellement graduées (avec $p=0.5$ ) en fonction du rapport de dimension $b/a$ .....	63
<b>Figure IV.4 :</b> La variation des fréquences fondamentales adimensionnelles $\bar{\omega}$ des plaques fonctionnellement graduées en fonction du rapport de dimension $b/a$ pour les différents types des plaques céramique, métallique et en FGM.....	64
<b>Figure IV.5 :</b> La variation des fréquences fondamentales adimensionnelles $\bar{\omega}$ des plaques rectangulaires en fonction du paramètre ( $p$ ) et le rapport de géométrie $a/h$ .....	65
<b>Figure IV.6 :</b> l'effet de l'indice de puissance de la densité sur la variation des fréquences fondamentales adimensionnelles $\bar{\omega}$ des plaques rectangulaires simplement appuyées.....	65

# *Liste des Tableaux*

## *Liste des Tableaux*

### **CHAPITRE I**

<b>Tableau I.1 :</b> <i>Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal (Kokini et al.1990).....</i>	7
<b>Tableau I.2 :</b> <i>Les propriétés des FGM et leurs applications significatives (Bohidar et al., 2014 ; Makwana et al., 2014 ; Udupa et al., 2014).....</i>	23

### **CHAPITRE IV**

<b>Tableau IV.1 :</b> <i>Caractéristiques des matériaux utilisés.....</i>	53
<b>Tableau IV.2 :</b> <i>Comparaison des fréquences naturelles non-dimensionnelle <math>\bar{\omega}</math> pour plaque carrée isotrope (<math>a/h=10</math>)....</i>	54
<b>Tableau IV. 3:</b> <i>Comparaison des huit premiers paramètres de fréquence <math>\hat{\omega}</math> des Plaques carrées isotropes.....</i>	55
<b>Tableau IV. 4:</b> <i>Comparaison de la fréquence fondamentale non dimensionnelle <math>\beta</math> des plaques carrées AL/ZrO<sub>2</sub>....</i>	56
<b>Tableau IV. 5:</b> <i>Comparaison des trois premières fréquences non dimensionnelles (<math>\hat{\omega}</math>) Pour une Plaque carrée Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>.....</i>	57
<b>Tableau IV. 6:</b> <i>Comparaison des fréquences fondamentales non dimensionnelles <math>\bar{\omega}</math> sur une Plaque carrée Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub></i>	59
<b>Tableau IV. 7:</b> <i>Comparaison des quatre premières fréquences propres non dimensionnelles <math>\bar{\omega}</math> pour une plaque carrée Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> (<math>a/h = 10</math>).....</i>	60
<b>Tableau IV. 8:</b> <i>Comparaison des fréquences fondamentales non dimensionnelles <math>\bar{\omega}</math> pour plaque carrée AL/ZrO<sub>2</sub> (<math>m = n = 1</math>) (homogénéisation Mori-Tanaka).....</i>	61

*Liste des notations  
et symboles*

## *Liste des notations et symboles*

$G$	Module de cisaillement dans le plan (x, z)
$E$	Module de Young
$E_C$	Module de Young de la céramique
$E_M$	Module de Young de la céramique
$\nu$	Coefficient de Poisson
$G(z)$	Module de cisaillement en fonction de « z »
$E(z)$	Module de Young en fonction de « z »
$V(z)$	Fraction volumique
$V_C(z)$	Fraction volumique de la céramique
$V_M(z)$	Fraction volumique du métal
$k, p$	Indice matériel
$a$	Longueur de la plaque
$b$	Largeur de la plaque
$h$	Epaisseur de la plaque
$u_0, v_0, w_0$	Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque
$u, v, w$	Les déplacements dans les directions $x, y, z$ .
$\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$	Les rotations autour des axes x, y et z,
$\xi$	Le paramètre qui prend en considération l'effet d'étirement

$A', B'$	Des coefficients adopté selon le type de solution
$f(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
$g(z)$	Dérivée de la fonction de gauchissement
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Contraintes normales
$\tau_{xz}, \tau_{yz}$	Contraintes de cisaillement
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Déformation dans la direction x, y et z
$\gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	Déformations de distorsion
$\delta u, \delta v, \delta w$	Champ virtuel de déplacement
$\delta U$	La variation de l'énergie de déformation
$\delta V$	La variation du travail extérieur
$\delta \varepsilon_x, \delta \varepsilon_y, \delta \varepsilon_z$	Champ de déformation longitudinal virtuel
$\delta \gamma_{xz}, \delta \gamma_{yz}$	Champ de déformation transversal virtuel
$N_x, N_y, N_{xy}$	Efforts normaux
$N_x^0, N_y^0, N_{xy}^0$	Charges axiaux appliquées à la plaque
$\bar{N}$	Charge critique du flambement non dimensionnelle
$N_{cr}$	Charge critique du flambement
$M_x, M_y, M_{xy}$	Moments de flexion

$M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b$	Moments de flexion
$S_x, S_y, S_{xy}$	Moment supplémentaire du au cisaillement transverse
$M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s$	Moment supplémentaire du au cisaillement transverse
$S_{xz}^s, S_{yz}^s$	Effort de cisaillement
$Q_{xz}, Q_{yz}$	Effort de cisaillement
$d_{ij}, d_{ijl}, d_{ijlm}$	Les opérateurs différentielles
$\partial$	Dérivée partielle
$i$ et $j$	Des nombres naturels.
$A_{ij}$	Termes de rigidité de la matrice de membrane
$B_{ij}$	Termes de rigidité de la matrice de couplage
$D_{ij}$	Termes de la matrice de flexion
$A_{ij}^s$	Termes de rigidité de la matrice
$B_{ij}^s$	Termes de rigidité de la matrice
$D_{ij}^s$	Termes de rigidité de la matrice
$H_{ij}^s$	Termes de rigidité de la matrice
$\{\Delta\}$	Le vecteur des déplacements généralisés
$\{ \}$	Vecteur colonne
$[ ]$	Matrice

# *Introduction générale*

## *Introduction générale*

L'esprit humain distingue l'homme des autres créatures et fait de la nature pour lui un refuge et un lieu d'habitation, car en imitant la nature dans laquelle il s'est trouvé, l'homme invente des choses qu'il ne connaissait pas avant, et cherche des solutions durables aux défis humains, à partir de la fin justifie les moyens, le développement de l'imagination humaine dans le domaine de la recherche scientifique et technique dans diverses industries modernes, notamment dans le domaine du génie civil, du génie mécanique, du génie médical, du génie aérien et maritime, a conduit les chercheurs à course pour inventer des matériaux composites aux propriétés mécaniques, physiques et chimiques différentes qui agissent sous la forme d'un seul corps réunissant ses propriétés constitutives.

Ces matériaux composites se caractérisent par une résistance élevée aux influences mécaniques, physiques et chimiques, ainsi qu'une longue durée de vie, un poids léger et une rapidité d'entretien et de réparation.

En 1984, les théorèmes des matériaux composites FGM ont été pratiqués et testés sur le corps humain dans la région de Sendai au Japon (Koizumi, 1997).

Les propriétés matérielles à travers l'interface subissent un changement inopiné, qui produit des forces de contrainte maximales pouvant causer le décollement ou la rupture de l'interface, une solution envisageable pour ce problème est l'utilisation de matériaux à gradient fonctionnel FGM pour lesquels des propriétés matérielles, tel que module de Young, masse volumique et coefficient de poisson varient continuellement, conférant un avantage considérable par rapport aux matériaux homogènes dans le maintien de l'intégrité de la structure.

Les FGMs sont des matériaux possédant des couches stratifiées qui présentent une variation continue des propriétés des matériaux d'une surface à l'autre et éliminent ainsi la concentration de contraintes trouvée entre ces couches empilées.

Dans les dernières années, de nombreux chercheurs se sont intéressés à l'étude des caractéristiques statiques et dynamiques des FGMs en raison de leur importance nécessaire dans divers domaines industriels. (Saidi et al., 2013 ; Tounsi et al., 2013 ; Bachir Boudjra et al., 2013 ; Ait Amar Meziane et al., 2014 ; Fekrar et al., 2014 ; Belabed et al., 2014 ; Swaminathan et Naveenkumar, 2014 ; Chakraverty et Pradhan, 2014 ; Bousahla et al., 2014 ; Zidi et al., 2014 ; Hamidi et al., 2015 ; Ait Yahia et al., 2015 ; Mahi et al., 2015 ; Attia et al., 2015 ) .

En règle générale, l'analyse des plaques FG est effectuée à l'aide de la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (Cheng et Batra, 2000 ; Batra et Jin ,2005; Ferreira et al., 2006), ou des théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé (Cheng et Batra, 2000 ; Reddy, 2000 ; Ferreira et al., 2006 ; Qian et al., 2004; Mechab et al., 2010).

Dans FSDT (théorie de déformation de cisaillement de premier ordre), la distribution de la contrainte de cisaillement transversale par rapport aux coordonnées d'épaisseur est supposée constante, ce qui est difficile à trouver un facteur de correction de cisaillement, car cela dépend aux plusieurs paramètres (Mena et al., 2012), il est nécessaire pour compenser l'erreur à cause de cette hypothèse dans la FSDT.

Pour éviter l'utilisation de facteurs de correction de cisaillement, plusieurs théories HSDT ont été proposées, comme celle de Nelson et Lorch (1974) avec neuf inconnues, Lo et al. ( 1977 ) avec 11 inconnues , Bhimaraddi et Stevens ( 1984 ) avec cinq inconnues , Reddy (1984) avec cinq inconnues, Kant et Pandya (1988) avec sept inconnues, et Talha et Singh (2010) avec 11 inconnues.

Parmi les théories susmentionnées HSDTs (théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé), la théorie de Reddy est la théorie la plus utilisée en raison de sa haute efficacité et simplicité (Reddy ,2000 ; Cheng et Batra , 2000 ; Ferreira et al., 2005).

Le plan de la théorie de Reddy présente des déplacements en fonction cubique de coordonnées de l'épaisseur, les équations d'équilibre sont plus compliquées que celles de FSDT. Cependant, dans ces quatre théories de plaques variables et la plupart des autres théories de déformation par cisaillement, les plaques FG ont généralement été analysées en négligeant l'étirement d'épaisseur ( $\varepsilon_z$ ), L'effet de l'étirement d'épaisseur dans les plaques FG a été récemment étudié par Carrera et al. (2011), en utilisant des approximations par éléments finis.

le flux de notre travail de recherche vise à étudier l'effet d'étirement de l'épaisseur sur la réponse dynamique d'une plaque non homogène, cette plaque est composée par deux matériaux : métal et céramique, en utilisant la théorie de déformation du cisaillement hyperbolique inverse avec cinq variables de déplacement inconnues contre six ou plus dans les autres modèles existants dans la littérature ainsi que les effets attribuables au cisaillement transversal et aux déformations normales des matériaux sont inclus  $\varepsilon_z \neq 0$ .

La caractéristique la plus intéressante de la présente théorie est qu'elle représente une variation parabolique de déformations de cisaillement transverse à travers l'épaisseur et satisfait parfaitement les conditions aux limites de la contrainte de cisaillement nulle sur les surfaces libres (supérieure et inférieure) de la plaque sans utiliser les facteurs de correction de

cisaillement. Des solutions analytiques sont obtenues et leurs précisions sont vérifiées en comparant les résultats obtenus avec ceux rapportés dans la littérature.

Notre travail, se pilonne autour de quatre chapitres :

Dans *le premier chapitre*, on a présenté des Généralité sur les matériaux fonctionnellement gradues FGM tels que leur définition, principaux classification, les différents domaines d'applications, et une comparaison entre les matériaux FGM et les matériaux composites traditionnels.

-*Le deuxième chapitre* donne une rétrospective sur les différentes théories des plaques existantes, que soit la théorie classique des plaques minces de love-kirchhoff (CPT), la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT), la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSDT), la théorie raffinée des plaques, et enfin la théorie quasi-3D de déformation des plaques.

Une formulation d'une nouvelle théorie est présentée dans *Le troisième chapitre* où nous détaillons le passage de la théorie d'ordre supérieur à quatre variables des plaques en FGM épaisses vers un modèle quasi-tridimensionnel à cinq variables en introduisant l'effet de l'étirement de l'épaisseur, dédiée pour l'analyse dynamique (vibration libre) des plaques épaisses en FGM.

- Dans le *quatrième chapitre* nous présentons les résultats numériques obtenus et discussion dans le cas de vibration des plaques fonctionnellement graduées et seront comparés avec les résultats des travaux d'autre chercheurs.

En fin, une conclusion générale sur l'ensemble de ces travaux permet de revenir sur les résultats importants mis en avant.

**CHAPITRE I:**

***Généralités sur les Matériaux***

***Fonctionnellement Gradués (FGM)***

## **I.1.Introduction**

Durant ces dernières décennies, une nouvelle catégorie des matériaux composites a vu le jour dans ce vaste domaine de recherches, ce sont les matériaux fonctionnellement gradués, étant donné que les matériaux classiques, malgré leurs avantages que soit grande rigidité, résistance mécanique élevée, légèreté et réduction des coûts, ne répondent pas toujours aux exigences demandées.

Ces matériaux fonctionnellement gradués ont une microstructure qui varie graduellement et constamment à travers l'épaisseur dans le but d'optimiser leurs performances que soit mécanique ou thermique ou les deux en même temps.

Les matériaux composites à gradients évalués FGM représentent un des derniers développements. Ils sont particulièrement utilisés dans les applications de haute technologie : aéronautique, aérospatial, nucléaire, semi-conducteurs, et en génie civil et trouvent également des applications biomédicale (Baron et Naili, 2008).

De ce fait, ces matériaux possèdent alors un potentiel important dans le domaine de leurs applications.

## **I.2.Histoire sur les matériaux à gradient de propriétés (FGM)**

Dans les années quatre-vingts, un concept de matériaux à gradient de propriété a vu le jour au niveau du laboratoire national d'aérospatial au Japon, élite dans ce vaste domaine.

À partir de 1984, les chercheurs Niino et ses collègues (Niino et al., 1988), ont eu l'intelligence de développer des matériaux qui ont une grande résistance thermique pour les structures spatiales et les propulseurs à fusion (Koizumi, 1992). Les changements des propriétés matérielles mécaniques et thermiques sont induits par les changements continus dans la microstructure et même dans la porosité de ces matériaux (Koizumi, 1997). Plusieurs domaines d'application comme les moteurs et les turbines font appel à cette catégorie de matériaux (Nguyen et al., 2007).

Un vaste programme de développement des matériaux à gradient de propriétés a été lancé par le gouvernement japonais en 1987, il s'est focalisé sur le développement de cette technologie de matériaux à gradient de propriétés et l'étude de la relaxation des contraintes thermiques. Plusieurs laboratoires de recherche ont imprégné dans ce programme dans le but

de développer des matériaux dans leurs structures, servants comme barrières thermiques dans le domaine de l'aérospatial (Koizumi, 1997).

Pendant la période de 1987 jusqu'à 1989, c'est née la première innovation des pièces expérimentales d'une section de 10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre qui peuvent résister à des températures de surface de 2000 K avec un gradient de température de 1000 K (Okamura, 1991).

La fabrication des matériaux présentant un gradient de composition et de structure passe par quatre procédés qui sont:

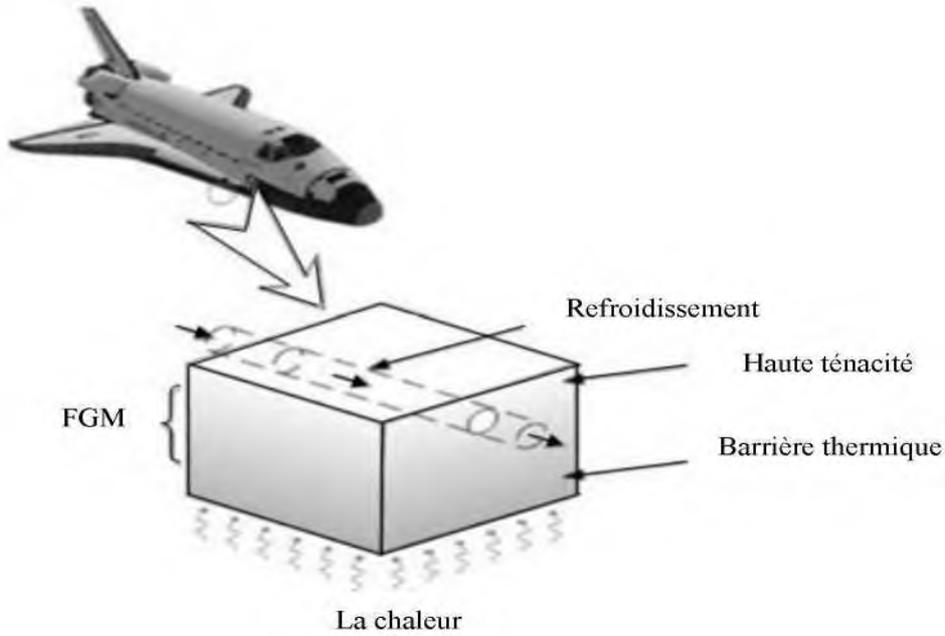
- système SiC/C par C.V.D. ;
- système PSZ/Mo par la technique de la compaction sèche des poudres ;
- système TiB<sub>2</sub>/Cu par synthèse à haute température par auto-propagation;
- et enfin le système (Ni-Cr-Al-Y) / (ZrO<sub>2</sub>-Y<sub>2</sub>O<sub>3</sub>) par projection plasma à double torches (Okamura, 1991).

Durant la deuxième période de 1990 jusqu'à 1991 c'est la phase où ils ont peu conçu des pièces de sections plus grandes avec des formes plus complexes qui induisent un champ d'application plus vaste (Okamura, 1991).

Ce n'est qu'en 1992 qu'un nouveau projet de recherche a été né, dans un but de développer les matériaux fonctionnellement gradués afin d'améliorer leur efficacité dans la conservation d'énergie dont l'intitulé est : « recherche sur les matériaux pour une conservation d'énergie en tenant compte de la structure à gradient de propriété ».

### **I.3. Concept des matériaux fonctionnellement gradués**

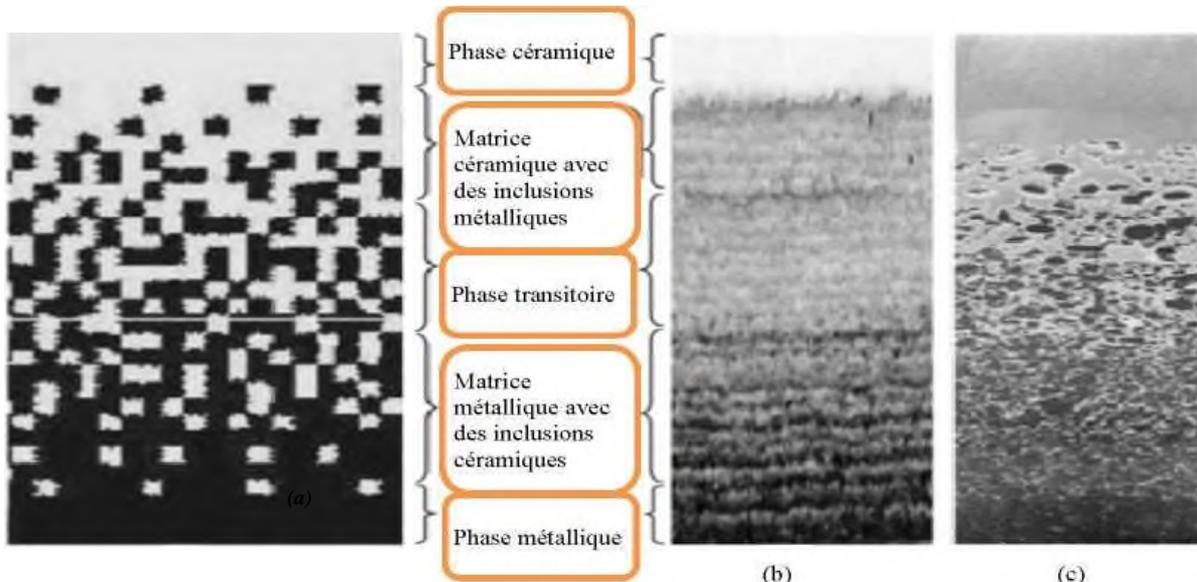
Dans la catégorie des matériaux composites, il y a les matériaux fonctionnellement gradués, ce concept a vu le jour dans les années quatre-vingts au Japon par un groupe de chercheurs au laboratoire national d'aérospatial (National Aerospace Laboratory, STA), où ils ont développé un matériau ayant des caractéristiques pour résister aux sollicitations thermiques et mécaniques (Niino et al., 1988).



**Figure I.1 :** Différentes exigences des propriétés des matériaux dans différents endroits (Hopkinson et al. 2006).

Un matériau FGM est un matériau qui est constitué d’au moins de deux matériaux qui se distribuent continuellement où dis-continuellement au cœur de la structure.

Dans le cas où la distribution est continue, on fait référence à un matériau à gradient continu dans la microstructure graduée et variable (Kawasaki et al. 1997). Cette répartition permet de créer des changements à l’intérieur même du matériau (figure I.2).



**Figure I.2** Schéma d’une microstructure graduée avec les constituants céramique et métal (Jha et al. 2013).

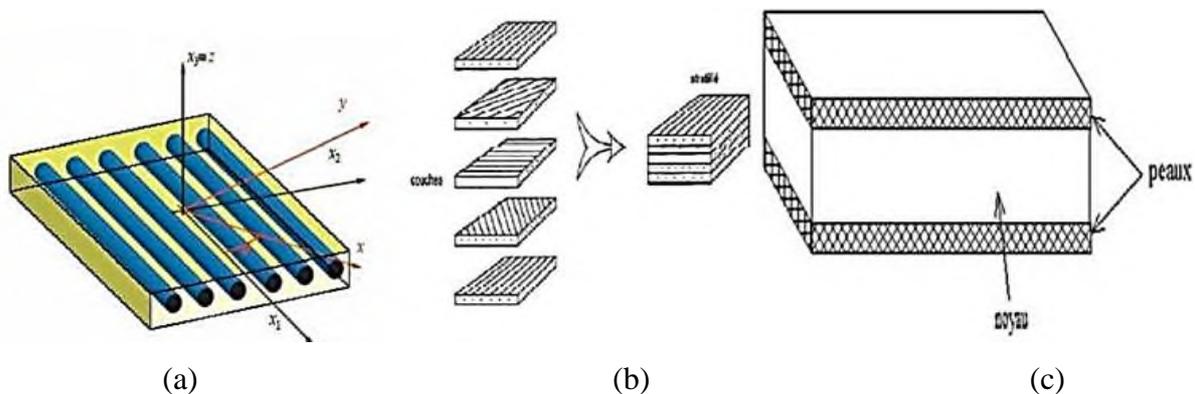
Habituellement, les matériaux fonctionnellement gradués se composent d'un mélange distinct de céramique et de métal sous forme de plusieurs couches ainsi que les vides qui sont une composante indissociable du matériau fonctionnellement gradué (Kokini et al.,1990). De ce fait, ces matériaux composites sont macroscopiquement inhomogènes et qui se présentent dans le tableau I.1.

**Tableau I.1:** Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal (Kokini et al.1990).

Couches	Matériau	Observation
La face à haute température	Céramique	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Bonne résistance thermique</li> <li>▪ Bonne résistance à l'oxydation</li> <li>▪ Faible conductivité thermique</li> </ul>
Continuité du matériau d'un point à l'autre « couches intermédiaires »	Céramique-métal	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Élimination des problèmes de l'interface</li> <li>▪ Relaxation les contraintes thermiques</li> </ul>
La face à basse température	Métal	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Bonne résistance mécanique</li> <li>▪ Conductivité thermique élevée</li> <li>▪ Très bonne ténacité</li> </ul>

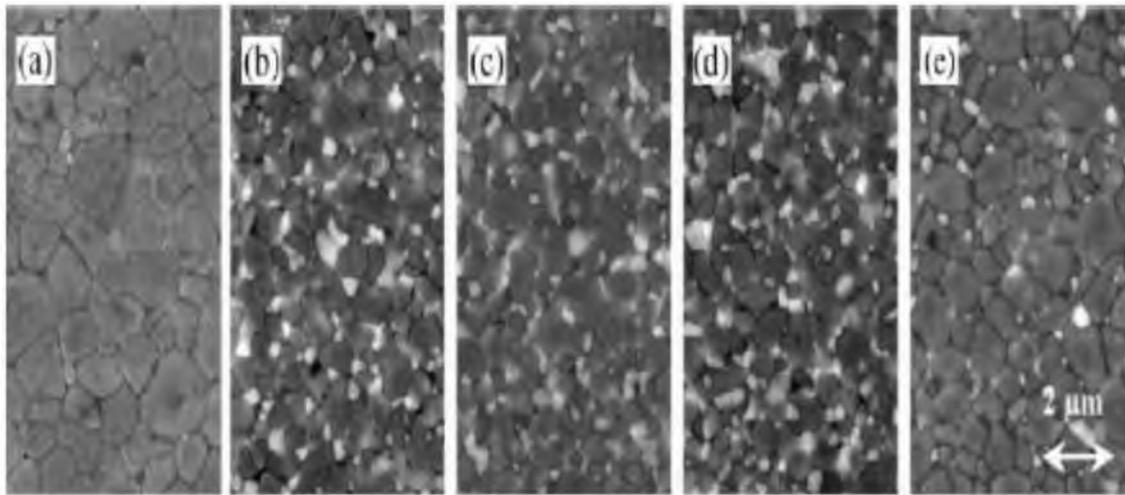
#### I.4. Comparaison entre matériaux à gradient de propriétés et les matériaux composites traditionnels

Un matériau composite est constitué de deux ou plusieurs matériaux de types différents, dont la performance de combinaison est meilleure que ces composants pris séparément de telles manières à avoir un matériau qui a des propriétés convoitées tels que la rigidité, la résistance mécanique, la résistance à la corrosion, la résistance à l'usure ainsi que la réduction de poids.

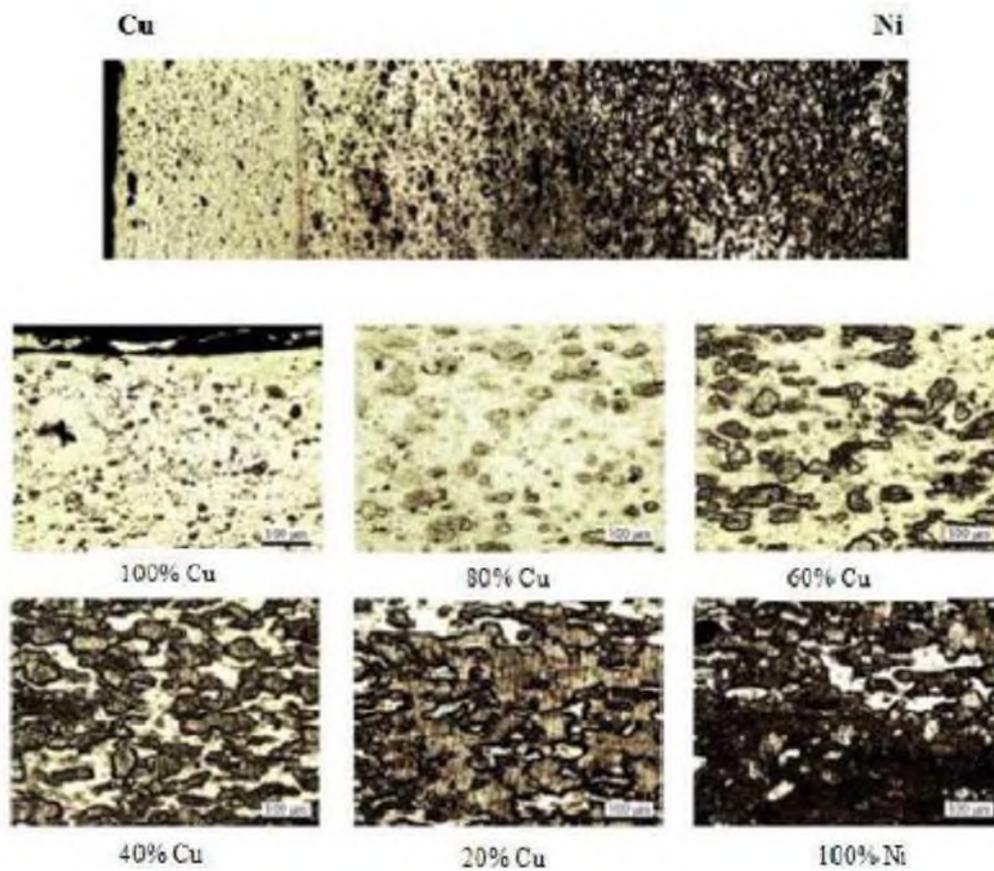


**Figure I.3:** Les types de matériaux composites : (a) Monocouches, (b) stratifiés, (c) sandwichs.





**Figure I.5:** La microstructure d'un matériau fonctionnellement gradué (Hashmi et al. 2014).



**Figure I.6:** Microphotographie d'un matériau fonctionnellement gradué Cu/Ni à l'aide d'un microscope optique (Hashmi et al. 2014).

### I.5. Méthodes d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés

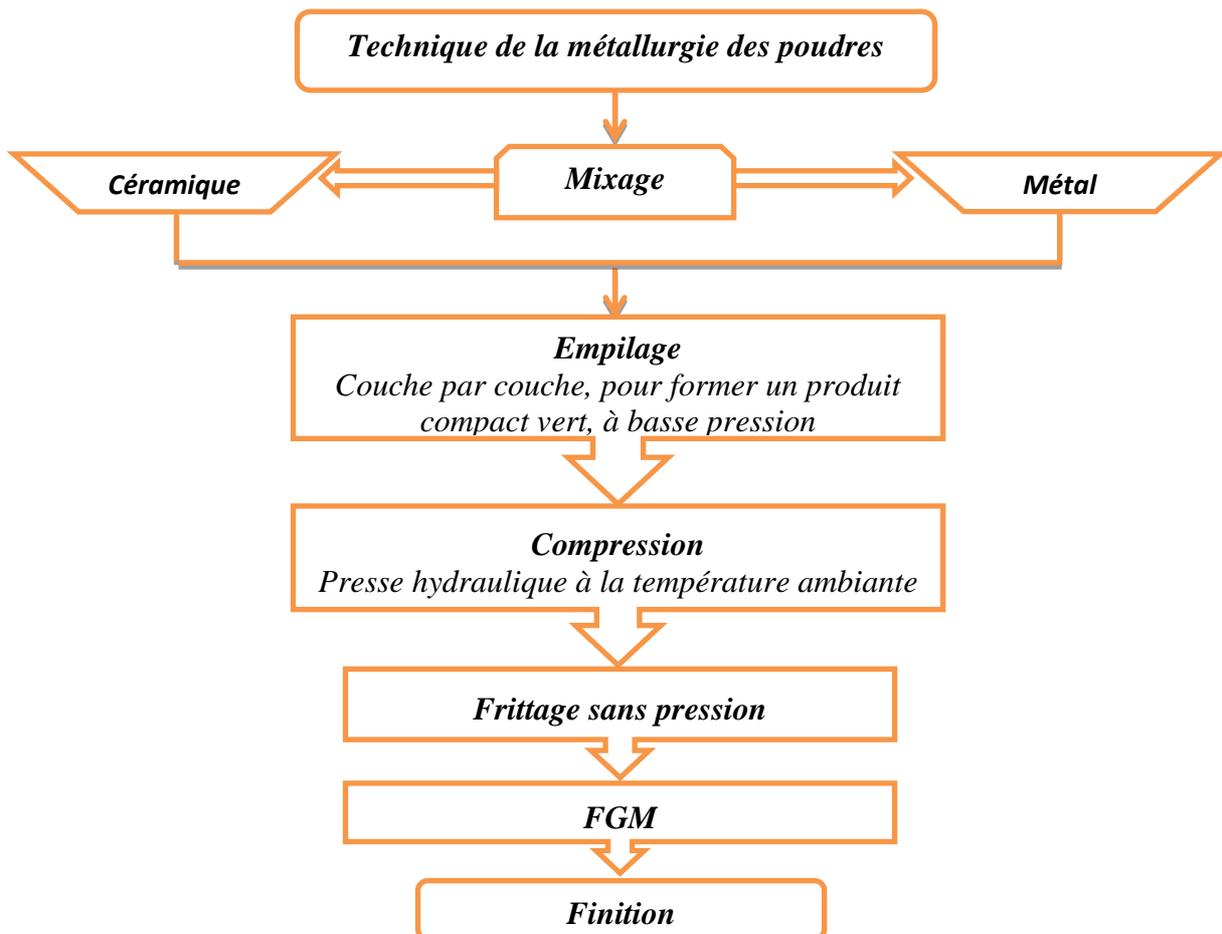
Depuis toujours, les chercheurs ont consacré leurs réflexions à la fabrication des structures en gradient de propriété, de ce fait ils ont essayé de concevoir des compositions optimales de plusieurs méthodes en fonction des propriétés des composants de matériaux (Miyamoto et al.1999; Kiebeck et al.2003; Li et al. 2003; Jamaludin et al. 2013).

Les procédés existants et les plus à jour pour la fabrication des FGM seront expliqués ci-après :

#### I.5.1. Procédé de poudre sèche

Pour la fabrication des matériaux à gradient de propriété utilisant des matériaux solides on fait appel à la technique de PM (métallurgie des poudres).

Ce procédé de fabrication se présente sous trois phases qui sont structurées de la manière suivante: premièrement le panachage de poudre et ceci en fonction de la répartition spatiale de telle façon à respecter l'exigence appropriée, en second l'empilage et damage des poudres pré-mélangées et finalement le frittage (figure I.7).



**Figure I.7:** Organigramme de technique de la métallurgie des poudres pour la production des FGM (Saiyathibrahim et al. 2015).

Cette méthode fait partie des procédés les plus utilisés est cela grâce à son contrôle dans le concept de la composition (El-Wazery et al. 2012; Ramachandran et al. 2015 ;Saiyathibrahim et al. 2015).

### **I.5.2. Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting)**

C'est une méthode traditionnelle qui se base sur le principe du versement de la poudre dans un moule en plâtre poreux, de ce fait le liquide engendré élimine la suspension, dont les particules sont involontairement poussées vers les parois.

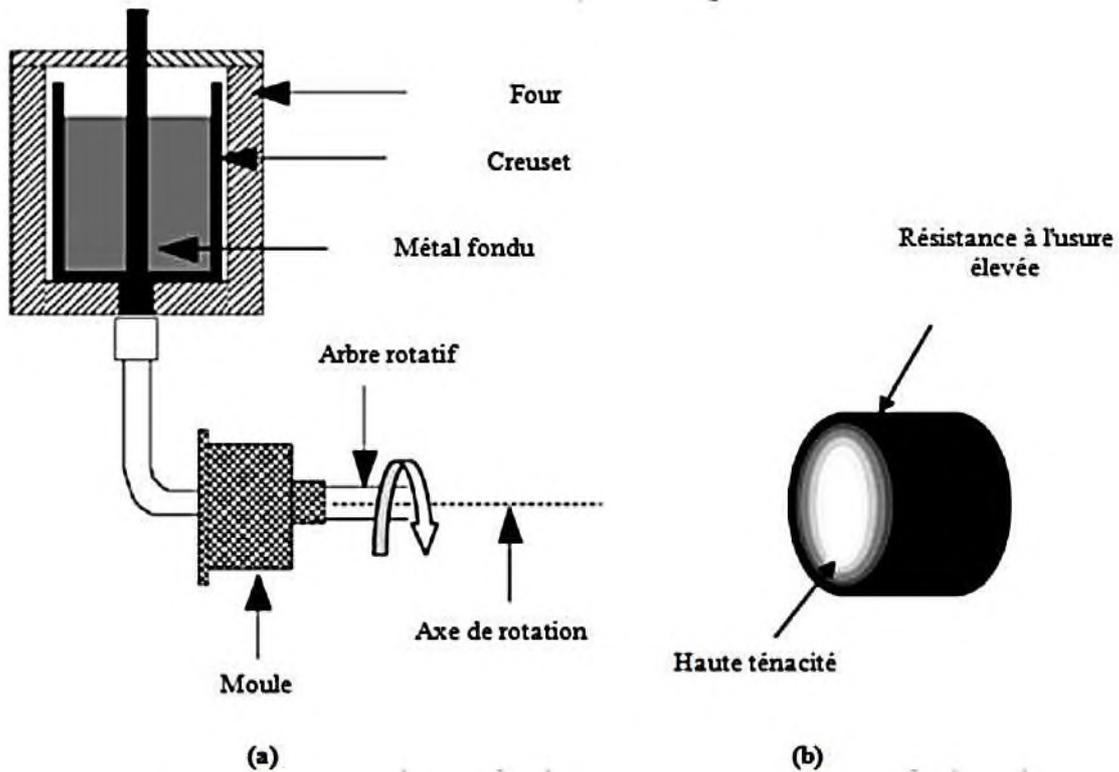
Au cours de la procédure d'écoulement dans la barbotine, la taille des grains de la suspension de poudre change et forme de ce fait le gradient qui est ensuite densifié ou consolidé et finalement la structure de gradient de propriété est constituée (Katayama et al. 2011).

### **I.5.3. Coulage centrifuge (centrifugal casting)**

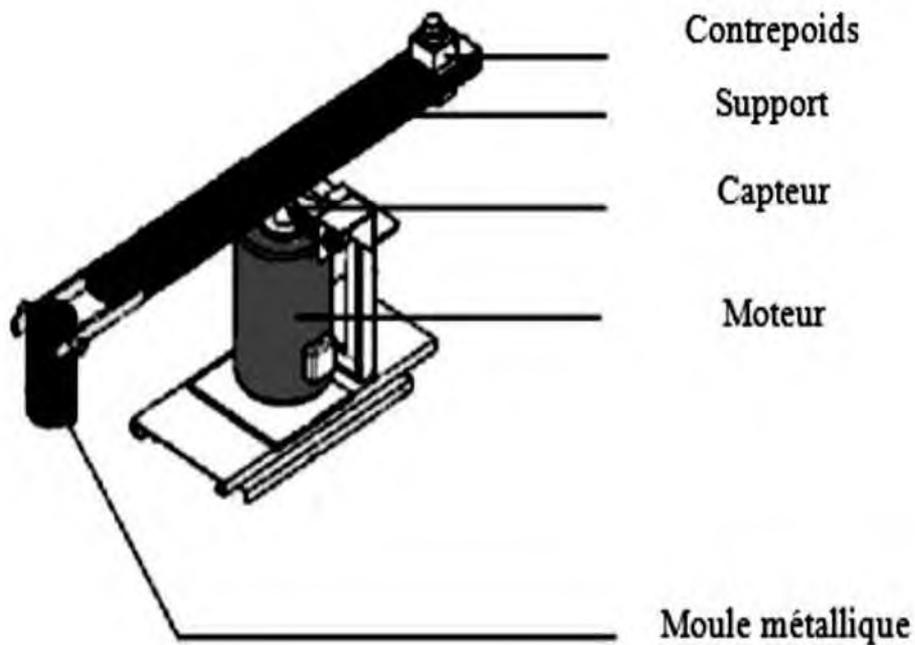
La méthode de centrifugation qui consiste à la fabrication de gradient est divisée en deux catégories est cela en fonction de la température de fusion de la particule de renforcement.

Dans la première catégorie la force centrifuge peut être appliquée au cours de la solidification, à la particule et à la matrice dans le cas où la température de traitement est plus élevée par rapport au point de la particule de renfort de fusion, par contre dans la deuxième catégorie la particule de renfort reste solide dans une matrice liquide dans le cas où la température de traitement est significativement inférieure par rapport au point de fusion.

Cette méthode est baptisée CSPM qui signifie la méthode de particule-solide centrifuge, elle permet un renforcement électif de la surface du composant obtenue des résultats qui sont un maintien d'une haute ténacité en vrac et une résistance à l'usure plus élevée à la surface extérieure (Katayama et al. 2011).



**Figure I.8:** Représentation schématique du: (a)- procédure de coulage centrifuge Horizontale  
 (b)- Le produit final obtenu (Al: haute ténacité et SiC: résistance à l'usure élevée)  
 (Saiyathibrahim et al. 2015).



**Figure I.9:** Installation du coulage centrifuge verticale (Saiyathibrahim et al. 2015).

#### I.5.4. Coulage en bande

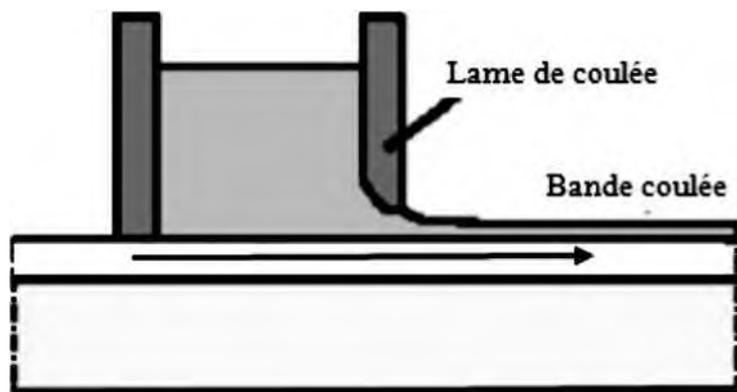
Le procédé de coulage en bande est présenté sur la figure I.10, l'intervalle de la bande de coulée est de 25µm et 1mm par contre pour les bandes minimales la production est inférieure à 1µm.

Le coulage se présente sous trois phases qui sont :

- l'élaboration de la matière qui contient de l'eau, des particules de poudre et de liant ;
- le séchage du corps vert ou de la bande ;
- la consolidation de la matière dense de bande.

Dans un but d'obtenir un matériau à gradient de propriété, des bandes ont été préparées et sont ensuite coupées sous forme des unités carrées à partir des bandes vertes et placés les uns contre les autres avec une épaisseur de l'ordre de 200µm. Et par la coulée de bandes de composition différente et de laminage subséquent des matériaux sont produits en métal-céramique et céramique-céramique.

D'autres chercheurs ont utilisé une autre méthode qui est une combinaison de coulage en bande ainsi que la réaction auto-entretenue à haute température évoquant les travaux d'Anne-Laure Dumont (Dumont et al. 2001), où ils ont fabriqué un matériau à gradient de propriété en MoSi<sub>2</sub>/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> avec des teneurs en alumine variante de 20 à 80 %, les échantillons verts ont été mis à feu à une température ambiante. Pour une bonne amélioration de la densification de composition progressive les réactions de combustion ont été effectuées sous une charge faible (Dumont et al. 2001).



**Figure I.10:** Système de processus de coulage en bande (Saiyathibrahim et al. 2015)

### **I.5.5. Pressage à chaud**

Les deux matériaux combinés en utilisant YSZ-NiCr FGM inter-couche sont la Zircone stabilisée par l'yttria (YSZ) et les nickels 20 chromes (NiCr) à travers la méthode de pressage à chaud (Li et al. 2003). Dans la boule fraiseuse, la poudre (YSZ) et (NiCr) est mélangée pendant 12 heures avant d'être empilée couche par couche en graphite filière revêtue de nitrure de bore. La méthode du concept de dégradation progressive arrange la disposition de chaque couche pour être en pourcentage désiré.

Avant de stocker la couche adjacente sous une pression supérieure à (10 MPa), le pré-compactage des couches doit être réalisé sous une pression inférieure dans le but d'assurer une distribution exacte de composition dans les couches ; ce qui concerne la jonction d'YSZ-NiCr élaboré pour une durée d'une heure à une température de 1200 °C, cette jonction présente une bonne stabilité thermique et une résistance à l'oxydation jusqu'à 1000°C avant d'initier la fissure (Wu et al. 2005 ; Jamaludin et al. 2013 ; Ramachandran et al. 2015).

### **I.5.6. Processus de frittage**

Ce procédé est élaboré dans la même période que le processus de compactage dans le cas où le matériau fonctionnellement gradué est préparé par traitement de pressage à chaud, par contre le procédé de frittage est effectué après que les poudres soient compactées dans le cas où le matériau fonctionnellement gradué est préparé par le traitement de pressage à froid.

Au cours du processus de frittage ou de consolidation la gradation qui a été effectuée dans la poudre compacte doit être préservée. Il faut bien choisir le type de poudre dans un processus étant donné qu'il y a des poudres métalliques légères, telles que l'aluminium et magnésium ont une tendance à réagir avec l'oxygène et de se disséminer dans l'atmosphère et par conséquent ce phénomène doit être évité dans un but d'obtenir des matériaux adéquats (Watari et al 2003 ; Jamaludin et al. 2013).

### **I.5.7. Processus d'infiltration**

L'infiltration est un terme qui signifie chez les scientifiques l'hydrologie et qui est défini comme la précipitation du fluide présent sur la surface dans le sol. Il est régi par la force d'action capillaire ou la gravité par contre le taux d'entrisme est en corrélation aux caractéristiques du sol, tel que le taux de transmission à travers le sol, la facilité d'entrée et l'aptitude de stockage. La capacité et le taux d'infiltration dépendent de plusieurs paramètres

qui sont les types de végétation et de la couverture, la teneur en eau dans le sol, la texture du sol, la température du sol et enfin l'intensité des précipitations.

À la suite de plusieurs travaux énumérés dans la littérature, le processus d'infiltration était germé, il y a de cela plusieurs années, dans le but de traiter les matériaux fonctionnellement gradués, en utilisant la méthode d'infiltration sans aucune pression. De ce fait, un gradient de composition Al/SiCp a été réalisé avec une conductivité thermique non linéaire et une fraction volumique de la céramique en diminution (Cho et al. 2004 ; Jamaludin et al. 2013).

#### **I.5.8. Projection thermique**

Est un processus de pulvérisation de matériaux fondus sur une structure, ces matériaux fondus sont des matériaux à gradient qui se constituent sous formes de couches de revêtement, ces derniers peuvent être épais. Pour le précurseur de revêtement, il doit être chauffé chimiquement ou électriquement. C'est dans ce contexte qu'en 2002, on a pu concevoir des revêtements à gradient de propriété de barrière thermique (TBCs) et des revêtements en double avec la même résistance thermique dans un but d'étudier le comportement thermique à la rupture des structures fonctionnellement graduée (Jamaludin et al. 2013).

#### **I.6. Avantages et inconvénients des matériaux fonctionnellement gradué FGM**

Les matériaux fonctionnellement gradué présentent des avantages et des inconvénients :

##### **I.6.1. Avantages de la FGM**

Outre l'accomplissement de son objectif principal, c'est à dire de fournir les différents requis des propriétés en divers points et des surfaces du futur produit qui, pourrait être réalisé par un simple revêtement. Suresh et al. Et al Bahr, et beaucoup d'autres soulignent divers avantages supplémentaires de la FGM. Ils énumèrent certains avantages qui en résultent principalement de la non-existence d'une interface forte FGM, tels que (Narottam et Bansal 2011) :

- 1- Diminuer les contraintes thermiques causées par les différences de coefficients de dilatation thermique des matériaux utilisés ;
- 2- Absence d'une interface nette devrait conduire à un contrôle d'ensemble mieux des contraintes ;
- 3- Meilleure cohésion entre différents matériaux, par exemple un métal et une céramique ;

- 4- Extension de la région fonctionnelle avant d'atteindre la valeur limite de la déformation plastique ;
- 5- Suppression de délaminage ;
- 6- Augmentation de la ténacité à la rupture ;
- 7- Elimination des singularités des contraintes à divers endroits, tels que les surfaces libres, des coins, des racines de fissures, etc..

### **I.6.2. Inconvénient de la FGM**

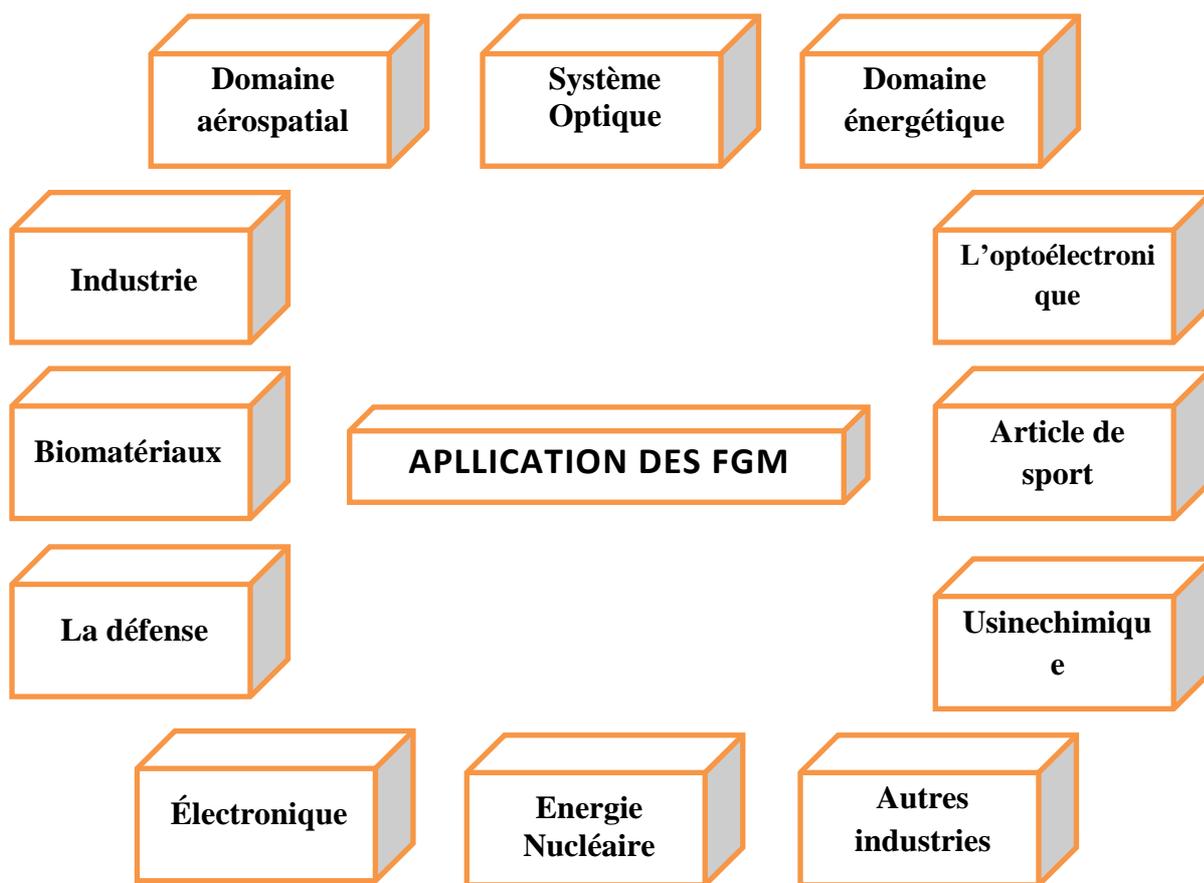
Le principal obstacle à une application plus large de la FGM est leur fabrication compliquée en raison de l'inadéquation des propriétés différentes, par exemple, la température de fusion, des affinités différentes pour divers autres éléments, la taille des particules, la morphologie, etc ; un exemple type est un mélange d'un métal avec la température de fusion (T1) et une céramique avec une température de fusion (T2). Dans la plupart des cas, un tel couple est habituellement ( $T1 \ll T2$ ). Puis, si la température de fabrication est d'environ (T1), le céramique est encore non fondue et la structure finale contient des particules de céramique non fondue dans une matrice métallique.

Dans de nombreux cas, une telle structure présente une grande porosité et une petite adhérence entre les différents composants et son application générale est limitée. Cependant, pour des applications spéciales, la présence de particules très dures (carbures) dans une matrice solide peut être souhaitable.

D'autre part, travailler autour (T2) va certainement entraîner une oxydation rapide et de l'évaporation de nombreux métaux. La formation de phases indésirables, etc. Les matériaux doivent être fabriqués dans une atmosphère protectrice ou à une basse pression et ces deux technologies sont très coûteuses (NarottametBansal 2011).

### **I.7. Domaines d'application des FGM (Mahmood et Akinlabi, 2017)**

Les caractéristiques uniques des matériaux FG ont attiré l'attention de plusieurs chercheurs durant les dernières décennies, ce qui a favorisé leurs utilisations dans la majorité des domaines d'ingénierie. Bien que, originellement, ces matériaux étaient destinés pour les domaines aérospatial et aéronautique, ces derniers ont été utilisés dans l'industrie automobile, biomédicale, défense, électrique/électronique et thermoélectronique (Figure I.11).



**Figure I.11.** Les principaux domaines d'application des FGM

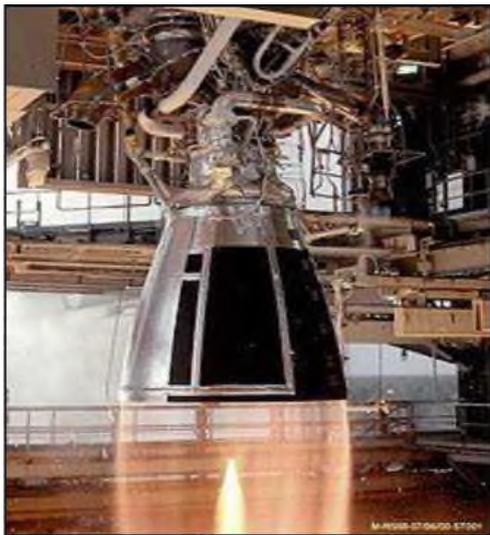
Les matériaux à gradient de propriété ont un large intervalle d'application dans des domaines tels que les matériaux de construction, matériaux de transformation d'énergie, nucléaire et biomécanique. Certaines des applications des matériaux à gradient de propriété sont discutées ci-dessous :

### **I.7.1. Domaine aérospatial**

Etant le premier domaine d'application des matériaux FGM, ils étaient utilisés dans les composants d'engins pour fusée, la structure de botte de vaisseau spatial, les panneaux d'échange de chaleur, les réflecteurs, les panneaux solaires, le logement d'appareil photo, les roues de turbine, les revêtements de lame de turbine, les casquettes de nez, le bord d'attaque de missiles et navettes spatiales (Figure I.12). Les matériels FGM sont aussi utilisés pour les murs structurels qui combinent des propriétés d'isolation thermiques et sonores.

Les matériaux à gradient de propriété sont en évolution constante dans le domaine de l'aérospatiale grâce au programme de développement de la NASA. Cette évolution est due au problème rencontré dans les coûts très élevés des navettes spatiales qui est en rapport avec le

poinds. À cet effet, et afin de réduire ce coût très élevé, il est indispensable d'élaborer une conception optimale qui induit de créer un équilibre entre le poids et la performance de ces navettes spatiales en utilisant des plaques FGM. Plusieurs travaux présentés par Arnold (2001) appliquent le modèle théorique pour simuler la réponse du FGM pour le refroidissement des plaques de blindage thermique pour les navettes spatiales (Hopkinson et al. 2006 ; Saiyathibrahim et al. 2015).



**Figure I.12.** *Utilisation dans le domaine aérospatial*

### **I.7.2. Dans l'industrie**

Dans un domaine important qui a une relation avec l'économie il est nécessaire d'investir au maximum étant donné que dans le domaine de l'industrie l'innovation de l'outil est primordiale, vu que récemment l'industrie exige des pièces récentes avec des paramètres qui admettent des résistances à l'usure et la ténacité, étant des éléments maîtres dans l'innovation de l'industrie et qui induisent la réduction des coûts de ces composants. De ce fait, la solution à cette problématique est l'utilisation des matériaux à gradient de propriété.

Parmi les matériaux à gradient de propriété qui ont été utilisés dans des applications importantes ont fait allusion aux matériaux à gradient à matrice d'aluminium, ces derniers ont été utilisés dans l'industrie à une étendue échelle telle que les emballages électroniques et des matériaux de blindage (Saiyathibrahim et al. 2015).

### **I.7.3. Industrie automobile**

L'utilisation de matériaux FG dans l'industrie automobile est toujours limitée à l'heure

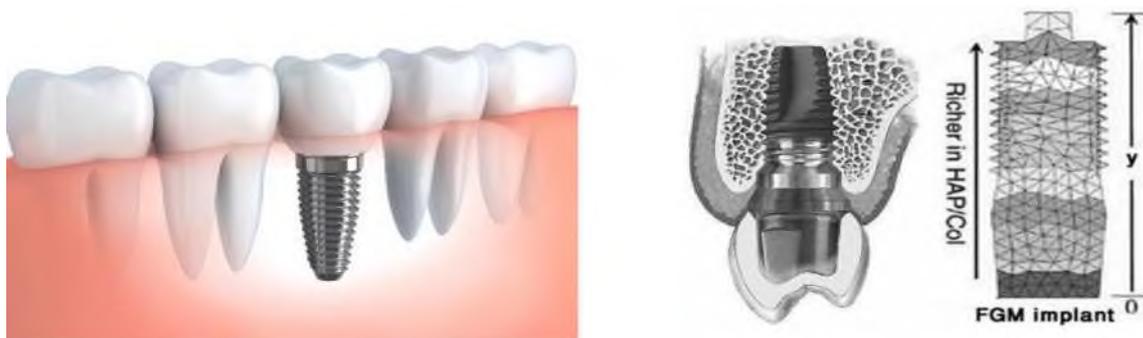
actuelle, à cause du coût élevé de production. Cependant, le matériau est utilisé dans les parties très importantes de l'automobile, où le coût élevé présent justifie son utilisation. Les applications présentes incluent les pochettes de cylindre de moteur pour des pistons de moteur diesel, pour les ressorts à lames, pour les bougies, les chambres de combustion, les puits d'énergie, les amortisseurs, les volants, quelques parties du corps de la voiture, le verre de fenêtre et des freins de voiture de course (Figure I.13). Aussi, les matériaux FG sont utilisés dans des revêtements des corps améliorés pour des voitures et cela inclut les revêtements gradués avec des particules, comme le dioxyde/mica.



*Figure I.13. Utilisation dans l'industrie automobile*

#### **I.7.4. Industrie biomédical**

Le corps humain est composé d'un certain nombre de matériaux FG notamment les os et les dents. Ces derniers sont les parties du corps humain les plus remplacées suite à l'endommagement de ces parties ou bien à cause du processus de vieillissement naturel. C'est pourquoi la majorité de matériaux FG utilisés dans l'industrie biomédicale sont des implants, tels que : Dans les implants pour remplacement squelettique permanent, la porosité graduée aide à minimiser la protection de stress. Les implants dentaires de titane poreux graduellement aident à améliorer les propriétés d'osseo-intégration de l'implant (Figure I.14). Hydroxyapatite poreux gradué (HA) imite la structure bimodale de l'os humain, ce qui aide à promouvoir la nouvelle croissance tissulaire et leurs propriétés mécaniques.



**Figure I.14.** Utilisation des FGM dans les implants dentaires (Sadollah et al., 2013)

### I.7.5. Dans industrie marine

Les matériaux FG ont aussi des applications dans l'industrie marine notamment : Dans le puits de propulseur, les cylindres plongeants, les dômes de sonar, le système de tuyauterie de composé et dans la coque de pression cylindrique.

### I.7.6. Dans les biomatériaux

Aujourd'hui ce domaine sensible sollicite l'admission de ce type de matériaux, car les matériaux à gradient de propriété sont l'innovation du siècle dans ce domaine sensible, pour éclaircir mieux on prend l'exemple de la réparation de l'os et ligaments humains ou son remplacement en cas de fissuration, plusieurs chercheurs ont travaillé sur cette thématique comme Miao et Sun (Xigeng Miao et al. 2010), où les recherches expérimentales ont montré que ces matériaux ont une capacité de résistance et de durabilité.



a. L'os



b. hanche biocompatible

**Figure I.15:** Exemples des matériaux à gradient de propriétés (l'os et hanches).

### I.7.7. Dans la défense

Les matériaux à gradient de propriété sont la base de la fabrication du sabre japonais traditionnel. Ce dernier est fabriqué par plusieurs plaques d'acier de forge avec une teneur en carbone qui permet de se présenter dans la surface extérieure en grande quantité par rapport à la partie intérieure. Ils induisent une résistance élevée et une dureté remarquable (Misra et al. 2011). Parmi les capacités du matériau fonctionnellement gradué est d'empêcher la propagation des fissures.

La capacité du FGM d'offrir des propriétés résistant à la pénétration en évitant la propagation des fissures est une propriété attirante qui favorise le matériau dans l'industrie de défense. Les matériaux FG sont utilisés dans l'industrie de défense dans des applications, comme des gilets pare-balles, l'épée japonaise traditionnelle et dans des blindages ainsi que le corps de véhicules pare-balles. (Figure I.16)



**Figure I.16.** Utilisation dans l'industrie de la défense.

### I.7.8. Dans les capteurs et les applications énergétiques

Les matériaux à gradient de propriété procurent une variété de fonction, par exemple le thermoélectrique gradué, ces matériaux piézoélectriques sont appliqué dans les ultrasonores à large bande et les électrodes composites graduées pour les combustibles à base d'oxydes solides (Müller et al. 2003). Les matériaux à gradient de propriété sont utilisés dans les procédés de changement d'énergie, protection des aubes de turbine comme revêtement.

### **I.7.9. Dans l'optoélectronique**

Aujourd'hui, il est possible de réaliser des procédés photoniques qui pourraient fonctionner dans une large gamme spectrale et cela en utilisant des matériaux à gradient de propriété (Wo et al. 2005).

Il existe plusieurs domaines d'application des FGM comme les revêtements, les composants des moteurs, les échangeurs de chaleur, les réacteurs nucléaires etc. (Rasheedat et al., 2012; Bohidar et al., 2014). A cet effet, en remarque une amélioration dans le coût de production et les propriétés des matériaux à gradient de propriété.

### **I.7.10. Articles de sports**

Aujourd'hui les matériaux à gradient de propriété sont introduits comme un composant dans la production des articles de sport de haute performance telle que les chaussures de baseball et les outils d'escalade sur glace (crampons et piolets) dans le même concept de réduction d'usure (Hopkinson et al., 2006 ; Saiyathibrahim et al., 2015).

Les matériaux FG sont utilisés dans un certain nombre d'équipements sportifs, tel que les clubs de golf, des raquettes de tennis et des skis.

### **I.7.11. Dans autres industries**

L'application des matériaux FG inclut aussi divers domaines, exemple, les outils de coupe pour améliorer la force thermique de l'outil de coupe, les lames de rasoir de Fer-Aluminure/Acier inoxydable, dans les équipements de sécurité, comme des bouteilles d'air de lutte contre les incendies, les cadres de monocle et les casques.

D'autres équipements, comme, le scanner IRM des tubes cryogéniques, les récipients sous pression, les réservoirs à carburant, les cas d'ordinateur portable, les instruments de musique et les tables radiographiques.

**Tableau I.2 : Les propriétés des FGM et leurs applications significatives**  
(Bohidar et al., 2014 ; Makwana et al., 2014 ; Udupa et al., 2014).

FGM	Propriétés	Applications
Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> / Alliage d'aluminium	Barrière thermique et anti usure	Buse à fusée, ailes et pièces moulées
Fibre de verre / Epoxy	Résistance à la dureté et à l'amortissement	Rotors de frein, dômes solaires, Systèmes de tuyauterie composite.
Carbone / Epoxy	Légers et de bonnes propriétés d'amortissement	Composants d'hélicoptères Portes de trains d'atterrissage Panneaux d'échangeurs de chaleur Pièces de moteur
TiAl / SiC SiC/C	Revêtements résistants aux températures et aux chocs	Panneaux d'échange de chaleur, buse de fusée, structure de vaisseau spatial, panneaux solaires, réflecteurs et lames de roue de turbine.
Graphite / Epoxy	Rapport résistance / raideur élevé, bonne résistance au rayonnement et réduit les distorsions thermiques.	Coques de pression cylindriques Télescopes spatiaux Réservoirs cryogéniques Antennes satellites
Alliage d'aluminium / Nanotubes de carbone (CNT)	Légèreté et haute rigidité	Ligaments artificiels, pièces de rechange pour scanner IRM, lunettes de verre et pièces de dentisterie.
SiCw / Alliage d'aluminium	Légèreté et haute rigidité	Cylindres de stockage, pistons de moteurs diesel, cadres de vélo et véhicules de course
WC / Co	Propriété de résistance à la chaleur, à l'usure et à la déchirure	Machines et les outils de formage, les outils de coupe et les os artificiels.
Al / SiC	Dureté et ténacité	Chambres de combustion, Garnitures de cylindre moteur, Volants.
BaTiO <sub>3</sub> / Si	Contrôle de perte de signal à haute fréquence	Moteurs diélectriques

### I.8. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM

Les matériaux fonctionnellement gradués « FGM » sont généralement composés de deux matériaux, habituellement céramique et métal, malheureusement dans plusieurs cas les renseignements sur les caractéristiques du matériau que soit la forme, la taille et la distribution

sont indisponibles, vu que le module d'élasticité est évalué sur la base de la forme et la distribution de la fraction volumique. À cet effet, des modèles micromécaniques ont vu le jour dans un but de définir les propriétés des matériaux macroscopiquement homogènes.

Parmi les méthodes d'homogénéisation évoquées dans la littérature seules trois d'entre elles sont les plus utilisées à savoir: l'approche du modèle auto-cohérent d'Hill (Hill, 1965), la méthode Mori-Tanaka (Mori et Tanaka, 1973) et enfin la loi des mélanges (Markworth et al. 1995).

### I.8.1. La loi des mélanges

Une des propriétés des matériaux fonctionnellement gradués est déterminée par le paramètre  $p$  et il varie le long d'une direction en fonction des fractions volumiques et les propriétés des matériaux qui le composent.

Dans les plaques FGM la direction est variable suivant le sens de l'épaisseur (figure I.14).



**Figure I.17:** *Plaque à gradient de propriété.*

Les propriétés sont représentés par le module d'élasticité, la masse volumique et le coefficient de Poisson, elle se présente sous la formule suivante :

$$P(z) = P_1V_1 + P_2V_2 \quad (\text{I.1a})$$

Ou  $P_1$ ,  $P_2$  et  $V_1$ ,  $V_2$  sont les propriétés du matériau ainsi que les fractions volumiques, la somme des fractions volumiques est égale à 1 :

$$V_1 + V_2 = 1 \quad (\text{I.1b})$$

La fraction volumique  $V_1$  a une distribution de la loi de puissance suivante (Markworth et al, 1995):

$$V_1 = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^n \quad (\text{I.1c})$$

En remplaçant (I.1c) dans (I.1b) on obtient :

$$V_1 = 1 - \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^n \quad (\text{I.1d})$$

Avec :  $h$  est l'épaisseur de la plaque et  $n$  est l'indice de loi de puissance.

Les matériaux  $V_1$  et  $V_2$  peuvent être en céramique et métal suivant cette distribution,  $z = h/2$  est la couche de céramique et qui représente la surface supérieure,  $z = -h/2$  est la couche de métal et qui représente la surface inférieure de la plaque à gradient de propriété.

Plusieurs chercheurs basent leurs recherches soit sur la fonction de la loi de puissance, de la fonction sigmoïde ainsi que celle de la fonction exponentielle dans un but de décrire les fractions volumiques d'un matériau fonctionnellement gradué.

### I.8.1.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM

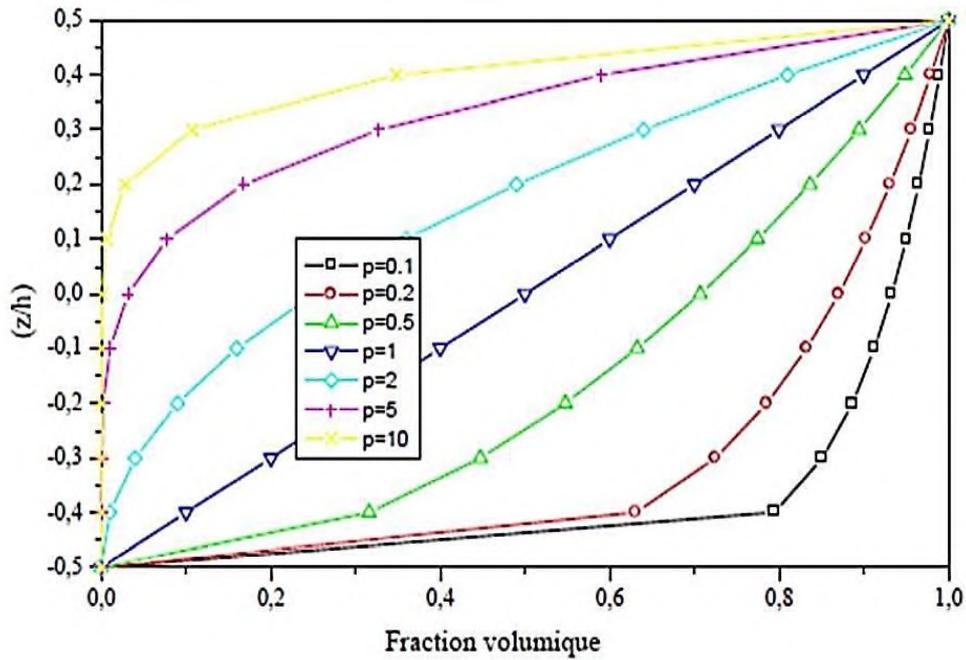
Dans une plaque P-FGM, la fraction volumique obéit à une loi de puissance sous la forme :

$$V(z) = \left(\frac{z + h/2}{h}\right)^p \quad (\text{I.2})$$

Où  $p$  est le paramètre du matériau et  $h$  est l'épaisseur de la plaque et  $z$  présente coordonné suivant l'épaisseur. Les propriétés matérielles de la plaque sont déterminées par la loi des mélanges (Mori et Tanaka, 1973).

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m)V(z) \quad (\text{I.3})$$

Les modules d'Young de la surface inférieure ( $z = -h/2$ ) et supérieure ( $z = h/2$ ) de la plaque FGM sont respectivement  $E_m$  et  $E_c$ . (La figure **1.15**) illustre la variation de la fraction volumique dans le sens de l'épaisseur de la plaque. D'après la figure, on remarque que près de la surface inférieure pour  $P < 1$  la fraction volumique diminue rapidement par contre près de la surface supérieure pour  $P > 1$  la fraction volumique augmente rapidement.



**Figure I.18:** La variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur de la plaque P-FGM (Bao, 1995)

### I.8.1.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM

Chi et Chung (Chi et al, 2003) ont défini la fraction volumique par l'utilisation de deux fonctions de la loi de puissance dans le but d'assurer une distribution des contraintes dans toutes les interfaces de la plaque. Les fonctions de la loi de puissance se présentent sous la forme :

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{z + h/2}{h/2} \right)^p \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.4a})$$

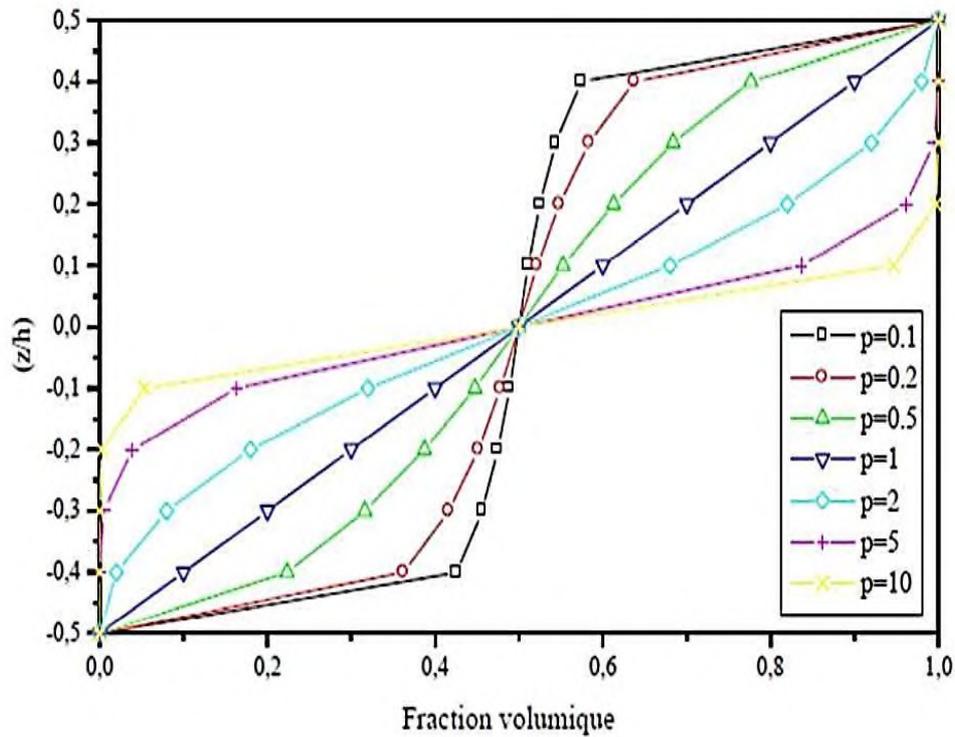
$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\frac{h}{2} - z}{\frac{h}{2}} \right)^p \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.4b})$$

Le module d'Young de la plaque S-FGM est calculé en utilisant la loi des mélanges comme suit :

$$E(z) = V_1(z) E_1 + (1 - V_1(z)) E_2 \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.5a})$$

$$E(z) = V_2(z) E_1 + (1 - V_2(z)) E_2 \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.5b})$$

La variation de la fraction volumique qui est défini par les équations (I.5a) et (I.5b) représente les distributions sigmoïdes, illustrée sur la figure I.16.



**Figure I.19:** La variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur de la plaque S-FGM (Chi et al. 2003).

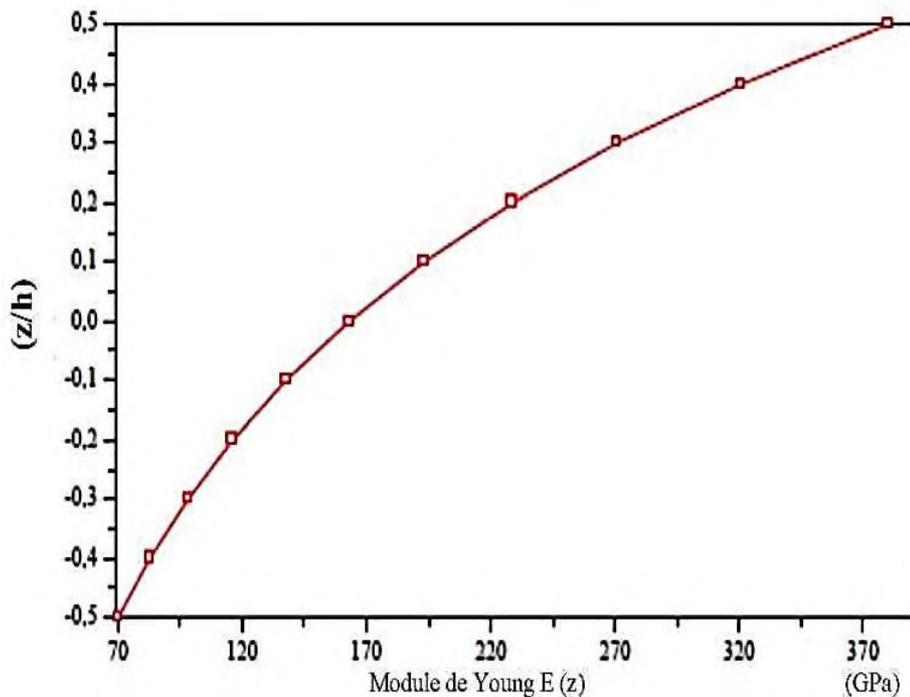
### I.8.1.3. Propriétés matérielles de plaque E-FGM

Afin de définir les propriétés matérielles des matériaux, plusieurs chercheurs ont une tendance à utiliser la fonction exponentielle, la variation du module d'Young à travers l'épaisseur (figure I.17).

Delale al. (1983) ont défini la fonction exponentielle sous forme :

$$E(z) = E_2 e^{B(z+\frac{h}{2})} \tag{I.1a}$$

Avec 
$$B = \frac{1}{h} \ln\left(\frac{E_1}{E_2}\right) \tag{I.1b}$$



**Figure I.20:** La variation de la fraction volumique dans une plaque E-FGM (Delale et al.1983).

### I.8.2. Le modèle auto-cohérent de Hill

Ce modèle est élaboré dans le principe de noyer dans un matériau continu chaque inclusion de renforcement, dont ses propriétés sont celles du composite, la méthode nommée ne permet pas de faire une distinction entre la matrice et les phases de renforcement quoique le module d'ensemble soit le même qui est présagé dans un autre composite alors qu'un remplacement des rôles respectifs des phases est élaboré. Elle est donc en mesure de déterminer dans des régions dont leur microstructure squelettique interconnecté (Hill, 1965; Reiter et al.1997) (figure I.18).



**Figure I.21:** Phase matérielles avec microstructure squelettique (Kanaun et al. 2008).

Par la méthode d'auto-cohérent des modules élastiques locale  $K$  et  $p$  sont donnés :

$$\frac{\delta}{K} = \frac{V_1}{K - K_2} \frac{V_2}{K - K_1} \quad (I.7)$$

$$\frac{\eta}{\mu} = \frac{V_1}{\mu - \mu_2} \frac{V_2}{\mu - \mu_1} \quad (I.8)$$

Ou :

$$\delta = 3 - 5 \mu = \frac{K}{K + \frac{3\mu}{3}} \quad (I.9)$$

Après remplacement du paramètre  $\delta$  dans l'équation (I.7), l'équation est écrite sous la forme :

$$\frac{K}{K + \frac{4\mu}{3}} = \frac{V_1}{K_1 + \frac{4\mu}{3}} + \frac{V_2}{K_2 + \frac{4\mu}{3}} \quad (I.10)$$

Et ensuite elle est donnée comme suit :

$$K = \frac{1}{\frac{V_1}{K_1 + \frac{4\mu}{3}}} + \frac{1}{\frac{V_2}{K_2 + \frac{4\mu}{3}}} - \frac{4\mu}{3} \quad (I.11)$$

Le paramètre  $p$  est obtenu en résolvant de l'équation suivante :

$$(1 - \eta)\mu^2 + [\eta(\mu_1 + \mu_2) - (V_1\mu_1 + V_2\mu_2)]\mu - \eta\mu_1\mu_2 = 0 \quad (I.12)$$

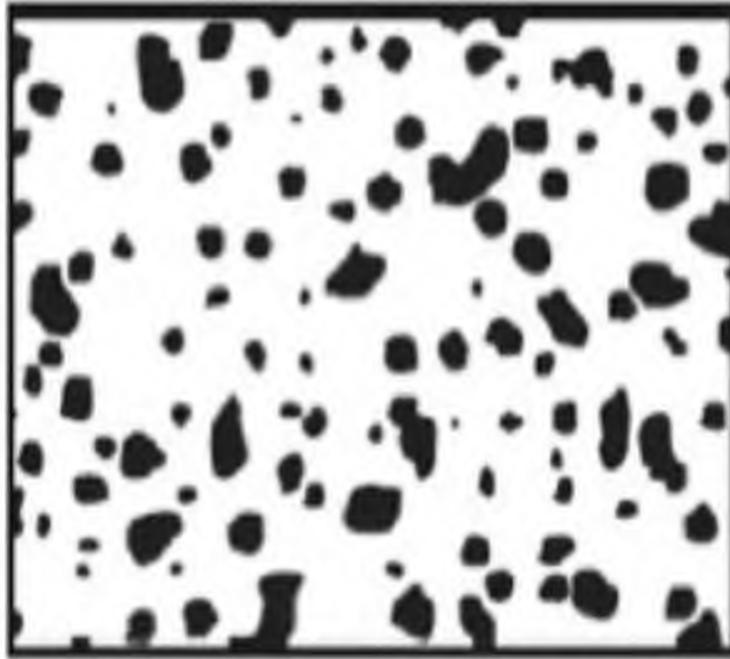
Le paramètre  $\eta$  dans l'équation est défini en utilisant l'équation (I.9), en revanche le module de cisaillement  $\mu$  est défini dans l'équation (I.12) et pour résoudre l'équation il est plus facile d'utiliser la méthode Mori-Tanaka que le modèle d'auto-cohérent.

### I.8.3. Le modèle Mori-Tanaka

Ce modèle est basé sur l'évaluation des propriétés effectives du matériau, la méthode est applicable aux régions de la microstructure graduée possédant une phase particulière discontinue et une matrice continue bien définie (figure I.19) (Kanaun et al. 2008).

Dans ce cas de figure, la phase matricielle désignée par l'indice 1 est renforcée par des particules sphériques d'une phase particulière désignée par l'indice 2.  $K_1$ ,  $\mu_1$  et  $V_1$  désignent

respectivement la masse volumique, le module de cisaillement et la fraction volumique de la phase matrice par contre la phase particulaire et désignée par  $K_2$ ,  $\mu_2$  et  $V_2$ , qui représentent les propriétés matérielles qui sont la masse volumique, le module de cisaillement et la fraction volumique (Hill, 1965 ; Mori et Tanaka, 1973 ; Benyeniste, 1987).



**Figure I.22:** Phase matérielles avec microstructure particulaire (Kanaun et al. 2008).

Dans la méthode de Mori-Tanaka (Mori et Tanaka, 1973) les différentes propriétés locales sont présentées de la manière suivante :  $K$  qui est défini comme le module de compressibilité,  $\mu$  le module de cisaillement,  $V$  la fraction volumique,  $\alpha$  le coefficient de dilatation thermique et cela dans une matrice isotrope pour une distribution aléatoire des particules isotropes et qui sont donnés (Vel et al. 2004 ; Shen, 2009).

$$\frac{K - K_1}{K_2 - K_1} = \frac{V_2}{1 + V_1(K_2 - K_1)/(K_1 + \frac{4}{3}\mu_1)} \quad (\text{I. 13})$$

$$\frac{\mu - \mu_1}{\mu_2 - \mu_1} = \frac{V_2}{1 + V_1(\mu_2 - \mu_1)/(\mu_1 + f_1)} \quad (\text{I. 14})$$

$$\text{Ou :} \quad f_1 = \mu_1 \frac{9K_1 + 8\mu_1}{6(K_1 + 2\mu_1)} \quad (\text{I. 15})$$

$$\frac{\alpha - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} = \frac{\left(\frac{1}{K}\right) - \left(\frac{1}{K_1}\right)}{\left(\frac{1}{K_2}\right) - \left(\frac{1}{K_1}\right)} \quad (\text{I. 16})$$

Dans les deux modèles de Hill et Mori-Tanaka le module de Young et le coefficient de Poisson sont défini respectivement par les équations suivantes :

$$E = \frac{(3K - 2\mu)}{(3K + \mu)} \quad (\text{I. 17})$$

$$\gamma = \frac{(3K - 2\mu)}{2(3K + \mu)} \quad (\text{I. 18})$$

## I.9. Conclusion

Ce chapitre était dédié à une généralité sur les matériaux fonctionnellement gradués ou appelés aussi les matériaux à gradient de propriété, nous avons essayé dans cette partie de présenter en amont une introduction sur ces matériaux intelligents, qui sont l'innovation du siècle, tout en débutant par une présentation d'un historique ainsi d'une conceptualisation de ces matériaux à gradient de propriété, étant donné que dans chaque matériau il y a toujours un élément déclencheur qui a permis son apparition, elle est subséquentement articulée par un aperçu sur les méthodes qui existent pour l'élaboration de ces matériaux, que soit le procédé de (poudre sèche, frittage, infiltration), le coulage (séquentiel, centrifuge, en bande), pressage à chaud et enfin la projection thermique.

Et afin d'éviter de se contenter des informations stériles on s'est penché sur des informations distinctives sur ces matériaux dans la diversification qui existe avec les matériaux composites traditionnels, et vu que ces matériaux fonctionnellement gradués montrent des avantages et des inconvénients de plusieurs phénomènes, en conséquence nous avons jugé nécessaire de présenter cette partie et de l'articuler par une présentation sur leurs domaines d'exploitations puisque ces matériaux sont actuellement introduits dans des champs d'applications vastes et sensibles, à titre d'exemple le domaine médical qui est en relation direct avec la survivance de l'humanité.

Et en dernier lieu, nous avons évoqué les différentes lois qui régissent la variation des propriétés matérielles des plaques que soit de puissance, sigmoïde ou exponentielle à travers

l'épaisseur d'une plaque par la variation des propriétés du matériau (module d'Young, coefficient de poisson et la masse volumique). Dans le chapitre qui va suivre, nous nous attacherons à étudier les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) par une présentation d'une revue bibliographique.

## ***Chapitre II:***

### ***Les théories des plaques***

## II.1 Introduction

Pour résoudre les problèmes des plaques en FGM dans le domaine élastique, il est nécessaire de choisir la bonne théorie décrivant correctement le comportement statique et dynamique de la structure ainsi que la méthode de résolution à appliquer.

C'est en 1888 que Love utilisa les hypothèses de Gustav Kirchhoff, elles-mêmes inspirées des hypothèses d'Euler-Bernoulli pour fonder une théorie des plaques minces (également appelée théorie classique ou théorie de Kirchhoff-Love) (CPT : Classical plate theory). La théorie des plaques semi-épaisses (théories des déformations du premier ordre) (FSDT : The first-order shear deformation plate theory) a été consolidée par Mindlin à partir des travaux de Rayleigh (1877), Timoshenko (1921), Reissner (1945) et Uflyand (1948). Ensuite, des théories d'ordre supérieur (HSDT : High-order shear deformation plate theory) sont venues améliorer les hypothèses des théories classiques et du premier ordre lorsque l'épaisseur de la plaque devient importante. Il existe aussi la théorie basée sur l'élasticité tridimensionnelle qui ne fait aucune hypothèse restrictive sur les déplacements de la plaque.

Nous présentons dans ce chapitre quelques modèles des théories des plaques développées dans la littérature pour améliorer l'évolution de la variation du champ des déplacements à travers l'épaisseur des plaques.

## II.2. Définition d'une plaque

La plaque est un solide défini par une surface de référence plane (plan  $x, y$ ) et par une petite épaisseur (notée  $h(x, y)$ ), par rapport aux autres dimensions, à savoir la longueur et la largeur. Suivant l'ordre de grandeur de  $h$  par rapport aux autres dimensions, on introduit l'adjectif mince au épaisse aux plaques et aux coques. Cependant, ce qualificatif n'implique pas seulement une caractéristique géométrique, mais définit aussi un rôle particulier des déformations dites de cisaillement transversal. Cette influence est d'autant plus importante que les structures sont minces car l'épaisseur  $h$  varie en sens inverse de l'influence. La plaque peut être constituée d'un matériau homogène ou d'un empilement de différentes couches de matériaux orthotropes.

## II.3. Différents types de plaques

En fonction de la nature des matériaux qui les constituent et de la géométrie de leur section transversale, les plaques peuvent être classées en trois catégories;

1) **Les plaques isotropes**: elles sont constituées d'un matériau isotrope (acier, béton) et leur section transversale est homogène. Elles sont définies par deux paramètres élastiques (respectivement le module d'élasticité et le coefficient de Poisson). On les retrouve dans les constructions civiles courantes (bâtiments, ouvrages d'art,...).

2) **Les plaques orthotropes**: leurs propriétés élastiques sont différentes dans deux directions perpendiculaires. L'orthotrope peut être naturelle (bois) ou techniques (dalles rédiées). Le comportement de ces dalles est défini par quatre paramètres élastiques et on les retrouve dans les constructions navales, aéronavales, de réservoirs de l'industrie chimique, des bâtiments et d'ouvrages d'art (Batoz, 1990).

3) **Les plaques anisotropes**: leurs propriétés élastiques sont différentes dans toutes les directions. Neuf paramètres élastiques sont suffisants pour les devenir. Elles sont souvent constituées de matériaux composites et sont surtout utilisées dans l'industrie aéronavale.

#### II.4. Les modèles des plaques pour les matériaux à gradient de propriétés

L'ensemble de ces théories sont basées sur l'état de contraintes planes, par conséquent la déformation normale est négligée ( $\varepsilon_z = 0$ ), sachant que l'aspect géométrique de la plaque est défini par une surface de référence plane (plan  $x,y$ ) et par une épaisseur petite par rapport aux autres dimensions (Belabed,2016). Cette définition favorise le choix d'une cinématique spécifique par rapport à la cinématique générale d'un solide, le facteur de classification de ces théories est l'importance de l'épaisseur par rapport aux autres dimensions, cette particularité conduit à l'effet de cisaillement transversal à travers l'épaisseur, ce dernier est présenté dans la cinématique adaptée.

Pour cela, nous atteindrons aux trois classes suivantes :

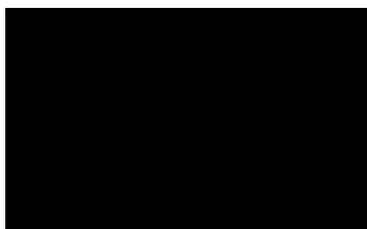
- 1 ) Les théories classiques des plaques (**Classical plate theory CPT**),
- 2 ) Les théories de premier ordre des plaques (**First Order Shear Plate Theory FSDT**),
- 3 ) Les théories de cisaillement d'ordre supérieur des plaques (**Higher Order Shear Déformation Theory HSDT**) .

##### II.4.1 Théorie classique des plaques de Love-Kirchhoff (CPT)

Ce modèle est la généralisation pour des matériaux anisotropes du modèle de Love-Kirchhoff. Cette théorie ne tient pas compte du cisaillement transverse et suppose que les déplacements de membrane, en tout point de la plaque, sont uniquement dépendants des

déplacements de membrane et des dérivées de la flèche.

Le champ de déplacement associé est présenté dans l'équation (II.1). La figure II.1 illustre l'état déformé d'une structure monocouche avec le modèle de Love-Kirchhoff : la section de la plaque déformée reste orthogonale à la surface neutre, les contraintes et déformations de cisaillement transverse sont nulles. Cette formulation a tendance à sous-estimer les flèches et surestimer les charge critique de flambement et les fréquences propres des structures modélisées, cette erreur étant encore plus grande pour les stratifiés fortement anisotropes. Cependant, ce modèle permet de décrire correctement le comportement de plaques simples fortement élancées ou avec une épaisseur faible par rapport à la longueur d'onde de flexion, d'où son appellation de "plaques minces".



(II.1)

Où  $u$  ;  $v$  ;  $w$  ,sont les composantes du champ de déplacement à la surface moyenne ( $\varepsilon=0$ ).

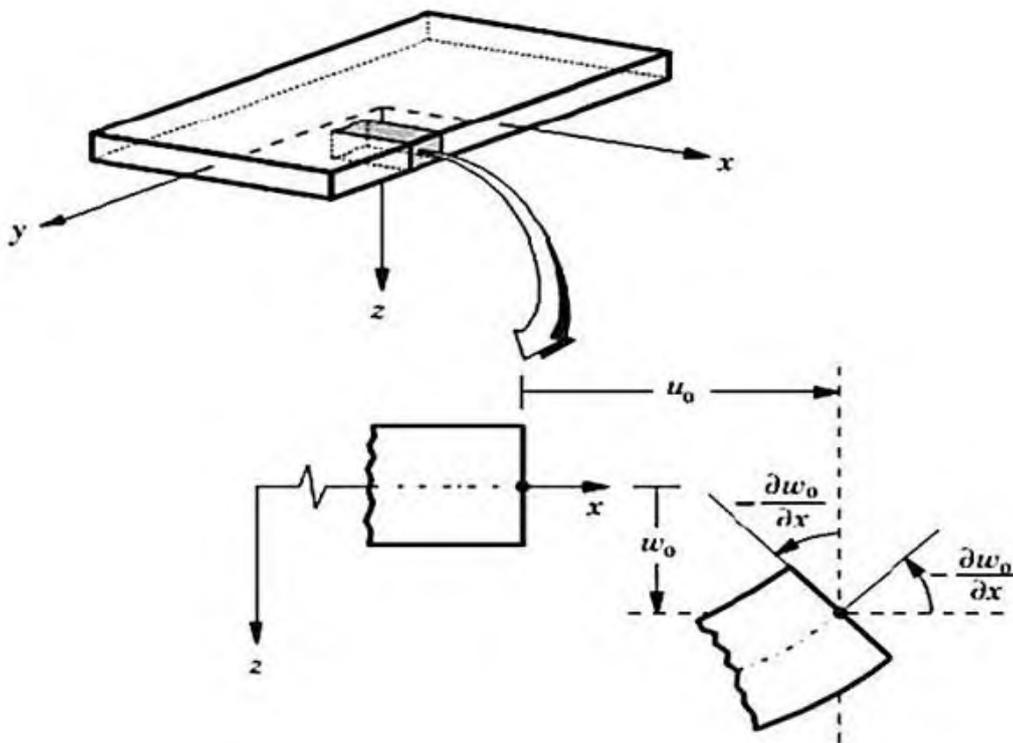


Figure II.1 : Plaque de Love Kirchhoff (Reddy 1997)

Le champ de déformation associé au champ de déplacement de l'Eqs. (II.1) est obtenu comme suit :

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial v_0}{\partial y}, \quad \epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \quad (II.2)$$

Avec :

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi_x, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \varphi_y \quad (II.3)$$

Puisque cette théorie est limitée et donne des résultats non précis pour les plaques semi-épaisses et épaisses (Reissner, 1945 et Mindlin, 1951) ont prolongé la théorie classique des plaques minces (CPT) en tenant compte de l'effet de la déformation de cisaillement.

**II.4.2. La théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT) :**

Dans cette théorie le cisaillement transverse est inclus. Dans ce cas les contraintes et les déformations sont uniformes et constantes à travers l'épaisseur de la plaque (Fig. II 2.), ce qui nécessite l'introduction d'un du facteur de correction de cisaillement «  $K_s$  ». La FSDT est utilisé par plusieurs chercheurs (Whitney, 1969; Reddy, 1998; Kant et Swaminathan, 2002; Chen, 2005, Bouazza et al., 2010; MemarArdestani et al., 2014; Mantari et Granados, 2015 ; Hadji et al., 2016)

La théorie du premier ordre est basée sur le champ de déplacement suivant :

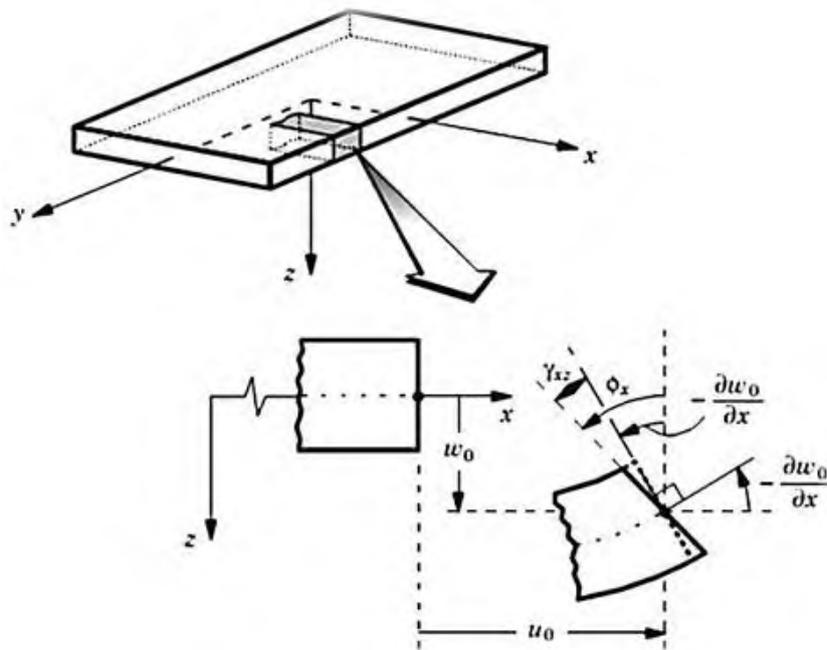
$$u = u_0 + z \varphi_x, \quad v = v_0 + z \varphi_y, \quad w = w_0 + z \varphi_w \quad (II.4)$$

Avec :  $(u_0, v_0, w_0)$  et  $(\varphi_x, \varphi_y, \varphi_w)$  sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes y et x, respectivement.

Le champ de déplacement définis dans l'expression ci-dessus permet de reprendre la théorie classique des plaques décrite dans la dernière section par le remplacement

de

La FSDT est donc une extension de la cinématique de la CPT par une déformation de cisaillement transversale de la plaque dans leur hypothèse cinématique. La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) ne satisfait pas les conditions aux limites au niveau des surfaces supérieure et inférieure de la plaque (contraintes de traction non nulles), un facteur de correction en cisaillement ( $K_s$ ) à travers l'épaisseur est nécessaire. La valeur de ce facteur de correction dépend de la géométrie de la plaque, de la variation du coefficient de Poisson à travers l'épaisseur, du chargement appliqué et des conditions aux limites imposées.



**Figure II.2 :** *Plaque de Reissner-Mindlin (Reddy 1997)*

D'ailleurs pour éviter l'introduction d'un facteur de correction ( $K_s$ ), des théories de déformation en cisaillement d'ordre élevée ont été développées.

#### II.4.3. La théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSDT)

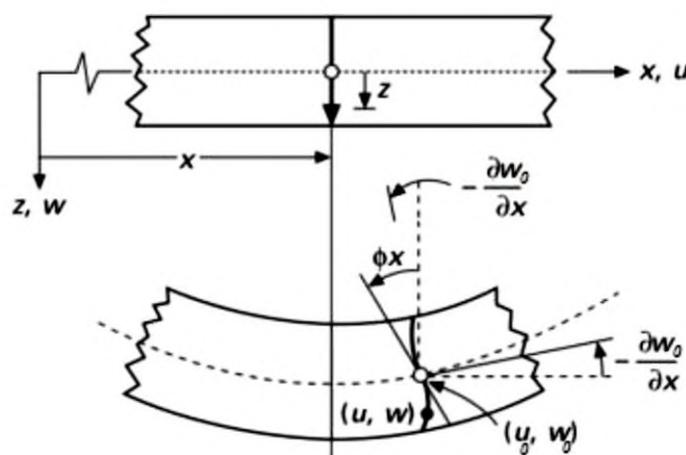
Pour éviter l'utilisation d'un facteur de correction en cisaillement et pour tenir compte d'hypothèses plus réalistes que celles de Kirchhoff, plusieurs théories d'ordre élevé ont été

proposées par Reddy (1984, 2000), Iyengar et al. (1974,1982), Krishna Murty (1977-1987). Généralement ces théories utilisent un développement en série de Taylor à travers l'épaisseur du champ de déplacement avec la forme suivante :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\phi_\alpha(x, y) + z^2\phi_\alpha^2(x, y) + \dots + z^n\phi_\alpha^n(x, y) \quad (\text{II.5})$$

Où  $n$  détermine l'ordre utilisé dans le modèle. Dans la théorie de Kirchhoff-Love  $n=0$ . La théorie de Reissner-Mindlin est une théorie du premier ordre avec  $n=1$  pour les déplacements dans le plan et  $n=0$  pour le déplacement normal.

La figure II.3 montre une cinématique schématisée d'un modèle d'ordre élevé.



**Figure II.3 :** Schématisation des déformations des plaques par la théorie « HSDT ».

Selon Reddy (1990) et Mallikarjuna et Kant (1993) les hypothèses qui sont à l'origine du développement de ces théories d'ordre élevé sont :

- Les déplacements sont petits comparés à l'épaisseur de la plaque.
- Les sections transversales, initialement planes et normales au plan moyen, ne restent pas nécessairement planes et normales à celui-ci après déformation.
- La déformation axiale dans la direction transversale n'est pas négligeable.
- La contrainte normale dans la direction transversale n'est en général pas négligeable.

La plupart des théories d'ordre élevé (HSDT) sont basées sur les approches de Reissner (1945), Mindlin (1951) et d'Ambartsumyan (1969) Et leur champ de déplacements s'écrit sous la forme suivante :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + f(z)\phi_x(x, y), \quad (\text{II. 6a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + f(z) \varphi_x(x, y), \quad (\text{II. 6b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y), \quad (\text{II. 6c})$$

Avec  $(u_0, v_0, w_0)$  et  $(\varphi_x, \varphi_y)$  sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes x et y, respectivement  $\varphi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x$ ,  $\varphi_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y$ .

$f(z)$  est une fonction de cisaillement transverse caractérisant les théories correspondantes. En effet, les déplacements de la théorie classique de plaque (CPT) est obtenue par en prenant  $f(z) = 0$ , alors que la théorie de premier ordre (FSDT) peut être obtenue par  $f(z) = z$ .

Reddy avait proposé une théorie de déformation de cisaillement du troisième ordre (TSDT) qui peut être obtenus par :

$$f(z) = z \left( 1 - \frac{4}{3h^2} z^2 \right) \quad (\text{II. 7})$$

Dans le modèle de Reddy, le champ de déplacement membranaire est cubique, la distribution des contraintes de cisaillement transverse est parabolique à travers l'épaisseur et les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites. Ce qui donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution d'élasticité tridimensionnelle (Elasticité 3D).

En 1991, une fonction trigonométrique sinusoïdale est introduite dans un modèle sinus(SSDT) pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur est proposé par Touratier (1991), ce modèle (SSDT) est différent des autres modèles d'ordre supérieurs puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme suite :

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (\text{II. 8})$$

Les contraintes de cisaillement transverses déterminées par le modèle (SSDT) prennent une forme co-sinusoïdale à travers l'épaisseur de la plaque. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de Reddy.

Karama et al., (2003) ont développé une version exponentielle de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The exponential shear deformation plate theory ESDPT) est obtenue en prenant:

$$f(z) = ze^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad (\text{II. 9})$$

Le choix de la fonction exponentielle permet un développement en puissance pair et impair de la variable  $z$ , alors que la fonction (sinus) de Touratier (1991) ne permet qu'un développement en puissance impair.

Malgré le fait que les modèles d'ordre élevé assurent une continuité de déplacement et de déformation à l'interface, les contraintes de cisaillement infraliminaires et les contraintes d'interface, restent discontinues. Ceci présente un inconvénient lors de l'analyse locale de l'interface des structures multicouches dont les propriétés des couches sont très différentes (Duong, 2007).

La version hyperbolique de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (the hyperbolic shear deformation plate theory HSDPT) développée par Ait Atmane et al., (2010) est obtenue en prenant :

$$f(z) = \frac{\cosh(\pi/2)}{[\cosh(\pi/2) - 1]} z - \frac{(h/\pi)\sinh(\frac{\pi}{h} z)}{[\cosh(\pi/2) - 1]} \quad (\text{II. 10})$$

#### II.4.4. Revue sur les différents modèles fonction de la théorie d'ordre élevé

Pour franchir les limites des théories du premier ordre, plusieurs auteurs proposent quelques contributions importantes de développement de modèles d'ordre élevés qui se sont distingués dans la littérature par l'expression de la fonction de cisaillement  $f(z)$ .

Les modèles sont basés sur une distribution non linéaire des champs de déplacement dans l'épaisseur, et qui permettent de représenter le gauchissement de la section transversale dans la configuration déformée (Figure II.4) (Whitney 1973), (Nelson 1974), (Lo 1977) et (Touratier 1991) . Nous citons en particulier :

- L'approche d'Ambartsumyan (1969) avec ;

$$f(z) = \frac{z}{2} \left( \frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \quad (\text{II. 11})$$

- L'approche de Reissner (Reissner 1945), Panc et Kaczkowski (1973) avec ;

$$f(z) = \frac{5}{4} z \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II. 12})$$

- L'approche de Levinson, Murthy, (1981) et Reddy Avec ;

$$f(z) = z \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \tag{II.13}$$

- L'approche de Aydogdu (2005) avec ;

$$f(z) = z \alpha^{\frac{-2(\frac{z}{h})^2}{\ln(\alpha)}} \quad \alpha > 0 \tag{II.14}$$

- L'approche de El-Meiche et al. (2011) avec ;

$$f(z) = \frac{\frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) - z}{\cosh(\pi/2 - 1)} \tag{II.15}$$

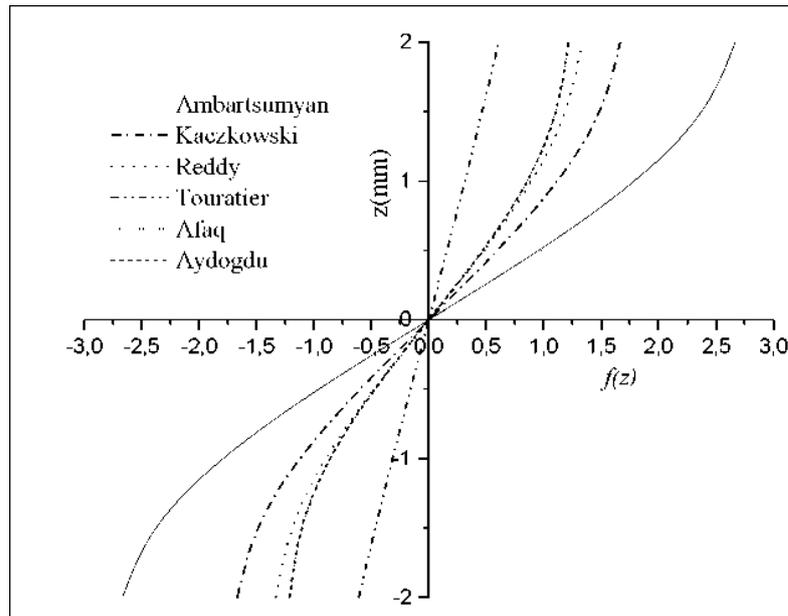


Figure II.4: Variation de la fonction de forme  $f(z)$  des différents modèles en fonction de l'épaisseur.

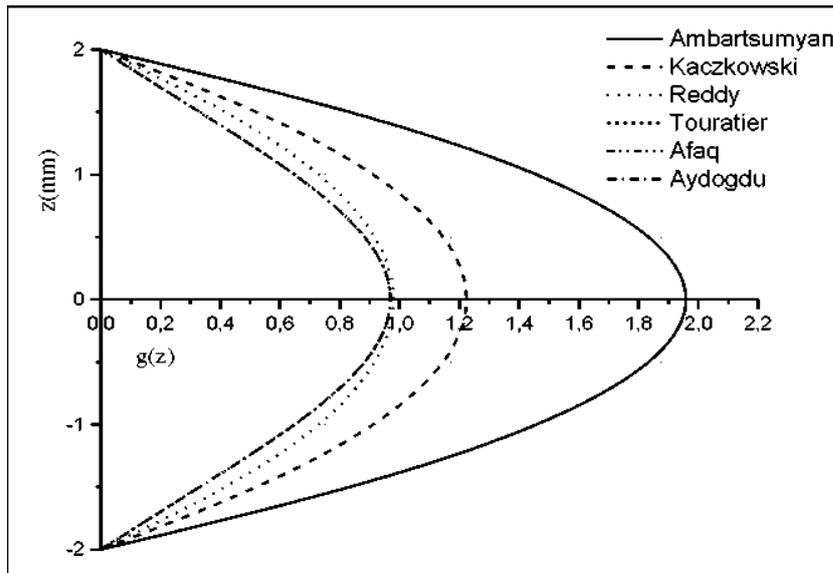


Figure. II.5: Variation de la dérivée de la fonction de forme  $f'(z)$  des différents modèles suivant l'épaisseur.

#### II.4.5. Nouvelle théorie raffinée de déformation des plaques

Shimpi (2002) a développé un modèle raffiné pour les plaques isotropes (RPT : Refined Plate Theory). Les caractéristiques les plus intéressantes de cette méthode est qu'elle ne contient que deux variables qui donne seulement quatre inconnus à trouver au lieu des cinq dans le cas classique. En plus, cette théorie n'exige pas de facteur de correction de cisaillement et donne une distribution parabolique de cisaillement à travers l'épaisseur de la plaque. Aussi, elle présente beaucoup de similitudes avec la théorie classique des plaques quant aux équations du mouvement, les conditions aux limites et les expressions des moments. Ait Atmane et al. 2010 ont adaptée cette théorie pour la flexion des plaques FGM.

Récemment (Thai et Kim. 2010 et 2011) et Hadji et al. (2011) ont adapté la RPT, avec succès, au flambement des plaques orthotropes, et à la vibration libre des plaques stratifiées et sandwichs respectivement.

#### II.5. Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté les différentes théories de déformation des plaques soit celles qui se basent sur la théorie tridimensionnelle d'élasticité ou sur les théories des plaques « FGM » en commençant à savoir la théorie classique et la théorie du premier ordre, en passant par les théories d'ordre élevé. A la fin du chapitre, on a eu l'occasion dévoilé une nouvelle théorie de déformation en cisaillement des plaques quasi 3D qui prend en considération l'effet de l'étirement de l'épaisseur cette théorie permet de réduire le nombre d'inconnus à cinq réduisant ainsi les temps de calcul.

Dans le cadre de ce travail de recherche. On va appliquer cette théorie de déformation quasi-3D pour analyser la vibration libre des plaques en FGM et pour sa validation, on comparera les résultats avec ceux obtenus avec les différentes théories trouvées dans la littérature.

***Chapitre III:***  
***Formulation***  
***théorique***

### III.1 Introduction

Dans ce travail, une nouvelle théorie quasi-3D HSDT inverse qui comptabilise les effets de déformation de cisaillement transversal et d'étirement de l'épaisseur est proposée. La présente théorie contient seulement cinq variables ce qui est similaire que la FSDT, le modèle assure les conditions aux limites de traction libres sur les surfaces supérieures et inférieures de la plaque. Le principe d'Hamilton est utilisée pour déterminée les équations de mouvement. Des solutions analytiques de plaques FG simplement appuyées sont présentées. Les résultats calculés sont comparés avec les solutions existantes pour vérifier l'exactitude de la théorie proposée dans la prévision de la réponse dynamique des plaques FG.

### III.2 Formulation mathématique

#### III.2.1 Les propriétés de la plaque FGM

Les propriétés du matériau de la plaque FGM, comme le module de Young  $E$ , le coefficient de Poisson  $\nu$ , et la masse volumique  $\rho$ , sont déterminés selon la loi de mélange (Jha et al, 2012; Tounsi et al, 2013) comme :

$$P(z) = P_m + (P_c - P_m) V(z) \quad (\text{III.1a})$$

Avec

$$V(z) = \left( \frac{2z+h}{2} \right)^p \quad (\text{III.1b})$$

Où  $P$  est la propriété matérielle effective,  $P_c$  et  $P_m$  sont les propriétés des faces supérieure et inférieure de la plaque, respectivement.  $p$  est l'indice du matériau.  $V(z)$  est la fraction volumique de céramique. Par souci de simplicité, le coefficient de Poisson est supposé être une valeur constante suivant l'épaisseur de la plaque (Delale et Erdogan, 1983).

#### III.2.2. La nouvelle théorie raffinée à cinq variables

##### III.2.2.1. Hypothèses de base et cinématique

Le champ de déplacement de la présente théorie est choisi sur la base des hypothèses suivantes:

- (1) Les déplacements transversaux sont divisés en composants de flexion, de cisaillement et d'étirement;
- (2) le déplacement dans le plan est divisé en composants d'extension, de flexion et de cisaillement;

(3) les parties flexibles des déplacements dans le plan sont similaires à celles données par CPT;

(4) les parties de cisaillement des déplacements dans le plan donnent lieu aux variations hyperboliques des déformations de cisaillement et donc aux contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur de la plaque de telle sorte que les contraintes de cisaillement disparaissent sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque.

Sur la base de ces hypothèses, les relations de champ de déplacement suivantes peuvent être obtenues :

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (\text{III .2a})$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (\text{III .2b})$$

$$w(x, y, z, t) = w_b(x, y, t) + w_s(x, y, t) + \xi g(z) \varphi_z(x, y, t) \quad (\text{III .2c})$$

Où  $u_0$  et  $v_0$  dénotent les déplacements le long de  $x$  et  $y$  les coordonnées des directions d'un point sur le plan médian de la plaque;  $w_b$  et  $w_s$  sont les composantes de flexion et de cisaillement du déplacement transversal, respectivement; et le déplacement supplémentaire  $\varphi_z$  tient compte de l'effet de la contrainte normale (effet d'étirement).

$\xi$  : C'est le paramètre qui prend en considération l'effet d'étirement ( $\xi = 0$  sans étirement ;  $\xi = 1$  avec étirement).

Les fonctions de forme  $f(z)$  et  $g(z)$  sont donnés comme suit :

$$f(z) = z - \arcsinh(z) + \frac{2\sqrt{5}}{5} \frac{z}{h} \quad (\text{III.3})$$

et

$$g(z) = 1 - f'(z) \quad (\text{III.4})$$

### III.2.2.2 . Les déformation et équations constitutives

Les déformations non nulles associées au champ de déplacement dans l'équation (III.2) sont obtenues comme suit:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix}, \quad \varepsilon_z = g'(z) \varepsilon_z^0 \quad (\text{III.5})$$

Où

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad (III.6a)$$

$$\begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_s}{\partial y} + \frac{\partial \phi_z}{\partial y} \\ \frac{\partial w_s}{\partial x} + \frac{\partial \phi_z}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \varepsilon_z^0 = \phi_z$$

et

$$g'(z) = \frac{dg(z)}{dz} \quad (III.6b)$$

Pour un matériau élastique en FGM, les relations constitutives peuvent s'écrire:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (III.7)$$

Où  $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy})$  et  $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy})$  : sont les composants de contrainte et de déformation, respectivement.

Le calcul des constantes élastiques  $C_{ij}$  dépend de quelle hypothèse de  $\varepsilon_z$  nous considérons.

- Si  $\varepsilon_z = 0$  ( $\xi = 0$  sans étirement),  $C_{ij}$  sont les constants élastiques réduits de la contrainte plane données par:

$$C_{11} = C_{22} = \frac{E(z)}{1-\nu^2}, \quad C_{12} = \nu C_{11} \quad (III.8a)$$

$$C_{44} = C_{55} = C_{66} = G(z) = \frac{E(z)}{2(1+\nu)}, \quad (\text{III.8b})$$

- Si  $\varepsilon_z \neq 0$  (étirement d'épaisseur),  $C_{ij}$  sont les constantes élastiques tridimensionnelles, données par

$$C_{11} = C_{22} = C_{33} = \frac{(1-\nu)}{\nu} \lambda(z), \quad C_{12} = C_{13} = C_{23} = \lambda(z) \quad (\text{III.9a})$$

$$C_{44} = C_{55} = C_{66} = G(z) = \mu(z) = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \quad (\text{III.9b})$$

Où  $\lambda(z) = \frac{\nu E(z)}{(1-2\nu)(1+\nu)}$  et  $\mu(z) = G(z) = \frac{E(z)}{2(1+\nu)}$  sont les coefficients de Lamé. Le module  $E$ ,  $G$

et les coefficients élastiques  $C_{ij}$  varient dans l'épaisseur en fonction de l'équation. (III.1).

### III.2.2.3. Les équations de mouvement

Les équations de mouvement du système sont obtenues en se basant sur le principe de Hamilton (Reddy, 2002). Le principe prend la forme analytique suivante

$$0 = \int_0^T (\delta U - \delta T) dt \quad (\text{III.10})$$

Où  $\delta U$  est la variation de l'énergie de déformation; et  $\delta T$  est la variation de l'énergie cinétique.

La variation de l'énergie de déformation de la plaque est calculée par

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_V \left[ \sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} \right] dV \\ &= \int_A \left[ N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_z \delta \varepsilon_z^0 + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_y^b \delta k_y^b + M_{xy}^b \delta k_{xy}^b \right. \\ &\quad \left. + M_x^s \delta k_x^s + M_y^s \delta k_y^s + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + S_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^0 + S_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^0 \right] dA = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.11})$$

Où  $A$  est la surface supérieure et les résultantes des efforts et moments  $N$ ,  $M$ , et  $S$  sont définis par

$$\begin{Bmatrix} N_x & N_y & N_{xy} \\ M_x^b & M_y^b & M_{xy}^b \\ M_x^s & M_y^s & M_{xy}^s \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \end{Bmatrix} dz \quad (\text{III.12a})$$

$$N_z = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_z) g'(z) dz, \quad (\text{III.12b})$$

$$(S_{xz}^s, S_{yz}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) g(z) dz. \quad (\text{III.12c})$$

La variation de l'énergie cinétique de la plaque peut s'écrire

$$\begin{aligned} \delta T &= \int_V [\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w}] \rho(z) dV \\ &= \int_A \left\{ I_0 [\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \delta \dot{v}_0 + (\dot{w}_b + \dot{w}_s)(\delta \dot{w}_b + \delta \dot{w}_s)] \right. \\ &\quad - I_1 \left( \dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) \\ &\quad - J_1 \left( \dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) \\ &\quad + I_2 \left( \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial y} \right) + K_2 \left( \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial y} \right) \\ &\quad + J_2 \left( \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial y} \right) \\ &\quad \left. + J_1^{st} \left( (\dot{w}_b + \dot{w}_s) \delta \dot{\phi}_z + \dot{\phi}_z \delta (\dot{w}_b + \dot{w}_s) \right) + K_2^{st} \dot{\phi}_z \delta \dot{\phi}_z \right\} dA \end{aligned} \quad (\text{III.13})$$

Où la convention point-exposant indique la différenciation par rapport à la variable de temps  $t$ ;  $\rho(z)$  est la masse volumique donnée par l'équation (III.1); et  $(I_0, I_1, J_1, J_1^{st}, I_2, J_2, K_2, K_2^{st})$  sont des inerties de masse définies comme

$$(I_0, I_1, J_1, J_1^{st}, I_2, J_2, K_2, K_2^{st}) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, f, g, z^2, z f, f^2, g^2) \rho(z) dz \quad (\text{III.14})$$

Les équations du mouvement sont dérivées de l'équation (III.10) en intégrant les gradients de déplacement et en fixant les coefficients de  $\delta u_0$ ,  $\delta v_0$ ,  $\delta w_b$ ,  $\delta w_s$  et  $\delta \phi_z$  séparément. Les équations obtenues sont les suivantes:

$$\begin{aligned}
\delta u_0 : \quad & \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial x} - J_1 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial x} \\
\delta v_0 : \quad & \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial y} - J_1 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial y} \\
\delta w_b : \quad & \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_1 \left( \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_b - J_2 \nabla^2 \ddot{w}_s + J_1^{st} \ddot{\phi}_z \\
\delta w_s : \quad & \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + J_1 \left( \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - J_2 \nabla^2 \ddot{w}_b - K_2 \nabla^2 \ddot{w}_s + J_1^{st} \ddot{\phi}_z \\
\delta \phi_z : \quad & \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} - N_z = J_1^{st} (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + K_2^{st} \ddot{\phi}_z
\end{aligned} \tag{III.15}$$

En substituant les relations contrainte-déformation dans les définitions des résultantes de force et de moment de la théorie actuelle donnée dans les équations (III.12) les résultantes de contrainte sont obtenues comme suit:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ B & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} L \\ L^s \\ R \end{bmatrix} \varepsilon_z^0, \quad S = A^s \gamma, \tag{III.16a}$$

$$N_z = R^s \phi + L (\varepsilon_x^0 + \varepsilon_y^0) + L^s (k_x^b + k_y^b) + R (k_x^s + k_y^s), \tag{III.16b}$$

Où

$$N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}, \quad M^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}, \quad M^s = \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\}, \tag{III.17a}$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0\}, \quad k^b = \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\}, \quad k^s = \{k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s\}, \tag{III.17b}$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}, \tag{III.17c}$$

$$B^s = \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s \end{bmatrix}, \quad D^s = \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^s \end{bmatrix}, \quad H^s = \begin{bmatrix} H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ H_{12}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix}, \quad (\text{III.17d})$$

$$S = \{S_{xz}^s, S_{yz}^s\}, \quad \gamma = \{\gamma_{xz}, \gamma_{yz}\}, \quad A^s = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} L \\ L^s \\ R \\ R^s \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \lambda(z) \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \\ g'(z) \frac{1-\nu}{\nu} \end{Bmatrix} g'(z) dz \quad (\text{III.17e})$$

Où les coefficients de rigidité  $A_{ij}$  et  $B_{ij}, \dots$  etc., sont définis comme

$$\begin{Bmatrix} A_{11} & B_{11} & D_{11} & B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s \\ A_{12} & B_{12} & D_{12} & B_{12}^s & D_{12}^s & H_{12}^s \\ A_{66} & B_{66} & D_{66} & B_{66}^s & D_{66}^s & H_{66}^s \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \lambda(z) \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \\ f(z) \\ z f(z) \\ f^2(z) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{1-\nu}{\nu} \\ 1 \\ \frac{1-2\nu}{2\nu} \end{Bmatrix} dz, \quad (\text{III.18a})$$

et

$$(A_{22}, B_{22}, D_{22}, B_{22}^s, D_{22}^s, H_{22}^s) = (A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s), \quad (\text{III.18b})$$

$$A_{44}^s = A_{55}^s = \int_{-h/2}^{h/2} \mu(z) [g(z)]^2 dz \quad (\text{III.18c})$$

En remplaçant l'équations (III.16) dans l'équation (III.15), les équations de mouvement peuvent être exprimées en termes de déplacements ( $\delta u_0$ ,  $\delta v_0$ ,  $\delta w_b$ ,  $\delta w_s$ ,  $\delta \phi_z$ ) comme:

$$A_{11} d_{11} u_0 + A_{66} d_{22} u_0 + (A_{12} + A_{66}) d_{12} v_0 - B_{11} d_{111} w_b - (B_{12} + 2B_{66}) d_{122} w_b - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) d_{122} w_s - B_{11}^s d_{111} w_s + L d_1 \phi = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 d_1 \ddot{w}_b - J_1 d_1 \ddot{w}_s, \quad (\text{III.19a})$$

$$A_{22} d_{22} v_0 + A_{66} d_{11} v_0 + (A_{12} + A_{66}) d_{12} u_0 - B_{22} d_{222} w_b - (B_{12} + 2B_{66}) d_{112} w_b - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) d_{112} w_s - B_{22}^s d_{222} w_s + L d_2 \phi = I_0 \ddot{v}_0 - I_1 d_2 \ddot{w}_b - J_1 d_2 \ddot{w}_s, \quad (\text{III.19b})$$

$$\begin{aligned}
& B_{11}d_{111}u_0 + (B_{12} + 2B_{66})d_{122}u_0 + (B_{12} + 2B_{66})d_{112}v_0 + B_{22}d_{222}v_0 - D_{11}d_{1111}w_b - 2(D_{12} + 2D_{66})d_{1122}w_b \\
& - D_{22}d_{2222}w_b - D_{11}d_{1111}w_s - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)d_{1122}w_s - D_{22}^s d_{2222}w_s + L^s(d_{11}\phi_z + d_{22}\phi_z) = I_0(\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) \\
& + I_1(d_1\ddot{u}_0 + d_2\ddot{v}_0) - I_2(d_{11}\ddot{w}_b + d_{22}\ddot{w}_s) - J_2(d_{11}\ddot{w}_s + d_{22}\ddot{w}_s) + J_1^{st}\ddot{\phi}_z \quad (\text{III.19c})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& B_{11}^s d_{111}u_0 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s)d_{122}u_0 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s)d_{112}v_0 + B_{22}^s d_{222}v_0 - D_{11}^s d_{1111}w_b - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)d_{1122}w_b \\
& - D_{22}^s d_{2222}w_b - H_{11}^s d_{1111}w_s - 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s)d_{1122}w_s - H_{22}^s d_{2222}w_s + A_{44}^s d_{11}w_s + A_{55}^s d_{22}w_s \\
& + R(d_{11}\phi_z + d_{22}\phi_z) + A_{44}^s d_{11}\phi_z + A_{55}^s d_{22}\phi_z = I_0(\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + J_1(d_1\ddot{u}_0 + d_2\ddot{v}_0) - J_2(d_{11}\ddot{w}_b + d_{22}\ddot{w}_s) \\
& - K_2(d_{11}\ddot{w}_s + d_{22}\ddot{w}_s) + J_1^{st}\ddot{\phi}_z \quad (\text{III.19d})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& L(d_1u_0 + d_2v_0) - L^s(d_{11}w_b + d_{22}w_s) - (R + A_{44}^s)d_{11}w_s - (R + A_{55}^s)d_{22}w_s \\
& - A_{44}^s d_{11}\phi_z - A_{55}^s d_{22}\phi_z + R^s\phi_z = J_1^{st}(\dot{w}_b + \dot{w}_s) + K_2^{st}\ddot{\phi}_z \quad (\text{III.19e})
\end{aligned}$$

où  $d_{ij}$ ,  $d_{ijl}$  et  $d_{ijlm}$  sont les opérateurs différentiels suivants:

$$d_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \quad d_{ijl} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}, \quad d_{ijlm} = \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m}, \quad d_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (i, j, l, m = 1, 2). \quad (\text{III.20})$$

### III.2.3. Solution analytique pour une plaque FGM simplement appuyées

La technique de Navier qui utilise les doubles séries de Fourier est adoptée pour résoudre les équations de mouvement de la vibration libre de la plaque en FGM. Les conditions aux limites de la plaque FGM simplement appuyées sont

$$v_0 = w_b = w_s = \frac{\partial w_s}{\partial y} = \phi_z = N_x = M_x^b = M_x^s = 0 \quad \text{a} \quad x = 0, \quad a \quad (\text{III.21a})$$

$$u_0 = w_b = w_s = \frac{\partial w_s}{\partial x} = \phi_z = N_y = M_y^b = M_y^s = 0 \quad \text{a} \quad y = 0, \quad b \quad (\text{III.21b})$$

La forme de solution pour  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $w_b$ ,  $w_s$  et  $\phi_z$  qui satisfait les conditions aux limites données dans l'équation. (III.21) est étendu en série double Fourier comme:

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_b \\ w_s \\ \varphi_z \end{pmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} U_{mn} e^{i\omega t} \cos(\lambda x) \sin(\mu y) \\ V_{mn} e^{i\omega t} \sin(\lambda x) \cos(\mu y) \\ W_{bmn} e^{i\omega t} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \\ W_{smn} e^{i\omega t} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \\ \Phi_{mn} e^{i\omega t} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \end{pmatrix} \quad (\text{III.22})$$

où  $U_{mn}$ ,  $V_{mn}$ ,  $W_{bmn}$ ,  $W_{smn}$  et  $\Phi_{mn}$  sont des paramètres arbitraires à déterminer,  $\omega$  est la fréquence propre associée à  $(m, n)$  le mode propre, et  $\lambda = m\pi/a$  et  $\mu = n\pi/b$ .

Substituant les expressions (III.22) dans les équations de mouvement (III.19), les solutions peuvent être obtenues à partir du système matriciel suivant :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & a_{45} \\ a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & a_{55} \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} & m_{14} & 0 \\ 0 & m_{22} & m_{23} & m_{24} & 0 \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{34} & m_{35} \\ m_{14} & m_{24} & m_{34} & m_{44} & m_{45} \\ 0 & 0 & m_{35} & m_{45} & m_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{bmn} \\ W_{smn} \\ \Phi_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{III.23})$$

avec

$$\begin{aligned} a_{11} &= -(A_{11}\lambda^2 + A_{66}\mu^2) \\ a_{12} &= -\lambda \mu (A_{12} + A_{66}) \\ a_{13} &= \lambda [B_{11}\lambda^2 + (B_{12} + 2B_{66}) \mu^2] \\ a_{14} &= \lambda [B_{11}^s \lambda^2 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \mu^2] \\ a_{15} &= L\lambda \\ a_{22} &= -(A_{66}\lambda^2 + A_{22}\mu^2) \\ a_{23} &= \mu [(B_{12} + 2B_{66}) \lambda^2 + B_{22}\mu^2] \\ a_{24} &= \mu [(B_{12}^s + 2B_{66}^s) \lambda^2 + B_{22}^s \mu^2] \\ a_{25} &= L\mu \\ a_{33} &= -(D_{11}\lambda^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\lambda^2 \mu^2 + D_{22}\mu^4) \\ a_{34} &= -(D_{11}^s \lambda^4 + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)\lambda^2 \mu^2 + D_{22}^s \mu^4) \\ a_{35} &= -L^s (\lambda^2 + \mu^2) \\ a_{44} &= -(H_{11}^s \lambda^4 + 2(H_{11}^s + 2H_{66}^s)\lambda^2 \mu^2 + H_{22}^s \mu^4 + A_{55}^s \lambda^2 + A_{44}^s \mu^2) \end{aligned} \quad (\text{III.24})$$

$$a_{45} = -\left[ A_{44}^s \lambda^2 + A_{55}^s \mu^2 + R(\lambda^2 + \mu^2) \right]$$

$$a_{55} = -\left( A_{44}^s \lambda^2 + A_{55}^s \mu^2 + R^s \right)$$

$$m_{11} = m_{22} = -I_0, m_{13} = \lambda I_1,$$

$$m_{14} = \lambda J_1, m_{23} = \mu I_1, m_{24} = \mu J_1,$$

$$m_{33} = -\left[ I_0 + I_2(\lambda^2 + \mu^2) \right],$$

$$m_{34} = -\left[ I_0 + J_2(\lambda^2 + \mu^2) \right],$$

$$m_{44} = -\left[ I_0 + K_2(\lambda^2 + \mu^2) \right], m_{35} = m_{45} = -J_1^{st}, m_{55} = -K_2^{st}$$

### III.3. Conclusion

Ce travail présente une formulation mathématique pour l'analyse de la réponse dynamique des plaques fonctionnellement graduée simplement appuyée en utilisant une théorie quasi-3D (HSDT) hyperbolique inverse avec seulement cinq inconnues. La théorie explique les effets de déformation du cisaillement et d'étirement sans l'introduction des facteurs de correction de cisaillement. Les équations du mouvement sont dérivées en utilisant le principe d'Hamilton. Dans le chapitre suivant une série des résultats numérique seront présentés et discuté en détail.

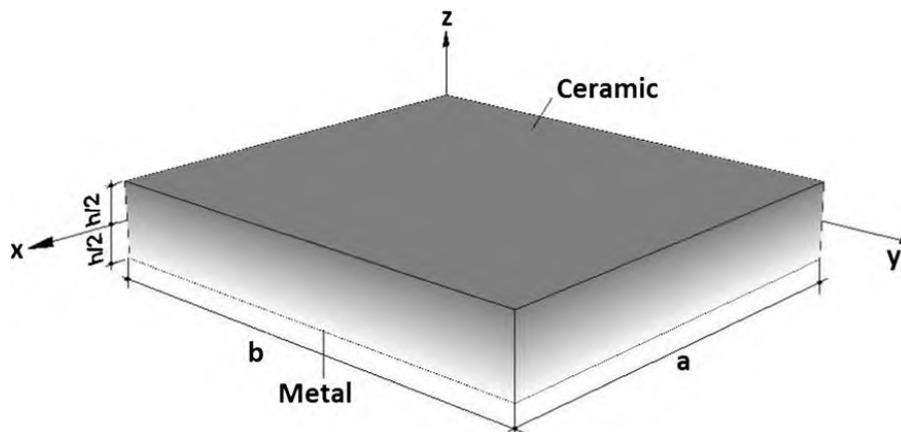
*Chapitre IV:  
Présentation et  
discussions des  
résultats*

### IV.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous allons présenter un ensemble de résultats obtenus suite à l'exécution du programme de calcul Maple, nous présenterons les résultats de l'étude dynamique des plaques non-homogène simplement appuyées en tenant compte l'effet de l'étirement de l'épaisseur. Des exemples numériques sont présentés pour vérifier l'exactitude et l'efficacité de la théorie actuelle. Les effets de l'indice de la fraction volumique, le nombre de mode de vibration et les rapports de dimensions et de géométrie sur les fréquences naturels sont aussi discutés en détail

### IV.2. Etude dynamique des plaques en FGM simplement appuyées

La plaque étudié est supposé simplement appuyées, elle est composé de céramique et de métal avec une distribution graduel a travers l'épaisseur (voir figure IV.1)



**Figure IV.1 :** Géométrie d'une plaque en FGM (Nguyen, 2014).

Les propriétés des matériaux utilisés dans ce travail sont résumées dans le tableau IV.1.

**Tableau IV.1 :** caractéristiques des matériaux utilisés (Nguyen, 2014).

Propriétés	Métal Aluminium (Al)	Céramique	
		Alumina ( $Al_2O_3$ )	Zirconia ( $ZrO_2$ )
$E$ (GPa)	70	380	200
$\nu$	0.3	0.3	0.3
$\rho$ ( $kg/m^3$ )	2702	3800	5700

Pour des raisons d'interprétation toutes les valeurs des fréquences seront présentées sous une forme adimensionnelle:

$$\varpi = \omega h \sqrt{\frac{\rho}{G}} \quad \hat{\omega} = \omega \left( \frac{b^2}{\pi^2} \right) \sqrt{\frac{\rho h}{D}} \quad \beta = \frac{\omega a}{h} \sqrt{\frac{\rho}{G}}$$

$$\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\frac{\rho_c}{E_c}} ; \bar{\omega} = \frac{\omega a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_c}{E_c}} , \bar{\omega} = \frac{\omega a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_M}{E_M}}$$

Le **Tableau IV. 2** présente la fréquence naturelle adimensionnelle ( $\varpi = \omega h \sqrt{\rho / G}$ ) des plaques isotrope carrée (avec  $a/h=10$ ) en fonction du nombre de mode (m,n).

**Tableau IV. 2 :** Comparaison des fréquences naturelles non-dimensionnelle ( $\varpi = \omega h \sqrt{\rho / G}$ ) pour plaque carrée isotrope ( $a / h = 10$ )

Théories	$\epsilon_z$	Mode (m,n)							
		(1,1)	(1,2)	(2,2)	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(2,4)	(1,5)
Jha et al. (2013)	$\neq 0$	0.0932	0.2226	0.3421	0.4172	0.5240	0.6892	0.7515	0.9275
Srinavas et al. (1970)	$\neq 0$	0.0932	0.2226	0.3421	0.4171	0.5239	0.6889	0.7511	0.9268
Whitney et al. (1970)	$= 0$	0.0930	0.2220	0.3406	0.4149	0.5206	0.6834	0.7447	0.9174
Akavci et Tanrikulu (2015)	$= 0$	0.0930	0.2219	0.3407	0.4151	0.5209	0.6841	0.7455	0.9189
<b>Model proposé</b>	<b><math>= 0</math></b>	<b>0.0930</b>	<b>0.2220</b>	<b>0.3406</b>	<b>0.4151</b>	<b>0.5208</b>	<b>0.6842</b>	<b>0.7457</b>	<b>0.9191</b>
Akavci et Tanrikulu (2015)	$\neq 0$	0.0932	0.2227	0.3424	0.4176	0.5247	0.6902	0.7526	0.9290
<b>Model proposé quasi-3D</b>	<b><math>\neq 0</math></b>	<b>0.0932</b>	<b>0.2229</b>	<b>0.3427</b>	<b>0.4178</b>	<b>0.5249</b>	<b>0.6904</b>	<b>0.7531</b>	<b>0.9294</b>

Les résultats présenté on utilisant le modèle actuel à cinq variables sont comparées avec les modèle de Whitney et Pagano (1970) en utilisent la théorie de déformation de cisaillement de première ordre et la théorie ordre élevée de (Akavci et Tanrikulu ,2015) et des autres modèles quasi-3D de (Jha et al. 2013 ; Akavci et Tanrikulu, 2015) et le modèle exacte (élasticité 3D) de Srinavas et al. (1970). A partir des comparaisons effectué, en peut constater qu'un bon accord est confirmé entre les présentes résultats et ceux de la théorie exacte et les modèles quasi-3D.

On peut conclure aussi que l'effet d'éirement de l'épaisseur ( $\epsilon_z \neq 0$ ) joue un rôle important dans le cas des modes de vibration élevés.

Le tableau IV.3 présente les huit premiers paramètres de fréquence ( $\hat{\omega}$ ) des plaques isotropes simplement appuyées en fonction de rapport d'épaisseur  $h/b$ , les résultats obtenue en utilisant le modèle actuel sont comparé à ceux trouvées dans la littératures (Mahi et al . 2014 ; Leissa, 1973 ; Chebyshev-Ritz, 2002 ; Liew et Teo, 1999 ; Mindlin,1956 ; Lim et Liew,1998 ; Srinivas et al. 1970 ; Leissa et Zhang , 1983 ; Malik et Bert,1998 ; Srinivas et al.1970). Encore une fois une bonne concordance est constatée entre le modèle actuel et d'autres modèles basées sur les théories de déformation de cisaillement (Mahi et al. 2014 ; Mindlin, 1956 ; Lim et Liew, 1998 ; Srinivas et al. 1970 ; Leissa et Zhang , 1983 ; Malik et Bert,1998 ; Srinivas et al.1970).

**Tableau IV. 3:** Comparaison des huit premiers paramètres de fréquence  $\left( \hat{\omega} = \omega \left( \frac{b^2}{\pi^2} \right) \sqrt{\frac{\rho h}{D}} \right)$  des

*Plaques carrées isotropes*

<i>h/b</i>	<i>Source</i>	<i>Numéro de mode</i>							
		<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>	<i>7</i>	<i>8</i>
		<b>1,1</b>	<b>1,2</b>	<b>2,1</b>	<b>2,2</b>	<b>1,3</b>	<b>3,1</b>	<b>2,3</b>	<b>3,2</b>
<b>0.01</b>	<b>Model proposé</b>	<b>1,9992</b>	<b>4,9954</b>	<b>4,9954</b>	<b>7,9882</b>	<b>9,9817</b>	<b>9,9817</b>	<b>12,9693</b>	<b>12,9693</b>
	HSDT (Mahi et al . 2014)	1.9993	4.9955	4.9955	7.9885	9.9839	9.9839	12.9711	12.9712
	CPT (Leissa, 1973)	2	5	5	8	10	10	13	13
	3-D (Chebyshev-Ritz, 2002)	1.9972	4.9999	4.9999	7.9996	9.9995	9.9995	13.0000	13.0000
	3-D (Liew etTeo, 1999)	1.9952	4.9977	5.0081	7.9957	10.0240	10.0290	13.0110	13.0120
<b>0.1</b>	<b>Model proposé</b>	<b>1,9317</b>	<b>4,6090</b>	<b>4,6090</b>	<b>6,5234</b>	<b>6,5234</b>	<b>7,0735</b>	<b>8,6197</b>	<b>8,6197</b>
	HSDT (Mahi et al. 2014)	1.9319	4.6098	4.6098	6.5234	6.5234	7.0755	8.6238	8.6238
	FSDT (Mindlin 1956)	1.9311	4.6048	4.6048	-	-	7.0637	8.6049	8.6049
	Lim et Liew (1998)	1.9317	4.6088	4.6088	6.5233	6.5233	7.0731	8.6189	8.6189
	3-D (Srinivas et al. 1970)	1.9342	4.6222	4.6222	-	-	7.1030	8.6617	8.6617
	3-D (Leissa et Zhang , 1983)	1.9342	4.6222	4.6222	6.5234	6.5234	7.1030	8.6617	8.6617
	3-D DQ (Malik et Bert, 1998)	1.9342	4.6222	4.6222	6.5234	6.5234	7.1030	8.6617	8.6617
	3-D DQ (Chebyshev-Ritz, 2002)	1.9342	4.6222	4.6222	6.5234	6.5234	7.1030	8.6617	8.6617
	3-D DQ (Liew etTeo, 1999)	1.9342	4.6250	4.6250	6.5234	6.5234	7.1064	8.6932	8.6932

Les plus grandes valeurs de la fréquence ( $\hat{\omega}$ ) sont obtenue pour les modes élevées de la vibration car c'est les modes les plus difficile à l'obtenir, on remarque aussi que les théories de déformation de cisaillement donne des résultats proches à celle de la théorie classique dans le cas des plaques minces car l'effet de la déformation de cisaillement est néglige.

**Le tableau IV. 4** présente les valeurs de la fréquence fondamentale adimensionnelle ( $\beta$ ) des plaques simplement appuyées isotropes et en matériaux fonctionnellement graduées. Les résultats actuel (sans et avec l'effet d'étirement) sont comparé avec ceux de la solution exacte

basée sur l'élasticité en trois dimensions (3D) développé par Uymaz et Aydogdu (2007) et le modèle HSDT de Nguyen (2014).

**Tableau IV. 4:** Comparaison de la fréquence fondamentale non dimensionnelle  $\left( \beta = \frac{\omega a}{h} \sqrt{\frac{\rho}{G}} \right)$  des plaques carrées AL/ZrO<sub>2</sub>

a/h	Théories	Indice de loi de puissance							
		0	0.1	0.2	0.5	1	2	5	10
2	3D (Uymaz et Aydogdu, 2007)	1.2589	1.2296	1.2049	1.1484	1.0913	1.0344	0.9777	0.9507
	HSDT (Nguyen, 2014)	1.2571	1.2259	1.2010	1.1443	1.0882	1.0325	0.9771	0.9540
	<b>Model proposé 2D</b>	<b>1,2460</b>	<b>1,2171</b>	<b>1,1921</b>	<b>1,1355</b>	<b>1,0790</b>	<b>1,0239</b>	<b>0,9688</b>	<b>0,9441</b>
	<b>Model proposé quasi-3D</b>	<b>1,2650</b>	<b>1,2359</b>	<b>1,2110</b>	<b>1,1546</b>	<b>1,0981</b>	<b>1,0417</b>	<b>0,9839</b>	<b>0,9578</b>
5	3D (Uymaz et Aydogdu, 2007)	1.7748	1.7262	1.6881	1.6031	1.4764	1.4628	1.4106	1.3711
	HSDT (Nguyen, 2014)	1.7723	1.7241	1.6850	1.6003	1.5245	1.4629	1.4084	1.3726
	<b>Model proposé 2D</b>	<b>1,7684</b>	<b>1,7217</b>	<b>1,6825</b>	<b>1,5976</b>	<b>1,5213</b>	<b>1,4601</b>	<b>1,4057</b>	<b>1,3691</b>
	<b>Model proposé quasi-3D</b>	<b>1,7783</b>	<b>1,7317</b>	<b>1,6927</b>	<b>1,6096</b>	<b>1,5353</b>	<b>1,4745</b>	<b>1,4171</b>	<b>1,378</b>
10	3D (Uymaz et Aydogdu, 2007)	1.9339	1.8788	1.8357	1.7406	1.6583	1.5968	1.5491	1.5066
	HSDT (Nguyen, 2014)	1.9330	1.8783	1.8342	1.7402	1.6593	1.5994	1.5500	1.5095
	<b>Model proposé 2D</b>	<b>1,9317</b>	<b>1,8784</b>	<b>1,8339</b>	<b>1,7397</b>	<b>1,6583</b>	<b>1,5984</b>	<b>1,5492</b>	<b>1,5083</b>
	<b>Model proposé quasi-3D</b>	<b>1,9361</b>	<b>1,8830</b>	<b>1,8392</b>	<b>1,7472</b>	<b>1,6686</b>	<b>1,6099</b>	<b>1,5573</b>	<b>1,5137</b>
20	3D (Uymaz et Aydogdu, 2007)	1.9570	1.9261	1.8788	1.7832	1.6999	1.6401	1.5937	1.5491
	HSDT (Nguyen, 2014)	1.9824	1.9257	1.8799	1.7830	1.7006	1.6417	1.5945	1.5524
	<b>Model proposé 2D</b>	<b>1,9820</b>	<b>1,9265</b>	<b>1,8805</b>	<b>1,7832</b>	<b>1,7003</b>	<b>1,6415</b>	<b>1,5942</b>	<b>1,5520</b>
	<b>Model proposé quasi-3D</b>	<b>1,9844</b>	<b>1,9293</b>	<b>1,8838</b>	<b>1,7892</b>	<b>1,7093</b>	<b>1,6518</b>	<b>1,6012</b>	<b>1,5560</b>
50	3D (Uymaz et Aydogdu, 2007)	1.9974	1.9390	1.8920	1.7944	1.7117	1.6522	1.6062	1.5620
	HSDT (Nguyen, 2014)	1.9971	1.9398	1.8935	1.7957	1.7129	1.6544	1.6079	1.5653
	<b>Model proposé 2D</b>	<b>1,9970</b>	<b>1,9410</b>	<b>1,8943</b>	<b>1,7961</b>	<b>1,7128</b>	<b>1,6543</b>	<b>1,6077</b>	<b>1,5651</b>
	<b>Model proposé quasi-3D</b>	<b>1,9989</b>	<b>1,9430</b>	<b>1,8971</b>	<b>1,8016</b>	<b>1,7214</b>	<b>1,6642</b>	<b>1,6143</b>	<b>1,5688</b>
100	3D (Uymaz et Aydogdu, 2007)	1.9974	1.9416	1.8920	1.7972	1.7117	1.6552	1.6062	1.5652
	HSDT (Nguyen, 2014)	1.9993	1.9418	1.8955	1.7975	1.7147	1.6562	1.6098	1.5671
	<b>Model proposé 2D</b>	<b>1,9991</b>	<b>1,9430</b>	<b>1,8963</b>	<b>1,7979</b>	<b>1,7145</b>	<b>1,6562</b>	<b>1,6098</b>	<b>1,5669</b>
	<b>Model proposé quasi-3D</b>	<b>2,0009</b>	<b>1,9450</b>	<b>1,8990</b>	<b>1,8033</b>	<b>1,7232</b>	<b>1,6660</b>	<b>1,6162</b>	<b>1,5705</b>

Il est clair que les résultats actuelle calculés en tenant compte de l'effet d'étirement sont satisfaisante, on remarque aussi que pour les plaques minces tous les résultats sont presque identique à cause de l'omission de l'effet de l'étirement de l'épaisseur (déformation transversale). Il est remarquable d'après le tableau que la fréquence fondamentale adimensionnelle est en relation inverse avec le paramètre du matériau "p" car la plaque devient moins rigide par contre ces fréquence augmente avec l'augmentation du rapport a/h.

La variation de la fréquence naturel adimensionnelle des plaques fonctionnellement gradué simplement appuie en fonction du rapport de géomètre  $a/h$ , le nombre de mode  $(m,n)$  et l'indice de le puissance "P" est présente dans le **tableau IV.5**.

**Tableau IV. 5:** Comparaison des trois premières fréquences non dimensionnelles ( $\hat{\omega}$ ) Pour une Plaque carrée  $Al/Al_2O_3$ .

$a/h$	Mode ( $m,n$ )	Théories	Indice de loi de puissance				
			0	0.5	1	4	10
5	1(1,1)	Quasi-3D Matsunaga (2008)	0.2121	0.1819	0.1640	0.1383	0.1306
		TSDT Hosseini-Hashemi et al. (2011)	0.2113	0.1807	0.1631	0.1378	0.1301
		FSDT Hosseini-Hashemi et al. (2011)	0.2112	0.1805	0.1631	0.1397	0.1324
		HSDT Thai et Kim (2013)	0.2113	0.1807	0.1631	0.1378	0.1301
		HSDT Nguyen (2014)	0.2117	0.1810	0.1634	0.1378	0.1303
		<b>Model proposé 2D</b>	<b>0.2113</b>	<b>0.1807</b>	<b>0.1631</b>	<b>0.1378</b>	<b>0.1300</b>
		<b>Model proposé quasi-3D</b>	<b>0.2124</b>	<b>0.1827</b>	<b>0.1661</b>	<b>0.1410</b>	<b>0.1318</b>
	2(1,2)	Quasi-3D Matsunaga (2008)	0.4658	0.4040	0.3644	0.3000	0.2790
		TSDT Hosseini-Hashemi et al. (2011)	0.4623	0.3989	0.3607	0.2980	0.2771
		FSDT Hosseini-Hashemi et al. (2011)	0.4618	0.3978	0.3604	0.3049	0.2856
		HSDT Thai et Kim (2013)	0.4623	0.3989	0.3607	0.2980	0.2771
		HSDT Nguyen (2014)	0.4645	0.4004	0.3622	0.2981	0.2783
		<b>Model proposé 2D</b>	<b>0.4623</b>	<b>0.3990</b>	<b>0.3608</b>	<b>0.2977</b>	<b>0.2770</b>
		<b>Model proposé quasi-3D</b>	<b>0.4669</b>	<b>0.4048</b>	<b>0.3683</b>	<b>0.3049</b>	<b>0.2814</b>
	3(2,2)	TSDT Hosseini-Hashemi et al. (2011)	0.6688	0.5803	0.5254	0.4284	0.3948
		FSDT Hosseini-Hashemi et al. (2011)	0.6676	0.5779	0.5245	0.4405	0.4097
		HSDT Thai et Kim (2013)	0.6688	0.5803	0.5254	0.4284	0.3948
		HSDT Nguyen (2014)	0.6734	0.5836	0.5286	0.4291	0.3974
<b>Model proposé 2D</b>		<b>0.6691</b>	<b>0.5805</b>	<b>0.5255</b>	<b>0.4281</b>	<b>0.3946</b>	
<b>Model proposé quasi-3D</b>		<b>0.6775</b>	<b>0.5904</b>	<b>0.5375</b>	<b>0.4385</b>	<b>0.4014</b>	
10	1(1,1)	Quasi-3D Matsunaga (2008)	0.0578	0.0492	0.0443	0.0381	0.0364
		TSDT Hosseini-Hashemi et al. (2011)	0.0577	0.0490	0.0442	0.0381	0.0364
		FSDT Hosseini-Hashemi et al. (2011)	0.0577	0.0490	0.0442	0.0382	0.0366
		HSDT Thai et Kim (2013)	0.0577	0.0490	0.0442	0.0381	0.0364
		HSDT Nguyen (2014)	0.0577	0.0490	0.0442	0.0381	0.0364
		<b>Model proposé 2D</b>	<b>0.0575</b>	<b>0.0490</b>	<b>0.0442</b>	<b>0.0379</b>	<b>0.0363</b>
		<b>Model proposé quasi-3D</b>	<b>0.0578</b>	<b>0.0494</b>	<b>0.0449</b>	<b>0.0389</b>	<b>0.0368</b>
	2(1,2)	Quasi-3D Matsunaga (2008)	0.1381	0.1180	0.1063	0.0905	0.0859
		TSDT Hosseini-Hashemi et al. (2011)	0.1377	0.1174	0.1059	0.0903	0.0856
		FSDT Hosseini-Hashemi et al. (2011)	0.1376	0.1173	0.1059	0.0911	0.0867
		HSDT Thai et Kim (2013)	0.1377	0.1174	0.1059	0.0903	0.0856
		HSDT Nguyen (2014)	0.1379	0.1175	0.1060	0.0902	0.0857
		<b>Model proposé 2D</b>	<b>0.1376</b>	<b>0.1174</b>	<b>0.1059</b>	<b>0.0902</b>	<b>0.0856</b>
		<b>Model proposé quasi-3D</b>	<b>0.1382</b>	<b>0.1185</b>	<b>0.1077</b>	<b>0.0923</b>	<b>0.0867</b>

Tableau IV. 5: (Continuité)

$a/h$	Mode ( $m,n$ )	Théories	Indice de loi de puissance				
			0	0.5	1	4	10
10	3(2,2)	TSDT Hosseini-Hashemi et al. (2011)	0.2113	0.1807	0.1631	0.1378	0.1301
		FSDT Hosseini-Hashemi et al. (2011)	0.2112	0.1805	0.1631	0.1397	0.1324
		HSDT Thai et Kim (2013)	0.2113	0.1807	0.1631	0.1378	0.1301
		HSDT Nguyen (2014)	0.2117	0.1810	0.1634	0.1378	0.1303
		<b>Model proposé 2D</b>	<b>0.2125</b>	<b>0.1807</b>	<b>0.1631</b>	<b>0.1378</b>	<b>0.1300</b>
		<b>Model proposé quasi-3D</b>	<b>0.2124</b>	<b>0.1827</b>	<b>0.1661</b>	<b>0.1410</b>	<b>0.1318</b>
20	1(1,1)	TSDT Hosseini-Hashemi et al. (2011)	0.0148	0.0125	0.0113	0.0098	0.0094
		FSDT Hosseini-Hashemi et al. (2011)	0.0148	0.0125	0.0113	0.0098	0.0094
		HSDT Thai et Kim (2013)	0.0148	0.0125	0.0113	0.0098	0.0094
		HSDT Nguyen (2014)	0.0148	0.0125	0.0113	0.0098	0.0094
		<b>Model proposé 2D</b>	<b>0.0148</b>	<b>0.0125</b>	<b>0.0113</b>	<b>0.0098</b>	<b>0.0094</b>
		<b>Model proposé quasi-3D</b>	<b>0.0148</b>	<b>0.0126</b>	<b>0.0114</b>	<b>0.0100</b>	<b>0.0095</b>
	2(1,2)	HSDT Nguyen (2014)	0.0365	0.0310	0.0279	0.0241	0.0231
		<b>Model proposé 2D</b>	<b>0.0365</b>	<b>0.0310</b>	<b>0.0279</b>	<b>0.0241</b>	<b>0.0231</b>
		<b>Model proposé quasi-3D</b>	<b>0.0365</b>	<b>0.0312</b>	<b>0.0283</b>	<b>0.0246</b>	<b>0.0234</b>
	3(2,2)	HSDT Nguyen (2014)	0.0577	0.0490	0.0442	0.0381	0.0364
		<b>Model proposé 2D</b>	<b>0.0577</b>	<b>0.0490</b>	<b>0.0442</b>	<b>0.0381</b>	<b>0.0364</b>
		<b>Model proposé quasi-3D</b>	<b>0.0578</b>	<b>0.0494</b>	<b>0.0449</b>	<b>0.0389</b>	<b>0.0368</b>

A travers la comparaison effectuée on peut remarquer que les résultats obtenus en utilisant le présent modèle (quasi-3D) sont en bon accord avec ceux trouvés par les théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé HDST de Nguyen (2014), de premier ordre (FSDT) et du troisième ordre (TSDT) de Hosseini-Hashemi et al. (2011) et ceux de Thai et Kim (2013) en utilisant la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevée (HSDT).

Il est clair à partir du tableau IV.5 que la fréquence naturelle adimensionnelle est en relation inverse avec l'indice  $p$  et le rapport  $a/h$ .

Le tableau IV.6 présente les valeurs des fréquences fondamentales adimensionnelles des plaques carrées en aluminium céramique AL/AL<sub>2</sub>O<sub>3</sub> en fonction des paramètres des matériaux et le rapport ( $a/h$ ).

Tableau IV. 6: Comparaison des fréquences fondamentales non dimensionnelles  $\bar{\omega} =$ 

$$\omega h \sqrt{\frac{\rho_c}{E_c}} \text{ pour une Plaque carrée Al/Al}_2\text{O}_3$$

a/h	Théories	$\varepsilon_z$	k				
			0	0.5	1	4	10
2	Zhu et Liew (2011)	=0	0.9265	0.8060	0.7331	0.6112	0.5640
	Matsunaga (2008)	≠0	0.9400	0.8232	0.7477	0.5997	0.5460
	Sheikholeslami et Saidi (2013)	≠0	0.9400	0.8223	0.7475	0.5995	0.5461
	Belabed et al. (2014)	≠0	0.9414	0.8248	0.7516	0.6056	0.5495
	Akavci et Tanrikulu (2015)	=0	0.9303	0.8115	0.7360	0.5921	0.5413
	<b>Model proposé</b>	<b>=0</b>	<b>0,9304</b>	<b>0,8115</b>	<b>0,7361</b>	<b>0,5921</b>	<b>0,5413</b>
	Akavci et Tanrikulu (2015)	≠0	0.9440	0.8269	0.7536	0.6063	0.5506
	<b>Model proposé</b>	<b>≠0</b>	<b>0,9446</b>	<b>0,8273</b>	<b>0,7539</b>	<b>0,6065</b>	<b>0,5508</b>
5	Zhu et Liew (2011)	=0	0.2111	0.1804	0.1629	0.1395	0.1323
	Benachour et al. (2011)	=0	0.2112	0.1806	0.1628	0.1375	0.1300
	Hosseini et al. (2011)	=0	0.2113	0.1807	0.1631	0.1378	0.1301
	Matsunaga (2008)	≠0	0.2121	0.1819	0.1640	0.1383	0.1306
	Sheikholeslami et Saidi (2013)	≠0	0.2121	0.1818	0.1640	0.1382	0.1306
	Belabed et al. (2014)	≠0	0.2121	0.1819	0.1640	0.1383	0.1306
	Akavci et Tanrikulu (2015)	=0	0.2113	0.1807	0.1631	0.1378	0.1300
	<b>Model proposé</b>	<b>=0</b>	<b>0,2113</b>	<b>0,1807</b>	<b>0,1631</b>	<b>0,1378</b>	<b>0,1300</b>
	Akavci et Tanrikulu (2015)	≠0	0.2124	0.1827	0.1661	0.1410	0.1319
	<b>Model proposé</b>	<b>≠0</b>	<b>0,2124</b>	<b>0,1827</b>	<b>0,1661</b>	<b>0,1410</b>	<b>0,1319</b>
10	Zhu et Liew (2011)	=0	0.0576	0.0489	0.0441	0.0381	0.0365
	Benachour et al. (2011)	=0	0.0576	0.0490	0.0441	0.0380	0.0363
	Hosseini et al. (2011)	=0	0.0577	0.0490	0.0442	0.0381	0.0364
	Matsunaga (2008)	≠0	0.0577	0.0491	0.0442	0.0381	0.0364
	Sheikholeslami et Saidi (2013)	≠0	0.0577	0.0491	0.0442	0.0381	0.0364
	Belabed et al. (2014)	≠0	0.0578	0.0494	0.0449	0.0389	0.0368
	Akavci et Tanrikulu (2015)	=0	0.0577	0.0490	0.0442	0.0380	0.0363
	<b>Model proposé</b>	<b>=0</b>	<b>0,0577</b>	<b>0,0490</b>	<b>0,0442</b>	<b>0,0381</b>	<b>0,0364</b>
	Akavci et Tanrikulu (2015)	≠0	0.0578	0.0494	0.0449	0.0389	0.0368
	<b>Model proposé</b>	<b>≠0</b>	<b>0,0578</b>	<b>0,0494</b>	<b>0,0449</b>	<b>0,0389</b>	<b>0,0368</b>
20	Benachour et al. (2011)	=0	0.0148	0.0125	0.0113	0.0098	0.0094
	Hosseini et al. (2011)	=0	0.0148	0.0125	0.0113	0.0098	0.0094
	Sheikholeslami et Saidi (2013)	≠0	0.0148	0.0125	0.0113	0.0098	0.0094
	Belabed et al. (2014)	≠0	0.0148	0.0126	0.0115	0.0100	0.0095
	Akavci et Tanrikulu (2015)	=0	0.0148	0.0125	0.0113	0.0098	0.0094
	<b>Model proposé</b>	<b>=0</b>	<b>0,0148</b>	<b>0,0125</b>	<b>0,0113</b>	<b>0,0098</b>	<b>0,0094</b>
	Akavci et Tanrikulu (2015)	≠0	0.0148	0.0126	0.0115	0.0100	0.0095
	<b>Model proposé</b>	<b>≠0</b>	<b>0,0148</b>	<b>0,0126</b>	<b>0,0115</b>	<b>0,0100</b>	<b>0,0095</b>

Les résultats sont comparés avec ceux obtenues par la théorie de cisaillement de 1<sup>er</sup> ordre de Zhu et Liew (2011), les théories de déformation de cisaillement (2D) de Benachour et al. (2011) et Hosseini et al. (2011) et les théories de déformation de cisaillement quasi-3D

de (Matsunaga, 2008 ; Sheikholeslami et Saidi 2013; Belabed et al. 2014 ; Akavci et Tanrikulu 2015). Encore, les résultats obtenus sont en bon accord avec les solutions quasi-3D pour les plaques très épaisses.

Le tableau (IV.6) montre aussi que la fréquence fondamentale augmente avec l'augmentation de l'épaisseur de la plaque et diminue avec l'indice de puissance (p).

Il est clair d'après les résultats calculés que l'effet de l'étirement de l'épaisseur joue un rôle significative sur les fréquences fondamentales des plaques épaisses, par contre cet effet (l'étirement de l'épaisseur) devient négligeable dans le cas des plaques minces.

Les valeurs de trois premières fréquences naturelles  $\bar{\omega} = \frac{\omega a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_c}{E_c}}$  en  $Al/Al_2O_3$  sont présentes dans le tableau IV.7. Les résultats sont calculés pour l'indice  $P=0 ; 0.5 ; 1 ; 4$  et 10 pour les différents modes de vibration (1,1), (1,2) et (2,2).

**Tableau IV. 7:** Comparaison des quatre premières fréquences propres non dimensionnelles

$$\bar{\omega} = \frac{\omega a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_c}{E_c}} \text{ pour une plaque carrée } Al/Al_2O_3 \text{ (} a/h = 10 \text{)}.$$

Mode (m, n)	Théories	$\varepsilon_z$	k				
			0	0.5	1	4	10
(1,1)	Benachour et al. (2011)	=0	5.7690	4.9000	4.4160	3.8040	3.6350
	Matsunaga (2008)	≠0	5.7777	4.9170	4.4270	3.8110	3.6420
	Belabed et al. (2014)	≠0	5.7800	4.9400	4.4900	3.8900	3.6800
	Akavci et Tanrikulu (2015)	=0	5.7695	4.9015	4.4193	3.8064	3.6365
	<b>Model proposé</b>	<b>=0</b>	<b>5,7695</b>	<b>4,9015</b>	<b>4,4193</b>	<b>3,8064</b>	<b>3,6365</b>
	Akavci et Tanrikulu (2015)	≠0	5.7807	4.9410	4.4907	3.8934	3.6827
	<b>Model proposé</b>	<b>≠0</b>	<b>5,7828</b>	<b>4,9424</b>	<b>4,4921</b>	<b>3,8944</b>	<b>3,6832</b>
(1,2)	Benachour et al. (2011)	=0	13.760	11.731	10.576	9.0120	8.5570
	Matsunaga (2008)	≠0	13.810	11.800	10.630	9.0450	8.5880
	Belabed et al. (2014)	≠0	13.800	11.840	10.770	9.2300	8.6800
	Akavci et Tanrikulu (2015)	=0	13.765	11.739	10.590	9.0224	8.5613
	<b>Model proposé</b>	<b>=0</b>	<b>13,766</b>	<b>11,739</b>	<b>10,591</b>	<b>9,0222</b>	<b>8,5613</b>
	Akavci (2015)	≠0	13.817	11.851	10.773	9.2314	8.6768
	<b>Model proposé</b>	<b>≠0</b>	<b>13,822</b>	<b>11,855</b>	<b>10,776</b>	<b>9,234</b>	<b>8,6786</b>
(2,2)	Benachour et al. (2011)	=0	21.125	18.055	16.282	13.756	12.995
	Matsunaga (2008)	≠0	21.210	18.190	16.400	13.830	13.060
	Belabed et al. (2014)	≠0	21.210	18.250	16.590	14.090	13.180
	Akavci et Tanrikulu (2015)	=0	21.127	18.073	16.313	13.777	13.002
	<b>Model proposé</b>	<b>=0</b>	<b>21,127</b>	<b>18,073</b>	<b>16,314</b>	<b>13,776</b>	<b>13,003</b>
	Akavci et Tanrikulu (2015)	≠0	21.237	18.268	16.609	14.099	13.186
	<b>Model proposé</b>	<b>≠0</b>	<b>21,245</b>	<b>18,275</b>	<b>16,615</b>	<b>14,104</b>	<b>13,189</b>

Les résultats calculés sont comparé avec les modèles HSDTs de Benachour et al. (2011) et Akavci et Tanrikulu (2015) et le modèle quasi-3D de Belabed et al.(2014) ,Matsunaga (2008) et Akavci et Tanrikulu (2015). Encore une fois le présent modèle donne des résultats satisfaisante de fréquence naturelle adimensionnelle des plaques en FGM simplement appuyée.

Il est remarquable que les plus grandes valeurs de fréquence sont obtenues pour un mode de vibration (2,2) car ce mode est plus difficile à l'obtenir.

Le tableau IV.8 montre les fréquences fondamentales des plaques à Alumium/ZrO<sub>2</sub> en fonction du rapport **a/h** et indice du matériau p.

**Tableau IV . 8:** Comparaison des fréquences fondamentales non dimensionnelles

$$\bar{\omega} = \frac{\omega a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_M}{E_M}} \text{ pour plaque carrée AL /ZrO}_2 \text{ (} m = n = 1 \text{) (homogénéisation Mori-Tanaka).$$

Théorie	$\varepsilon_z$	$\rho_c/E_c$		$\rho_m/E_m$					
		k = 0		k = 1			a/h = 5		
		$a/h = \sqrt{10}$	a/h = 10	a/h = 5	a/h = 10	a/h = 20	k = 2	k = 3	k = 5
Benachour et al. (2011)	=0	4.6220	5.7600	5.6750	6.1800	6.3200	5.6225	5.6375	5.6650
Matsunaga (2008)	≠0	4.6582	5.7769	5.7123	6.1932	6.3390	5.6599	5.6757	5.7020
Neves et al. (2012)	≠0	-	-	5.4825	5.9600	6.1200	5.4950	5.5300	5.5625
Belabed et al. (2014)	≠0	4.6591	5.7800	5.4800	5.9700	6.1200	5.5025	5.5350	5.5625
Alijani et al. (2014)	≠0	4.6606	5.7769	5.4796	5.9578	6.1040	5.4919	5.5279	5.5633
Vel et al. (2004)	≠0	4.6582	5.7769	5.4806	5.9609	6.1076	5.4923	5.5285	5.5632
Akavci et Tanrikulu (2015)	=0	4.6236	5.7695	5.4216	5.9136	6.0647	5.4431	5.4798	5.5138
<b>Model proposé 2D</b>	<b>=0</b>	<b>4.6238</b>	<b>5.7695</b>	<b>5.4235</b>	<b>5.9174</b>	<b>6.0662</b>	<b>5.4440</b>	<b>5.4810</b>	<b>5.5160</b>
Akavci et Tanrikulu (2015)	≠0	4.6237	5.7807	5.4829	5.9676	6.1160	5.5064	5.5388	5.5644
<b>Model proposé Quasi-3D</b>	<b>≠0</b>	<b>4.6694</b>	<b>5.7825</b>	<b>5.4875</b>	<b>5.9742</b>	<b>6.1234</b>	<b>5.6130</b>	<b>5.6610</b>	<b>5.5680</b>

il est remarquable à partir des résultats que le présent modèle donne presque la même valeur de la fréquence naturel que Akavci et Tanrikulu (2015) mais avec un nombre de variable réduit ce qui montre l'efficacité et l'exactitude du présent modèle pour prédire les valeurs de la fréquence naturel en tenant compte de l'effet d'étirement de l'épaisseur ,on observe aussi que les plus grand valeurs de la fréquence sont obtenue pour des rapport a/h et indice de élevés.

### IV.3. Etude paramétrique

Cette section est réservée pour l'étude paramétrique pour montrer les différents paramètres influençant la réponse dynamique des structures non-homogène.

L'effet du paramètre de puissance et le rapport de géométrie  $a/h$  sur les fréquences fondamentale adimensionnelle  $\bar{\omega} = \omega a^2 / h \sqrt{\rho_c / E_c}$  des plaques fonctionnellement graduées simplement appuyées sont présentés dans la figure IV.2.

À partir des graphes tracés, on peut noter que la fréquence fondamentale adimensionnelle est en relation inverse avec l'indice  $p$  car la plaque devient moins rigide, par contre la fréquence est en relation proportionnelle avec le rapport d'épaisseur  $a/h$ .

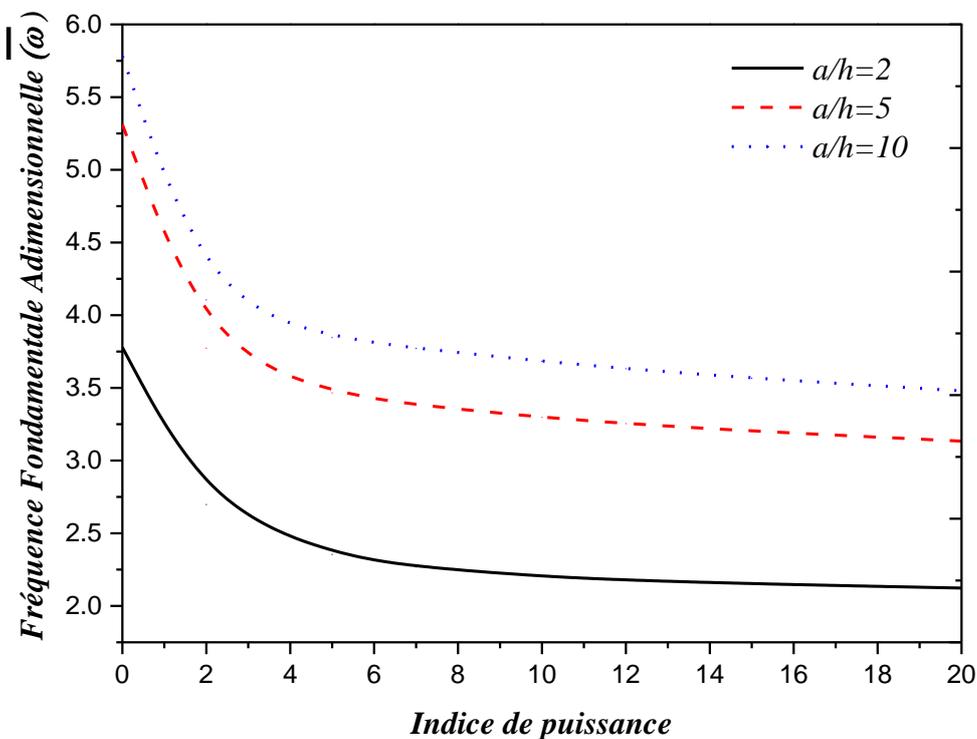
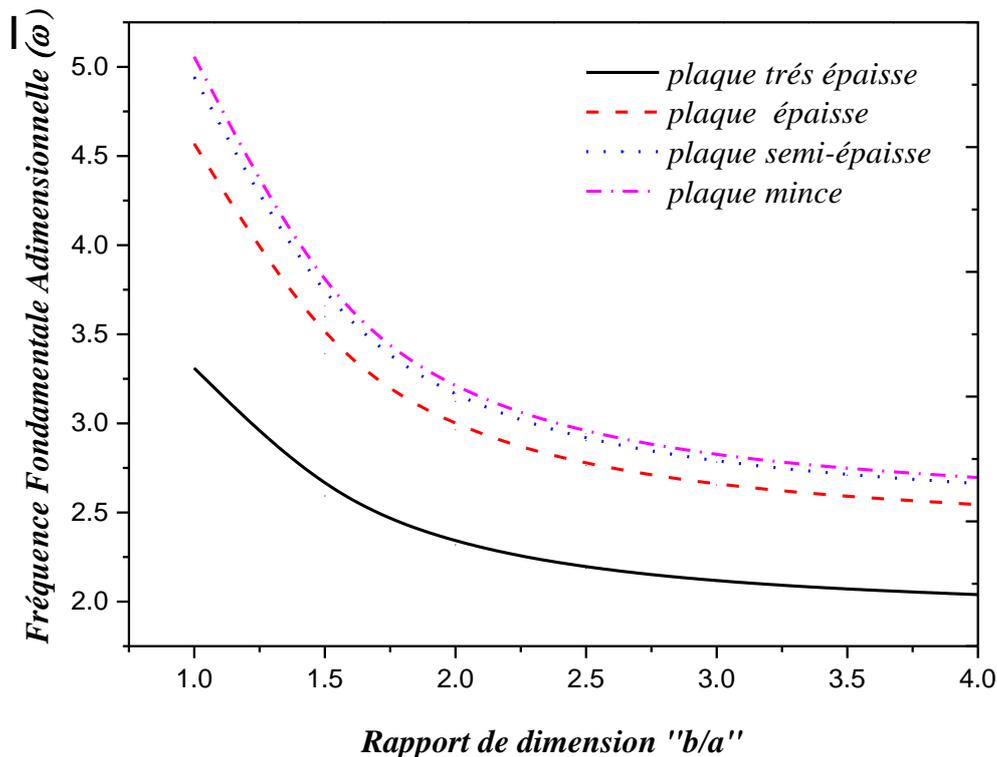


Figure IV.2 : l'effet du rapport de géométrie  $a/h$  et le paramètre de puissance sur les

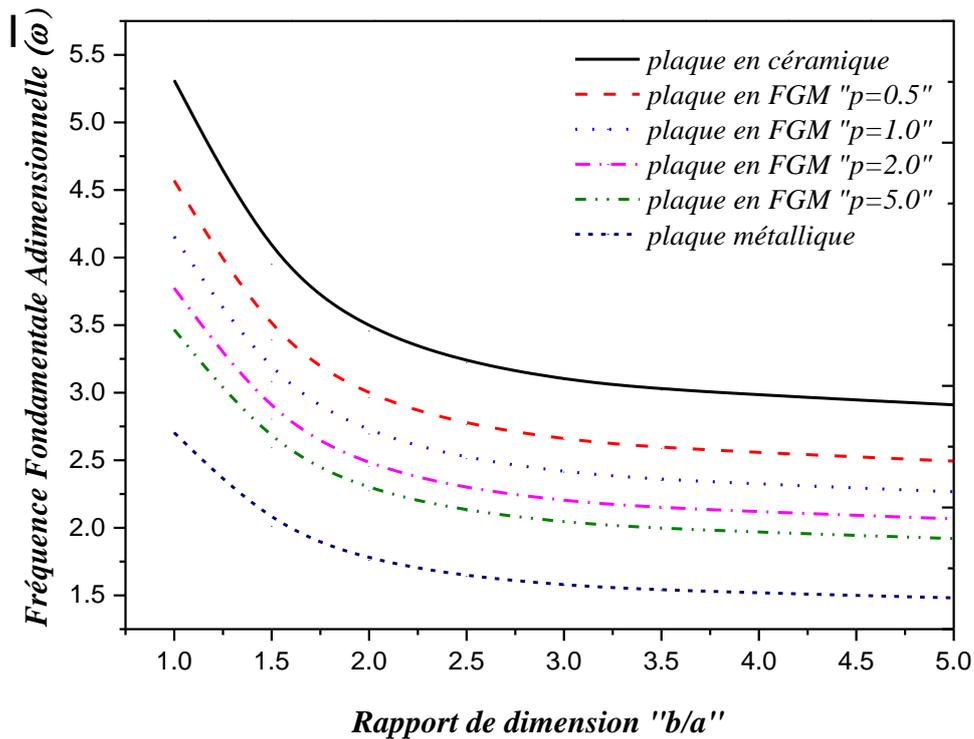
$$\text{fréquences fondamentale adimensionnelle } \bar{\omega} = \omega a^2 / h \sqrt{\rho_c / E_c} .$$

L'effet des rapports de dimension  $b/a$  sur les fréquences fondamentales adimensionnelles  $\bar{\omega} = \omega a^2 / h \sqrt{\rho_c / E_c}$  des plaques fonctionnellement graduées (avec  $p=0.5$ ) est illustré dans la figure IV. 3. A partir des graphes tracés, on peut conclure que l'augmentation du rapport de dimension  $b/a$  conduit à une diminution des fréquences fondamentale  $\bar{\omega} = \omega a^2 / h \sqrt{\rho_c / E_c}$  car la plaque devient flexible et cette diminution devient considérable dans le cas des plaques minces ( $a/h=20$ ).



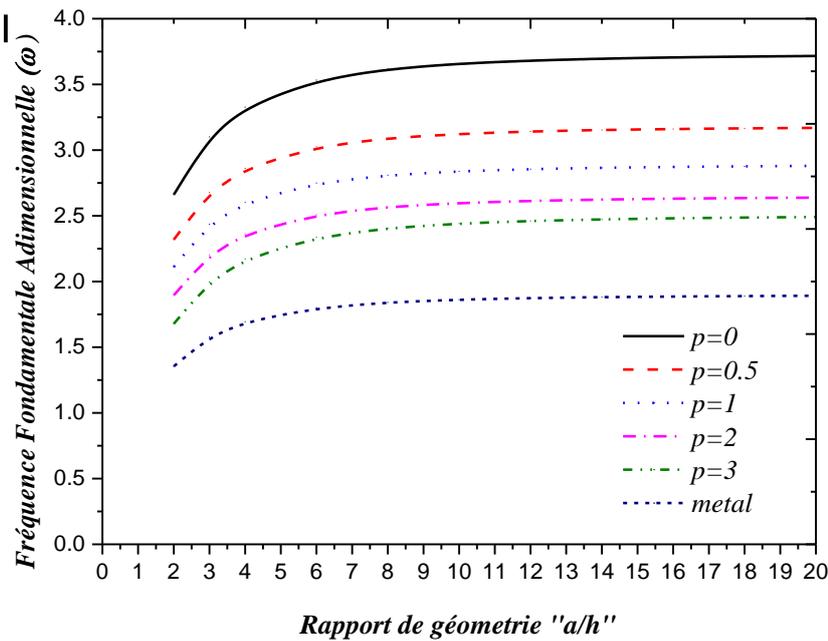
**Figure IV.3 :** La variation des fréquences fondamentales adimensionnelles  $\bar{\omega} = \omega a^2 / h \sqrt{\rho_c / E_c}$  des plaques fonctionnellement graduées (avec  $p=0.5$ ) en fonction du rapport de dimension  $b/a$ .

L'effet du paramètre de la fraction volumique ( $p$ ) et le rapport ( $b/a$ ) sur les fréquences fondamentales des plaques épaisses en FGM est présenté dans la figure IV.4. On voit que la fréquence fondamentale pour les plaques souples et influencé légèrement avec l'augmentation du rapport de dimension, et cela inversé dans le cas des plaques épaisses et rigides.

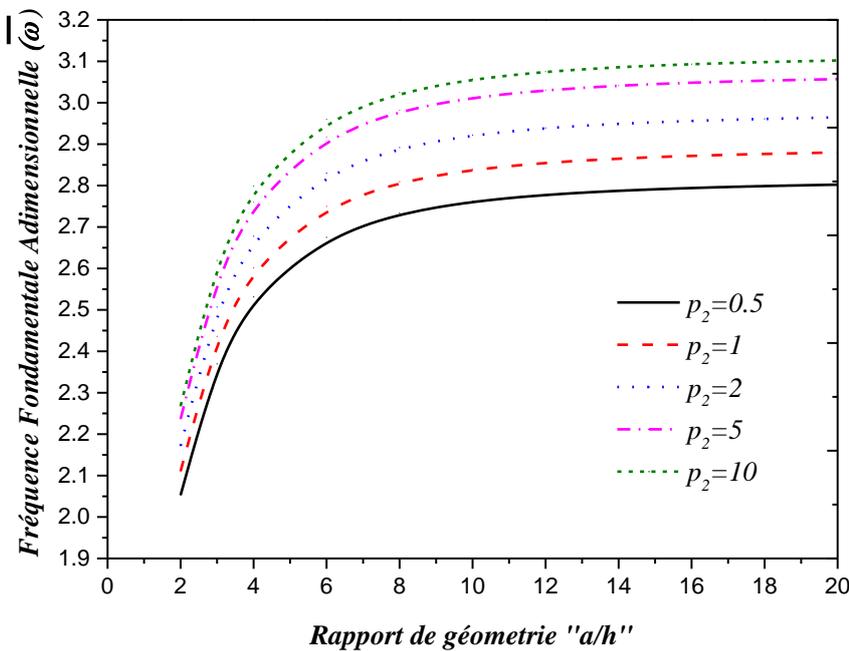


**Figure IV.4 :** La variation des fréquences fondamentales adimensionnelles  $\bar{\omega} = \omega a^2 / h \sqrt{\rho_c / E_c}$  des plaques fonctionnellement graduées en fonction du rapport de dimension  $b/a$  pour les différents types des plaques céramique, métallique et en FGM.

La figure IV.5 présente la variation des fréquences fondamentales adimensionnelles  $\bar{\omega} = \omega a^2 / h \sqrt{\rho_c / E_c}$  des plaques rectangulaires ( $b/a=2$ ) simplement appuyées en fonction du paramètre ( $p$ ). On voit que l'augmentation du paramètre de matériau ( $p$ ) conduit à une réduction des valeurs de la fréquence fondamentale  $\bar{\omega} = \omega a^2 / h \sqrt{\rho_c / E_c}$ , par contre cette dernière est en relation de corrélation directe avec le rapport d'épaisseur  $a/h$  car avec l'augmentation de ce rapport la plaque en FGM devient mince.



**Figure IV.5 :** La variation des fréquences fondamentales adimensionnelles  $\bar{\omega} = \omega a^2 / h \sqrt{\rho_c / E_c}$  des plaques rectangulaires en fonction du paramètre ( $p$ ) et le rapport de géométrie  $a/h$ .



**Figure IV.6 :** l'effet de l'indice de puissance de la densité sur la variation des fréquences fondamentales adimensionnelles  $\bar{\omega} = \omega a^2 / h \sqrt{\rho_c / E_c}$  des plaques rectangulaires simplement appuyées.

L'influence du paramètre de puissance de la densité  $p_2$  des plaques rectangulaires ( $b=2a$ ) simplement appuyées sur la fréquence fondamentale adimensionnelle est illustré dans la figure IV.6, on constate que le paramètre  $p_2$  a une légère influence sur les fréquences adimensionnelles quel que soit le type de plaque (épaisse, semi-épaisse et mince), on peut conclure aussi que l'épaisseur de la plaque joue un rôle important sur les fondamentales adimensionnelles.

#### **IV.4. Conclusion :**

Dans ce chapitre nous avons présenté les résultats numériques de l'analyse de la vibration libre des plaques simplement appuyées en utilisant une nouvelle théorie de déformation de cisaillement élevé Quasi-3D à cinq variables contre six et plus dans le modèle existant dans la littérature. Cette théorie est développée dans le chapitre précédent. Tous les résultats calculés sont parfaitement en bon accord avec ceux de la littérature.

Par conséquent, on peut conclure que la théorie proposée est précise pour résoudre le problème de la réponse dynamique des plaques FG simplement appuyées.

# *Conclusion générale*

## *Conclusion Générale et perspective*

Ce travail de thèse présente l'étude de l'effet d'étirement de l'épaisseur et la déformation de cisaillement transverse sur la réponse dynamique des plaques fonctionnellement graduée simplement appuyée en utilisant une théorie quasi-3D hyperbolique inverse avec seulement quatre et cinq inconnues. La théorie explique correctement les effets de déformation du cisaillement. Les équations gouvernantes sont dérivées en utilisant le principe d'Hamilton. Ces équations différentielles sont résolues par la procédure de Navier. Les résultats sont validés avec des solutions existantes dans la littérature.

A travers ce travail on peut conclure :

- La fréquence fondamentale adimensionnelle est en relation inverse avec le paramètre ( $p$ ) car la plaque devient moins rigide.
- La fréquence fondamentale adimensionnelle est en relation inverse avec le paramètre du matériau ( $p$ ) et le rapport de géométrie  $a/h$ .
- Les plus grandes valeurs de fréquence sont obtenues pour un mode de vibration élevé car ce mode est plus difficile à l'obtenir.
- L'effet de l'étirement de l'épaisseur joue un rôle significatif sur les fréquences fondamentales des plaques épaisses, par contre cet effet (l'étirement de l'épaisseur) devient négligeable dans le cas des plaques minces.
- Les théories de déformation de cisaillement donnent des résultats proches à celle de la théorie classique dans le cas des plaques minces car l'effet de la déformation de cisaillement est négligeable.

En conclusion, on peut dire que les présentes théories ne sont pas seulement exactes mais aussi efficaces pour prédire la fréquence fondamentale et naturelles des plaques fonctionnellement graduées épaisses.

Le travail présenté dans le cadre de cette mémoire de master peut être enrichi. Nous envisageons, par exemple, en perspective, d'appliquer le présent modèle pour l'étude statique des différentes formes de structures épaisses et modérément épaisses en matériaux fonctionnellement gradués avec les différentes conditions aux limites.

*Références  
bibliographiques*

## *Références bibliographiques*

- Ait Amar MM, Abdelaziz, H. H., & Tounsi, A. (2014), “An efficient and simple refined theory for buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates under various boundary conditions”, *Journal of Sandwich Structures & Materials*, 16(3), 293–318.
- Ait Atmane, H., Tounsi, A., Mechab, I., Adda Bedia, EA. (2010), “Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory”. *Int J Mech Mater.*, 6(2),113–121.
- Ait Yahia, S., Ait Atmane, H., Houari, M.S.A. et Tounsi, A. (2015), “Wave propagation in functionally graded plates with porosities using various higher-order shear deformation plate theories”, *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, 53(6), 1143-1165.
- Akavci, SS , A.H. Tanrikulu. (2015), "Static and free vibration analysis of functionally graded plates based on a new quasi-3D and 2D shear deformation theories", *Composites Part B*, 83,203–215.
- Alijani F, Amabili M.(2014),"Effect of thickness deformation on large-amplitude vibrations of functionally graded rectangular plates", *Compos Struct* ,113: 89-107.
- Ambartsumyan, S A. (1969), “Theory of anisotropic plate”. *Technomic Publishing*.
- Arnold,S.M.(2001),"Higher-order-theory structural/microanalysis code (HOT-SMAC) developed, in Research and Technology 2000, Glenn Research Center at Lewis Field, Cleveland, Ohio, 128-9.
- Attia, A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2015), “Free vibration analysis of functionally graded plates with temperature-dependent properties using various four variable refined plate theories”, *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 18(1), 187-212.
- Aydogdu, M. (2005) , “Vibration analysis of cross-ply laminated beams with general boundary conditions by Ritz method”, *International Journal of Mechanical Sciences.*, 47 ,1740–1755.
- Bachir Bouiadjra,R., Adda Bedia, E.A., Tounsi, A. (2013), “Nonlinear thermal buckling behavior of functionally graded plates using an efficient sinusoidal shear deformation theory”, *Structural Engineering and Mechanics.*, 48(4), 547-567.
- Bao.G, Wang. L. (1995), "Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings", *Int. J; Solids Structures*; 32 (19): 2853–2871.

- Baron and Naili (2008), "Propagation d'ondes élastiques au sein d'un guide d'ondes élastiques anisotrope à gradient unidirectionnel sous chargement fluide", *Compte Rendue Mécanique.*, **336** (9), 722–730.
- Batoz , J.L. (1990), "Modélisation des structures par éléments finis Poutres et Plaques", *Presses de l'Université Laval.*, **2**.
- Batra, R.C., Jin, J. (2005), "Natural frequencies of a functionally graded anisotropic rectangular
- Belabed, Z.(2016), « Étude du comportement statique et dynamique des plaques FGM épaisses », Edition des universités européenne. ISBN 10: 3841729827 ISBN 13: 9783841729828
- Belabed, Z., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R., Anwar Bég, O. (2014), "An efficient and simple higher order shear and normal deformation theory for functionally graded material (FGM) plates", *Composites: Part B*, **60**, 274–283.
- Benachour, A., Daouadji, H.T., Ait Atmane, H., Tounsi, A. and Meftah, S.A. (2011), "A four variable refined plate theory for free vibrations of functionally graded plates with arbitrary gradient", *Compos. Part B.*, **42**(6), 1386-1394.
- Benveniste, Y. (1987), "A New Approach to the Application of Mori–Tanaka's Theory of Composite Materials". *Mechanics of Materials*, Vol. 6, pp. 147–157.
- Bhimaraddi, A, Stevens, L.K. (1984), "A higher order theory for free vibration of orthotropic, homogeneous and laminated rectangular plates", *J Appl Mech-T ASME.*, **51**(1), 195–198.
- Bohidar, S. K., Sharma, R., & Mishra, P. R. (2014), "Functionally Graded Materials: A critical Review". *International journal of research*, 1(7), 289–301.
- Bohidar, S. K., Sharma, R., & Mishra, P. R. (2014), "Functionally Graded Materials: A critical Review". *International journal of research*, 1(7), 289–301.
- Bouazza, M., Tounsi, A., Adda-Bedia, EA., Megueni, A. (2010), "Thermoelastic stability analysis of functionally graded plates: An analytical approach". *Comput Mater Sci* , **49**(4), 865–870.
- Bousahla, A.A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. et Adda Bedia, E.A. (2014), "A novel higher order shear and normal deformation theory based on neutral surface position for bending analysis of advanced composite plates", *Int. J. Computat. Method.*, **11**(6), 1350082.

- Carrera E, Brischetto S, Cinefra M, Soave M.(2011), "Effects of thickness stretching in functionally graded plates and shells" *Compos Part* ,42(2):123-33.
- Chakraverty, S., Pradhan, K.K. (2014), "Free vibration of exponential functionally graded rectangular plates in thermal environment with general boundary conditions", *Aerosp. Sci. Technol.*, **36**, 132-156.
- Chakraverty, S., Pradhan, K.K. (2014), "Free vibration of functionally graded thin rectangular plates resting on Winkler elastic foundation with general boundary conditions using Rayleigh–Ritz method", *Int J Appl Mech* ,6(4),1450043.
- Chen, C. S. (2005) , "Nonlinear vibration of a shear deformable functionally graded plate", *Compos Struct.*,**68(3)**, 295–302.
- Cheng, ZQ, Batra, RC. (2000) , "Deflection relationship between the homogenous Kirchhoff plate theory and different functionally graded plates theories", *Archive ApplMech*, **52(1)**, 143 – 158.
- Chi. Shyang-ho, Chung Yen-Ling. (2003), "Cracking in coatingsubstrate composites of multi-layered and sigmoid FGM coatings". *Engineering Fracture Mechanics*, 70, 10, 1227 –1243.
- Cho, K-M. Choi, I-D. Park, I. (2004), "Thermal properties and fracture behavior of compositionally graded Al-SiCp composites. *Designing, Processing and Properties of Advanced Engineering Materials*". *Mater. Sci. Forum*, 449:621-624.
- Delale, F., Erdogan, F. (1983), "The crack problem for a non homogeneous plane". *ASME Journal of Applied Mechanics.*, **50** (3), 609-614.
- Duc, N. D., & Thang, P. T. (2015), "Nonlinear dynamic response and vibration of shear deformable imperfect eccentrically stiffened S-FGM circular cylindrical shells surrounded on elastic foundations", *Aerospace Science and Technology*, 40, 115–127.
- Dumont, A. L. Jean-Pierre, Bonnet. Thierry, Chertier. and Jose, M.F. Ferreira. (2001), "MoSi<sub>2</sub>/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> FGM: elaboration by tape casting and SHS". *Journal of the European Ceramic Society*, 21, 2353-2360.
- Duong ,C. N., Wang, C. H. (2007), "Composite Repair / Theory and Design", *1st ed. ed., Netherlands, Elsevier*, ISBN: 978-0-0804-5146-6.

- El Meiche, N., Tounsi, A., Ziane, N., Mechab, I. and Adda Bedia, E.A. (2011), "A new hyperbolic shear deformation theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate", *Int. J. Mech. Sci.*, **53**, 237-247.
- El-Wazery, M. S. A. R, El-Desouky. O. A, Hamed. N. A, Mansour. and Ahmed. A. Hassan. (2012), "Preparation and Mechanical Properties of Zirconia/Nickel Functionally Graded materials". Arab Journal of Nuclear Sciences and Applications, 45(2), 435-446.
- Fekrar, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2014), "A new five-unknown refined theory based on neutral surface position for bending analysis of exponential graded plates", *Meccanica*, **49**(4), 795-810.
- Ferreira, AJM, Batra, RC, Roque, CMC, Qian, LF, Jorge, RMN. (2006), "Natural frequencies of functionally graded plates by a meshless method", *Compos Struct*, **75**, 593-600. functionally graded rectangular plates", *Journal of Sound and Vibration*, 703- 730.
- Hadji, L., Atmane, H.A., Tounsi, A., Mechab, I. et Adda Bedia, E.A. (2011), "Free vibration of functionally graded sandwich plates using four-variable refined plate theory", *Applied Mathematics and Mechanics.*, **32**(7),925–942.
- Hadji, L., Hassaine Daouadji, T., Ait Amar Meziane, M., Tlidji, Y. and Adda Bedia, E.A. (2016), "Analysis of functionally graded beam using a new first-order shear deformation theory", *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, **57**(2), 315-325.
- Hamidi, A., Houari, M.S.A., Mahmoud, S.R., Tounsi, A. (2015), "A sinusoidal plate theory with 5-unknowns and stretching effect for thermomechanical bending of functionally graded sandwich plates", *Steel and Composite Structures*, **18**(1), 235 – 253.
- Hashmi, Saleem. Gilmar, Ferreira, Batalha. Van Tyne, C. J.Yilbas, B.S. (2014), "Comprehensive materials processing. livre électronique", Oxford, Walltham, MA. Elsevier.
- Hill, R. (1965), "A self-consistent mechanics of composite materials". *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **13** (4), 213-222.
- Hopkinson, N. Hague, R.J.M. and Dckens, (2006), "P.M. Rpaid Manufacturing: An Industrial Revolution for the Digital Age". John Wiley and Sons, Ltd .
- Hopkinson, N. Hague, R.J.M. and Dckens, (2006), "P.M. Rpaid Manufacturing: An Industrial Revolution for the Digital Age". John Wiley and Sons, Ltd .

- Hosseini-Hashemi, S., Fadaee, M., Atashipour, S. (2011), "Study on the free vibration of thick functionally graded rectangular plates according to a new exact closed-form procedure", *Compos. Struct.* 93(2), 722–735.
- Iyengar, S.N.R.K., Chadrashekhara, K. et Sebastian, V.K. (1974),"On the analysis of thick rectangular plates", *Z Angew Math Mech*, 589–591.
- Jamaludin, S N S. Faizal, Mustapha. Dewan, Muhammad Nuruzzaman and Shah Nor Basri. (2013), "A review on the fabrication techniques of functionally graded ceramic-metallic materials in advanced composites". *Scientific Research and Essays*, 8(21), 828- 840, 4 June.
- Jha .D.K., Tarun Kant, R.K. Singh. (2013), "A critical review of recent research on functionally graded plates", *Compos Struct.*96, 833–849.
- Kanaun, S. K . Levin, V. M. (2008), "Self-consistent methods for composites". *Solid mechanics and its applications*, v. 148, 150, Dordrecht : Springer.
- Kant, T., Pandya, BN. (1988), "A simple finite element formulation of a higher-order theory for unsymmetrically laminated composite plates", *Compos Struct*, **9**(3), 215–264.
- Kant.T, K. Swaminathan, (2002), "Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory", *Composite. Structure*, 56 (4), 329-344.
- Karama, M., Afaq, KS., Mistou, S. (2003), "Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity", *Int. J. Solids Structures.*, **40** (6),1525-1546.
- Katayama, T. Sohei, Sukenaga. Noritaka, Saito. Hajime, Kagata. and Kunihiko, Nakashima. (2011), "Fabricated of Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>-W functionally graded materials by slip casting method", *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*, 18.
- Kawasaki A., Watanabe R. (1997), "Concept and P/M fabrication of functionally gradient materials". *Ceramics International*, 8842(95):73–83.
- Kiebeck, B. Neubrand, A. Riedel, H. (2003), "Processing techniques for functionally graded materials". *Mat. Sci. Eng, A* 3 62, 81-105.
- Koizumi, M. (1992), "Recent Progress of functionally graded materials in Japan", *Ceram. Eng. Sci. Pro.*, **13** (7-8),333-347.

- Koizumi, M. (1997), "FGM activities in Japan", *Compos B Eng.*, **28**(1),1–4.
- Kokini , Takeuchi.Y , (1990), "Multilayer ceramic thermal barrier coatings under transient thermal loads". In Proceeding of the First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM' 90,Sendai, Japan; 31-36.
- Krishna Murty, A.V. (1977),"Higher-order theory for vibrations of thick plates", *AIAA Journal*, 1823–1824.
- Krishna Murty, A.V.(1987), "Flexural of composite plates", *Composite Structures*, 161–177.
- Leissa AW, Zhang ZD. (1983), "On the three-dimensional vibrations of the cantilevered rectangular parallelepiped",*Journal of Acoustical Society of America* . ,73:2013–21.
- Leissa AW.(1973),"The free vibration of rectangular plates. *Journal of Sound and Vibration*";31(3):257-93.
- Levinson, M. (1981), "A new rectangular beam theory", *J. Sound Vib.*, **74**, 81 – 87.
- Li, JQ. Zeng, XR. Tang, JN. Xiao, P. (2003), "Fabrication and thermal properties of an YSZ-NiCr joint with an interlayer of YSZNiCr functionally graded material". *J. Eur. Ceram. Soc*, 23, 1847-1853.
- Liew KM, Teo TM.(1999), "Three-Dimensional Vibration Analysis of Rectangular Plates Based on Differential Quadrature Method" ,*Journal of Sound and Vibration*,**220**(4):577-99.
- Lim CW, Liew KM, Kitipornchai S. (1998), "Numerical aspects for free vibration of thick plates", *Part I: Formulation and verification. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* .,156:15–29.
- Lo, KH., Christensen, R.M., Wu, E.M. (1977), " A high-order theory of plate deformation part 1: homogeneous plates", *J Appl Mech.*, **44**(4),663–668.
- Mahi, A., Adda Bedia, E.A., Tounsi, A. (2015), "A new hyperbolic shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic, functionally graded, sandwich and laminated composite plates", *Applied Mathematical Modelling*, **39**, 2489–2508.
- Mahi, A., Adda Bedia, EA., Tounsi, A. et Mechab, I. (2010), "An analytical method for temperature dependent free vibration analysis of functionally graded beams with general boundary conditions", *Composite Structures.*, **92**, 1877–1887.

- Mahi, A., Bedia, EA., Tounsi, A. (2014), "A new hyperbolic shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic, functionally graded sandwich and laminated composite plates", *Appl Math Model* ,[http:// dx.doi.org/10.1016/j.apm.2014.10.045](http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2014.10.045).
- Mahmood, D., Akinlabi, M.E. (2017), "Lattice structures and functionally graded materials applications in additive manufacturing of orthopedic implants: a review" , *Journal of Manufacturing and Materials Processing*. 1 (2), 13-21.
- Makwana AB, Panchal KC. (2014), "A review of stress analysis of functionally graded material plate with cut-out". *Int J Eng Res Technol* ; 3:2020–5.
- Malik M, Bert CW. (1998), "Three-dimensional elasticity solutions for free vibrations of rectangular plates by the differential quadrature method", *International Journal of Solids and Structures*.,35:299–319.
- Mallikarjuna, M., Kant ,T. (1993), "A critical review and some results of recently developed refined theories of fiber-reinforced laminated composites and sandwiches", *Compos Struct*, **23(4)**, 293–312.
- Mantari, JL., Granados, EV. (2015), "A refined FSDT for the static analysis of functionally graded sandwich plates", *Thin-Walled Structures*, **90**, 150–158.
- Markworth, Alan. J. Saunders, James. H. (1995), "A model of structure optimization for a functionally graded material". *Materials Letters*, 22 (1–2), 103-107.
- Marur P R. Fracture behaviour of functionally graded materials. PhD thesis, Auburn University, 1999.
- Matsunaga, H..(2008), "Free vibration and stability of functionally graded plates according to a 2D higher-order deformation theory", *Compos. Struct.* 82, 499–512 .
- Memar Ardestani, M., Soltani, B., Shams, S. (2014), "Analysis of functionally graded stiffened plates based on FSDT utilizing reproducing kernel particle method", *Compos Struct.*, **112**,231–240.
- Mena, R., Tounsi, A., Mouaici, F., Mechab, I., Zidi, M., and Adda Bedia, E. A. (2012). "Analytical solutions for static shear correction factor of functionally graded rectangular beams." *Mech. Adv. Mater. Structures*, 19(8), 641–652.
- Mindlin RD, Schacknow A, Deresiewicz H. (1956), "Flexural vibrations of rectangular plates", *ASME Journal of Applied Mechanics*. ,23:430–6.

- Mindlin, R.D. (1951), "Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates", *J Appl Mech-T ASME*, **18(1)**, 31–38.
- Misra, N., Kapusetti, G., Pattanayak, D. K., & Kumar, A. (2011), "Fabrication and characterization of epoxy/silica functionally graded composite material". *Indian journal of physics*.
- Miyamoto, Y. Kaysser, W.A. Rabin, B.H. Kawasaki, A. (1999), "and ford, R.G. functionally graded Material", Kluwer Academic Publishers, Boston.
- Mori, T. Tanaka, K. (1973), "Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions". *Acta Metallurgica*, 21 (5), 571-574.
- Müller, E., Drašar, Č., Schilz, J., & Kaysser, W. (2003), "Functionally graded materials for sensor and energy applications". *Materials Science and Engineering: A*, 362(1-2), 17–39.
- Narottam P. Bansal, Jitendra P. Singh, Jacques Lamon, Sung R. Choi, (2011), "Processing and Properties of Advanced Ceramics and Composites III: Ceramic Transactions" ; John Wiley & Sons; page 110, 4 août .
- Nelson, RB. and Lorch, DR. (1974), " A refined theory for laminated orthotropic plates", *Journal of Applied Mechanics.*, **41**,177–183.
- Neves AMA, Ferreira AJM, Carrera E, Cinefra M, Roque CMC, Jorge RMN, et al. (2012), " A quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates", *Compos Struct* ,94(5): 1814-25.
- Neves AMA, Ferreira AJM, Carrera E, Roque CMC, Cinefra M, Jorge RMN, et al. (2012), "A quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates", *Compos Part B* ,43: 711-25.
- Nguyen TK., (2014), "A higher-order hyperbolic shear deformation plate model for analysis of functionally graded materials", *Springer* .
- Nguyen, TK, Sab, K., Bonnet, G. (2007), "Shear correction factors of functionally graded plates", *Mech. Advanced Mater. Struct.*,**14** (8),567-575.
- Niino M., Suzuki A., Hirai T., Watanabe R., Hirano T., uroishi. (1988), " Method of producing a functionally gradient material". U.S. Patent 457,1099.
- Okamura, H. (1991), "State of the art of material design projects for severe service applications", *Mater. Sci. Eng :A*,**143** (1-2), 3-9.

- Pagano, NJ. ( 1970), “Exact Solutions for Rectangular Bidirectional Composites and Sandwich Plates”, *Journal of Composite Materials.*, **4**, 20–34
- Panda, SK., Singh, BN. (2010a), “Nonlinear free vibration analysis of thermally post-buckled composite spherical shell panel”, *International Journal of Mechanics and Materials in Design.*, **6**(2), 175-188.
- Panda, SK., Singh, BN. (2010b), “Thermal post-buckling analysis of a laminated composite spherical shell panel embedded with shape memory alloy fibres using non-linear finite element method”, *Proc. I,Mech,E Part C: Journal of Mechanical Engineering and Science.*, **224**(4), 757-769.
- plate.” *J Sound Vib.*, 282(1–2), 509–516.
- Praveen,GN, Reddy, JN. (1998), “Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic-metal plates”, *Int J Solids Struct*, 35, 4457–4476.
- Qian, LF, Batra, RC, Chen, LM. (2004), "Static and dynamic deformations of thick functionally graded elastic plates by using higher-order shear and normal deformable plate theory and meshless local Petrov–Galerkin method", *Composites: Part B*, 35, 685–697.
- Ramachandran, T. Kokula, Krishna. Hari, K. Thiruvengadam, B. Daniel, James. (2015), "Proceedings of the International Conference on Systems, Science, Control, communication", Engineering and Technology, 10-11, Karpagam Institute of Technology, Coimbatore.
- Rasheedat, M., Mahamood, E., Akinlabi, T., Shukla, M., & Pityana, S. (2012), "Functional Graded Material An Overview". In proceeding of the world congress on engineering 2012 Vol III, London , U.K. proceedings of the world congress on engineering.
- Rayleigh, L., (1877), “The Theory of Sound”, vol. 1, The Macmillan Company (reprinted 1945 byDover Publications, New York).
- Reddy, J.N. et Phan, N.D.(1985), "Analysis of laminated composite plates using a higherorder shear deformation theory", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2201–2219.
- Reddy, JN. (1984), “A simple higher-order theory for laminated composite plates”, *J Appl Mech.*, **51**(4), 745–752.
- Reddy, JN. (1990), “A review of refined theories of laminated composite plates”, *Shock Vib Dig.*, **22**(7), 3–17.
- Reddy, JN. (1997), “Mechanics of laminated composite plate: theory and analysis”, *New York: CRC Press.*

- Reddy, JN. (2000), "Analysis of functionally graded plates", *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **47**, 663-684.
- Reddy, JN. and Chin.C. D. (1998), "Thermo-mechanical analysis of functionally graded cylinders and plates", *J. Therm. Stresses.*, **21**, 593–626.
- Reissner, E. (1945), "The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates", *J Appl Mech-T ASME.*, **12**(2), 69–77.
- Reiter, T., and Dvorak, G.J. (1997), "Micromechanical Modelling of Function- ally Graded Materials", IUTAM Symposium on Transformation Problems in Composite and Active Materials, edited by Y.Bahei-El-Din and G.J. Dvorak, Kluwer Academic, London, pp. 173–184.
- Saidi, H., Houari, MSA., Tounsi, A. and Adda Bedia, EA. (2013), "Thermo-mechanical bending response with stretching effect of functionally graded sandwich plates using a novel shear deformation theory", *Steel Compos. Struct., Int. J.*, **15**(2), 221-245.
- Saiyathi brahim, A. Mohamed, Nazirudeen, (2015), "S.S. Dhanapal, P. Processing techniques of functionally graded materials- Areview. International conference on systems, sciences, control, communication", engineering and technology.
- Sheikholeslami SA, Saidi AR. (2013), "Vibration analysis of functionally graded rect- angular plates resting on elastic foundation using higher-order shear and normal deformable plate theory", *Comp Struct* ,106:350–61.
- Shen, H. S. (2009), "Functionally Graded Materials - Nonlinear Analysis of Plates and Shells", New York: CRC Press, Taylor & Francis Group.
- Shimpi, RP. (2002), "Refined plate theory and its variants ", *AIAA Journal.*, **40**(1),137–146.
- Srinivas, S., Joga Rao, CV., Rao, AK.(1970), "An exact analysis for vibration of simply-supported homogeneous and laminated thick rectangular plates", *Journal of Sound and Vibration.*,**12**(2),187-199.
- Swaminathan, K., Naveenkumar, DT. (2014), "Higher order refined computational models for the stability analysis of FGM plates: Analytical solutions", *European Journal of Mechanics A/Solids.*, **47**, 349 – 361.
- Talha, M., Singh, B.N. (2010), "Static response and free vibration analysis of FGM plates using higher order shear deformation theory", *Appl Math Model.*, 34(12),3991–4011.

- Thai, HT. et Kim, SE. (2010), "Free vibration of laminated composite plates using two variable refined plate theory", *International Journal of Mechanical Sciences.*, **52**,626–633.
- Thai, HT. et Kim, SE. (2011), "Levy-type solution for buckling analysis of orthotropic plates based on two variable refined plate theory", *Composite Structures*, 1738–1746.
- Thai, HT., Kim, S.E. (2013), "A simple higher-order shear deformation theory for bending and free vibration analysis of functionally graded plates" , *Compos. Struct.* 96, 165–173
- Thai, HT., Kim, SE.(2013), "Closed-form solution for buckling analysis of thick functionally graded plates on elastic foundation", *Int J Mech Sci.*, **75**,34–44.
- Thai, HT., Nguyen TK., Vo, T. (2014), "Analysis of functionally graded sandwich plates using a new first- order shear deformation theory", *European Journal of Mechanics - A/Solids.*, **45**, 211-225.
- Timoshenko S.P., S.Woinowsky-Krieger, (1959) , Theory of Plates and Shells. McGraw-Hill, New York.
- Tounsi, A., Houari, MSA., Benyoucef, S. and Adda Bedia, EA. (2013), "A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates", *Aerosp. Sci. Technol.*, **24**(1), 209-220.
- Touratier, M. (1991), "An efficient standard plate theory". *Engng Sci.*, **29**( 8),901-916.
- Udupa G, Shrikantha SR, Gangadharan K V. (2014), "Functionally graded composite materials": An overview. *Procedia Mater Sci* ; 5:1291–1299.
- Uflyand, Y.S. (1948), "The propagation of waves in the transverse vibrations of bars and plates", 12, 287–300.
- Uymaz, B., Aydogdu, M.(2007), "Three-dimensional vibration analyses of functionally graded plates under various boundary conditions", *J Reinf Plast Compos .*,**26**(18),1847–1863.
- Vel SS, Batra RC.(2004)," Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates", *J Sound Vib* ,272:703-30.
- Vel, S.S. et Batra, R.C. (2004), "Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates", *J. Sound Vib.*, 272(3–5), 703–730.
- Watari, F. Kondo, H. Matsuo, S. Miyao, R. Yokoyama, A. Omori, M. Hirai, T. Tamura, Y. Uoa, M. Ohara, N. Kawasaki, T. (2003), "Development of functionally graded implant and dental post, for bio-medical application". *Mater. Sci. Forum*, 423- 425:321-326.

- Whitney, JM, Pagano, NJ. (1970), "Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates", *J Appl Mech-T ASME.*, **37**(4), 1031–1036.
- Whitney, JM. (1969), "The effect of transverse shear deformation on the bending of laminated plates", *J Compos Mater.*, **3**, 534–547.
- Whitney, JM. (1973), "Shear correction factors for orthotropic laminates under static load", *Journal of Applied Mechanics.*, **40**,302–304.
- Wo, M., Paszkiewicz, B., & Piasecki, T. (2005), "Application and modeling of functionally graded materials for optoelectronic devices. International student and young scientist workshop, photonics and microsystem, 8–10.
- Wu, AH. Cao, WB. Ge, CC. Li, JE. Kawasaki, A. (2005), "Fabrication and characteristics of plasma facing SiC/C functionally graded composite material". *Mater. Chem. Phys.*, 91(2- 3), 545-550.
- Xigeng Miao, Dan Sun. (2010), "Graded/Gradient Porous Biomaterials". *Materials*, 3, 26-47.
- Zhou D, Cheung YK, Au FTK, Lo SH. (2002),"Three-dimensional vibration analysis of thick rectangular plates using Chebyshev polynomial and Ritz method", *International Journal of Solids and Structures.*, **39**(26):6339-53.
- Zhu P, Liew KM.(2011), " Free vibration analysis of moderately thick functionally graded plates by local Kriging meshless method", *Compos Struct* ,93(11): 2925–44.
- Zidi, M., Tounsi, A., Houari M.S.A., Adda Bedia, E.A. and Anwar Bég, O. (2014), "Bending analysis of FGM plates under hygro-thermo-mechanical loading using a four variable refined plate theory", *Aerosp. Sci. Technol.*, **34**, 24-34.

## ملخص

في هذا العمل، يتم دراسة الاستجابة الديناميكية للصفائح المتدرجة وظيفياً المدعمة ببساطة باستخدام نظرية جديدة لتشوّه القصر شبيه ثلاثية الأبعاد زائديه عكسية (hyperbolic inverse). يتم الحصول على النموذج المطور بتقسيم النزوح العرضي لجزء الانحناء التشوّه وتمدد السماكة، يتم تقليص عدد المتغيرات المجهولة إلى خمسة مقابل ستة أو أكثر في نظرية التشوّه العادي والقصر الأخرى. يتم تحديد الخواص الفعلية والكثافة كمقياس لاستخدام قانون دالة القوى البسيطة، يتم استخدام معادلات الحركة بمبدأ هاملتون ويتم حلها بتطبيق الحلول التحليلية لنافين، يتم مقارنة النتائج المستخرجة مع تلك الموجودة من قبل لتأكيد دقة النموذج الحالي. يتم تقديم ومناقشة عدة دراسات وسيطيه لإثبات مختلف العوامل المؤثرة على الترددات الطبيعية للصفائح المتدرجة وظيفياً المدعمة ببساطة.

**الكلمات المفتاحية:** الاستجابة الديناميكية، نظرية زائديه عكسية، تأثير تمدد السماكة، دالة قانون القوة، مبدأ هاملتون، حلول نافيني.

## Abstract

In this work, dynamic response of the simply supported functionally graded (FG) plate is investigated using a novel quasi-three-dimensional (3D) inverse hyperbolic shear deformation theory. The developed model is obtained by dividing the transverse displacement into bending, shear, and thickness stretching parts. The number of unknown variables is reduced to five versus six or more in the case of other shear and normal deformation theories.

The effective's material properties as Young modulus and density are determined using a simple power law function. The equations of motion are derived via Hamilton's principle and resolved by applying the analytical solutions of Navier. The obtained results are compared with those existing in the literature to confirm the accuracy of the current formulation. Panoply of the parametric studies are presented and discussed to show the various parameters influencing the natural frequency of the simply supported functionally graded (FG) plates.

**Keywords:** Dynamic response, inverse hyperbolic theory, stretching effect, power-law function, Hamilton's principle, Navier solution.

## Résumé

Dans ce travail, la réponse dynamique des plaques fonctionnellement graduées est étudiée en utilisant une nouvelle théorie de déformation de cisaillement hyperbolique inverse quasi-3D. Le modèle développé est obtenu en divisant le déplacement transversal en parties de flexion, cisaillement et l'étirement de l'épaisseur. Le nombre des variables inconnues est réduit à cinq contre six ou plus dans le cas d'autres théories de déformation normale et de cisaillement. Les propriétés matérielles effectives comme le module de Young et la densité sont déterminés en utilisant une simple fonction de loi de puissance. Les équations de mouvement sont dérivées par le principe d'Hamilton et résolues par l'application des solutions analytiques de Navier. Les résultats obtenus sont comparés avec ceux existants dans la littérature pour confirmer l'exactitude de la formulation actuelle. Une panoplie des études paramétriques est présentée et discutée pour montrer les différents paramètres influençant la fréquence naturelle des plaques fonctionnellement graduées simplement appuyées.

**Mots clés :** réponse dynamique, théorie hyperbolique inverse, effet d'étirement, fonction de loi de puissance, principe d'Hamilton, solution de Navier.