



**République Algérienne Démocratique et Populaire**  
**Ministère de l'Enseignement Supérieur**  
**et de la Recherche Scientifique**  
**Université de Tissemsilt**

**Faculté des Sciences et de la Technologie**

**Département des Sciences et de la Technologie**

**Mémoire de fin d'études pour l'obtention du diplôme**  
**de Master académique en**

**Filière : Génie civil**

**Spécialité : structures**

**Présenté par : Khemache Hafsa**

**Ayad Abdelali Mahey eddine**

***Thème***

---

**Analyse dynamique des poutres reposant sur**  
**des fondations élastiques type Winkler-Pasternak**

---

Soutenu le 22 /06/2022

**Devant le Jury :**

<b>Bouزيد Haytham</b>	Président	M.C.A.	Univ-Tissemsilt
<b>Bourada Fouad</b>	Encadrant	M.C.A.	Univ-Tissemsilt
<b>Adim Belkacem</b>	Examineur	M.C.A.	Univ-Tissemsilt

**Année universitaire : 2021-2022**

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

## Remerciements

**A**u terme de ce mémoire, nous tenons à remercier dieu tout puissant, de nous avoir donné le courage, la santé, la volonté, et la patience pour accomplir notre travail.

Nous tenons à remercier profondément notre encadrant Dr Bourada Fouad pour les nombreuses heures qu'il a passées à nous orienter, pour la confiance qu'il nous a accordée en acceptant d'encadrer ce travail de recherche, pour ses qualités humaines et scientifiques, ses conseils ainsi que son enthousiasme durant ces deux années de master.

Nous tenons à exprimer nos reconnaissances envers les membres de jury : Dr Bouzid Haytham

et Dr Adim Belkacem qui ont accepté de juger ce travail.

J'adresse aussi nos remerciements à tous nos professeurs de la filière de génie civil, et surtout au chef de département de génie civil Mr Kherrab.

## **Dédicaces**

Je dédie ce travail à la mémoire de ma grand-mère zohra, ma mère et mon père qui m'ont soutenu durant toutes ces années.

A mon frère Siradj eddine et ma très chère soeur Samah.

A tous mes proches et surtout ma tante zohra et naima et à Abdelkader Ayad.

A tous mes collègues et mes amis avec qui j'ai partagé les meilleurs moments de ma vie Loudjani Mohamed, Besri Rachid, Chilloul Mohamed et Djaad Taher.

A monsieur Chami Bilal, madame Tuil Om esaad, Bounouira Bilal et Adjou Yasser.

# Résumé

## Résumé

Dans cette étude, l'analyse dynamique des poutres simplement appuyées reposant sur une fondation élastique de type Winkler-Pasternak a été examinée. Les structures sont modélisées en développant une nouvelle théorie trigonométrique d'ordre supérieur dans laquelle l'effet de la déformation en cisaillement est inclus et varie selon la fonction parabolique à travers l'épaisseur de la poutre sans utiliser de facteurs de correction de cisaillement. Le module de Young et la densité de la poutre fonctionnellement graduée sont calculés à l'aide d'un mélange simple de lois de puissance dans lequel les propriétés varient continuellement dans le sens de l'épaisseur. La fondation élastique de type Winkler-Pasternak avec deux paramètres pour décrire la réaction de la fondation élastique sur la poutre. Les équations différentielles du mouvement de la poutre sur la fondation élastique de Winkler-Pasternak sont dérivées en appliquant le principe d'Hamilton. Les solutions analytiques de la réponse vibratoire sont déterminées par l'approche de Navier. Pour corroborer les résultats, les fréquences obtenues sont présentées et comparées à celles de la méthode des éléments finis, la méthode quadratique différentielle, la méthode de Rayleigh-Ritz et des solutions analytiques disponibles dans la littérature ouverte. Les impacts de la fondation Winkler-Pasternak, de l'indice d'inhomogénéité du matériau et des rapports d'élancement et de l'effet de déformation de cisaillement sur les valeurs du paramètre de fréquence adimensionnelle des poutres ont été discutés. En bref, il a été constaté que les paramètres de fréquence adimensionnelle des poutres changent en fonction des propriétés des matériaux, de la présence d'une fondation élastique et le mode de vibration. De plus, les effets séparés de ces quantités les unes sur les autres sont intéressants.

*Mots clés : Analyse dynamique, Poutre fonctionnellement graduée, Déformation de cisaillement, Fondation élastique type Winkler-Pasternak, Principe d'Hamilton.*

---

## Abstract

In the present work, a dynamic analysis of simply supported beams reposed on Winkler-Pasternak elastic foundation is investigated. The structure is modeled using a novel combined trigonometric higher order theories in which the effect of transverse shear deformation is included. The transverse shear stress varies according to a parabolic function through the beam thickness without requiring any shear correction factors. The Young modulus and density of the functionally graded beam are computed using a simple power law mixture in which the properties vary continuously and gradually along the thickness direction. The Winkler-Pasternak elastic foundation contains two parameters for describing really the reaction of the foundation on the beam. The differential equations of motion of the beam resting on Winkler-Pasternak elastic foundation are derived by applying the Hamilton's principle. The analytical solutions of the vibrational response are determined via Navier's approach. To corroborate the results, the obtained frequencies are presented and compared with those of the finite element method, differential quadratic method and Rayleigh-Ritz numerical solutions and analytical one's available in the open literature. The impacts of Winkler-Pasternak foundation, inhomogeneity material index, slenderness ratio and shear deformation effect on the dimensionless frequency parameters of beams are discussed in detail. Briefly, it is found that the dimensionless frequency parameters of beam change according to material properties, presence of elastic foundation and the vibrational mode. Moreover, the separate effects of these quantities on each other are interesting.

*Keywords: Dynamic Analysis, FG beam, shear deformation theory, Winkler-Pasternak foundation, Hamilton's principle*

---

## ملخص

في هذا العمل سيتم دراسة التحليل الديناميكي للروافد التي تتركز على مساند بسيطة والموضوعة على أساس مرن من نوع وينكلار-باسترنالك. تمت نمذجة الهيكل باستخدام نظريات جديدة مثلثية مركبة ذات درجات عليا، بحيث يكون تأثير تشوه القص العرضي متغيرا وفق دالة القطع المكافئ في اتجاه سمك الرافدة دون استعمال أي معامل تصحيح، يكون حساب معامل المرونة الطولي 'معامل يونغ' وكثافة الرافدة المتدرجة وظيفيا باستخدام قانون الخليط الآسي البسيط و الذي تتغير فيه الخصائص بشكل مستمر و تدريجي على طول سمك الرافدة، ويحتوي الأساس المرن على معيارين لوصف رد فعل الأساس على الرافدة في الواقع، ثم يتم استخراج معادلات تفاضلية تصف حركة الروافد على الأساس المرن المذكور أنفا بتطبيق مبدأ هاملتون، نستعين بنهج نافبي لتحديد الحلول التحليلية للاستجابة الاهتزازية .

ولتأكيد النتائج نعرض الترددات التي تم الحصول عليها ومقارنتها مع تلك الحلول العددية (طريقة العناصر المحدودة، طريقة التربيعة التفاضلي ونمط رايليغ-ريتز) وحلول تحليلية أخرى الموجودة في الدراسات السابقة، وتناقش بالتفصيل تأثيرات أساس وينكلار-باسترنالك ومؤشر المواد غير متجانس وتأثير تشوه القص على الترددات عديدة الأبعاد للروافد. باختصار وجدنا ان هذه الأخيرة تتغير وفقا لخصائص المواد، وجود الأساس المرن من عدمه وطريقة الاهتزاز. علاوة على ذلك فإن تأثيرات هذه العناصر على بعضها البعض مثيرة للاهتمام.

الكلمات المفتاحية: التحليل الديناميكي رافده المتدرجة وظيفيا تشوه القص العرضي أساس وينكلار-باسترنالك مبدأ هاملتون.

# **Sommaire**

# Sommaire

Remerciements .....	i
Dédicaces .....	ii
RESUME .....	iii
LISTE DES FIGURES.....	vii
LISTE DES TABLEAUX.....	xi
LISTE DES SYMBOLES.....	xiii
INTRODUCTION GENERALE.....	1
<b>CHAPITRE I</b>	
<b>GENERALITES SUR LES MATERIAUX COMPOSITES</b>	
I.1 Introduction.....	5
I.2 Les matériaux composites.....	5
I.2.1 Définition .....	5
I.2.2 Les Constituants des matériaux composites.....	7
I.2.3 Comparaison des propriétés mécanique de différentes fibres de renfort .....	12
I.2.4 L'influence de l'orientation des fibres sur le comportement mécanique.....	13
I.2.5 La classification de matériaux composites suivant la nature des constituants.....	13
I.2.6 Disposition des fibres.....	15
I.2.7 Avantages et inconvénients des matériaux composites : .....	15
I.2.8 Les différentes structures d'un composite.....	16
I.3 Matériaux fonctionnellement gradués.....	17
I.3.1 Définition .....	17
I.3.2 Histoire de développement des matériaux fonctionnellement gradués.....	18
I.3.3 L'intérêt d'utilisation de (F.G.M.).....	20
I.3.4 Quelques applications pratiques typiques des (F.G.M.)s.....	20
I.3.5 Utilisation prévisionnelle des matériaux (F.G.M.) dans le domaine du génie civil.....	21
I.3.6 Mise en œuvre des (F.G.M.) .....	21
I.3.7 Propriétés matérielles effectives d'un matériau (F.G.M.).....	28
I.3.8 Propriétés physiques et mécaniques des (F.G.M.)s .....	29
I.3.9 Lois de mélanges.....	30
I.4 Conclusion : .....	35
<b>CHAPITRE II</b>	
<b>DIFFERENTES THEORIES DES POUTRES</b>	
II.1 Introduction.....	36
II.2 Définitions de quelque notion fondamentale.....	36
II.3 Domaines d'utilisation des poutres (voir Figure II.1). .....	37
II.3.1 Types de poutres .....	37
II.3.2 Théories des poutres .....	40

II.3.3 Historique des théories des poutres .....	40
II.4 Conclusion .....	48

**CHAPITRE III**  
**FORMULATIONS THEORIQUES**

III.1 Introduction .....	49
III.2 Analyse du comportement mécanique pour une poutre en (F.G.M.) simplement appuyée ...	49
III.2.1 Propriétés des matériaux .....	49
III.2.2 Méthode de résolution .....	51
III.2.3 Hypothèses de base.....	51
III.1 Les fondations élastiques.....	53
III.1.1 Modèle de Winkler .....	53
III.1.2 Modèle de Pasternak.....	54
III.2 Solution exacte pour une poutre en (F.G.M.).....	56
III.3 Analyse du comportement dynamique d'une poutre isotrope.....	57
III.4 Conclusion.....	59

**CHAPITRE IV**  
**RESULTATS ET DISCUSSIONS**

IV.1 Introduction .....	60
IV.2 Résultats numériques et interprétations.....	60
IV.2.1 Poutre simplement supportée en (F.G.M.) .....	60
IV.2.2 Poutre isotrope simplement supportée .....	73
IV.3 Conclusion.....	79

# Liste des figures

# Liste des figures

## Chapitre I Généralités sur les matériaux composites

Figure I. 1 Les trois classes des matériaux. (Mercier et al, 1999).....	6
Figure I. 2 : Quelques exemples de matériaux fonctionnellement gradués (F.G.M.). (Khadra, 2017). .....	6
Figure I. 3 : Les constituants des matériaux composites. ....	7
Figure I. 4 : Représentation schématique d'un matériau composite. ....	7
Figure I. 5 : Les types de matrices.....	8
Figure I. 6 : les types de renfort (Gornet, 2008).....	10
Figure I. 7 : Fibres de verre (Micelli et al, 2020). ....	10
Figure I. 8 : fibre de carbone. ....	11
Figure I. 9 : Fibre de Kevlar. ....	12
Figure I. 10 : courbe de traction de différentes fibres de renfort. (Mercier et al,1999).....	13
Figure I. 11 :L'influence de l'orientation des fibres sur le comportement mécanique.....	13
Figure I. 12 : Classification des matériaux composites selon la nature du renfort.....	14
Figure I. 13 : Disposition des fibres (Baïlon and Dorlot, 2000).....	15
Figure I. 14 : Différentes structures d'un composite. ....	16
Figure I. 15 : Développement d'un matériau. ....	17
Figure I. 16 : Fraction volumique des phases constitutives graduées dans un seul sens d'un (F.G.M.). .....	17
Figure I. 17 : Une vue microscopique d'un (F.G.M.). (Hashmi, 2014).....	18
Figure I. 18 : Principe de moulage au contact. (Berthelot, 2010) .....	22
Figure I. 19 : Principe de moulage par projection simultanée. (Berthelot, 2010) .....	22
Figure I. 20 : Moulage sous vide.(Berthelot, 2010) .....	23
Figure I. 21 : Moulage par injection de résine. (Berthelot, 2010).....	24
Figure I. 22 : Moulage par compression. (Berthelot, 2010) .....	25
Figure I. 23 : Moulage par injection. (Berthelot, 2010) .....	25

Figure I. 24 : Moulage en contenu de plaque. (Berthelot, 2010).....	26
Figure I. 25 : Moulage en contenu de panneaux ondulés. (Berthelot, 2010) .....	26
Figure I. 26 : Moulage en contenu de panneaux ondulés. (Berthelot, 2010) .....	27
Figure I. 27 : Moulage par centrifugation. (Berthelot, 2010).....	27
Figure I. 28 : Enroulement circonférentiel. (Berthelot, 2010).....	28
Figure I. 29 : Gradation globale :(a) structure discontinue ;(b) structure continue. (Safa, 2020). ...	29
Figure I. 30 : Caractéristique des matériaux composites en (F.G.M.) en comparaison avec les matériaux composites conventionnels. (Koizumi, 1997) .....	29
Figure I. 31 : La géométrie de la poutre en (F.G.M.).....	31
Figure I. 32 : La variation du module de Young dans une poutre en ( $P - FGM$ ) .....	33
Figure I. 33 : La variation de la fraction volumique dans une poutre ( $S - FGM$ ) .....	34
Figure I. 34 : La variation du module de Young dans la poutre ( $E - FGM$ ) .....	35

## **Chapitre II Les différentes théories des poutres**

Figure II. 1 : Domaines d'utilisation des poutres.....	37
Figure II. 2 : cas d'une poutre simplement appuyées. ....	37
Figure II. 3 : cas d'une poutre console.....	38
Figure II. 4 : Cas d'une poutre avec porte à faux. ....	38
Figure II. 5 : cas d'une poutre encastree et appuyée.....	38
Figure II. 6 : cas d'une poutre continue. ....	39
Figure II. 7 : cas d'une poutre à double encastrement. ....	39
Figure II. 8 : cas d'une poutre appuyée à double encastrement.....	39
Figure II. 9 : Schématisation des déformations dans le cas de la théorie classique des poutres. ....	42
Figure II. 10 : Schématisation des déformations dans le cas de la théorie du premier ordre. ....	43
Figure II. 11 : la distribution des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur dans le cas de la théorie de premier ordre. ....	44
Figure II. 12 : La distribution des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur réelle.....	44
Figure II. 13 : Schématisation des déformations dans le cas de la théorie d'ordre élevé. ....	45

Figure II. 14 : La variation de la fonction de forme  $f(z)$  des différents modèles en fonction de l'épaisseur.....47

Figure II. 15 : variation de la fonction de la forme  $f'(z)$  des différents modèles suivant l'épaisseur. ....47

### **Chapitre III Formulations théoriques**

Figure III. 1 : Définition de la structure poutre étudiée.....50

Figure III. 2 : Représentation d'une poutre en (F.G.M.) reposant sur une fondation élastique. ....54

### **Chapitre IV Résultats et discussions**

Figure IV. 1 : L'effet des valeurs de l'indice de puissance ( $p$ ) sur les fréquences fondamentales adimensionnelles ( $\hat{\omega}$ ) des poutres en (F.G.M.) simplement appuyées. ....70

Figure IV. 2 : L'impact du nombre du mode de vibration et le rapport d'élancement ( $L/h$ ) sur la vibration des fréquences naturelles ( $\hat{\omega}$ ) des poutres en (F.G.M.) ( $P = 1,5$ ). ....71

Figure IV. 3 : L'effet du type de la fondation élastique et le rapport d'élancement sur les fréquences fondamentales adimensionnelles ( $\varpi$ ) des poutres en (F.G.M.) simplement appuyées. ....72

Figure IV. 4 : La variation de la fréquence fondamentale adimennelle ( $\varpi$ ) en fonction du rapport d'élancement( $L/h$ )pour les différents modèles (CBT ,FSDT et HSDT). ....77

Figure IV. 5 : L'effet du nombre de modes et la fondation élastique sur les fréquences naturelles adimensionnels ( $\varpi$ ) des poutres isotropes simplement appuyée. ....78

# Liste des Tableaux

# Chapitre I Généralités sur les matériaux composites

Tableau I. 1 La différence entre les propriétés du métal et de la céramique.....30

## Chapitre II Les différentes théories des poutres

Tableau II .1 Les différents fonctions de forme les plus connus.....46

## Chapitre III Formulations théoriques

Tableau III. 1 : Les différents efforts résultants .....53

## Chapitre IV Résultats et discussions

Tableau IV. 1 : Comparaison des valeurs du paramètre de fréquences  $(\tilde{\omega})$  des poutres fonctionnellement graduées simplement appuyées .....61

Tableau IV. 2 : Comparaison de la première fréquence fondamentale  $(\tilde{\omega})$  pour les différents distributions de matériau ( $R_E = E_c/E_m$  et  $\rho_c/\rho_m=1$ ).....61

Tableau IV. 3 : Comparaison de la deuxième fréquence naturel  $(\tilde{\omega})$  pour les différents distributions de matériau .....63

Tableau IV. 4 : Comparaison de la troisième fréquence naturelle  $(\tilde{\omega})$  pour les différentes distributions de matériau .....64

Tableau IV. 5 : La variation de la fréquence adimensionnelle  $(\tilde{\omega})$  pour les différentes distributions de matériau et le rapport d'élanement .....65

Tableau IV. 6 : Comparaison des trois premières fréquences adimensionnelles  $(\hat{\omega})$  des poutres en (F.G.M.) en fonction des valeurs de l'indice de puissance .....67

Tableau IV. 7 Comparaison et convergence des six premières fréquences naturelles des poutres en matériaux fonctionnellement gradués ( $R_E = 0.5$ ) .....68

Tableau IV. 8 : Comparaison et convergence des six premières fréquences naturelles des poutres en matériaux fonctionnellement gradués ( $R_E = 2$ ) .....69

Tableau IV. 9 : Comparaison et convergence des six premières fréquences naturelles des poutres rigides isotropes simplement appuyées .....73

Tableau IV. 10 : Comparaison et convergence des six premières fréquences naturelles des poutres en FGM simplement appuyées .....	74
Tableau IV. 11 : Comparaison des valeurs du paramètre de fréquence $(\varpi)$ des poutres homogènes simplement appuyées .....	75
Tableau (IV. 12) : Les paramètres de fréquences naturelles $(\varpi)$ des poutres simplement appuyées reposent sur fondation élastique .....	76

# Liste des symboles

## Liste des symboles

$\{\}$	Vecteur colonne
$\left( \begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right)$	Matrice
$V(z)$	La fraction volumique de la poutre en (F.G.M.)
$p$	indice matériel
$P$	propriétés matérielles d'une poutre
$E(z)$	Module de Young en fonction de « z »
$G$	module transversal d'un matériau
$\rho$	densité d'une masse
$m$	Indice des constituants métalliques
$c$	Indice des constituants céramiques
$R_E$	Module de module
$\nu(z)$	Coefficient de Poisson en fonction de « z »
$L$	Longueur de la structure en (F.G.M.)
$b$	Largeur de la poutre en (F.G.M.)
$h$	Epaisseur de la poutre en (F.G.M.)
$\delta$	Variation d'un terme
$u, v, w$	Les déplacements dans les directions x, y, z.
$\varpi, \tilde{\omega}, \hat{\omega}$	Fréquence adimensionnelle

$f(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
$f'(z)$	Dérivé de la Fonction de gauchissement
$\Gamma$	les éléments de la matrice de masse.
$S$	les éléments de la matrice de rigidité
$U$	Energie de déformation
$V_f$	Le travail dû à la réaction de la fondation élastique
$K$	Energie cinétique
$N_x$	Force axial
$M^c$	Moment fléchissant
$M^s$	Moment de cisaillement
$Q$	Effort de cisaillement
$I$	Coefficient d'inertie
$R_E$	Rapport d'élanement
$q$	Charge transversale uniforme
$q_0$	Intensité maximale de la charge
$q_f$	Réaction de la fondation élastique
$Q_n$	Coefficient de Fourier
$K_w$	Paramétré de fondation élastique (type Winkler)
$K_p$	Paramétré de fondation élastique (type Pasternak)
$t$	Temps
$\partial$	Dérivée partielle

# Liste des abréviations

## Liste des abréviations

Abréviation	En français	En anglais
(F.G.M.)	Matériaux fonctionnellement gradués	Functionally Graded Material
(C.B.T.)	Théorie classique des poutres	Classical beam theory
(F.S.D.T.)	Théorie des poutres du premier ordre	First shear deformation theory
(H.S.D.T.)	Théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé	High order shear deformation theory
( <i>P-FGM</i> )	Loi de Puissance	Power law
( <i>S-FGM</i> )	Loi de Sigmoide	Sigmoid law
( <i>E-FGM</i> )	Loi d'exponentielle	Exponential law
( <i>T.B.T.</i> )	Théorie des poutres de Timochenko	Timochenko Beam Theory
( <i>S.B.T.</i> )	Théorie des poutres sinusoidale	Sinusoidal Beam Theory
( <i>H.B.T.</i> )	Théorie des poutres d'ordre élevé	Higher order Beam Theory
( <i>F.E.M.</i> )	Méthode des éléments finis	Finite element method
( <i>D.Q.M.</i> )	Méthode quadratique différentielle	Differential quadratic method
( <i>R.R.M.</i> )	Méthode de Rayleigh–Ritz	Rayleigh–Ritz method
( <i>S.S.D.T.</i> )	Théorie de déformation de cisaillement sinusoidale	sinusoidal shear deformation theory
( <i>Hy.S.D.T.</i> )	Théorie de déformation de cisaillement hyperbolique	hyperbolic shear deformation theory
( <i>T.S.D.T.</i> )	Théorie de déformation de cisaillement de troisième ordre	third order shear deformation theory
Théorie 3D	Théorie tridimensionnelle	Three-dimensional theory
H	hypothèse	Hypothesis

# **Introduction générale**

### **Introduction générale**

Le développement scientifique est connu depuis l'apparition de l'homme, et surtout ces dernières années en particulier dans les années quatre-vingts, car il exige un énorme défi dans le domaine d'industrie, et surtout à l'usage mondial des matériaux, qui incite les chercheurs à découvrir des nouveaux astuces et des techniques plus avancées, afin d'améliorer ses propriétés, pour répondre à ces exigences de performance d'économie, d'allègement des structures, notamment pour les secteurs d'aéronautique, naval, de la mécanique, du biomédical, ... etc.

Parmi ces solutions c'est l'avènement d'un substituant qu'on appelle les matériaux composites, qui sont devenus l'axe de recherche par excellence, et le miracle de l'époque. Pour l'obtenir on combine de différents types des matériaux, en contrôlant leur morphologie et leur répartition, dont les propriétés sont différentes de celle des composants de base qui répondent aux conditions prédéfinis.

Cette technique est utilisée depuis des siècles pour fabriquer des torchis, un mélange de terre crue et de paille utilisé dans certains types de construction traditionnelle, on peut aussi considérer le béton armé comme matériau composite (béton-acier), qui est toujours omniprésent en génie civil.

Récemment, l'une des meilleures façons consiste à combiner deux matériaux tout en conservant leurs propriétés. Il s'agit de les assembler en pourcentages variables dans des sections, appelés matériaux fonctionnellement gradués (F.G.M.).

Il existe plusieurs types de matériaux utilisés pour fabriquer les matériaux composés en (F.G.M.) les matériaux les plus utilisés sont le métal et la céramique. Chaque matériau a ses propres propriétés selon sa classe : les métaux sont généralement tenaces et ductiles, mais ils ont généralement une masse volumique très élevées ; les céramiques ont un module d'Young et une résistance à la traction théorique très élevés, mais elles sont très fragiles.

Au début du développement des matériaux à gradient fonctionnel, le concept était de supprimer l'interface qui existait dans le matériau composite traditionnel, et de le remplacer par une interface graduellement progressive. Pour éliminer les problèmes de délamination et de concentration de contraintes.

Ces dernières années, plusieurs recherches ont été réalisées et appliquées dans le domaine d'ingénierie, afin d'analyser le comportement statique et dynamique des éléments en (F.G.M.) y compris les poutres. Cette analyse a conduit au développement de diverses théories sur ce type d'élément.

L'analyse dynamique des poutres ont fait l'objet de plus en plus d'attention ces dernières années. Chakraborty et al (2003) ont présenté une nouvelle théorie pour étudier le comportement thermo élastique des poutres en matériau fonctionnellement gradués. L'étude est basée sur une théorie de déformation du premier ordre. Les propriétés thermomécaniques sont considérées varier dans la direction de l'épaisseur de la poutre, Hadji et al (2016) ont développé de nouvelles théories de déformation en cisaillement du premier ordre et d'ordre supérieur pour l'analyse statique et la vibration libre des poutres en (F.G.M.) simplement appuyées. Bourada et al (2015) ont présenté une théorie trigonométrique de déformation normale et de cisaillement qui prend en compte les effets du cisaillement transversal et des déformations normales pour l'analyse des poutres en (F.G.M.) d'ordre supérieur. La théorie comprenait trois inconnues, dont l'une était l'effet de la normale transversale. Şimşek (2010) a présenté une analyse des vibrations libres de poutres en (F.G.M.) avec diverses conditions aux limites basées sur des théories de déformation en cisaillement d'ordre supérieur. (Thai and Vo, 2012) ont obtenu des solutions analytiques de type Navier pour la flexion et la vibration des poutres en (F.G.M.) en utilisant diverses théories de déformation en cisaillement d'ordre supérieur. Vo et al (2014) ont présenté une analyse de la flexion statique et de la vibration libre basée sur le cisaillement d'ordre supérieur en utilisant la méthode des éléments finis. Sayyad et Ghugal (2017) ont développé une théorie unifiée de la déformation en cisaillement pour la flexion de poutres et plaques en (F.G.M.). Benguediab et al (2014) ont proposé une théorie de poutre de déformation de cisaillement non locale pour le flambement et l'analyse des vibrations des nano poutres homogènes fondées sur la théorie de l'élasticité non locale d'Eringen (Eringen, 1983). (Ebrahimi and Jafari, 2018) ont proposé une théorie de poutre raffinée à quatre variables de déformation de cisaillement pour les caractéristiques de vibration thermomécanique des poutres poreuses fonctionnellement graduées (F.G.M.) exposées à divers types de charges thermiques en utilisant une méthode analytique. Hamdi and Farah (2018) ont développé le modèle d'éléments finis de poutre d'une pale de vent vibrante en grande déformation élastique. Rahmani et Pedram (2014) ont appliqué la théorie des poutres de Timoshenko pour l'analyse de la vibration libre des nanopoutres en (F.G.M.). Akgöz et Civalek (2016) ont étudié la réponse statique en flexion de nanotubes de carbone à paroi unique noyés dans un milieu élastique en utilisant des micro-poutres de déformation en cisaillement d'ordre supérieur et une théorie modifiée du gradient de déformation. Ebrahimi et Barati (2016) ont obtenu une solution de type Navier pour les caractéristiques de vibration libre des nanopoutres en (F.G.M.) basée sur la théorie des poutres de la déformation en cisaillement du troisième ordre.

Les poutres reposant sur des fondations élastiques ont une large application dans l'ingénierie moderne, posent de grands problèmes techniques dans la conception des structures. En

conséquence, de nombreux rapports de recherche impliquant l'approche de calcul et d'analyse pour les poutres sur la fondation élastique ont été présentés.

Comme tout le monde le sait, le modèle de Winkler pour les fondations élastiques est le plus préliminaire. Dans lequel le déplacement vertical est supposé être proportionnel à la pression de contact en un point arbitraire (Hetenyi, 1950).

De nombreuses études sur la vibration libre, le flambage et le comportement de stabilité des poutres de fondation de Winkler ont été menées par de nombreuses personnes.

Par exemple, Eisenberger et Clastornik (1987) ont étudié la vibration et le flambage des poutres sur une fondation de Winkler variable et ont obtenu des résultats numériques. Zhou (1993) a étudié la vibration libre de poutres simplement appuyées sur une fondation de Winkler variable. Eisenberger et al (1986) ont utilisé la méthode des éléments finis pour analyser la stabilité des fondations élastiques. Au et al (1999) ont étudié la vibration sous charge axiale et la stabilité des poutres non uniformes avec des changements brusques de section transversale reposant sur une fondation élastique de Winkler avec une rigidité de fondation arbitraire. Nedri et al (2014) ont proposé une théorie de déformation en cisaillement hyperbolique raffinée pour le comportement en vibration libre des plaques composites stratifiées reposant sur des fondations élastiques de Winkler avec une rigidité de fondation arbitraire,.

Plus de rapports sur les poutres reposant sur les fondations type Winkler peuvent également être trouvés dans la littérature, comme Refs (Clastornik et al., 1986; Farghaly and Zeid, 1995).

Bien que le modèle de Winkler soit simple et largement nécessaire, l'hypothèse selon laquelle le sol de fondation est composé de ressorts élastiques linéaires, indépendants et très rapprochés les uns des autres, conduit à la discontinuité du sol (Pasternak, 1954). Pour surmonter ce manque, certains chercheurs ont proposé divers modèles de fondation à deux paramètres, qui peuvent capter le comportement réel du sol avec plus de précision, tels que la fondation généralisée (De Rosa, 1995), la fondation Pasternak (Naidu et Rao, 1995) et la fondation Vlasov (Ayvaz and Özgün, 2002). Lee et Kes (1990) ont réalisé une étude pour déterminer les fréquences naturelles des poutres d'Euler non uniformes reposant sur une fondation non uniforme avec des contraintes élastiques générales aux extrémités. Franciosi et Masi (1993) ont utilisé une méthode d'éléments finis avec les hypothèses de la fonction de forme exacte pour étudier la vibration libre de poutres de Bernoulli sur des fondations élastiques à deux paramètres. Wang et al (1998) ont présenté une solution exacte des poutres de Timoshenko reposant sur des fondations élastiques à deux paramètres en utilisant les fonctions de Green, et ont effectué le calcul numérique pour la flexion, la vibration libre et le flambage de plusieurs poutres. De Rosa et Maurizi (1998) ont étudié l'influence des masses

concentrées et du sol Pasternak sur la vibration libre des poutres et ont donné des solutions exactes pour les poutres de Bernoulli-Euler basées sur la théorie des poutres.

Le but de ce travail est une contribution à la modélisation des structures (poutres) en matériau fonctionnellement gradué (F.G.M.), simplement appuyée pour étudier la réponse vibratoire de ce type de structure reposant sur des assises élastiques de type Winkler-Pasternak. Par ailleurs, un autre objectif de ce travail tout en restant dans les mêmes conditions que l'étude précédente, est d'étudier un cas spécial d'une poutre isotrope en diminuant le nombre des inconnus jusqu'à deux inconnus, et l'influence de différents paramètres sur le comportement dynamique tels que la géométrie, le matériau utilisé, type des fondations élastiques, nombre de modes sont étudiés et discutés en détail.

Pour répondre aux objectifs de notre mémoire, On a divisé notre document en quelques axes principaux, comme suit :

Après une introduction générale sur ce thème, nous allons tout d'abord, d'essayer de mettre en lumière les grands thèmes, qui s'articule autour des matériaux composites d'une façon générale, et en particulier les matériaux composites à gradient fonctionnel (F.G.M.). Passant par la revue sur les différentes théories des poutres, Pour tenter dans un troisième chapitre d'analyser et de modéliser une poutre reposé sur une assise élastique considérée comme une partie théorique, puis présenter et discuter les différents résultats de cette étude et les vérifier et valider en les comparant avec ceux de la littérature. Par la suite, ce mémoire se termine par une conclusion générale faisant la synthèse sur l'ensemble de ces travaux qui permet de revenir sur les résultats importants de ce travail, et qui envisage des perspectives pour les futurs travaux.

**Chapitre I**

**Généralités sur les matériaux  
composites**

### **I.1 Introduction**

Les matériaux composites existent toujours comme le monde. Car Il y'a plusieurs millénaires, les artisans égyptiens augmentaient déjà les propriétés mécaniques des briques par une adjonction de paille courte à l'argile fraîche. Il existe aussi ces matériaux composites dans la nature comme le bois ; l'os ; le bambou ...

Les matériaux composites sont des matériaux qui répondent aux exigences de conception. En raison de leur faible densité, grande résistance, rigidité importante et de leur excellente durabilité.

Aujourd'hui, les matériaux composites sont utilisés dans presque tous les domaines d'application possible: Piscines, bassins, bâtiments, les transports aériens, maritime, routier, ferroviaire, sports et loisirs, mais ce type de matériau est influé par une de délaminage due à la concentration des contraintes ,pour résoudre ce problème de décollement ,les chercheurs d'origine Japonais en 1984 par Mr Nino et ses collègues à Sendai au cours du projet avion spatial ont découvert une nouvelle gamme de matériaux composite connue sous le nom des matériaux fonctionnellement gradués ( Functionally Graded Material (F.G.M.))qui ont un grand intérêt pour le domaine d'ingénierie grâce aux propriétés qu'ils possèdent, ou Matériaux fonctionnellement gradués, a attiré une attention particulière.

L'objectif de ce premier chapitre est de positionner la problématique des matériaux en (F.G.M.) et les matériaux composites. Tout nous attachant à mettre en évidence toutes leurs particularités propres.

### **I.2 Les matériaux composites**

#### **I.2.1 Définition**

«Les matériaux ont de tout temps défini le niveau de développement de notre civilisation. Les premiers pas de l'humanité ont ainsi été marqués par l'Age de la Pierre, du Bronze et du Fer. Aujourd'hui, ils jouent un rôle déterminant dans toutes les mutations technologiques. Quelle que soit sa spécialité, l'ingénieur ne peut ni concevoir, ni construire de nouveaux objets sans tenir compte des propriétés des matériaux qu'il utilise. C'est en général le comportement des matériaux qui limite les performances des machines et des équipements.» (Mercier et al, 1999)

En générale, les matériaux sont classés en trois classes (voir Figure I.1).

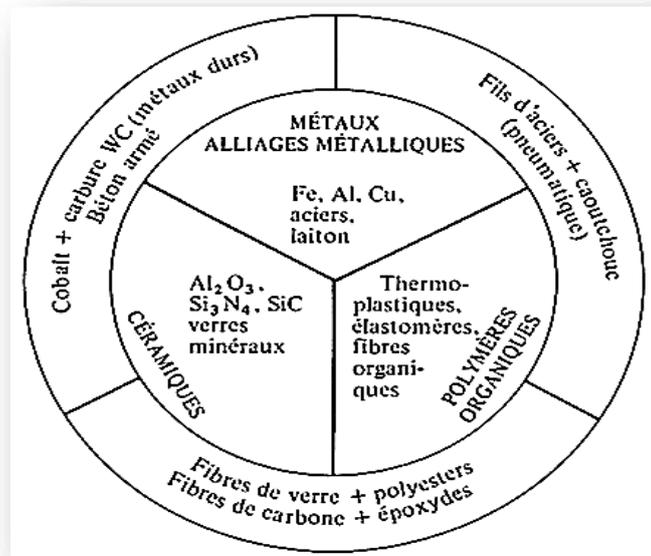
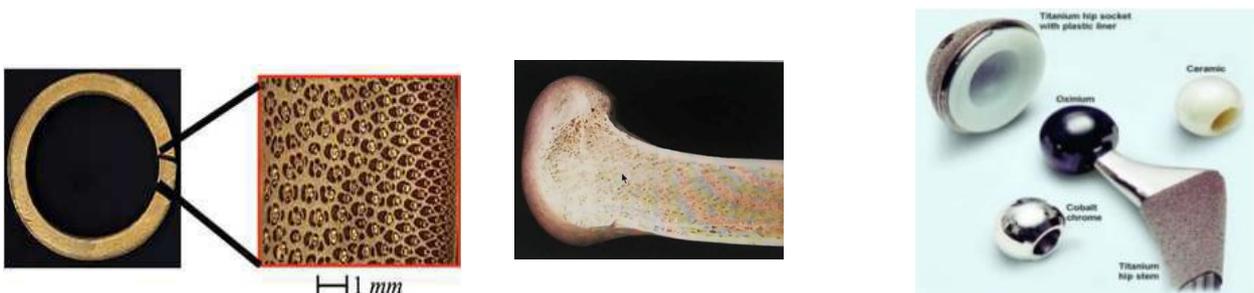


Figure I. 1 : Les trois classes des matériaux. (Mercier et al, 1999)

Un matériau composite est un type de matériau bi ou multiphasé qui présente les propriétés combinées de ses deux ou toutes ses composantes. Les composites, qui sont peut-être le matériau le plus important dans n'importe quelle application, sont aujourd'hui largement acceptés car ils offrent une résistance et une rigidité élevées, associées à une faible densité, par rapport aux matériaux classiques. (Mahato et al, 2020)

En effet ces matériaux existent dans la nature, par exemple, le bambou ; les os et même notre peau est également graduée pour fournir certaine ténacité, qualités tactiles et élastiques en fonction de la profondeur de la peau et l'emplacement sur le corps (voir Figure I.2).



(a) : Bombo

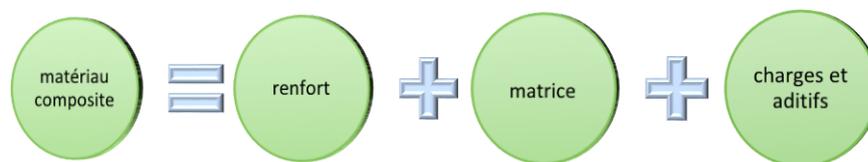
(b) : L'os

(c) : articulation artificielle

Figure I. 2 : Quelques exemples de matériaux fonctionnellement gradués (F.G.M.). (Khadra, 2017).

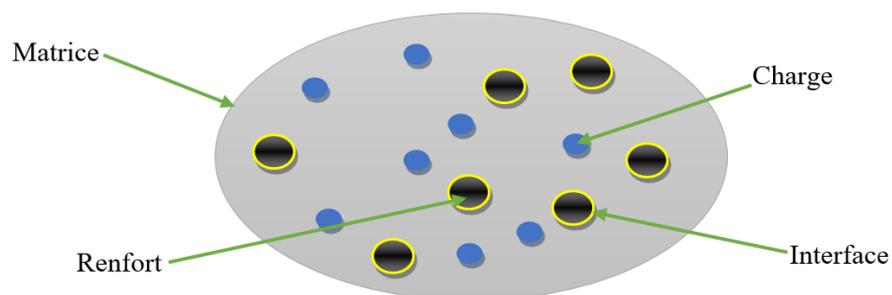
### I.2.2 Les Constituants des matériaux composites

Les composites sont constitués d'une protection appelée "matrice", et de l'ossature appelée "renfort". Les renforts fibreux sont disposés de façon judicieuse dans la matrice qui conserve leur disposition géométrique et leur transmet les sollicitations. Et une zone de transition entre les fibres et la matrice qu'on s'appelle interface. Elle possède des caractéristiques chimiques et mécaniques différentes de celles des fibres et de la matrice (voir Figure I.3 et I.4).



**Figure I. 3 :** Les constituants des matériaux composites.

On dit que Le matériau composite est non endommagé si la matrice et le renfort sont liés d'une façon parfaite et qui n'y a pas de glissement ni de séparation au niveau d'interface ce processus appelé délaminage peut provoquer de fortes contraintes inter-laminaires et entraîner une déformation plastique ou une fissuration. (Baïlon et Dorlot, 2000; Gornet, 2008).



**Figure I. 4 :** Représentation schématique d'un matériau composite.

#### I.2.2.1 Les Charges et additifs

Des charges et des additifs peuvent être ajoutés au composite sous forme d'éléments fragmentaires, de poudres ou liquide, afin de modifier ou améliorer une propriété de la matière ou pour des raisons économiques, soit d'en faciliter la mise en œuvre. (Par exemple la tenue aux chocs, la résistance aux UV, la résistance au feu, anti-UV, stabilisants thermiques, anti-oxygène, hydrofuges...). (Berthelot, 2010; Gornet, 2008)

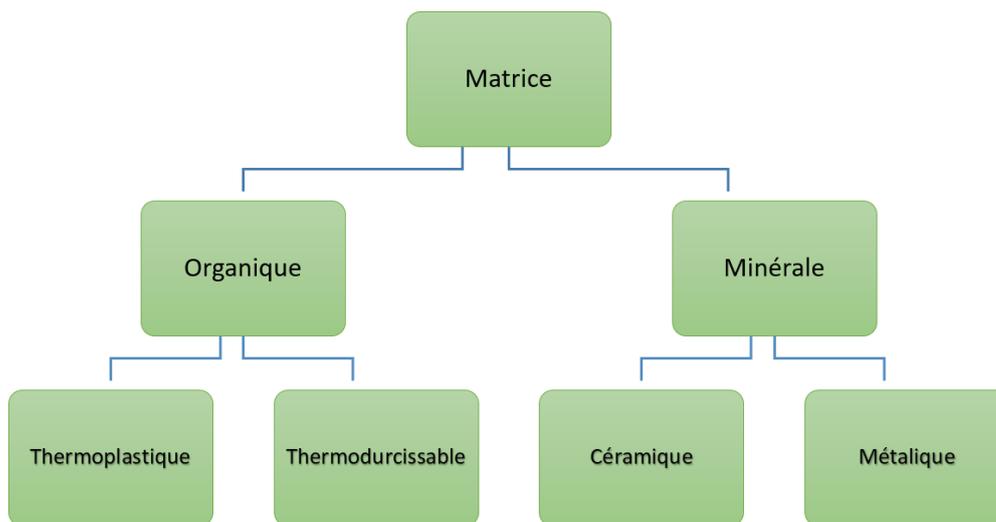
### I.2.2.2 Matrices

La matrice est une phase continue en générale une résine polymère, qui assure :

- Donne la forme finale au matériau.
- La cohésion transfert et repartit les contraintes.

Protège les renforts aux agressions extérieures.

La classification des types de matrices couramment rencontrés (voir Figure I.5).



**Figure I. 5 :** Les types de matrices.

#### a) Matrices organiques :

Les matrices organiques sont faites de matière plastique, actuellement, ce sont les plus utilisés, on peut subdiviser en matrices thermoplastiques et en matrices thermodurcissables :

- **Résines thermoplastiques**

- Par exemple (Polyamide, polypropylène).
- Possède des propriétés mécaniques faibles.
- Présenter sous forme d'une chaîne linéale.
- Présenter sous forme d'un solide et pour le transformer, il nécessite une très haute température. (Fusible, réversible), Puis les refroidir pour les fixer.

- **Résines thermodurcissables**

- Par exemple (polyesters, époxydes).
- Posséder des propriétés mécaniques élevées, très répandus et peu coûteux.
- La mise en œuvre qu'une seule fois.

- Sous forme d'une solution d'un polymère.
- Économiques.
- L'augmentation de leurs duretés avec l'élévation de la température.
- Infusible, irréversible. (Larbi Chaht, 2014)

#### **b) Matrices minérales**

On distingue deux types de matrice :

- **Matrices métalliques**

- Développer à partir des années soixante.
- Les plus employées sont les métaux légers et alliages.
- Ses applications sont orientées vers l'aéronautique et l'espace.
- Cout très élevé.
- Meilleures propriétés mécaniques.
- Meilleure résistance au feu et à la température.
- Meilleure conductivité électrique et thermique.

- **Matrices céramiques**

- Réserver aux applications de très haute technicité.
- Travaillant à haute température comme le spatial, le nucléaire et le militaire.

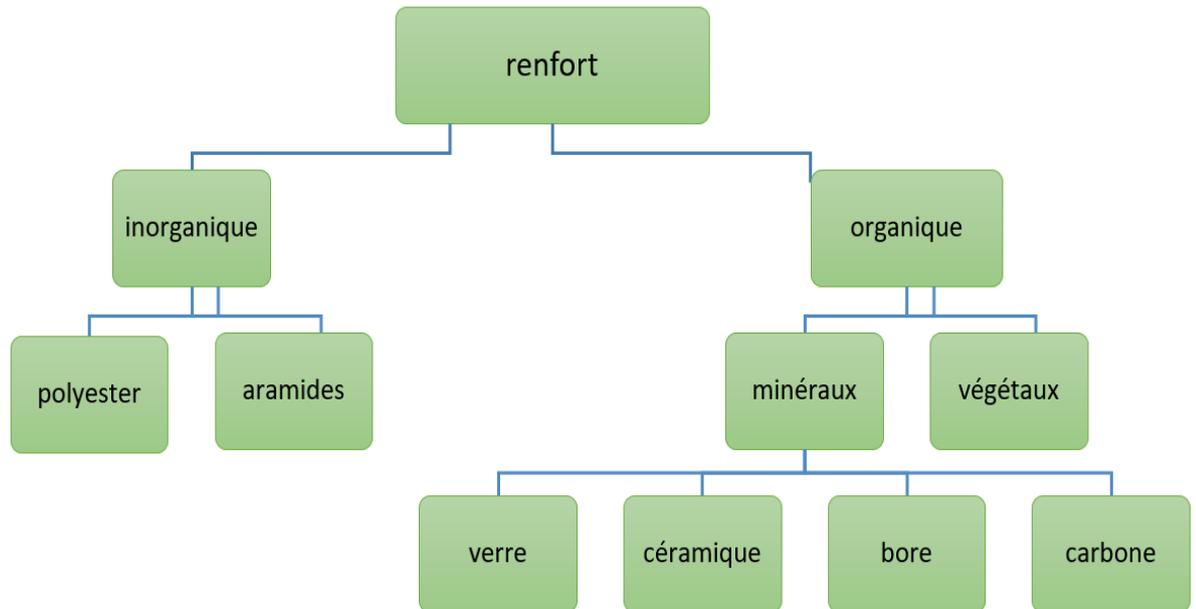
#### **I.2.2.3 Les renforts**

Les fibres sont ajoutées à la matrice dans le but d'inhiber la fissuration, de contrôler le processus de rupture fragile et de fournir une résistance post-fissuration. Les fibres peuvent contribuer à améliorer les performances de composite fibreux de la manière suivante :

- En résistant aux contraintes de traction.
- En contrôlant le développement des fissures et en augmentant par conséquent la durabilité de la matrice.

Les composites artificiels sont souvent renforcés par des fibres, ou par des composants à base de fibres (torons, fibres tordues ensemble ; tissus ; mats, ou nappes). Chacune d'entre elles a une application particulière spécifique à ses propriétés et son cout. (Micelli et al, 2020)

La classification des types de matrices couramment rencontrés (voir Figure I.6).



**Figure I. 6 :** les types de renfort. (Gornet, 2008)

#### a) Fibres de verre

Ce sont les primitifs renforts utilisés pour les matériaux composites de première génération (1940) et les moins chères, on utilise des fibres de silice pure ( $\text{SiO}_2$ ) lorsqu'on fouille des hautes performances, Les fibres de verre sont vastement produites et utilisées pendant la élaboration de composites structurels utilisés pendant les domaines de l'aérospatiale, des bateaux et de l'automobile. Elles ne sont pas généralement utilisées comme l'élaboration de composites à forme métallique ou céramique. Pour ces matériaux, il existe une difficulté technologique, dû à la température élevée de production, qui ne permet pas l'emploi de fibres de verre. Dans le domaine du génie civil, les fibres de verre sont utilisées pour l'élaboration d'objets en fibrociment et pour le renforcement allure des bâtiments existants, sous la forme de polymères renforcés de fibres de verre (voir Figure I.7)(Baïlon et Dorlot, 2000)



**Figure I. 7 :** Fibres de verre. (Micelli et al, 2020)

Les fibres de verre sont réparties en trois qualités, suivant les applications auxquelles elles sont destinées :

- A-glass (alkaliglass) : il a une grande résistance chimique.
- E-glass (Electrical glass) : Il est utile dans l'isolation électrique.
- S-glass (Structural glass) : Il est connu dans les constructions à cause de ses propriétés mécaniques. (Baïlon et Dorlot, 2000)

### b) Fibres de carbone

Ils ont des propriétés essentiellement de rigidité et une résistance très élevée dans la direction longitudinale, avec un faible coefficient de dilatation linéique dans la même direction. Le graphite polycristallin est constitué de cristallites fortement anisotropes.

Le principe de développement est de faire subir à la fibre acrylique une décomposition thermique du sans fusion des fibres entraînant une graphitisation. Le brai, qui est le résidu de raffinage du pétrole ou de la houille, est également utilisé pour fabriquer de la fibre de carbone. (voir Figure I.8)



**Figure I. 8** : fibre de carbone.

### c) Fibres polymères

Ce sont des fibres qui sont connues depuis très longtemps sous leur appellation commerciale (KEVLAR) marque déposée de la compagnie Dupont de Nemours, elles sont utilisées dans les protections balistiques comme la confection de gilets pare-balles., elles sont des fibres synthétiques qui résistent bien à la chaleur et ont de bonnes propriétés mécaniques, Il aussi existe des fibres polymères naturels qui ont une rigidité très élevée (voir Figure I.9).(Baïlon et Dorlot, 2000; Sallai et Tounsi, 2015)



Figure I. 9 : Fibre de Kevlar.

#### d) Renforts minéraux

Certains matériaux minéraux qu'on trouve naturellement sous forme fibreuse ou lamellaire, souvent servir de renfort, dans les cas des matériaux composites bon marché, il s'agit particulièrement de l'amiante et du mica.

#### e) Fibres métalliques

Ce sont des fibres en acier, en cuivre, en aluminium. Ces fibres utilisées avec des matrices métalliques pour leurs bonnes conductibilités thermique et électrique et leurs caractéristiques thermomécaniques élevées.

#### f) Fibres céramiques

Certains métaux (bore, béryllium) sont dotés de rigidité spécifique très élevées, ce sont donc d'excellents renforts possibles pour les matériaux composites. Les fibres métalliques ou céramiques sont les plus chères de toutes, en raison de leur difficulté de fabrication.

### I.2.3 Comparaison des propriétés mécanique de différentes fibres de renfort

Il est important de comparer les caractéristiques mécaniques des trois familles de fibres de renfort (voir Figure I.10). Leur résistance à la rupture en traction se vari relativement entre 3000 et 5000 MPa. Les valeurs du module de Young de ces fibres sont très différentes. Elles varient dans une proportion de 1 à 7 entre la fibre de verre et la fibre de carbone haut module. Cette caractéristique a une conséquence directe sur l'élongation à la rupture des fibres.

Celle-ci est nettement la plus faible pour les fibres à plus haut module comme les fibres de carbone. (Mercier et al, 1999)

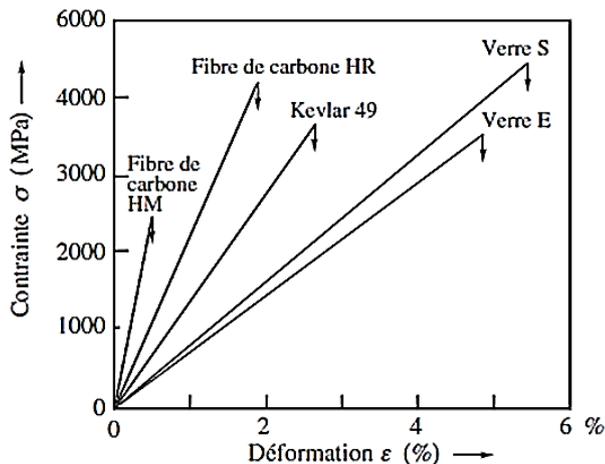


Figure I. 10 : courbe de traction de différentes fibres de renfort. (Mercier et al,1999)

**I.2.4 L'influence de l'orientation des fibres sur le comportement mécanique**

La microstructure des composites est anisotrope du fait de la disposition de leurs constituants donc leurs propriétés mécaniques dépendent de l'orientation du renfort par rapport à la direction des contraintes principales (voir Figure I.11).

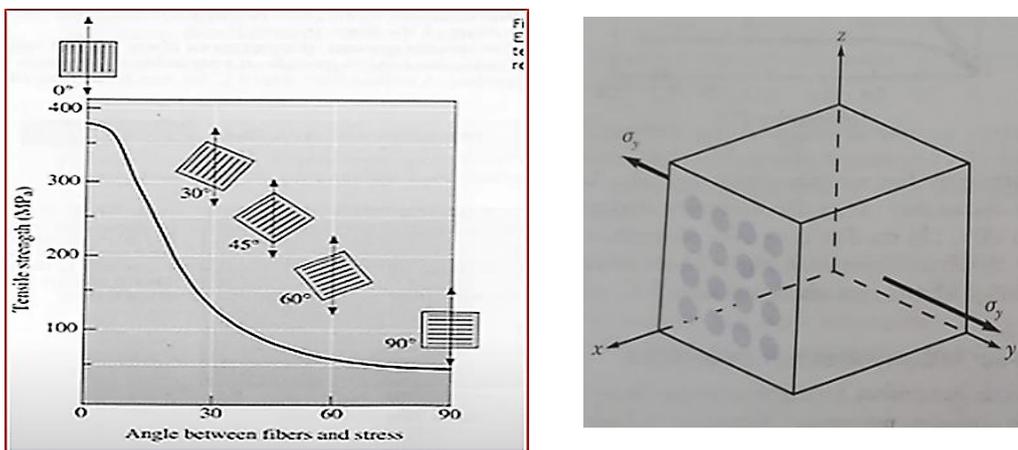


Figure I. 11 :L'influence de l'orientation des fibres sur le comportement mécanique.

**I.2.5 La classification de matériaux composites suivant la nature des constituants**

**I.2.5.1 Selon la nature de la matrice**

On classe généralement les matériaux composites en trois familles :

- a) CMP : Les composites à matrice polymère (résine).
- b) CMM : Les composites à matrice métallique (alliages légers).
- c) CMC : Les composites à matrice minérale (céramique).

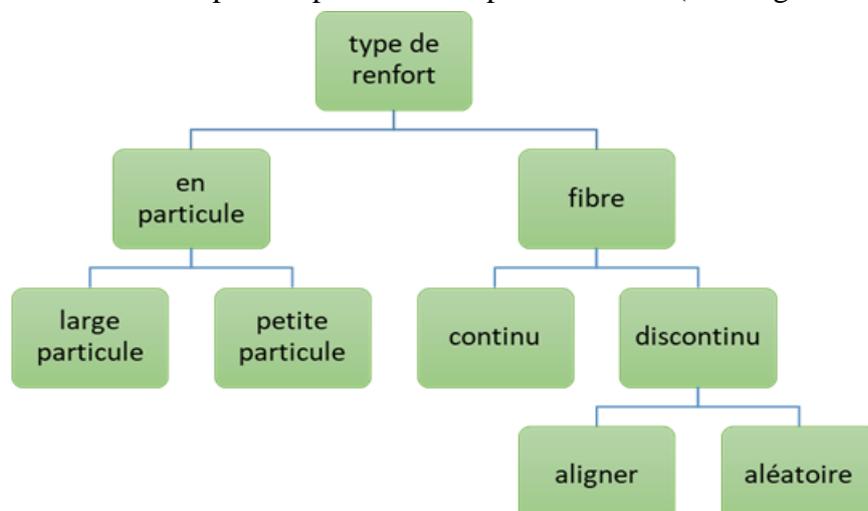
Les composites à matrice polymère (CMP), ce sont les premiers composites qui sont touchés pour raison des efforts visant à améliorer la faible rigidité des matériaux plastiques, il une particularité qu'ils n'ont pas de réaction chimique entre la matrice et le renfort. Mais au cours de ces dernières années, et afin d'augmenter la rigidité de la matrice, il a apparu des composites à matrice métallique(CMM), et contrairement avec la première classe, la matrice et le renfort peuvent réagir chimiquement, alors il faut s'assurer que cette action ne conduise pas à la formation de composés fragile à l'interface, cela peut causer des problèmes de dégradation des propriétés mécanique du composite. et enfin le développement a reconnu une autre classe ce sont des composites à matrice céramique (CMC), souhaitant une augmentation de la ténacité de la matrice céramique.

Dans CMP et CMM, la matrice est plus ductile que le renfort, mais la résistance et la rigidité sont inférieures, cela résulte un milieu de transfert des efforts des fibres, plus rigides et plus résistantes.

Par contre, l'addition d'un renfort dans une matrice céramique(CMM) a comme objectif d'améliorer la ténacité très faible de la matrice sans viser à accroître sa rigidité déjà intrinsèquement élevée. (Baïlon et Dorlot, 2000)

### I.2.5.2 Selon la nature du renfort

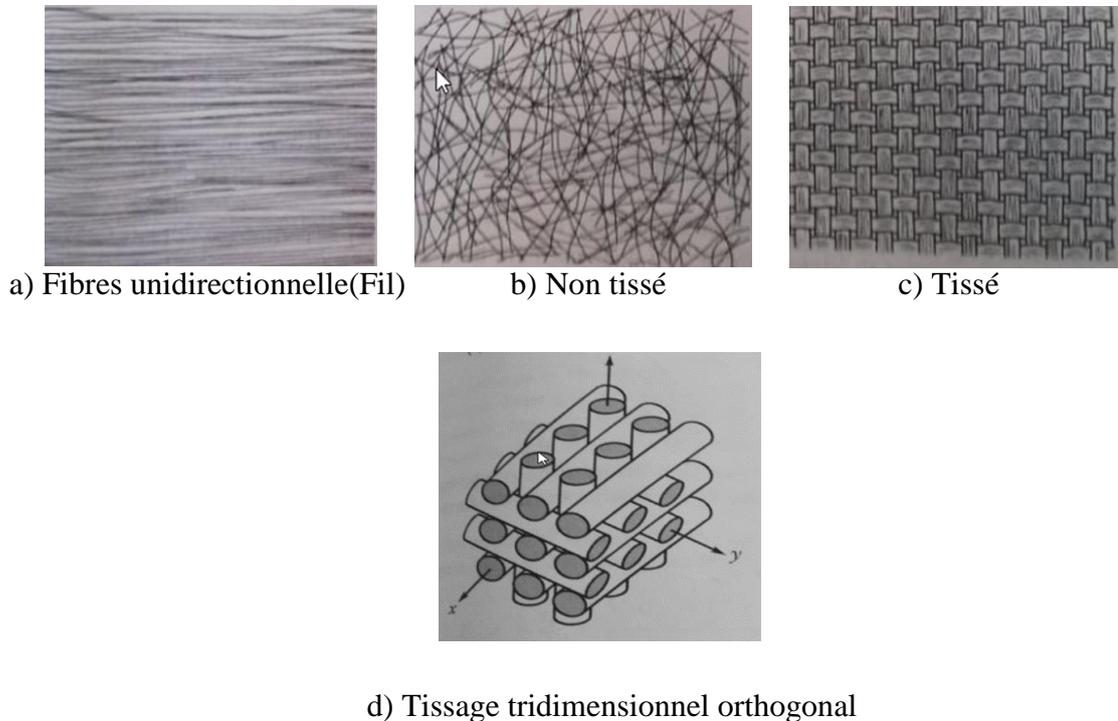
Les matériaux composites peuvent être classés en fonction du matériau de renforcement utilisé comme étant renforcé par des particules ou par des fibres (voir Figure I.12).



**Figure I. 12** : Classification des matériaux composites selon la nature du renfort.

### I.2.6 Disposition des fibres

Les fibres peuvent prendre des différentes dispositions dans la matrice, quelques exemples sont donnés (voir Figure I.13).



**Figure I. 13** : Disposition des fibres. (Baïlon et Dorlot, 2000)

### I.2.7 Avantages et inconvénients des matériaux composites :

#### I.2.7.1 Avantages

- Résistance élevés combinés à une faible densité.
- Une grande Résistance à la fatigue.
- Résistance à la corrosion.
- Une préfabrication de hautes gammes en usines.
- Finition des surfaces sur mesure.
- Possibilité d'intégration des fonctions.

#### I.2.7.2 Inconvénients

- Faible rigidité.
- Cout très élevé.
- Comme tous les matériaux nouveaux, une absence totale de la normalisation et de certification et d'assurance.

- Manque de ductilité.
- Une petite faille peut engendrer des grosses déformations.

**I.2.8 Les différentes structures d'un composite**

Les matériaux composites sont sous forme de trois structures différentes (voir Figure I.14).

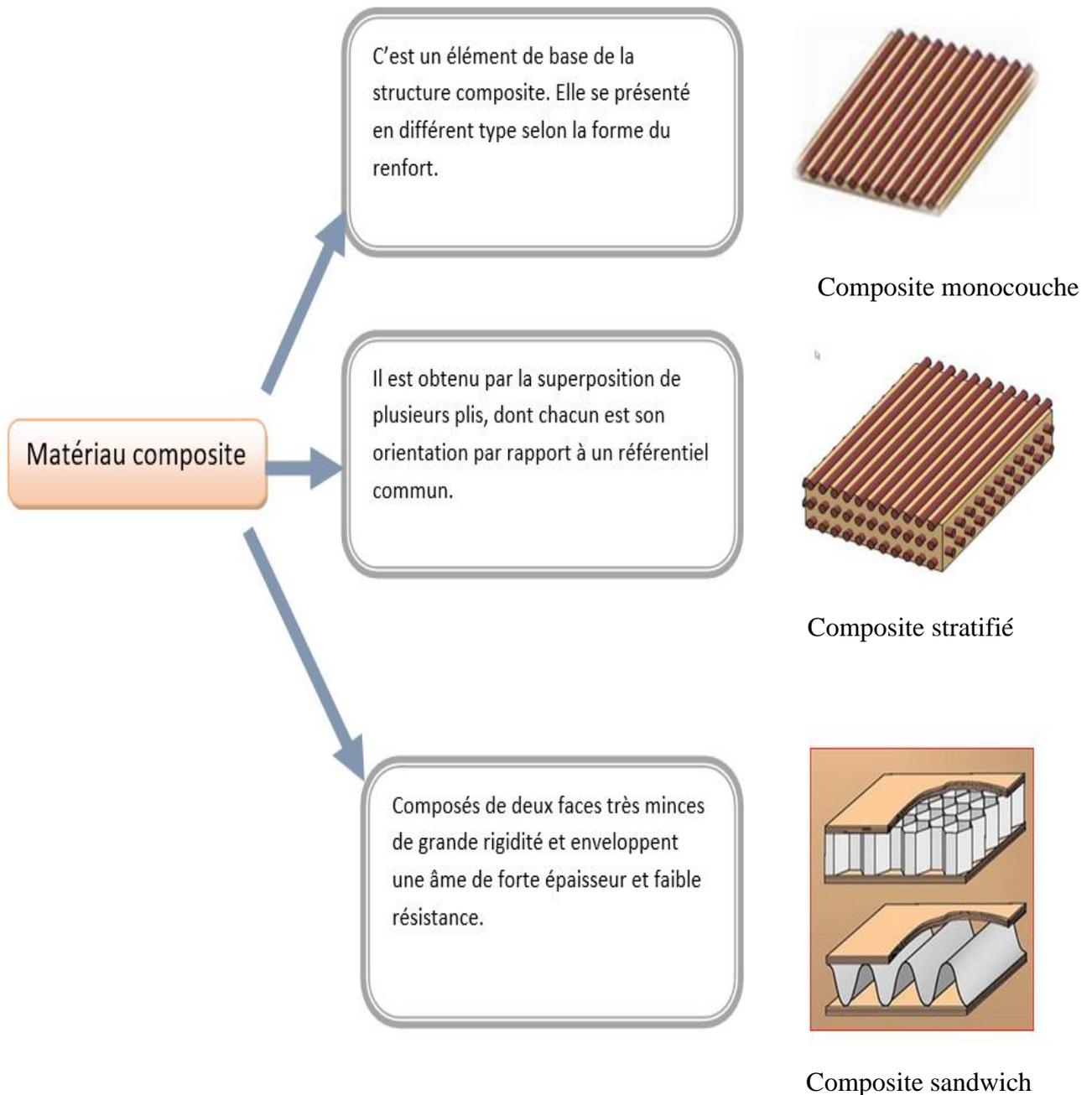


Figure I. 14 : Différentes structures d'un composite.

### I.3 Matériaux fonctionnellement gradués

Les stratifiés chargés présentent différents stades de dégradation, cela peut causer des micro-défauts qui s'agrègent pour former des fissures transversales. Peut atteindre l'interface des couches et provoquer un délaminage sous l'effet des contraintes inter-laminaires, Cette transition brutale de compositions peut produire localement des fortes concentrations des contraintes. La solution de la transition continue des propriétés par l'utilisation des Matériaux fonctionnellement gradués (F.G.M.), qui s'avère suite à des transformations comme indique la figure (I.15).

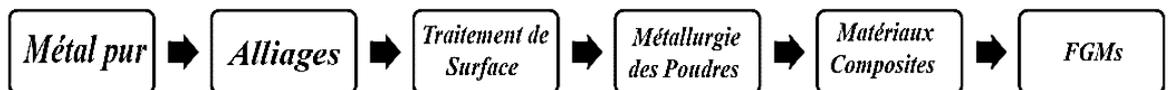


Figure I. 15 : Développement d'un matériau.

#### I.3.1 Définition

Les matériaux fonctionnellement gradués, appelés aussi (F.G.M.) par référence à leur nomination anglaise (Functional Graded Materials), représentent des matériaux composites plus développés que les composites classiques, ayant une variation graduelle et continue des fractions volumiques de chaque constituant, générant des changements en conséquence des propriétés des matériaux, Contrairement aux composites stratifiés à matrice-fibres, les (F.G.M.)s n'ont pas de problèmes de décollement ou de délaminage qui résultent de la grande concentration des contraintes inter-lamellaires. Ils peuvent donc allier entre les propriétés des deux constituants totalement différents sans changer leur nature.

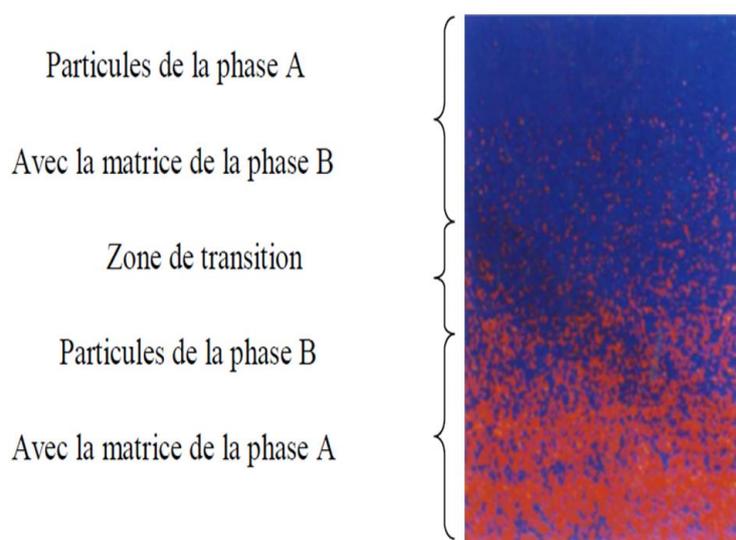
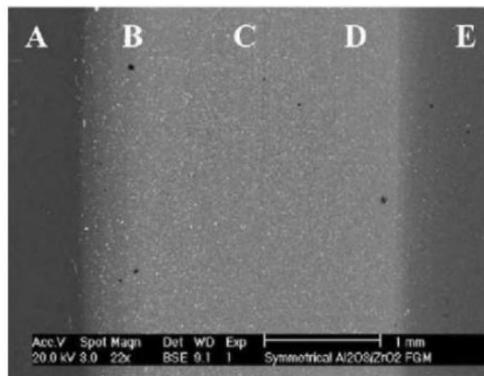


Figure I. 16 : Fraction volumique des phases constitutives graduées dans un seul sens d'un (F.G.M.).

Les (F.G.M.) sont non homogènes à l'échelle microscopique. Habituellement en céramique et métal. C'est dû au fait que les constituants en céramique de (F.G.M.) peuvent résister aux hautes températures que le produit final possède de meilleures caractéristiques de résistance thermique, tandis que les constituants métalliques fournissent une résistance mécanique plus forte et réduisent la possibilité de rupture catastrophique.

Donc Cette solution permet une transition continue des propriétés recherchées, par un gradient de composition. Les (F.G.M.) sont conçus de manière à ce que les propriétés des matériaux varient de façon régulière et continue dans l'épaisseur, de la surface d'une céramique exposée à une température élevée à celle d'un métal sur l'autre surface. La composition du matériau change progressivement dans le sens de l'épaisseur direction (voir la Figure I.17).



**Figure I. 17** : Une vue microscopique d'un (F.G.M.). (Hashmi, 2014)

### I.3.2 Histoire de développement des matériaux fonctionnellement gradués

Le concept de "Matériaux fonctionnellement Gradués" a été développé pour la première fois dans le laboratoire national d'aérospatial du Japon en 1984 par Mr. Niino et ses collègues à Sendai. Pour les barrières thermiques ou propriétés de blindage de chaleur. (Koizumi, 1997)

En 1985 un grand nombre de chercheurs des institutions publique et de l'industrie ont uni leurs efforts pour créer nouveau type de matériau. Le principal objectif était de construire l'enveloppe extérieure d'une navette intercontinentale commerciale. Le problème principal à résoudre était le flux de la chaleur important frappent la majorité des surfaces qui sont exposée à la friction par l'air lors de la période de rentrée d'une navette spatiale dans l'atmosphère terrestre et en même temps protéger l'intérieure contre les surchauffes.

Dans Le cadre de développer ce type de matériaux un projet national a été lancé par le gouvernement Japonais en 1987, intitulé "Recherche sur la technologie de base pour le développement de matériaux à gradient fonctionnel pour la relaxation des contraintes thermiques», L'intérêt du projet est de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme

barrière thermique dans les programmes aérospatiaux. Des scientifiques de 17 instituts de recherche gouvernementaux, d'universités et d'entreprises ont participé à ce projet. Les matériaux constituant les parois des engins spatiaux sont appelés à travailler à des températures de surface de 2100K. Par contre aucun matériau industriel à cette époque ne peut résister à une telle charge thermomécanique (1600 K). (Koizumi, 1997)

Trois caractéristiques sont à considérer pour la conception de tels matériaux :

- Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la couche superficielle du matériau.
- Ténacité du matériau coté basse température.
- Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau.

L'idée originale des (F.G.M.) a été proposée pour préparer un nouveau composite profitant à la fois des propriétés des céramiques (coté haute température) et des métaux (coté basse température, avec une variation graduelle de la composition de la céramique au métal. A la fin de la première étape (1987 - 1989), les chercheurs japonais avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales de 1 à 10 mm d'épaisseur et de 30 mm de diamètre, pouvant résister à des températures maximales de 1727 C° (température de surface) et à un gradient de température de 727 C°.(Abdizadeh, 1997).

Le "Functionally Gradient Materials Forum" a été créé en février 1988, afin de diffuser les activités des projets nationaux auprès du public et de mener une enquête sur les applications possibles des MGF dans la création d'autres matériaux structurels et fonctionnels. Le forum a continué à organiser des symposiums et des ateliers, et à publier des bulletins.

Les premières conférences ont été données au Japon, puis ça a été suivi un peu partout dans le monde, ce nouveau concept était si intéressant, que les résultats des travaux de recherches ont été présentés dans les 50 des 70 communications données au "Premier Symposium international sur les (F.G.M.) " organisé à Sendai, en octobre 1990 (Ilschner, 1993) .

Dans la seconde étape (1990 -1991), le but était de réaliser des pièces de tailles plus grandes et de forme plus complexes par rapport à celles réalisées à la première étape.

Suivi par un 2<sup>ème</sup> symposium international à San Francisco, en 1992.

En 1993, un nouveau projet national intitulé "Research on Energy Conversion Materials with Functionally Gradient Structure", communément appelé "(F.G.M.) Part II", a été lancé. Il convient de noter aussi que, même dans le colloque "EUROMAT 93" sur les matériaux avancés et leurs

procédés, organisé à Paris en juin 1993, certaines contributions se sont expressément portées sur les matériaux fonctionnellement gradués. (Koizumi, 1997).

Puis en 1994, "le troisième Symposium International sur les (F.G.M.)s " a été organisé à Lausanne (Suisse). Le 4<sup>ème</sup> a eu lieu à Tsukuba Science City au nord de Tokyo en 1996.

Dans la même année, le Japon a lancé son deuxième programme national de recherches En 1995, l'association allemande de recherche DFG a lancé un programme de recherche. En 1996 projets de recherche physico- chimique sur les (F.G.M.) été en cours au Japon. Ainsi en 1997, une centaine de laboratoires partout dans le monde ont travaillé sur les Matériaux fonctionnellement gradués (EL-hassar, 2016).

### **I.3.3 L'intérêt d'utilisation de (F.G.M.)**

Il y a beaucoup d'intérêt pour la mise sur pied des structures ainsi les conditions fonctionnelles peuvent varier avec l'endroit.

Dans la plupart des cas, ceci impliquera de varier les matériaux qui sont employés aux endroits spécifiques dans la structure ayant pour résultat les interfaces discrètes dans tout a nombre de proposé des technologies manufacturières pour le traitement de (F.G.M.).

Récemment, les concepts de (F.G.M.) sont devenus d'intérêt scientifique pour améliorer l'exécution des systèmes géométriquement complexes des structures. (Meradjah, 2011)

### **I.3.4 Quelques applications pratiques typiques des (F.G.M.)s**

Les (F.G.M.)s sont largement utilisés dans :

- Projets nucléaires : Les pastilles de combustible et les parois de plasma des réacteurs à fusion.
- Aérospatiale et aéronautique : Avions furtifs, composants de fusées, châssis d'avions spatiaux et véhicules spatiaux.
- La défense : Plaques de blindage et gilets pare-balles.
- Fabrication : Machines-outils, outils de formage et outils de coupe, procédés de moulage et de forgeage des métaux.
- Secteur de l'énergie : Générateurs thermoélectriques, cellules solaires et capteurs.
- Génie civil : Matériaux de construction, éléments structurels et vitres.

### **I.3.5 Utilisation prévisionnelle des matériaux (F.G.M.) dans le domaine du génie civil**

#### **I.3.5.1 Les chaussées rigides**

Elles sont présentes dans les autoroutes, les routes, les aérodromes, les dallages industriels ... dont le trafic est très fort, en générale lorsqu' elle est soumises à des contraintes très élevées, afin de lui offrir une bonne résistance et une durabilité bien élevé. Le principe d'utilisation les (F.G.M.) dans les chaussées rigides donne une gradation des propriétés par la variation de la fraction volumique de leurs constituants.

#### **I.3.5.2 Les chaussées souples**

Les chaussées souples sont constituées en plusieurs couches, cela peut introduire un glissement entre la couche du gravier bitumeux et la couche de roulement en béton bitumineux, par conséquent l'utilisation des (F.G.M.) élimine cette couche d'accrochage, optimise son comportement, augmente la capacité portante de la chaussée pour qu'elle devienne durable.

#### **I.3.5.3 Les grands vitrages dans les zones chaudes**

L'utilisation des (F.G.M.) dans les grands vitrages qui sont exposés à des températures élevés a pour but d'éviter les vitrages multiples.

#### **I.3.5.4 Les tunnels**

Les matériaux qui doivent être utilisé pour construire les parois des tunnels exigent une gradation des propriétés particulières tout en long de leur épaisseur, car au niveau de la face extérieure de la paroi, le matériau doit être rigide et réfractaire, par ailleurs ce dernier doit être imperméable dans la seconde face. Pour atteindre ces conditions, les (F.G.M.)<sub>s</sub> sont la solution la plus efficace. (SAID, 2015)

### **I.3.6 Mise en œuvre des (F.G.M.)**

Parmi les principes de différents processus de mise en œuvre, La plupart des méthodes de mise en œuvre consistent à élaborer les pièces en matériaux composites par couches successives comportant matrice et renfort. Cette technique générale appelée stratification, conduisant à l'élaboration de stratifiés, citant les brièvement ci-après :

### I.3.6.1 Moulages sans pression

Ce sont les méthodes les plus simples à mettre en œuvre, car elle nécessite un équipement minimal, elle consiste à réalisation de pièces en petites et moyennes séries, sans restriction de formes et dimensions.

#### a) Moulage au contact

Avant moulage, le moule est revêtu d'un agent de démoulage, puis généralement d'une fine couche de résine de surface, souvent colorée, dénommée "gel coat" (voir Figure I.18).

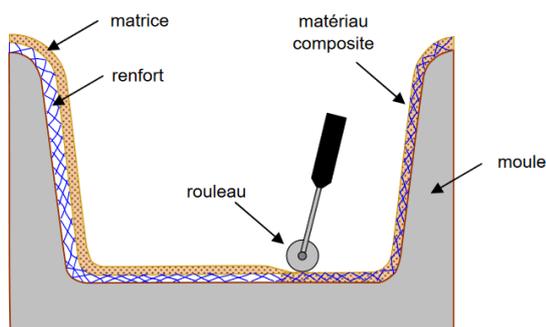


Figure I. 18 : Principe de moulage au contact. (Berthelot, 2010)

#### b) Moulage par projection simultanée

L'équipement à projeter est composé d'une machine à couper le stratifil et d'un pistolet projetant la résine et les fibres coupées, Le moulage se fait par projection simultanée de fibres coupées et résine catalysée sur un moule. L'ensemble fonctionnant par air comprimé. La couche de fibres imprégnées de résine est ensuite compactée et débarrassée des bulles au rouleau cannelé (voir Figure I.19).

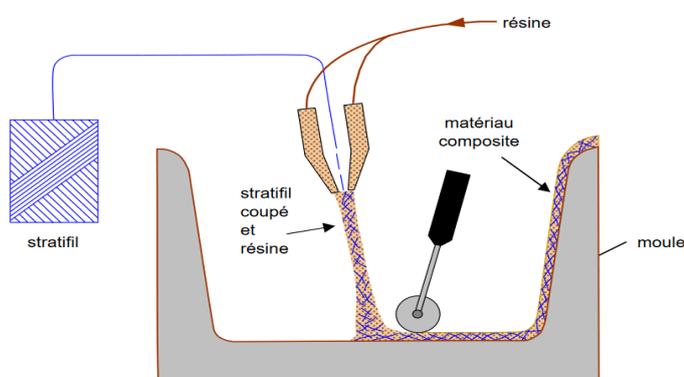


Figure I. 19 : Principe de moulage par projection simultanée. (Berthelot, 2010)

### I.3.6.2 Moulage sous vide

Le moulage sous vide consiste à utiliser simultanément le vide et la pression atmosphérique. Après enduction de gel-coat, on dispose le renfort sur un moule rigide, puis on coule la matrice. Le contre-moule, recouvert d'une membrane assurant l'étanchéité (feuille de caoutchouc, nylon, etc.), est ensuite emboîté. Une pompe à vide crée une dépression à travers le moule et le contre-moule poreux, qui étale et débulle la résine. Le contre-moule peut éventuellement être limité à la seule membrane d'étanchéité. Ce procédé de moulage convient pour la fabrication de pièces en petites et moyennes séries. Il permet d'obtenir de bonnes qualités mécaniques, grâce à une proportion de résine uniforme et à une diminution des inclusions d'air (voir Figure I.20).

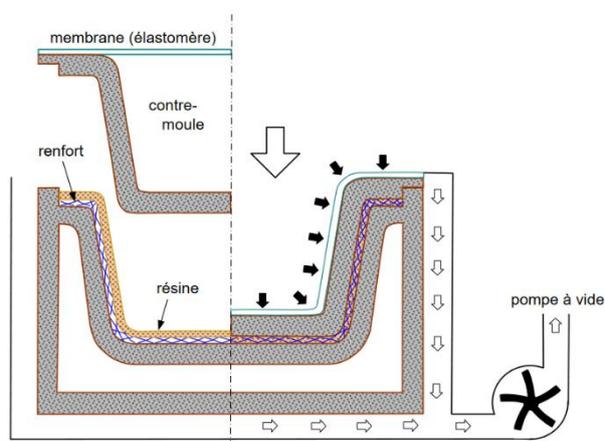
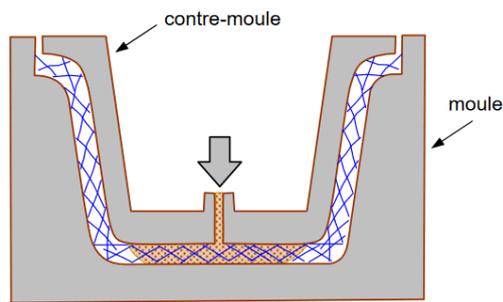


Figure I. 20 : Moulage sous vide.(Berthelot, 2010)

### I.3.6.3 Moulage par compression

#### a) Moulage par injection de résine

- Ce processus se fait par injection de résine sous pression à imprégner un renfort placé à l'intérieur d'un ensemble moule et contre-moule très rigide et fermé.
- L'alimentation automatique des résines élimine leur manipulation.
- La proportion de renfort peut être élevée, d'où l'obtention de pièces à caractéristiques mécaniques élevées.
- Ce procédé de moulage convient à la réalisation de pièces profondes et de formes compliquées (voir Figure I.21).



**Figure I. 21** : Moulage par injection de résine. (Berthelot, 2010)

### **b) Moulage par compression à froid**

- Moule et contre-moule sont enduits d'agent de démoulage et de gel-coat.
- Déposition renfort et la matrice sur le moule.
- L'ensemble moule/contre-moule est fermé puis pressé.
- Le temps de polymérisation est lié au type de résine, au catalyseur et à la température atteinte par le moule en régime continu de production.

Ce procédé de moulage est adapté à la fabrication de pièces de moyennes séries (4 à 12 pièces par heure (voir Figure I.22 à froid).

### **c) Moulage par compression à chaud**

Par ce procédé On obtient des pièces en grandes séries au moyen de presses hydrauliques et de moules métalliques chauffants (voir Figure I.22 à chaud).

- Le renfort est déposé sur le moule chauffant, enduit au préalable d'un agent de démoulage.
- Coulage la résine catalysée en vrac sur le renfort.
- Le moule est fermé suivant un cycle déterminé par descente et pressage du contre moule.

Le temps de pressage est lié au temps de polymérisation de la résine.

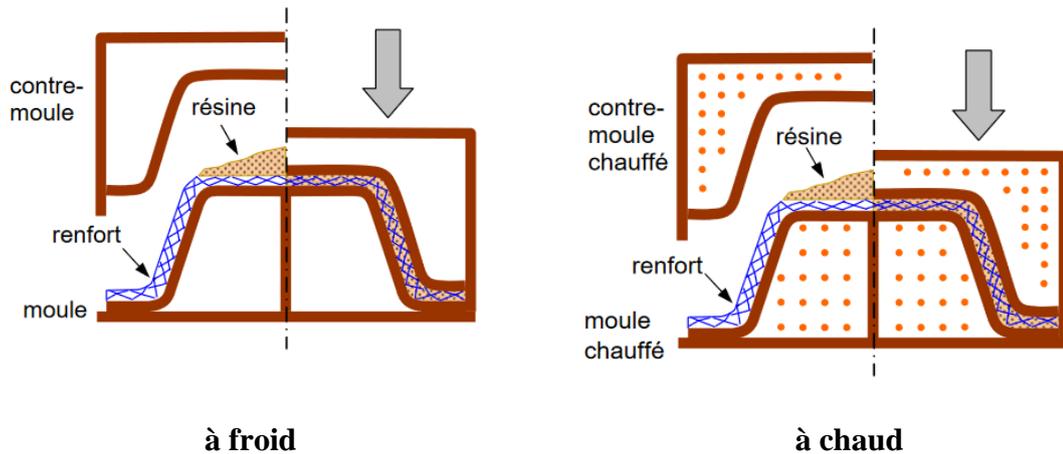


Figure I. 22 : Moulage par compression. (Berthelot, 2010)

#### d) Moulage par injection

Le moulage par injection est réalisé sur les presses conventionnelles utilisées pour l'injection des résines thermoplastiques.

Cette technique est la plus efficace des méthodes de mise en œuvre des thermoplastiques armés. Le type de matériaux obtenus est plus généralement appelé "plastiques renforcés" que matériaux composites (voir Figure I.23).

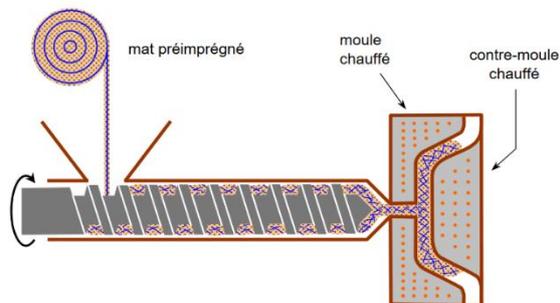


Figure I. 23 : Moulage par injection. (Berthelot, 2010)

#### I.3.6.4 Moulage en continu

Le moulage en continu permet la fabrication de (plaques planes, panneaux, sandwichs de panneaux ondulés pour toitures, plaques nervurées, etc) (voir Figure I. (24, 25)).

Schématiquement, ce procédé peut être séparé en plusieurs phases :

- Une phase d'imprégnation des renforts : fibres, mats ou tissus. La résine catalysée et le renfort sont véhiculés sur un film de démoulage.

- Une phase de mise en forme.
- Une phase de polymérisation, effectuée dans une étuve (60 à 150 °C) en forme de tunnel, dont la longueur est fonction de la température et de la résine (15 à 50 m de long).
- Une phase de refroidissement et découpage.

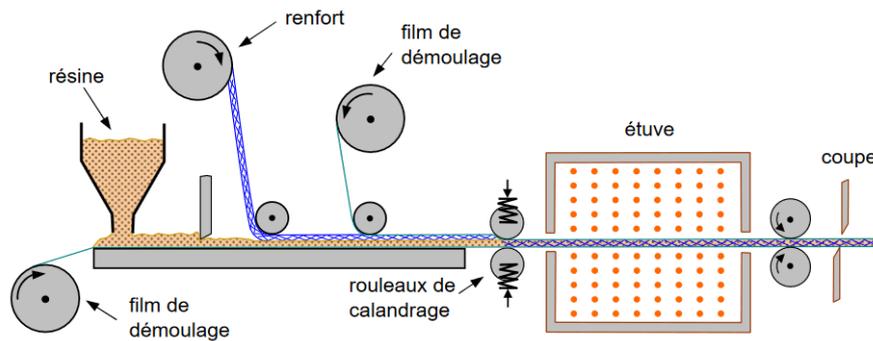


Figure I. 24 : Moulage en contenu de plaque. (Berthelot, 2010)

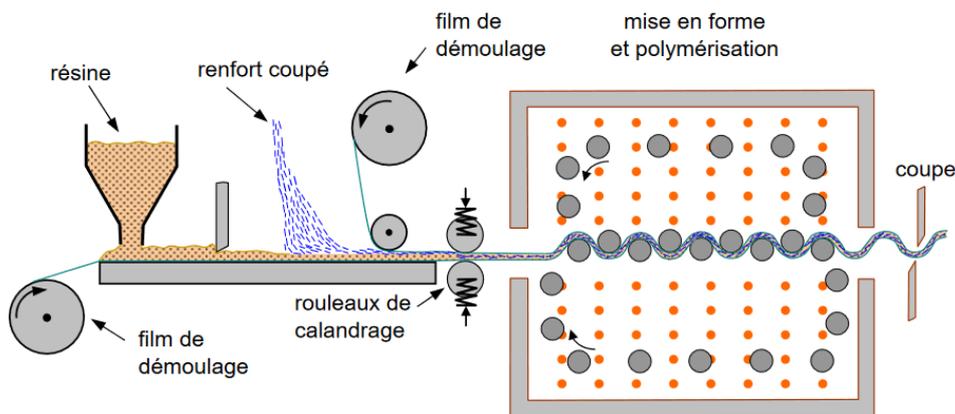


Figure I. 25 : Moulage en contenu de panneaux ondulés. (Berthelot, 2010)

### I.3.6.5 Moulage par pultrusion

Cette méthode c'est pour but de fabriquer de profilés, rectilignes ou courbes, à section constante, hautement renforcés dans la direction principale (voir Figure I.26).

- Les renforts passent dans un bain de résine catalysée où ils sont imprégnés.
- Ils traversent ensuite une filière chauffée dans laquelle ont lieu simultanément mise en forme du profilé et polymérisation de la résine.

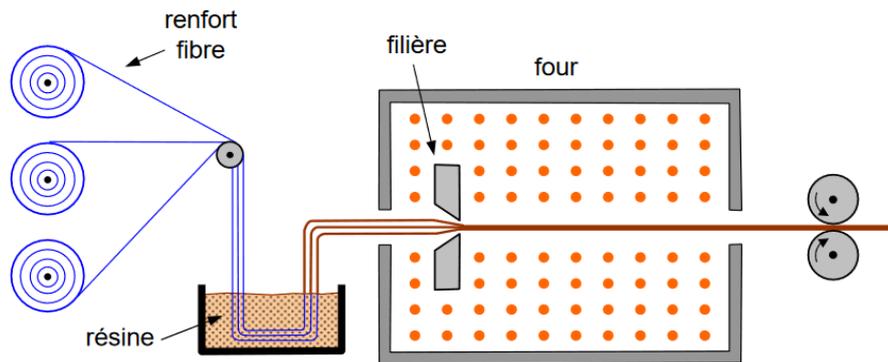


Figure I. 26 : Moulage en contenu de panneaux ondulés. (Berthelot, 2010)

### I.3.6.6 Moulage par centrifugation

Cette méthode sert à fabriquer des pièces de révolution, en particulier tubes, tuyaux, cuves, etc. (voir Figure I.27).

- L'imprégnation du renfort par la résine est réalisée sous l'effet de la centrifugation.
- La stratification s'effectue par passages successifs de la buse d'alimentation en résine et renfort.
- La polymérisation est effectuée à température ambiante, ou éventuellement accélérée dans une étuve.

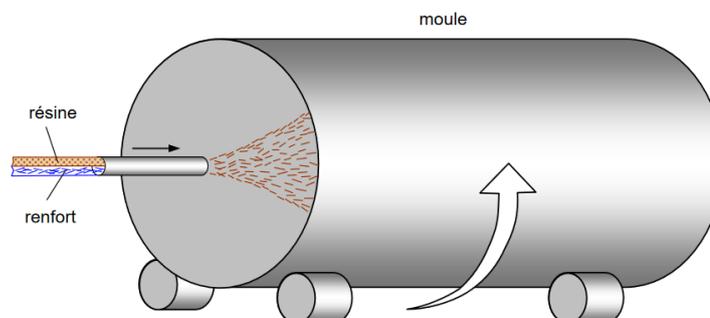


Figure I. 27 : Moulage par centrifugation. (Berthelot, 2010)

### I.3.6.7 Moulage par enroulement filamentaire

Le principe de cette méthode c'est d'enrouler le renfort qui est imprégné de résine catalysée avec une légère tension, sur un mandrin cylindrique ou de révolution en rotation. Les stratifiés obtenus peuvent comporter des proportions élevées de renfort (jusqu'à 80 % en volume), permettant donc d'obtenir de hautes caractéristiques mécaniques. L'investissement en matériel est très important.

Cette méthode a plusieurs techniques par exemple Enroulement circonférentiel

### a) Enroulement circonférentiel

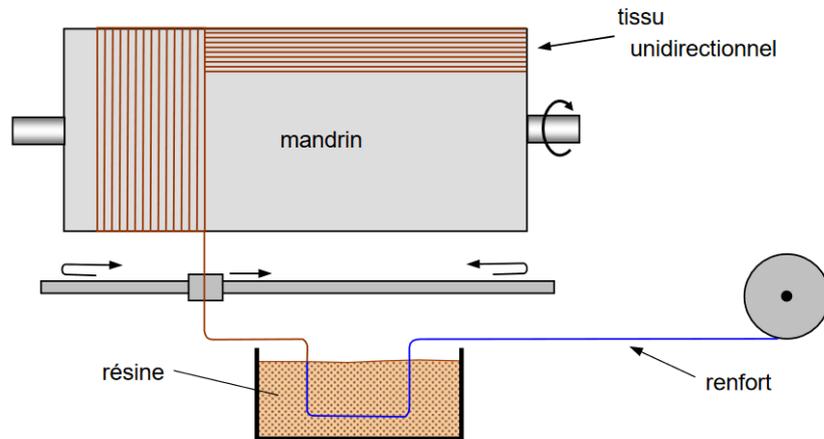


Figure I. 28 : Enroulement circonférentiel. (Berthelot, 2010)

Le bobinage est effectué à  $90^\circ$  par rapport à l'axe du mandrin et confère une résistance tangentielle élevée. Pour obtenir une résistance longitudinale satisfaisante, il est nécessaire d'intercaler des couches de tissus unidirectionnels dans le sens axial du mandrin (voir Figure I.28).

### I.3.7 Propriétés matérielles effectives d'un matériau (F.G.M.)

Les Matériaux fonctionnellement gradués sont généralement fabriqués par deux phases matérielles avec des propriétés différentes. Une description détaillée des microstructures graduée réelles n'est pas disponible, excepté peut-être pour l'information sur la distribution de fraction volumique. Puisque la fraction de volume de chaque phase varie graduellement dans la direction de la graduation, les propriétés effectives des (F.G.M.) changent le long de cette direction.

Par conséquent, nous avons deux approches possibles pour modéliser un (F.G.M.).

- La première approche : une variation par tranche de fraction volumique de la céramique ou du métal est assumée, et le (F.G.M.) est pris pour être posé avec la même fraction de volume dans chaque région, c.-à-d couches quasi homogènes de céramique-métal (voir Figure. I 29a).
- La deuxième approche : une variation continue de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumée (voir Figure I.29b), et la fraction de volume en métal peut être représentée suivant une fonction dépendante de la coordonnée  $z$  (épaisseur).

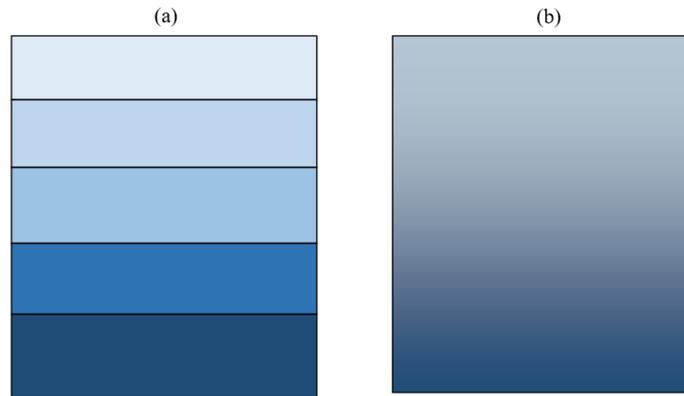


Figure I. 29 : Gradation globale :(a) structure discontinue ;(b) structure continue. (Safa, 2020)

Les Matériaux fonctionnellement gradués sont donc des matériaux composites présentant des caractéristiques macroscopiquement non homogènes, puisqu'ils sont constitués de deux ou plusieurs composantes tels que la céramique et le métal, cet aspect des changements continus de leur microstructure distinguent le (F.G.M.) des matériaux composites conventionnel.

Les différences dans la microstructure et les propriétés entre (F.G.M.) et matériaux composites conventionnels sont illustrées schématiquement (voir Figure I.30).

<b>Propriétés</b>	<p>1 Résistance mécanique 2 Conductivité thermique</p>		
<b>Structure</b>	<p><b>Eléments constitutifs:</b></p> <p>Céramique ○ Métal ● Microporosité ◊ Fibre ◆</p>		
<b>Matériaux</b>	<b>Exemple</b>	<b>FGM</b>	<b>NON-FGM</b>

Figure I. 30 : Caractéristique des matériaux composites en (F.G.M.) en comparaison avec les matériaux composites conventionnels. (Koizumi, 1997)

### I.3.8 Propriétés physiques et mécaniques des (F.G.M.)s

La plupart des (F.G.M.)s sont constitués de céramique et du métal dont les propriétés mécaniques sont comparées (consulter le tableau avec sa légende Tab (I.1)).

Tableau I. 1 : La différence entre les propriétés du métal et de la céramique

Matériau	Position	Propriétés
<b>Céramique</b>	Coté à haute température	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Faible réactivité chimique, bonne tenue aux corrosions.</li> <li>✓ Haute température de fusion ou de décomposition.</li> <li>✓ Haute dureté.</li> <li>✓ Haut module d'élasticité.</li> <li>✓ Charge à la rupture élevée.</li> <li>✓ Coefficient de frottement bas et bonne résistance à l'usure et l'oxydation.</li> <li>✓ Fragiles, très vulnérables aux défauts de petite taille et de caractéristiques dispersées.</li> </ul>
<b>Céramique /Métal</b>	Couches intermédiaires	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Réduit les contraintes résiduelles.</li> <li>✓ Pas de problème d'interface.</li> </ul>
<b>Métal</b>	Coté à basse température	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Bonne résistance mécanique.</li> <li>✓ Conductivité thermique élevée.</li> <li>✓ Très bonne ténacité.</li> <li>✓ Bonne résistance à l'usure et l'oxydation.</li> </ul>

### I.3.9 Lois de mélanges

Les propriétés globales du composite sont pour la plupart une moyenne des propriétés de ses composants, pondérée par la fraction volumique de chacun d'eux.

Un des facteurs les plus importants qui déterminent les caractéristiques mécaniques d'un matériau composite est la proportion relative de matrice et de renfort.

Cette proportion peut être exprimée par fraction volumique (ou fraction en volume).

La fraction volumique de deux matériaux ou plus varie de manière continue en fonction de la position le long de certaines dimensions de la structure afin de remplir la fonction requise pour une application particulière.

Une des propriétés des matériaux fonctionnellement gradués est déterminée par le paramètre ( $p$ ), ce dernier varie le long d'une direction en fonction des fractions volumiques et des propriétés des matériaux qui le composent.

$$P = \sum_{i=0}^n P_i V_i \tag{I. 1}$$

Avec  $P_i$  et  $V_i$  sont respectivement la propriété mécanique et la fraction volumique du constituant  $i$ , avec :

$$\sum_{i=0}^n V_i = 1 \tag{I. 2}$$

Dans les poutres (F.G.M.), la loi de Voigt s'écrit comme suit :

$$P(z) = P_1 V_1 + P_2 V_2 \tag{I. 3}$$

$$V_1 + V_2 = 1 \tag{I. 4}$$

$P$  : Propriété selon l'axe  $z$  ;

$P_1 = P_m$  : Propriété mécanique du métal ;

$P_2 = P_c$  : Propriété mécanique de la céramique ;

$V_1 = V_m$  : Fraction volumique du métal ;

$V_2 = V_c$  : Fraction volumique de la céramique.

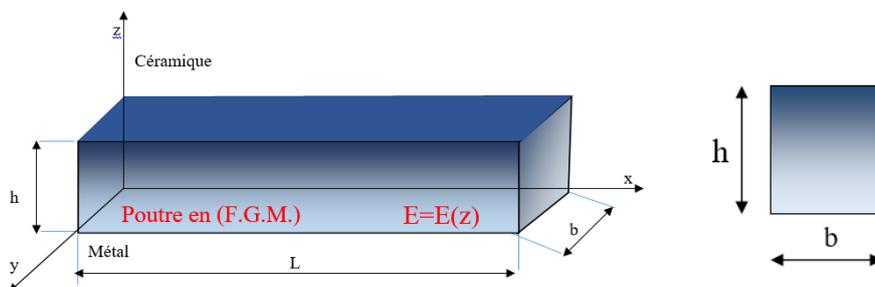


Figure I. 31 : La géométrie de la poutre en (F.G.M.).

Les coordonnées  $x$  et  $y$  définissent le plan de la poutre, tandis que l'axe  $z$  perpendiculaire à la surface moyenne de la poutre et dans la direction de l'épaisseur, et  $L$  est sa longueur suivant l'axe  $x$  (voir Figure I.31).

Cependant, le module de Young, la densité et le coefficient de Poisson des poutres changent sans interruption seulement dans la direction d'épaisseur (l'axe  $z$ ),  $E = E(z)$ ,  $\nu = \nu(z)$ .

Alors, le module de Young change suivant la direction de l'épaisseur de la poutre (F.G.M.), la plupart des chercheurs emploient trois fonctions pour décrire la variation de la fraction volumique et qui sont :

- La Loi de Puissance ( $P-FGM$ ).
- La Fonction Exponentielle ( $E-FGM$ ).
- La Fonction Sigmoidale ( $S-FGM$ ).

### I.3.9.1 Propriétés matérielles des poutres ( $P-FGM$ )

La fraction volumique de ( $P-FGM$ ) est assurée par la loi de puissance :

$$V(z) = \left( \frac{z + h/2}{h} \right)^p \quad (\text{I. 5})$$

$p$  : L'indice matériel,

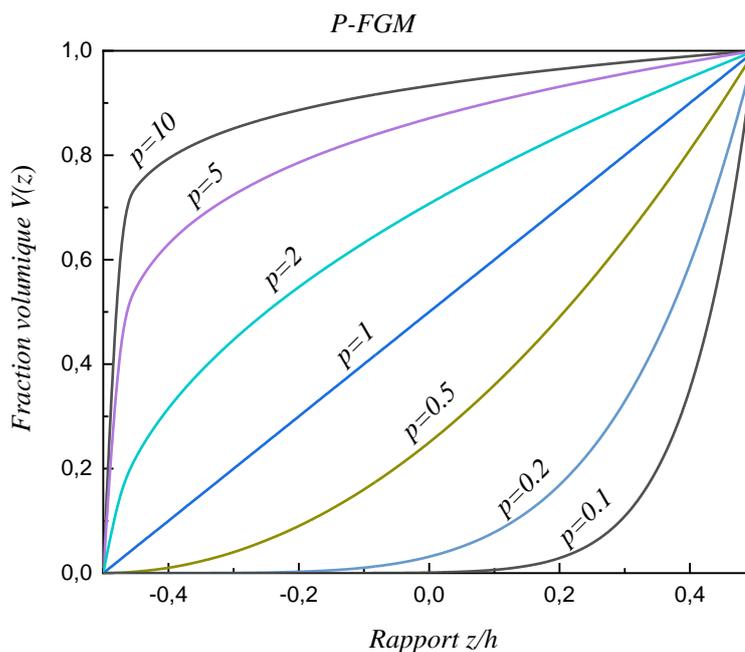
$h$  : L'épaisseur de la poutre,

$z$  : La coordonnée suivant l'épaisseur.

Ainsi, le module de Young de cette poutre est exprimé par :

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m)V(z) \quad (\text{I. 6})$$

Où  $E_m$  et  $E_c$  sont respectivement les modules de Young de la surface inférieure ( $z = -h/2$ ) et de la surface supérieure ( $z = +h/2$ ) de la poutre en (F.G.M.), la variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de la poutre ( $P-FGM$ ) est représenté sur la figure (voir Figure I.32).



**Figure I. 32 :** La variation du module de Young dans une poutre en ( $P - FGM$ ).

On remarque d'après la figure (I.32) que le module de Young décroît dans la direction de l'extrémité inférieure de la poutre ( $p > 1$ ), et s'accroît en allant vers l'extrémité supérieure ( $p < 1$ ) et pour  $p = 1$ , la variation du module de Young devient linéaire.

On constate aussi que la poutre devient plus résistante en raison de l'augmentation de la valeur de son module de résistance, si on augmente bien sûr, le pourcentage de la céramique dans la poutre.

### I.3.9.2 Propriétés matérielles des poutres ( $S - FGM$ )

Afin d'assurer la bonne distribution de toute les interfaces de la poutre en (F.G.M.), Il y'a deux fonction qui définissent la fraction volumique de puissance :

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{z + h/2}{h/2} \right)^p \quad \text{pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I. 7})$$

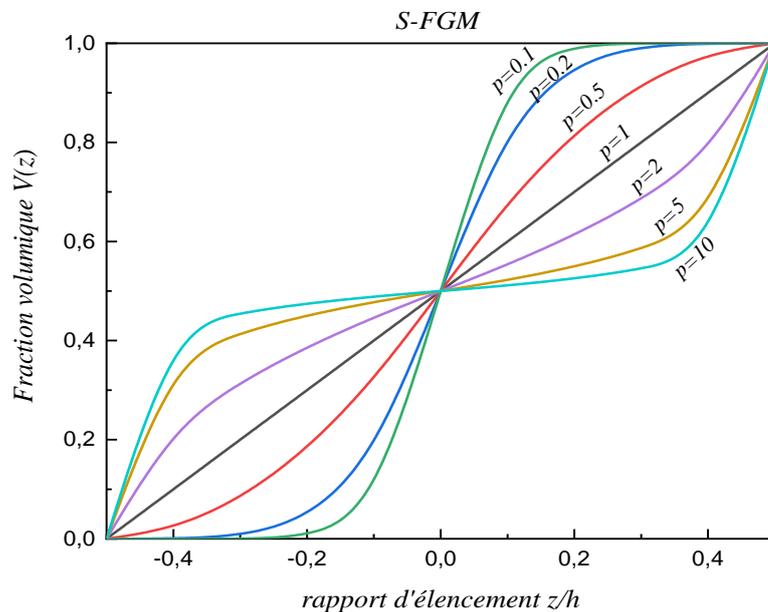
$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{z + h/2}{h/2} \right)^p \quad \text{pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I. 8})$$

En utilisant la loi de mélange, le module de Young de la poutre ( $S-FGM$ ) peut être calculé par :

$$E(z) = E_1 V_1 + (1 - V_1(z)) E_2 ; \text{ pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I. 9})$$

$$E(z) = E_1 V_2(z) + (1 - V_2(z)) E_2 ; \text{ pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I. 10})$$

La variation de la fraction volumique selon les équations (I.9) et (I.10) représente une distribution sigmoïde (voir Figure I.33).



**Figure I. 33** : La variation de la fraction volumique dans une poutre ( $S-FGM$ ).

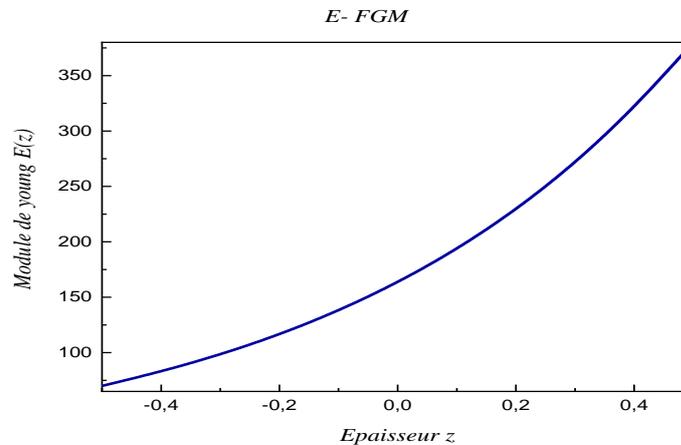
### I.3.9.3 Propriétés matérielles de la poutre ( $E-FGM$ )

Généralement les chercheurs utilisent la fonction exponentielle pour décrire les propriétés matérielles des matériaux (F.G.M.). La fonction exponentielle est donnée par :

$$E(x) = E_2 e^{B(z+h/2)} \quad (\text{I. 11})$$

$$B = \frac{1}{h} \ln \left( \frac{E_1}{E_2} \right) \quad (\text{I. 12})$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la poutre ( $E - FGM$ ) est représentée (voir Figure I.34).



**Figure I. 34 :** La variation du module de Young dans la poutre ( $E - FGM$ ).

D'après Figure (I.34), on remarque qu'il y'a une proportionnalité entre l'augmentation du module de Young est à l'augmentation de la quantité de la céramique par rapport à celle du métal (Al) tout en tout en approchant vers le bord supérieure de la poutre.

#### **I.4 Conclusion :**

Dans le cadre de ce chapitre, on a défini les matériaux composites et les (F.G.M.)<sub>s</sub> comme des matériaux modernes, l'histoire de leurs développements, leurs caractéristiques et leurs utilisations dans plusieurs domaines.

Vers la fin, on a présenté les différentes lois possibles qui servent à décrire la variation des propriétés matérielles du matériau (F.G.M.), module de Young, masse volumique et coefficient de poisson selon l'épaisseur d'une poutre, dans le prochain chapitre nous allons entamer les différentes théories des poutres qui sont citées dans la littérature.

**Chapitre II**

**Différentes théories des**

**poutres**

## II.1 Introduction

Les poutres sont des éléments structuraux très répandus dans le domaine de l'ingénierie, utilisée dans la construction des bâtiments, des navires, autres véhicules et dans la fabrication de machines.

Cependant, le modèle des poutres peut être utilisé pour des pièces très diverses à condition qu'elles respectent certaines normes. En mécanique des structures, la théorie des poutres permet de simplifier les problèmes rencontrés, en assimilant le solide étudié à une poutre, à savoir une structure élancée, dont une dimension est grande devant les deux autres. Celle-ci s'applique dans un domaine d'efforts permettant au matériau homogène et isotrope de demeurer linéaire et élastique, ce qui implique, entre autres, qu'après déformation, le solide reprend sa forme initiale.

Afin de résoudre les problèmes des structures ayant comme éléments structuraux des poutres et des plaques en (F.G.M.) dans le domaine élastique, il est nécessaire de choisir la bonne théorie décrivant correctement le comportement statique et dynamique de la structure ainsi que la méthode de résolution à appliquer. Euler-Bernoulli qui a fondé une théorie des poutres élancées (également appelée théorie classique des poutres), qui néglige l'influence du cisaillement ; la théorie des déformations du premier ordre a été consolidée par Timoshenko (1921) qui prend en compte l'effet du cisaillement, utilise le facteur de correction. Ensuite, des théories d'ordre supérieur sont venues améliorer les hypothèses des théories classiques et du premier ordre qui prend en compte l'effet du cisaillement. Il existe aussi la théorie basée sur l'élasticité tridimensionnelle (théorie 3D).

Nous présentons dans ce chapitre quelques modèles sur les théories des poutres développées dans la littérature pour améliorer l'évolution de la variation du champ des déplacements à travers l'épaisseur des poutres.

## II.2 Définitions de quelque notion fondamentale

- **Domaine élastique** : On dit qu'un matériau est en état élastique quand il reprend sa forme initiale après un cycle chargement-déchargement et les déformations sont réversibles.
- **Domaine linéaire** : Le rapport des déformations et les contraintes sont proportionnels.
- **Matériau homogène** : Le matériau homogène possède les mêmes caractéristiques dans toute sa masse.
- **Matériau isotrope** : Le matériau isotrope possède les mêmes propriétés dans toutes les directions.
- « La poutre est l'élément structural essentiel, car elle fait partie intégrante de la plupart des ouvrages de construction ou des pièces machines. Les charges

appliquées engendrent des forces et des moments internes dans la poutre pour maintenir l'équilibre. » (Benahmed., 2020)

### II.3 Domaines d'utilisation des poutres (voir Figure II.1).

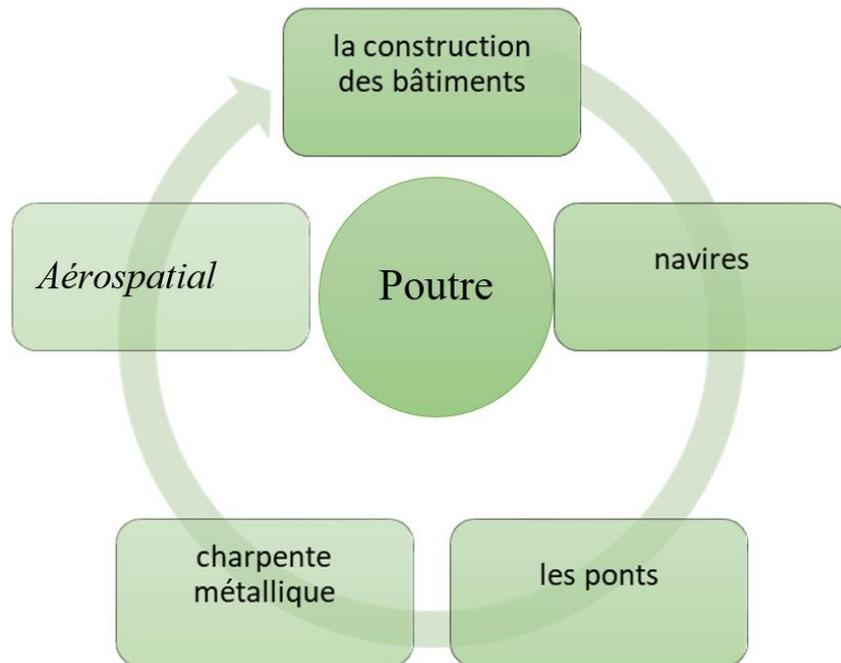


Figure II. 1 : Domaines d'utilisation des poutres.

#### II.3.1 Types de poutres

Les poutres sont classées suivant leurs supports, on peut citer quelques types de poutres qu'on peut les trouver dans le domaine des structures.

##### II.3.1.1 Poutre simple

On l'appelle aussi poutre simplement appuyée, reposant sur deux supports. Un appui double et un appui simple. En considérant les appuis sont des articulations, qui puissent se mouvoir librement pendant la flexion (voir Figure II.2).

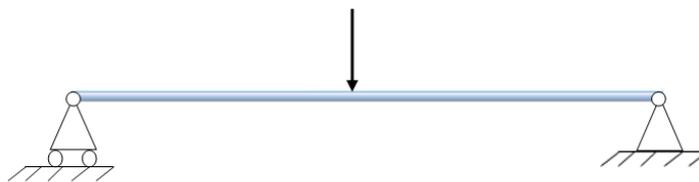


Figure II. 2 : cas d'une poutre simplement appuyées.

### II.3.1.2 Poutre console

C'est une poutre encastrée, qui est constituée d'une extrémité libre et l'autre encastrée, son degré de liberté est nul (aucun déplacement n'est permis) (voir Figure II.3).



Figure II. 3 : cas d'une poutre console.

### II.3.1.3 Poutre avec porte-à-faux

C'est une poutre qui repose sur deux appuis (un simple et l'autre double) et a une ou deux extrémités qui dépassent les appuis (porte-à-faux) (voir Figure II.4).



Figure II. 4 : Cas d'une poutre avec porte à faux.

On peut considérer les trois types de poutres précédentes dans la catégorie des poutres statiquement déterminées (poutres isostatiques), puisqu'elles possèdent trois inconnues reliées aux trois degrés de liberté et par le fait même les trois équations d'équilibre suffisent pour déterminer les réactions d'appuis.

### II.3.1.4 Poutre encastrée et appuyée

Dans ce cas la poutre a quatre réactions (4 inconnus). C'est une poutre hyperstatique où les trois équations d'équilibre ne suffisent pas pour déterminer les réactions dans les appuis (voir Figure II.5).

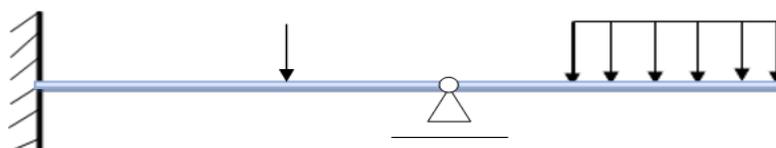


Figure II. 5 : cas d'une poutre encastrée et appuyée.

### II.3.1.5 Poutre continue

C'est une poutre soutenue par plus de deux supports. C'est également une poutre hyperstatique (voir Figure II.6).

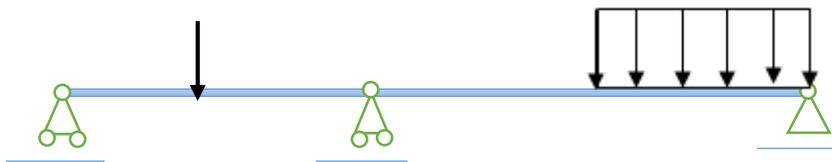


Figure II. 6 : cas d'une poutre continue.

### II.3.1.6 Poutre à double encastrement

C'est une poutre encastrée à ses deux extrémités (doublement encastrée). C'est une poutre hyperstatique. Schématiser une poutre à double encastrement se présente sur la Figure (II.7).

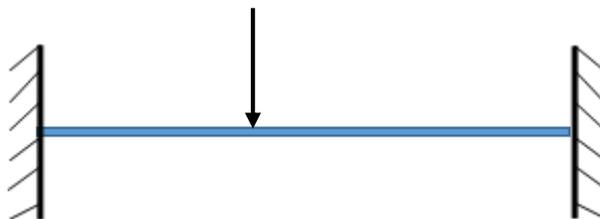


Figure II. 7 : cas d'une poutre à double encastrement.

### II.3.1.7 Poutre appuyée à double encastrement

C'est une poutre supportée par deux encastrement et supportée par un ou plusieurs supports. C'est également une poutre hyperstatique (voir Figure II.8).

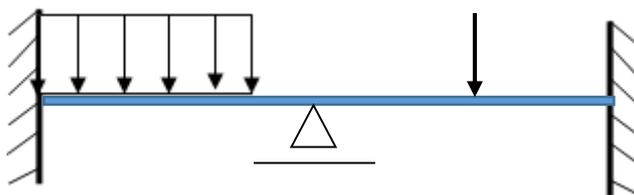


Figure II. 8 : cas d'une poutre appuyée à double encastrement.

Les poutres hyperstatiques ont plus de fixations ou supports que nécessaires. Cependant, ces supports augmentent la capacité portante de la poutre. Les équations de la statique ne suffisent pas pour analyser ces poutres. On recourt à différentes méthodes pour analyser le comportement de ce type de poutre.

### II.3.2 Théories des poutres

En mécanique des structures, la théorie des poutres permet de simplifier les problèmes rencontrés, en assimilant le solide étudié à une poutre, à savoir une structure élancée, dont une dimension est grande devant les deux autres. Celle-ci s'applique dans un domaine d'efforts permettant au matériau homogène et isotrope de demeurer linéaire et élastique, ce qui implique, entre autres, qu'après déformation, le solide reprend sa forme initiale.

Dans la littérature on trouve plusieurs théories des poutres, qui permet d'obtenir une solution approchée pour les champs de contrainte et de déformation et donne une bonne idée des efforts et des déplacements. Les plus connues sont la théorie classique des poutres (C.B.T.), la théorie des poutres du premier ordre (F.S.D.T.) et la théorie des poutres d'ordre élevé (H.S.D.T.). Mais le nombre de variables inconnues a toujours été une préoccupation importante. Dans ce qui suit, seules les théories les plus utilisées dans l'analyse des poutres (F.G.M.), seront exposées.

### II.3.3 Historique des théories des poutres

La paternité de la théorie des poutres est attribuée à Galilée, mais des études récentes indiquent que Léonard De Vinci l'aurait précédé. De Vinci avait supposé que la déformation varie de manière linéaire en s'éloignant de la surface neutre, mais il ne pût finaliser ses calculs car il ne connaissait pas la loi de Hooke. De son côté, Galilée était parti sur une hypothèse incorrecte (il supposait que la contrainte était répartie uniformément en flexion), et c'est Antoine Parent qui obtint la distribution correcte.

Ce sont Leonard Euler et Jacques Bernoulli qui émirent la première théorie utile vers les années 1750, alors que Daniel Bernoulli, le neveu du précédent, écrivit l'équation différentielle pour l'analyse vibratoire. À cette époque, le génie mécanique n'était pas reconnu comme une science, et on ne considérait pas que les travaux d'une académie des mathématiques puissent avoir des applications pratiques, et on continua à bâtir les ponts et les bâtiments de manière empirique. Ce n'est qu'au XIXe siècle, avec la Tour Eiffel et les grandes roues, qu'on démontra la validité de la théorie à grande échelle.

Voici dans un ordre chronologique les principaux événements marquants l'évolution de la théorie des poutres.

En 1750, Leonhard Euler et Jacques Bernoulli ont été les premiers à donner une approche mathématique au comportement des poutres, en introduisant respectivement deux notions, l'indéformabilité axiale de la fibre neutre (elle se déforme en flexion sans se contracter ni se comprimer) et la faculté des sections droites à rester droites après déformation.

Les premières hypothèses fondamentales de la théorie des poutres :

➤ **Principe de Saint venant**

Le principe de saint venant s'énonce : «La contrainte en un point éloigné des points d'applications d'un système de forces ne dépend que de la résultante générale et du moment résultant de ce système de forces, même si la répartition des contraintes n'est pas la même, la solution trouvée sera valable, si on place suffisamment loin du point d'application des charges» (Larbi Chaht, 2014).

➤ **Principe de Navier Bernoulli généralisé**

L'hypothèse de Navier Bernoulli consiste à supposer que les sections normales à la fibre moyenne restent planes pendant la déformation de la poutre. Cette hypothèse qui permet de calculer les contraintes normales dues au moment fléchissant, est bien vérifiée dans le cas de flexion pure où l'effort tranchant est nul. Par contre, dans le cas de la flexion simple avec effort tranchant, les sections ne restent pas planes, mais se gauchissent en forme de lettre S très aplaties. De même lorsque nous étudions la torsion, nous verrons qu'une section non circulaire, ayant deux axes symétries, prend sous l'effet d'un couple de torsion, un gauchissement radial. (Larbi Chaht, 2014)

Le principe de Navier Bernoulli est fondé sur les observations suivantes :

Le gauchissement d'une section est toujours très petit vis-à-vis des dimensions de la section voisine, est toujours très petite, non seulement vis-à-vis de la distance des deux sections infiniment voisines.

Le principe de Navier Bernoulli revient à négliger le cisaillement et le gauchissement des sections transversales dans l'étude de déplacement et de déformation d'un élément de poutre. Il est rare de trouver une théorie qui serait applicable à tous les cas possibles (matériau composite, anisotrope, isotrope, grand nombre de couches, stratification sandwich etc...) et aux différents domaines (statique, dynamique et flambage), et qui de plus serait simple et facile et ne coûte pas chère en temps de calcul.

Dans cette optique, plusieurs théories ont été développées pour la prise en compte du cisaillement transverse, sur la base de la cinématique issue de la théorie des poutres. Celles-ci sont présentées dans les paragraphes suivants :

### **II.3.3.1 Théorie classique des poutres (C.B.T.)**

La théorie d'Euler-Bernoulli est probablement une des plus anciennes théories des poutres connues (voir Figure II.9). Elle est basée sur les hypothèses d'Euler-Bernoulli suivantes :

1. Les sections droites restent perpendiculaires à la ligne moyenne après déformation. H1
2. Les sections planes restent planes après déformation. H2
3. Les sections sont indéformables suivant l'axe z. H3
4. Cette théorie est applicable dans le cas des poutres élancées et minces.

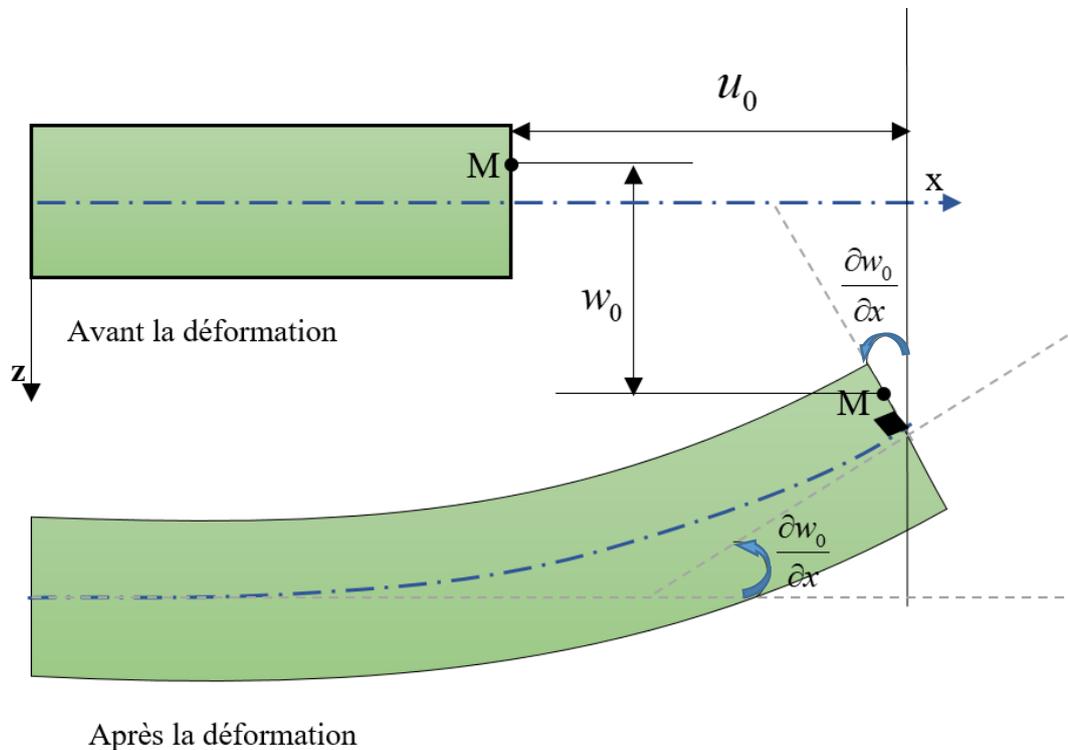


Figure II. 9 : Schématisation des déformations dans le cas de la théorie classique des poutres.

Le champ des déplacements d'un point de coordonnées  $(x, y, z)$  à l'instant  $(t)$  s'écrit :

$$u(x, z, t) = u_0(x, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \tag{II. 1}$$

$$w(x, z, t) = w_0(x, t) \tag{II. 2}$$

$u, w$  : Sont les déplacements suivant les directions  $x, z$  respectivement.

$u_0, w_0$  : Sont les déplacements de la fibre moyenne suivant les directions  $x, z$  respectivement.

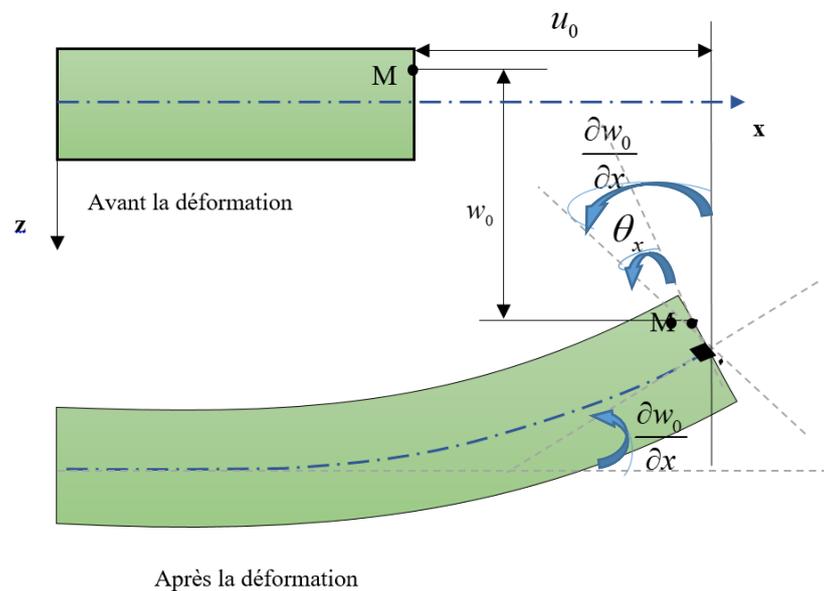
Donc il en résulte que le cisaillement est négligeable par les hypothèses de cette théorie. Puisque ce modèle ne tient pas en compte l'effet de cisaillement transverse, il donne des résultats imprécis pour les poutres courtes.

$$\tau_{xz} = G \gamma_{xz} \tag{II. 3}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (\text{II. 4})$$

### II.3.3.2 Théorie des poutres du premier ordre (FSDBT)

La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (théorie de Timoshenko) représente une évolution par rapport à la théorie classique des poutres (théorie de Bernoulli) en tenant compte de l'effet de cisaillement transverse, on s'affranchit de l'hypothèse 1 (H1) (qu'après déformation, la section perpendiculaire par rapport à la ligne moyenne de la poutre), elle est utilisée dans le cas d'une poutre courte et épaisse. Les deux hypothèses H2 et H3 restent valides pour ce modèle (voir Figure II.10).



**Figure II. 10** : Schématisation des déformations dans le cas de la théorie du premier ordre.

Le champ des déplacements est alors le suivant :

$$u(x, z, t) = u_0(x, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + z \theta_x \quad (\text{II. 5})$$

$$w(x, z, t) = w_0(x, t) \quad (\text{II. 6})$$

$\theta_x$  : est la rotation de la normale à la section transversale par rapport à l'axe x.

La poutre de Timoshenko est très utilisée par les ingénieurs pour la modélisation de leurs structures, cependant en pratique la version qu'on trouve généralement dans les logiciels de calcul

cisaillement transverse, mais au même temps ces contraintes sont constantes à travers l'épaisseur, ce qui n'est pas la réalité (voir Figure II.11).



**Figure II. 11 :** la distribution des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur dans le cas de la théorie de premier ordre.

Donc, cette théorie a corrigé le défaut de la théorie classique qui ne tient pas compte du

Pour cela, les chercheurs ont trouvé des coefficients correcteurs pour régler ce problème, qui noté «  $K_s$  » le facteur de correction des contraintes de cisaillement, c'est le rapport entre l'énergie de déformation de cisaillement de la distribution parabolique et celle uniforme :

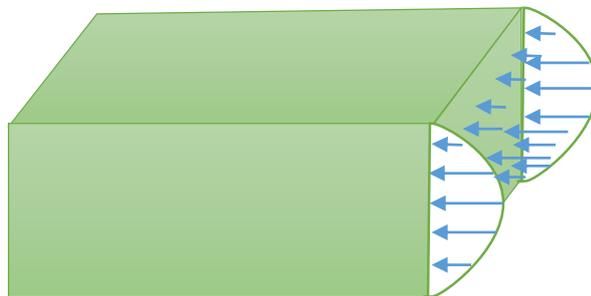
$$K_s = \frac{\int \tau_{xz\text{réel}} \gamma_{xy} dv}{\int \tau_{xz} \gamma_{xy} dv} \quad (\text{II. 7})$$

Ces coefficients dépendent à la forme géométrique de la poutre considérée de poutre :

$K_s = 5/6$  : Pour une section rectangulaire.

$K_s = 2/3$  : Pour une section circulaire.

Dans le cas  $K_s = 1$  les contraintes ne sont pas corrigées.



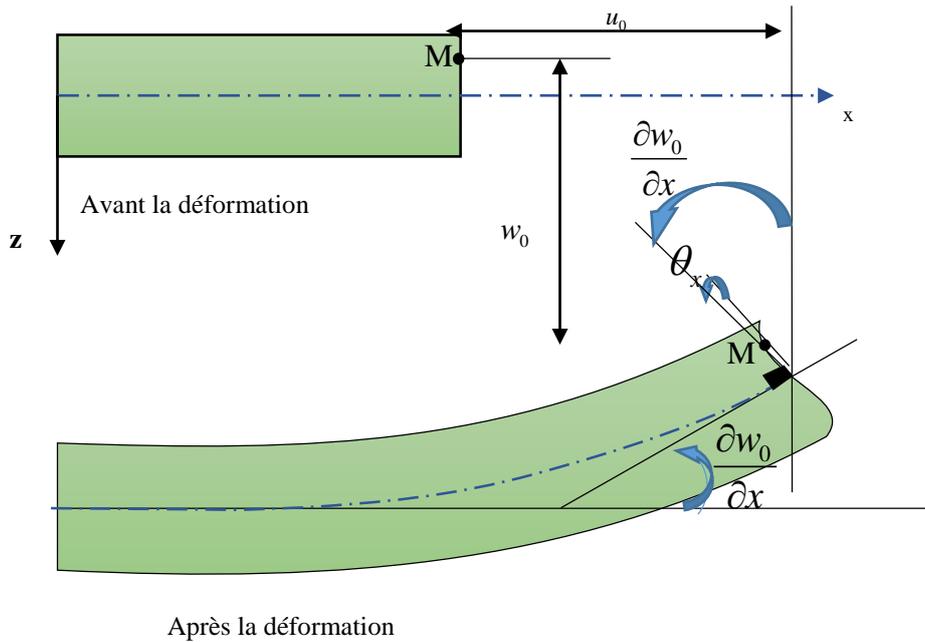
**Figure II. 12 :** La distribution des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur réelle.

Heyliger et Reddy, (1988) ont développé une théorie de poutres de troisième ordre pour la déformation de cisaillement, dans laquelle la contrainte de cisaillement transversal a une distribution parabolique des champs dans l'épaisseur de la poutre, sans aucun facteur de correction.

On tient compte des effets de la déformation transversale de cisaillement et/ou de la déformation normale transversale.

Elle est plus précise que la théorie du premier ordre puisqu'elle introduit une fonction qui tient compte du phénomène de "gauchissement"(voir Figure II.13).

Par définition : le gauchissement apparait lorsque la section transversale du matériau perd sa planéité. (Kheroubi, 2017)



**Figure II. 13** : Schématisation des déformations dans le cas de la théorie d'ordre élevé.

Le champ des déplacements est alors le suivant :

$$u(x, z, t) = u_0(x, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z) \theta_x \tag{II. 8}$$

$$w(x, z, t) = w_0(x, t) \tag{II. 9}$$

$f(z)$  est une fonction de cisaillement transverse caractérisant les théorie correspondant

Les déplacements de la théorie classique de poutre (C.B.T.) sont obtenus en prenant  $f(z) = 0$ , alors que la théorie de premier ordre (F.S.D.T.) peut être obtenue par  $f(z) = z$ .

Il existe Plusieurs modèles de fonctions de cisaillement  $f(z)$  qui sont proposés par de nombreux auteurs qui répond à la nullité des contraintes tangentielles aux extrémités de la poutre et qui peut prendre une forme parabolique, sinusoïdale hyperbolique, (voir Figure II.14 et II.15).

La fonction  $f(z)$  représente le gauchissement et sa dérivée  $g(z)$  représente la distribution de cisaillement transverse,

$$g(z) = f'(z) \tag{II. 10}$$

Le champ des déplacements inclut une variation parabolique des déformations transversales et des contraintes qui leurs sont associées. Les contraintes de cisaillement s’annulent au niveau des surfaces supérieure et inférieure de la poutre. Cette théorie ne nécessite donc pas de facteur de correction des contraintes puisqu’elle fournit une distribution plus réaliste des déformations et des contraintes à travers l’épaisseur. Elle fournit également de meilleures précisions par rapport aux théories précédentes et une meilleure estimation des fréquences de vibration et de leurs modes propres associés.

Quelques contributions importantes de développement de modèles qui existe dans la littérature (consulter le tableau avec sa légende Tab II.1).

**Tableau II 1 :** Les différents fonctions de forme les plus connus.

Théories	$f(z)$	Auteur
(S.S.D.T.)	$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin \frac{\pi z}{h}$	Touratier
(T.S.D.T.)	$f(z) = z \left[ 1 - \frac{4}{3} \left( \frac{z^2}{h^2} \right) \right]$	Reddy
(Hy.S.D.T.)	$f(z) = \left[ z \cosh \left( \frac{1}{2} \right) - h \sinh \left( \frac{z}{h} \right) \right]$	Sayyad et Ghugal
(H.S.D.T.)	$f(z) = \sin \left( \frac{2r\pi z}{h} \right) - \frac{2zr\pi}{h} \cos(r\pi)$	Present modèle

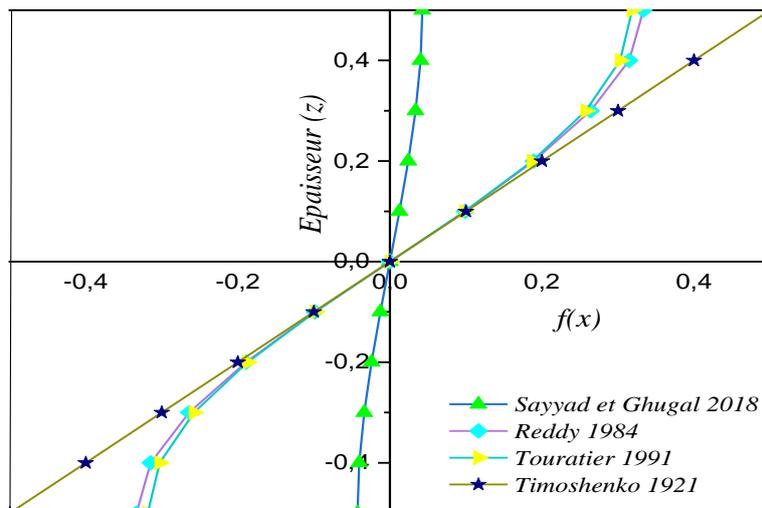


Figure II. 14 : La variation de la fonction de forme  $f(z)$  des différents modèles en fonction de l'épaisseur.

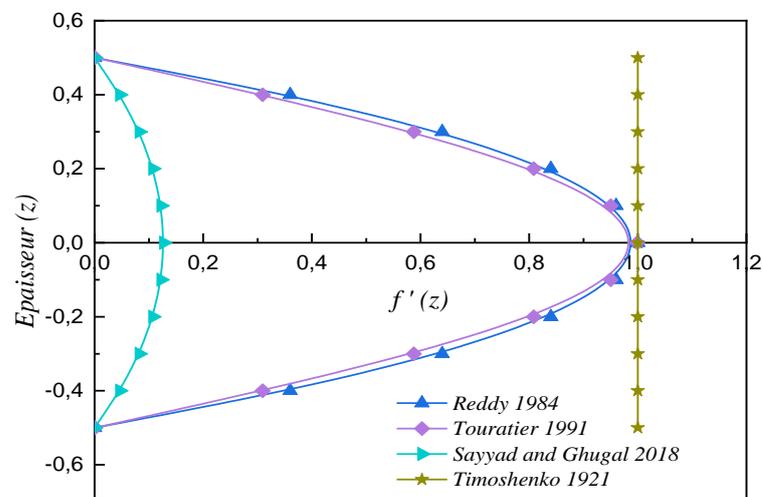


Figure II. 15 : variation de la fonction de la forme  $f'(z)$  des différents modèles suivant l'épaisseur.

**II.4 Conclusion**

Dans ce chapitre, on a exposé les différents modèles des théories des poutres développées dans la littérature pour améliorer l'évolution de la variation du champ des déplacements à travers l'épaisseur des poutres.

Ces dernières ont été développées afin de surpasser les limitations des théories existantes. En général, il est rare de trouver une théorie qui soit applicable à tous les cas possibles et aux différents domaines et qui soit simple et facile et ne coûte pas chère en temps de calcul. En effet, chacune d'elles présente des avantages et des inconvénients, avec des formalismes différents selon le domaine d'application.

# **Chapitre III**

## **Formulations théoriques**

### III.1 Introduction

Dans cette partie, il y'a deux objectifs, le premier c'est de déterminer les fréquences propres d'une poutre en (F.G.M.) en vibration libre en tenant compte le contact avec la fondation élastique. Ces fréquences représentent les fréquences auxquelles la poutre vibre lorsqu'elle n'est pas soumise à un chargement externe. Ce type de fondations a une large application dans l'ingénierie moderne et posent de grands problèmes techniques dans la conception des structures. En se basant sur nouvelle théorie d'ordre élevé (H.S.D.T.), avec une nouvelle fonction de forme qu'elle n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description hyperbolique de la contrainte de cisaillement transverse à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les extrémités libres. Le deuxième objectif, tout en restant dans la même étude précédente avec une poutre isotrope qui ne contient que deux inconnus contrairement aux autres théories. Aussi plusieurs paramètres sont examinés et comparés en détail.

Enfin, pour montrer la précision et l'efficacité de la présente théorie des poutres, les résultats obtenus par cette théorie sont comparés avec les résultats des autres solutions existantes dans la littérature.

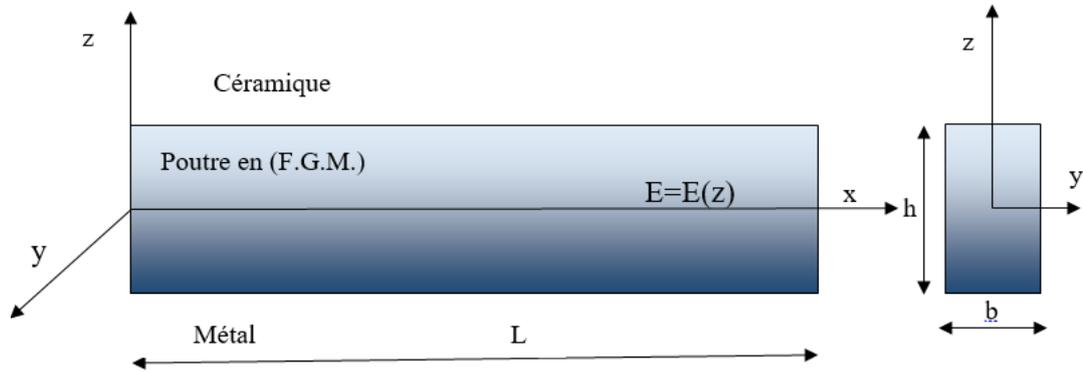
### III.2 Analyse du comportement mécanique pour une poutre en (F.G.M.) simplement appuyée

L'analyse d'une structure composite est plus complexe que celle d'une structure en matériaux traditionnels, Cela est dû au caractère hautement anisotrope des propriétés mécaniques du matériau de base, tant sur les plans raideur que résistance, et qui sont concentrées dans la direction des fibres. L'importance de développer une analyse sur le comportement des poutres est liée d'une part à l'utilisation des poutres comme éléments de base dans la réalisation des structures, d'autre part à la caractérisation des propriétés mécaniques des matériaux composites et ceci à partir des différents essais réalisés sur des éprouvettes en forme de poutres.

#### III.2.1 Propriétés des matériaux

On considère une poutre en (F.G.M.) avec l'emploi de la fonction ( $P-FGM$ ) pour décrire la variation de la fraction volumique, de section rectangulaire, simplement appuyée, de longueur  $L$ , de largeur  $b$ , et d'épaisseur  $h$ , Les faces supérieure et inférieure de la poutre en (F.G.M.) sont à  $z = \pm h / 2$ .

La composition du matériau à la surface supérieure  $z = h / 2$  est supposée être riche en céramique et elle varie continuellement sans interruption dans la direction de l'épaisseur vers la surface riche en métal côté opposé  $z = -h / 2$  (voir Figure III.1).



**Figure III. 1** : Définition de la structure poutre étudiée.

La distribution de loi de puissance ( $P-FGM$ ) est utilisée pour la fraction volumique de la céramique et du métal comme :

$$V_c(z) = \left( \frac{2z + h}{2h} \right)^p \quad (\text{III. 1})$$

$$E(z) = E_m + (E_c + E_m)V_c; \quad (\text{III. 2})$$

$$\rho(z) = \rho_m + (\rho_c + \rho_m)V_c; \quad (\text{III. 3})$$

$$G(z) = G_m + (G_c + G_m)V_c \quad (\text{III. 4})$$

Où  $V_c$  est fraction volumique de la couche inférieure et supérieure respectivement, et ( $p$ ) est un paramètre du matériau qui donne le profil de variation du matériau à travers l'épaisseur des couches de la poutre, est un nombre non négatif qui prend des valeurs supérieure ou égale à zéro, Il est appelé aussi l'indice matériel, et le terme ( $\rho$ ) représente la densité de masse, Les indices  $m$  et ( $c$ ) représentent respectivement les constituants métalliques et céramiques, ( $G$ ) est le module transversale du matériau.

### III.2.2 Méthode de résolution

Les paragraphes suivants présentent une méthode de résolution analytique des valeurs de déplacements  $(u, w)$ , basée sur la cinématique présentée dans le chapitre 2, d'après la théorie d'ordre élevé à trois variables.

### III.2.3 Hypothèses de base

Les principales hypothèses de la présente théorie sont les suivantes :

➤ Le déplacement  $u$  dans la direction  $x$  est défini par superposition des déplacements dus aux effets d'extension, de flexion et de cisaillement.

$$\begin{aligned}
 u &= u_e + u_b + u_s; \\
 u_e &= u_0; \\
 u_b &= -z \frac{\partial w_0}{\partial x}; \\
 u_s &= f(z) \theta_x; \\
 f(z) &= \sin\left(\frac{2r\pi z}{h}\right) - \frac{2zr\pi}{h} \cos(r\pi); \text{ pour } r = 0.3.
 \end{aligned} \tag{III. 5}$$

- Les déplacements sont petits par rapport à l'épaisseur de la poutre dans la direction  $y$  et en conséquence les déformations sont infinitésimales.
- La composante du déplacement transversal  $w$  comprend un terme  $w_0$  qui représente la flèche.

$$w(x, t) = w_0(x, t) \tag{III. 6}$$

#### III.2.3.1 Equations cinématique et constitutive

Sur la base des hypothèses données dans la section précédente, le domaine le déplacement de la théorie classique de la déformation de cisaillement d'ordre supérieur peut être exprimé comme :

$$\begin{aligned}
 u(x, z, t) &= u_0(x, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z) \theta_x; \\
 w(x, z, t) &= w_0(x, t)
 \end{aligned} \tag{III. 7}$$

$(u, w)$  Sont les déplacements dans les directions  $(x, z)$ ,  $f(z)$  est une fonction de forme qui détermine la distribution de la déformation de cisaillement transversale La fonction  $f(z)$  est choisie pour satisfaire la condition de la nullité de la contrainte de cisaillement aux niveaux des faces supérieure et inférieure de la poutre ce qui néglige l'utilisation de facteur correction de cisaillement.

### III.2.3.2 Tenseur de déformation

Le champ de déformation associé au champ de déplacement est obtenu comme suit :

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + f(z) \frac{\partial \theta_x}{\partial x}; \\ \gamma_{xz} &= f'(z) \theta_x\end{aligned}\quad (\text{III. 8})$$

Les contraintes  $\sigma$  dues aux déformations  $\varepsilon$  peut être déterminée comme;

$$Q_{11}(z) = \frac{E(z)}{1-\nu^2} ; \quad Q_{55}(z) = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \quad (\text{III. 9})$$

### III.2.3.3 Equations du mouvement

Les équations de mouvement sont dérivées du principe d'énergie d'Hamilton

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta U + \delta V_f - \delta K) dt = 0 \quad (\text{III. 10})$$

Où  $\delta U$  est la variation de l'énergie de déformation (strain energy),  $\delta V_f$  est Le travail dû à la réaction de la fondation élastique et  $\delta K$  est la variation de l'énergie cinétique (kinetic energy).

La variation de l'énergie de déformation  $\delta U$  peut être s'énoncer comme suit :

$$\begin{aligned}\delta U &= \int_0^L \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx}) dz dy dx \\ &= b \int_0^L \left( N_x \frac{d \delta u_0}{dx} - M^b \delta \frac{d^2 w_0}{dx^2} + M^s \delta \frac{d \theta_x}{dx} + Q \delta \theta_x \right) dx\end{aligned}\quad (\text{III. 11})$$

Les termes ( $N_x, M^b, M^s, Q$ ) sont définis dans le tableau (III.1).

**Tableau III. 1 :** Les différents efforts résultants

L'effort	Le symbole	La formule
Force axial	$N_x$	$b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz$
Moment fléchissant	$M^b$	$b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz$
Moment de cisaillement	$M^s$	$b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x f(z) dz$
Effort de cisaillement	$Q$	$b \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{zx} f'(z) dz$

L'énergie de déformation de la fondation élastique peut être exprimé comme ;

$$\delta V_f = \int q_f \delta w_0 dx$$

$$q_f = K_w + K_p \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \quad (\text{III. 12})$$

Tel que  $K_w$  et  $K_p$  sont les paramètres de la fondation élastique de Winkler et Pasternak, respectivement.

### III.1 Les fondations élastiques

#### III.1.1 Modèle de Winkler

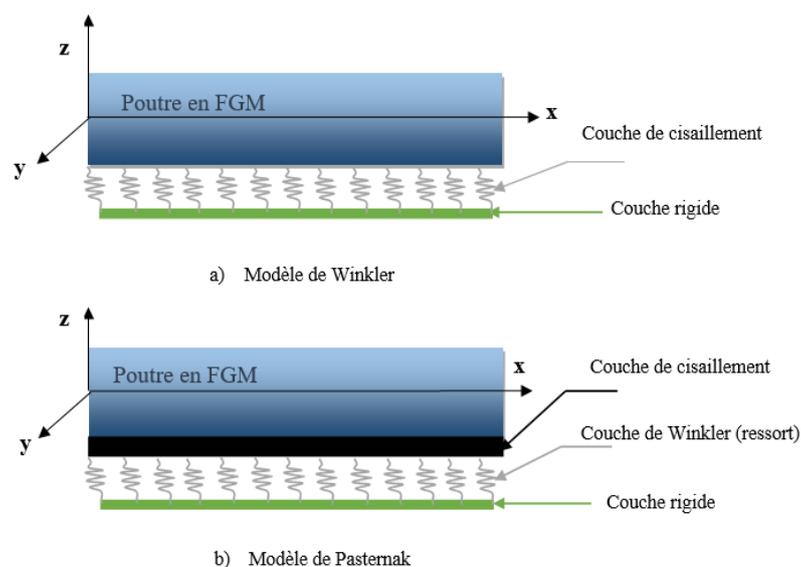
Ce modèle a été réalisé pour la première fois par Winkler en 1867, Pour calculer les contraintes s'exerçant sous une fondation reposante sur un milieu élastique, qui a supposé que la réaction du sol à chaque point sous la fondation est proportionnelle à la déflexion de la fondation à ce point. La déformation verticale caractéristique de la fondation est donc définie par l'utilisation de ressorts identiques, indépendants, étroitement espacés, discrets et linéairement élastiques. La constante de proportionnalité de ces ressorts est connue comme étant le coefficient de réaction du sol  $K_w$  (voir Figure III.2a).

L'inconvénient de ce modèle est qu'il ne prend pas en compte l'interaction entre les ressorts, ce qui revient à négliger le cisaillement vertical dans le sol. En conséquence, une discontinuité de déplacement se crée entre la zone chargée et la zone non chargée sous la fondation. (Jahangir, 2011).

Le modèle de Winkler a été amélioré plus tard par plusieurs chercheurs en utilisant d'autres paramètres constants qui caractérisent l'interaction entre les ressorts, en 1954, Pasternak reprend le modèle de Winkler suppose en plus d'une rigidité, en éliminant son comportement discontinu par l'introduction d'une interaction mécanique entre les ressorts. (Elhassar, 2016).

### III.1.2 Modèle de Pasternak

Modèle de Pasternak Pour le modèle proposé par Pasternak (Kerr, 1964), il est assumé qu'il y a une interaction de cisaillement entre les ressorts, ce qui peut être accompli en connectant les ressorts à une couche incompressible verticale qui ne se déforme que dans le sens du cisaillement transversal (voir Figure III.2b). Les déformations et les forces maintiennent l'équilibre dans la couche de cisaillement.



**Figure III. 2 :** Représentation d'une poutre en (F.G.M.) reposant sur une fondation élastique.

La variation de l'énergie cinétique  $\delta K$  peut être écrite sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 \delta K &= \int_0^L \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) (\ddot{u} \delta w + \ddot{w} \delta w) dz dy dx \\
 &= b \int_0^L \left( I_A \ddot{u}_0 - I_B \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} - I_C \ddot{\theta}_x \right) \delta u_0 dx \\
 &+ b \int_0^L \left( -I_B \ddot{u}_0 - I_D \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} - I_E \ddot{\theta}_x \right) \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} dx \\
 &+ b \int_0^L \left( -I_C \ddot{u}_0 - I_E \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} - I_F \ddot{\theta}_x \right) \delta \theta_x dx \\
 &+ b \int_0^L (-I_A \ddot{w}_0) \delta w_0 dx
 \end{aligned} \tag{III. 13}$$

Où  $\rho(z)$  est la densité de masse, et  $I_A, I_D, I_E, I_F$  sont les coefficients d'inertie.

$$\begin{aligned}
 I_A &= b \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) z dz \\
 I_B &= b \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) dz \\
 I_C &= b \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) f(z) dz \\
 I_D &= b \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) z^2 dz \\
 I_E &= b \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) z f(z) dz \\
 I_F &= b \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) z [f(z)]^2 dz
 \end{aligned} \tag{III. 14}$$

Les équations de mouvement de la poutre substituant les équations (III.11), (III.12) et (III.13) dans l'équation (III.10) en effectuant les intégrations et en fixant les coefficients de  $\delta u$ ,  $\delta w$  et  $\delta \theta$  et les équations d'équilibre des poutres en (F.G.M.) sont obtenues par :

$$\begin{aligned}
 \delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} &= I_A \ddot{u}_0 - I_B \frac{\partial \ddot{w}_x}{\partial x} + I_C \ddot{\theta}_x \\
 \delta w_0 : \frac{\partial^2 M^b}{\partial x^2} + q_f &= I_B \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} - I_D \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + I_E \frac{\partial \ddot{\theta}_x}{\partial x} - I_A \ddot{w}_0 \\
 \delta \theta_x : \frac{\partial M^s}{\partial x} &= I_C \ddot{u}_0 - I_E \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + I_F \ddot{\theta}_x
 \end{aligned} \tag{III. 15}$$

On peut obtenir les équations de mouvement par substitution des termes ( $N_x$ ,  $M^b$ ,  $M^s$ ,  $Q$ ) qui sont définis dans le tableau (III.1) dans l'équation (III.15).

$$\begin{aligned}
A \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - B \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} + C \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} &= I_A \ddot{u}_0 - I_B \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} + I_C \ddot{\theta}_x; \\
B \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - D \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + E \frac{\partial^3 \theta_x}{\partial x^3} + K_w + K_p \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} &= -I_D \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + I_E \frac{\partial \ddot{\theta}_x}{\partial x} + I_A \ddot{w}_0 + I_B \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x}; \\
C \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - E \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} + F \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} - H \theta_x &= I_C \ddot{u}_0 - I_E \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} + I_F \ddot{\theta}_x
\end{aligned} \tag{III. 16}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
A &= b \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11} dz \\
B &= b \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11} z dz \\
C &= b \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11} f(z) dz \\
D &= b \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11} z^2 dz \\
E &= b \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11} z f(z) dz \\
F &= b \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11} [f(z)]^2 dz \\
H &= b \int_{-h/2}^{h/2} Q_{55} [f'(z)]^2 dz \\
Q &= b \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{zx} f'(z) dz = H \theta
\end{aligned} \tag{III. 17}$$

### III.2 Solution exacte pour une poutre en (F.G.M.)

Les équations du mouvement admettent des solutions analytiques de Navier pour les poutres simplement appuyées. Les variables  $u_0, w_0$  et  $\theta_x$ , peuvent être écrites sous la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ w_0 \\ \theta_x \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_m \cos(\alpha x) e^{i\omega t} \\ w_m \sin(\alpha x) e^{i\omega t} \\ \theta_m \cos(\alpha x) e^{i\omega t} \end{Bmatrix} \tag{III. 18}$$

D'où  $w_0$  et  $\theta_x$  sont des paramètres arbitraires à déterminer,  $\omega$  est la fréquence propre associée à mode propre ( $m$ ), et  $\alpha = m\pi / L$ .

On peut écrire le système sous la forme matricielle suivante :

$$\left[ \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{12} & m_{22} & m_{23} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \end{pmatrix} \right] \begin{Bmatrix} u_m \\ w_m \\ \theta_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III. 19})$$

D'où

$$\begin{aligned} k_{11} &= A\alpha^2, k_{12} = -B\alpha^3, k_{13} = C\alpha^2; \\ k_{22} &= D\alpha^4 + \left( K_w + K_p \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right), k_{23} = -E\alpha^3, k_{33} = F\alpha^2 + H. \end{aligned} \quad (\text{III. 20})$$

$$\begin{aligned} m_{11} &= I_A, m_{12} = -I_B\alpha, m_{13} = I_C; \\ m_{22} &= (I_D\alpha^2 + I_A), m_{23} = -I_E\alpha, m_{33} = I_F. \end{aligned} \quad (\text{III. 21})$$

### III.3 Analyse du comportement dynamique d'une poutre isotrope

Dans cette section, toutes les étapes présentées dans la partie en haut sont réservés. Après certaine modification sur le champ de déplacement en éliminant le déplacement axial membranaire, le champ de déplacement devient seulement avec deux inconnus. La cinématique peut prendre la forme suivante :

$$\begin{aligned} u(x, z, t) &= -z \frac{dw_0}{dx} + f(z)\theta_x; \\ w(x, z, t) &= w_0 \end{aligned} \quad (\text{III. 22})$$

Alors les équations de mouvement sont réduit à seulement deux, et on a :

$$\begin{aligned} -D \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + E \frac{\partial^3 \theta_x}{\partial x^3} + q_f &= -I_D \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + -I_E \frac{\partial \ddot{\theta}_x}{\partial x} + I_A \ddot{w}_0; \\ -E \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} + F \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} - H\theta_x &= -I_E \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + I_F \ddot{\theta}_x \end{aligned} \quad (\text{III. 23})$$

La forme matricielle du système est donnée comme suit :

$$\left[ \begin{pmatrix} S_{22} & S_{23} \\ S_{23} & S_{33} \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} \Gamma_{22} & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{23} & \Gamma_{33} \end{pmatrix} \right] \begin{Bmatrix} w_m \\ \theta_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix};$$

$$S_{22} = -D\alpha^4 + K_w + K_p \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} ; \quad S_{23} = E\alpha^3 ; \quad S_{33} = F\alpha^2 - H; \quad (\text{III. 24})$$

$$\Gamma_{22} = I_D\alpha^2 - I_A ; \quad \Gamma_{23} = I_E\alpha ; \quad \Gamma_{33} = -I_F.$$

$\Gamma$  : représente les éléments de la matrice de masse.

$S$  : représente les éléments de la matrice de rigidité.

La fréquence peut être déterminée en résolvant l'équation suivante :

$$\omega = \left[ (\Gamma_{22}\Gamma_{33}) + (\Gamma_{22}\Gamma_{33}) - (\Gamma_{23}^2) \right] \omega^4 + \left[ -(S_{22}\Gamma_{33}) - (\Gamma_{22}S_{33}) - (2S_{23}\Gamma_{23}) \right] \omega^2 + \left[ (S_{22}\Gamma_{33}) - S_{23}^2 \right] \quad (\text{III. 25})$$

L'équation (III.25) a quatre solutions :

$$\omega_1 = \frac{1}{2(\Gamma_{22}\Gamma_{33} - \Gamma_{23}^2)} \left[ \sqrt{2} \left( \left( (\Gamma_{22}\Gamma_{33} - \Gamma_{23}^2) (S_{22}\Gamma_{33} + \Gamma_{22}S_{33} - 2\Gamma_{23}S_{23}) + \left( \sqrt{S_{22}^2\Gamma_{33}^2 - 2S_{22}\Gamma_{33}\Gamma_{22}S_{33} - 4S_{22}\Gamma_{33}\Gamma_{23}S_{23}} \right)^{1/2} \right) \right)^{1/2} \right] \quad (\text{III. 26})$$

$$\omega_2 = -\frac{1}{2(\Gamma_{22}\Gamma_{33} - \Gamma_{23}^2)} \left[ \sqrt{2} \left( \left( (\Gamma_{22}\Gamma_{33} - \Gamma_{23}^2) (S_{22}\Gamma_{33} + \Gamma_{22}S_{33} - 2\Gamma_{23}S_{23}) + \left( \sqrt{S_{22}^2\Gamma_{33}^2 - 2S_{22}\Gamma_{33}\Gamma_{22}S_{33} - 4S_{22}\Gamma_{33}\Gamma_{23}S_{23}} \right)^{1/2} \right) \right)^{1/2} \right] \quad (\text{III. 27})$$

$$\omega_3 = \frac{1}{2(\Gamma_{22}\Gamma_{33} - \Gamma_{23}^2)} \left[ (-2\Gamma_{22}\Gamma_{33} + 2\Gamma_{23}^2) (-S_{22}\Gamma_{33} - \Gamma_{22}S_{33} + 2\Gamma_{23}S_{23}) + \left( \sqrt{S_{22}^2\Gamma_{33}^2 - 2S_{22}\Gamma_{33}\Gamma_{22}S_{33} - 4S_{22}\Gamma_{33}\Gamma_{23}S_{23}} \right)^{1/2} \right] \quad (\text{III. 28})$$

$$\omega_4 = -\frac{1}{2(\Gamma_{22}\Gamma_{33} - \Gamma_{23}^2)} \left[ (-2\Gamma_{22}\Gamma_{33} + 2\Gamma_{23}^2) (-S_{22}\Gamma_{33} - \Gamma_{22}S_{33} + 2\Gamma_{23}S_{23}) + \left( \sqrt{S_{22}^2\Gamma_{33}^2 - 2S_{22}\Gamma_{33}\Gamma_{22}S_{33} - 4S_{22}\Gamma_{33}\Gamma_{23}S_{23}} \right)^{1/2} \right] \quad (\text{III. 29})$$

Alors on peut déterminer la fréquence par la formule (III. 30) :

$$\omega = \left( \sqrt{-\frac{1}{2(\Gamma_{22}\Gamma_{33} - \Gamma_{23}^2)} \left[ (-2\Gamma_{22}\Gamma_{33} + 2\Gamma_{23}^2) (-S_{22}\Gamma_{33} - \Gamma_{22}S_{33} + 2\Gamma_{23}S_{23}) + \left( \sqrt{S_{22}^2\Gamma_{33}^2 - 2S_{22}\Gamma_{33}\Gamma_{22}S_{33} - 4S_{22}\Gamma_{33}\Gamma_{23}S_{23}} \right)^{1/2} \right]} \right)^{1/2} \quad (\text{III. 30})$$

### III.4 Conclusion

Dans ce chapitre, une solution analytique générale du comportement mécanique de la vibration libre des poutres en matériaux fonctionnellement gradués « (F.G.M.) » et reposant sur une fondation élastique de type Winkler-Pasternak a été proposé. La réponse de la poutre en (F.G.M.) a été déterminée par une théorie hyperbolique à trois variables. La présente théorie n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description hyperbolique de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres. En outre, l'influence de certains paramètres de la poutre comme le rapport d'élanement, l'index de la fraction volumique des matériaux constituants, les rapports de l'élanement (largeur/épaisseur) de la poutre et de l'effet des raideurs de la fondation, seront minutieusement étudiés au chapitre suivant, en les comparant avec les résultats des autres théories d'ordre élevé.

# **Chapitre IV**

## **Résultats et discussions**

### IV.1 Introduction

Dans ce chapitre, l'exactitude de la nouvelle théorie de déformation de cisaillement raffinée développée dans le chapitre précédent sera examinée. Dans ce qui suit nous allons présenter l'analyse de la réponse dynamique des poutres isotropes homogènes et en (F.G.M.). Pour ce but, on considère que la poutre est simplement appuyée repose sur une fondation élastique. Plusieurs comparaisons seront effectuées pour vérifier l'efficacité et les avantages du modèle développé pour l'analyse vibratoire des poutres isotropes et en (F.G.M.). Par la suite, plusieurs études paramétriques seront présentées et discutées en détails pour montrer les différents facteurs influençant sur les fréquences propres de la poutre. À savoir le rapport de dimension, le rapport de géométrie, la fraction volumique et le type de distribution à travers l'épaisseur de la poutre en (F.G.M.).

### IV.2 Résultats numériques et interprétations

Dans cette section, quelques illustrations numériques sont réalisées et discutées pour prouver l'efficacité et la précision des théories proposées pour l'analyse des réponses dynamiques des poutres isotropes homogènes et en (F.G.M.) simplement supportées. Les entités non dimensionnelles ont été utilisées comme les formules suivantes :

$$\hat{\omega} = \omega \frac{L^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}}, \quad \tilde{\omega} = \omega L^2 \sqrt{\frac{\rho_m A}{E_m I}}, \quad \varpi = \omega \frac{L^2}{h} \sqrt{\frac{I_a}{A_0}} \quad (\text{IV. 1})$$

#### IV.2.1 Poutre simplement supportée en (F.G.M.)

La structures est modélisé en se basant sur la théorie de déformation de cisaillement a trois variables développé dans le chapitre précédent.

La surface inférieure de la structure est en Aluminium pur, alors que la surface supérieure de la structure est de l'alumine pure. Les propriétés matérielles sont les suivantes

Métal (Aluminium, Al) :  $E_m = 70N / m$  ;  $\nu = 0.3$  ;  $\rho_m = 2702Kg / m^3$ .

Céramique (Alumine,  $Al_2O_3$ ) :  $E_c = 380N / m$  ;  $\nu = 0.3$  ;  $\rho_c = 3960Kg / m^3$ .

Le tableau (IV.1) montre Les résultats des paramètres de la fréquence naturelle adimensionnelle ( $\tilde{\omega}$ ) des poutres élancées en matériaux fonctionnellement gradués simplement appuyées sont comparé avec les études de Avcar (2018) et Wattanasakulpong et Ungbhakom (2012) sont basées sur la théorie d'Euler Bernoulli ou (C.B.T.) en conjonction avec la méthode de transformation différentielle, respectivement.

**Tableau IV. 1 :** Comparaison des valeurs du paramètre de fréquences ( $\tilde{\omega}$ ) des poutres fonctionnellement graduées simplement appuyées

L/h	mode	Modèle	$p = 0$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 5$	AL
100	1	Présent modèle	5.482	4.220	3.851	3.667	2.849
		Ref <sup>a</sup>	5.483	4.221	3.852	3.668	2.849
		Ref <sup>b</sup>	5.483	4.221	3.852	3.668	2.849
	2	Présent modèle	21.919	16.873	15.397	14.667	11.389
		Ref <sup>a</sup>	21.933	16.884	15,407	14,67	11.396
		Ref <sup>b</sup>	21.933	16.884	15,407	14.658	11.396
	3	Présent modèle	49.275	37.937	34.615	32.945	25.603
		Ref <sup>a</sup>	49,35	37,989	34,667	33,007	25,642
		Ref <sup>b</sup>	49,35	37,989	34,667	33,007	25,642

<sup>(a)</sup>: (Avcar and Mohammed, 2018); <sup>(b)</sup>: (Wattanasakulpong et Ungbhakorn, 2012)

On peut conclure qu’une bonne concordance est confirmée entre les résultats actuels et ceux des autres modèles existants. On constate à partir de ce tableau que la fréquence naturelle adimensionnelle est en relation inverse avec le paramètre de matériaux car en augmentant ce paramètre, la structure devient souple (métallique). Il est a noté aussi que l’augmentation du nombre du mode de vibration conduit à une augmentation des valeurs de la fréquence adimensionnelle.

L’effet du rapport d’élancement, le rapport des modules et l’indice de la loi de puissance non-négative sur les trois premières fréquences naturelles adimensionnelles sont présentés dans les tableaux (IV.2), (IV.3) et (IV,4).

**Tableau IV. 2 :** Comparaison de la première fréquence fondamentale( $\tilde{\omega}$ ) pour les différents distributions de matériau ( $R_E = E_c / E_m$  et  $\rho_c / \rho_m = 1$ )

$L/h$	Modèle	$R_E$	$p = 0$	$p = 0.1$	$p = 0.2$	$p = 0.5$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 5$	$p = 10$
20	Présente	0.25	2.2167	2.3706	2.4572	2,5937	2.7001	2.8019	2.9263	3.0043
	Ref <sup>c</sup>		2.2203	2.3746	2.4614	2.5979	2.7041	2.8057	2.9302	3.0085
	Ref <sup>d</sup>		2.2203	2.3739	2.4606	/	2.7035	2.8053	/	3.0084
	Présente	0.5	2.6361	2.7063	2.7531	2.8317	2.8902	2.9418	3.006	3.0518
	Ref <sup>c</sup>		2.6404	2.7107	2.7573	2.8363	2.8946	2.9461	3.011	3.0563
	Ref <sup>d</sup>		2.6403	2.7104	2.757	/	2.8944	2.9459	/	3.0562
	Présente		3.1349	3.1350	3.1349	3.1349	3.13498	3.1350	3.13	3.1350

20	Ref <sup>c</sup>	1.00	3.14	3.14	3.14	3.14	3.14	3.14	3.14	3.14
	Ref <sup>d</sup>		3.1399	3.1399	3.1399	/	3.1399	3.1399	/	3.1399
	Présente	2.0	3.7281	3.6715	3.6244	3.5242	3.4369	3.3712	3.3136	3.2667
	Ref <sup>c</sup>		3.7341	3.6773	3.63	3.5296	3.4423	3.3765	3.3196	3.2726
	Ref <sup>d</sup>		3.734	3.6775	3.6301	/	3.4421	3.3765	/	3.2725
	Présente	4.0	4.4335	4.3299	4.2391	4.0287	3.8185	3.6436	3.5253	3.4475
	Ref <sup>c</sup>		4.4406	4.3366	4.2455	4.0346	3.8241	3.6496	3.5326	3.4549
Ref <sup>d</sup>	4.4406		4.337	4.2459	/	3.8234	3.6485	/	3.4543	
100	Présente	0.25	2.2212	2.3756	2.4624	2.5990	2.7052	2.8069	2.9314	3.0098
	Ref <sup>c</sup>		2.2214	2.3798	2.4683	2.6074	2.7159	2.8071	2.9317	3.01
	Ref <sup>d</sup>		2.2213	2.3798	2.4621	/	2.7053	2.8071	/	3.01
	Présente	0.5	2.6415	2.7118	2.7588	2.837	2.8958	2.9474	3.0123	3.0576
	Ref <sup>c</sup>		2.6417	2.7121	2.759	2.377	2.8961	2.9476	3.0125	3.0578
	Ref <sup>d</sup>		2.6416	2.7121	2.7587	/	2.896	2.9475	/	3.0578
	Présente	1.0	3.1413	3.1413	3.1413	3.1413	3.1413	3.1413	3.1413	3.2740
	Ref <sup>c</sup>		3.1415	3.1415	3.1415	3.1415	3.1415	3.1415	3.1415	3.1415
	Ref <sup>d</sup>		3.1415	3.1415	3.1415	/	3.1415	3.1415	/	3.1415
	Présente	2.0	3.7356	3.6788	3.6315	3.5311	3.4438	3.3781	3.3210	3.2740
	Ref <sup>c</sup>		3.7359	3.6791	3.6317	3.5313	3.444	3.444	3.3213	3.2743
	Ref <sup>d</sup>		3.7359	3.6793	3.632	/	3.444	3.444	/	3.2742
	Présente	4.0	4.4425	4.3384	4.2473	4.0363	3.8257	3.6511	3.5340	3.4563
	Ref <sup>c</sup>		4.4428	4.3388	4.2476	4.0366	3.826	3.826	3.5341	3.4565
	Ref <sup>d</sup>		4.4427	4.3392	4.2481	/	3.8259	3.8259	/	3.4566

<sup>(c)</sup>: (Alshorbagy et al, 2011) ; <sup>(d)</sup>: (Şimşek and Kocatürk, 2009)

Les résultats calculés par la présente formulation d'ordre élevé sont comparés avec ceux obtenus par la méthode des éléments finis développée par Alshorbagy et al(2011) ; Şimşek et Kocatürk, (2009) en utilisant la théorie classique des poutres.

Un bon accord est remarqué entre les résultats du présent modèle et ceux des autres théories existantes (Alshorbagy et al., 2011), (Şimşek et Kocatürk.,2009) dans le cas des poutres élancées.

**Tableau IV. 3 :** Comparaison de la deuxième fréquence naturel ( $\tilde{\omega}$ ) pour les différents distributions de matériau

$L/h$	Modèle	$R_E$	$p = 0$	$p = 0.1$	$p = 0.2$	$p = 0.5$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 5$	$p = 10$
20	Présente	0.25	4.4062	4.7107	4.8828	5.1556	5.3690	5.5732	5.8207	5.9747
	Ref <sup>c</sup>		4.4339	4.7417	4.9145	5.1865	5.3985	5.6019	5.8511	6.0077
	Présente	0.5	5.2399	5.3786	5.4713	5.6279	5.7453	5.8495	5.9791	6.0681
	Ref <sup>c</sup>		5.2727	5.4131	5.5066	5.6635	5.7800	5.8829	6.0126	6.1032
	Présente	1	6.2314	6.2314	6.2314	6.2314	6.2314	6.2314	6.2314	6.2314
	Ref <sup>c</sup>		6.2703	6.2703	6.2703	6.2703	6.2703	6.2703	6.2703	6.2703
	Présente	2	7.4104	7.2985	8.4281	7.0065	6.8325	6.6995	6.5823	6.4894
	Ref <sup>c</sup>		7.4567	7.3432	7.2487	7.0480	6.8736	6.7425	6.6287	6.5350
	Présente	4	8.8125	8.6077	8.4281	8.0110	7.5929	7.2418	6.9984	6.8422
	Ref <sup>c</sup>		8.8676	8.6598	8.4778	8.0558	7.6347	7.2851	7.0519	6.8978
100	Présente	0.25	4.4414	4.7500	4.9236	5.1967	5.4092	5.6127	5.8617	6.0183
	Ref <sup>c</sup>		4.4425	4.7513	4.9249	5.1980	5.4104	5.6139	5.8629	6.0196
	Présente	0.5	5.2817	5.4224	5.5162	5.6735	5.7903	5.8934	6.0232	6.1138
	Ref <sup>c</sup>		5.2830	5.4238	5.5176	5.6750	5.7918	5.8948	6.0246	6.1152
	Présente	1	6.2811	6.2811	6.2811	6.2811	6.2811	6.2811	6.2811	6.2811
	Ref <sup>c</sup>		6.2827	6.2826	6.2827	6.2827	6.2826	6.2827	6.2827	6.2827
	Présente	2	7.4695	7.3559	7.2612	7.0605	6.8859	6.7546	6.6402	6.5462
	Ref <sup>c</sup>		7.4713	7.3577	6.2826	7.0622	6.8876	6.7564	6.6421	6.5481
	Présente	4	8.8828	8.6749	8.4927	8.0707	7.6498	7.3004	7.0659	6.9104
	Ref <sup>c</sup>		8.8850	8.6770	8.4947	8.0726	7.6515	7.3022	7.0682	6.9127

(<sup>c</sup>): (Alshorbagy et al, 2011)

**Tableau IV. 4 :** Comparaison de la troisième fréquence naturelle ( $\tilde{\omega}$ ) pour les différentes distributions de matériau

$L/h$	Modèle	$R_E$	$p=0$	$p=0.1$	$p=0.2$	$p=0.5$	$p=1$	$p=2$	$p=5$	$p=10$
20	Ref <sup>c</sup>	0.2	6.6338	7.0947	7.3537	7.7611	8.0783	8.3823	8.7546	8.58
	Présente		6.5446	6.9937	7.2493	7.6577	7.9792	8.2865	8.6551	8.8813
	Ref <sup>c</sup>	0.5	7.889	8.0991	8.2392	8.2392	8,6483	8.8022	8.9962	9.1316
	Présente		7.7829	7.9872	8.1244	8.358	8.5352	8.6931	8.8869	9.0177
	Ref <sup>c</sup>	1	9.3817	9.387	9.3817	9,382	9.3817	9.3817	9.3817	9.3817
	Présente		9.2555	9.2555	9.2555	9.2555	9,2555	9.2555	9.2555	9.2555
	Ref <sup>c</sup>	2	11.157	10.987	10.846	10,546	10,285	10.089	9.9182	9.7779
	Présente		11.007	10.8418	10,7042	10,41	10.1501	9.9476	9.7671	9.6299
	Ref <sup>c</sup>	4	13.268	12.957	12.685	12,054	11.424	10.902	10.551	10.322
	Présente		13.089	12.7877	12,5228	11,9061	11.2843	10.7549	10.375	10.139
	Présente		6.6593	7.1219	7.3821	7.7917	8.1106	8.4158	8.7892	9.0239
	100	Ref <sup>c</sup>	0.5	7.9238	8.1349	8.2756	8.5116	8.687	8.8413	9.036
Présente		7.9192		8.1301	8.2707	8.5066	8.6819	8.8366	9.0313	9.1670
Ref <sup>c</sup>		1	9,423	9.423	9.423	9.423	9.423	9.423	9.423	9.423
Présente			9.4176	9.4176	9.4176	9.4176	9.4176	9.4176	9.4176	9.4176
Ref <sup>c</sup>		2	11.206	11.035	10.893	10.108	10.33	10.134	9.9622	9.8212
Présente			11.2	11.0292	10,887	10.5864	10.3246	10.1275	9.9557	9.8148
Ref <sup>c</sup>		4	13.326	13.014	12.741	12.108	10.476	10.952	10.601	10.368
Présente			13.318	13.0069	12.7338	12.1013	11.4701	10.9459	10.594	10.36

(<sup>c</sup>): (Alshorbagy et al, 2011)

A partir des tableaux (IV.2) et (IV.3) et (IV.4), on remarque aussi que la fréquence adimensionnelle augmente avec l'augmentation du paramètre  $p$  dans le cas ( $R_E < 1$ ) par contre cette fréquence diminue avec l'augmentation de l'indice  $p$  dans le cas ( $R_E > 1$ ) Pour un rapport  $R_E = 1$  les valeurs de la fréquence restent constantes quel que soit la variation de l'indice  $p$  car la structure est isotrope. On peut observer que l'augmentation des valeurs du rapport des modules  $R_E$  conduit à une augmentation des valeurs des fréquences naturelles adimensionnelles des poutres simplement appuyées.

En comparant les trois tableaux on peut remarquer que :

- L'effet de la déformation de cisaillement transverse devient plus significatif dans le cas des modes de vibration libre élevée.

**Tableau IV. 5 :** La variation de la fréquence adimensionnelle ( $\tilde{\omega}$ ) pour les différentes distributions de matériau et le rapport d'élanement

L/h	Mode	Modèle	$p=0$	$p=0.1$	$p=0.2$	$p=0.5$	$p=1$	$p=2$	$p=5$	$p=10$
20	1	Ref <sup>c</sup>	4.3425	4.2817	4.2315	4.1262	4.0359	3.9684	3.9075	3.8572
		Présente	4.3425	4.1856	4.0696	3.8411	3.6503	3.4974	3.3638	3.2876
	2	Ref <sup>c</sup>	8.6716	8.5503	8.45	8.2397	8.0585	7.9245	7.803	7.7026
		Présente	8.6178	8.3200	8.0895	7.6356	7.2557	6.9501	6.6826	6.5318
	3	Ref <sup>c</sup>	12.875	12.793	12.643	12.328	12.058	11.856	11.675	11.525
		Présente	12.800	12.3585	12.0166	11.342	10.776	10.319	9.9178	9.6948
	4	Ref <sup>c</sup>	17.239	16.997	16.798	16.378	16.02	15.752	15.511	15.312
		Présente	16.847	16.2671	15.8177	14.931	14.184	13.576	13.040	12.7487
	5	Ref <sup>c</sup>	21.453	21.153	20.904	20.382	19.934	19.599	19.301	19.054
		Présente	20.736	20.0238	19.4718	18.381	17.459	16.7018	16.033	15.676
50	1	Ref <sup>c</sup>	4.2444	4.2836	4.2333	4.1279	4.0377	3.9701	3.9092	3.8589
		Présente	4.3432	4.193	4.0766	3.8478	3.6568	3.5039	3.3702	3.2939
	2	Ref <sup>c</sup>	8.6866	8.565	8.4646	8.2539	8.0734	7.9382	7.8165	7.7159
		Présente	8.6777	8.3775	8.1452	7.688	7.3062	7.000	6.7330	6.5806
	3	Ref <sup>c</sup>	13.025	12.842	12.692	12.376	12.105	11.902	11.72	11.569
		Présente	12.994	12.545	12.1976	11.512	10.941	10.482	10.08	9.8532
	4	Ref <sup>c</sup>	17.356	17.113	16.912	16.491	16.131	15.861	15.617	15.417
		Présente	17.286	16.689	16.2262	15.315	14.554	13.943	13.408	13.1049

A suivre

5	Ref <sup>c</sup>	21.679	21.376	21.125	20.599	20.148	19.811	19.507	19.256	
	Présente	21.544	20.800	20.2238	19.089	17.375	17.3754	16.707	19.256	
100	1	Ref <sup>c</sup>	4.3446	4.2836	4.2333	4.1282	4.0379	3.9703	3.9094	3.8591
		Présente	4.3443	4.1940	4.0777	3.8487	3.6577	3.5048	3.3712	3.2948
	2	Ref <sup>c</sup>	8.6688	8.5671	8.4666	8.2559	8.0754	7.9402	7.8184	7.7178
		Présente	8.6865	8.3859	8.1533	7.6956	7.3136	7.007	6.7404	6.5878
	3	Ref <sup>c</sup>	13.032	12.849	12.699	12.383	12.112	11.909	11.726	11.575
		Présente	13.024	12.574	12.225	11.539	10.966	10.507	10.106	9.8772
	4	Ref <sup>c</sup>	17.373	17.13	16.929	16.508	16.147	15.876	15.633	15.412
		Présente	17.355	16.755	16.2904	15.376	14.612	14.001	13.466	13.1612
	5	Ref <sup>c</sup>	21.712	21.409	21.157	20.631	20.18	19.842	19.537	19.286
		Présente	21.678	20.928	20.3478	19.205	18.251	17.487	16.819	16.4382

<sup>(c)</sup>: (Alshorbagy et al, 2011)

Le tableau (IV.5) représente les fréquences adimensionnelles des poutres simplement appuyées en matériaux fonctionnellement gradués.

Les fréquences sont calculées en fonction du rapport d'élanement, l'indice de puissance et le nombre des modes de vibration. Les résultats obtenus, en utilisant le modèle actuel basée sur la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé sont comparés avec ceux de Alshorbagy et al, (2011) basé sur la méthode des éléments finis en conjonction avec la théorie classique des poutres. Les résultats tabulés dans le tableau (IV.5) montrent que :

- Les résultats sont proches dans le cas des poutres isotropes pour des modes de vibration inférieure.
- On constate aussi une divergence entre les résultats dans le cas des modes de vibration important car le modèle de Şimşek et Kocatürk, (2009) néglige l'effet de la déformation de cisaillement transverse.

Le tableau (IV.6) présente les fréquences naturelles adimensionnelles ( $\hat{\omega}$ ) sont obtenues pour les différentes valeurs de l'indice de puissance, le nombre de mode et du rapport d'élanement  $L/h$ . Les résultats sont comparés avec ceux présentés par Reddy, (1984). Sayyad and Ghugal, (2018). Şimşek, (2010). Thai and Vo, (2012). Vo et al (2014) et Timoshenko (1921) et ceux de la théorie classique des poutres.

**Tableau IV. 6 :** Comparaison des trois premières fréquences adimensionnelles ( $\hat{\omega}$ ) des poutres en (F.G.M.) en fonction des valeurs de l'indice de puissance

$L/h$	Mode	Théorie	$p = 0$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 5$	$p = 10$	
5	1	Présente	5.1528	3.9904	3.6263	3.4006	3.2813	
		Ref <sup>e</sup>	5.1527	3.9904	3.6264	3.4012	3.2816	
		Ref <sup>f</sup>	5.1527	3.9904	3.6264	3.4012	3.2816	
		Ref <sup>g</sup>	5.1527	3.9904	3.6264	3.4012	3.2816	
		Ref <sup>h</sup>	5.1527	3.9716	3.5979	3.3742	3.2653	
		Ref <sup>i</sup>	5.1524	3.9902	3.6343	3.4311	3.3134	
		CBT	5.3953	4.1484	3.7793	3.5949	3,4921	
	2	Présente	17.882	14.011	12.640	11.539	11.022	
		Ref <sup>g</sup>	17.881	14.009	12.64	11.544	11.024	
		CBT	20.618	15.798	14.326	13.587	13.237	
	3	Présente	34.216	27.102	24.316	21.707	20.555	
		Ref <sup>g</sup>	34.208	27.097	24.315	21,718	20.556	
		CBT	43.348	33.027	29.745	28.085	27.475	
	20	1	Présente	5.460	4.205	3.836	3.648	3.539
			Ref <sup>e</sup>	5.4603	4.205	3.8361	3,6485	3.5389
			Ref <sup>f</sup>	5.4603	4.205	3.8361	3,6485	3.5389
			Ref <sup>g</sup>	5.4603	4.205	3.8361	3,6485	3.5389
			Ref <sup>h</sup>	5.4603	4.205	3.8342	3,6485	3.5378
Ref <sup>i</sup>			5.4603	4.2038	3.8367	3,6485	3.5415	
CBT			5.4777	4.2163	3.8472	3,6485	3.5547	
2		Présente	21.573	16.634	15.162	14.374	13.926	
		Ref <sup>g</sup>	21.573	16.634	15.161	14.374	13,926	
		CBT	21.843	16.81	15.333	14.595	14.167	
3		Présente	47.593	36.768	33.468	31.575	30.535	
		Ref <sup>g</sup>	47.593	36.767	33.469	31.579	30.537	
		CBT	48.899	37.617	34.295	32.636	31.688	

<sup>(e)</sup>(Reddy, 1984) ; <sup>(f)</sup>(Şimşek, 2010) ; <sup>(g)</sup>(Thai and Vo, 2012) ; <sup>(h)</sup>(Vo et al., 2014) <sup>(i)</sup>(Timoshenko, 1921)

Le tableau (IV.6) illustre que les fréquences naturelles calculées par le modèle présenté dans ce travail de recherche sont en excellent accord avec ceux obtenues avec d'autres chercheurs.

- Les résultats numériques présentés montrent que tous les théories de déformation de cisaillement prédire presque les mêmes valeurs des fréquences.
- Cependant, la théorie classique des poutres (Euler Bernoulli) surestime tous les valeurs des fréquences car elle néglige l'effet de la déformation de cisaillement transverse.

Les tableaux (IV.7) et (IV.8) présentent les six premières fréquences naturelles adimensionnelles des poutres en matériaux fonctionnellement gradués simplement appuyées avec un indice de non homogénéité  $p = 2$  et les rapports de modules  $R_E = 0.5$  et  $2$ , respectivement.

**Tableau IV. 7 :** Comparaison et convergence des six premières fréquences naturelles des poutres en matériaux fonctionnellement gradués ( $R_E = 0.5$ ).

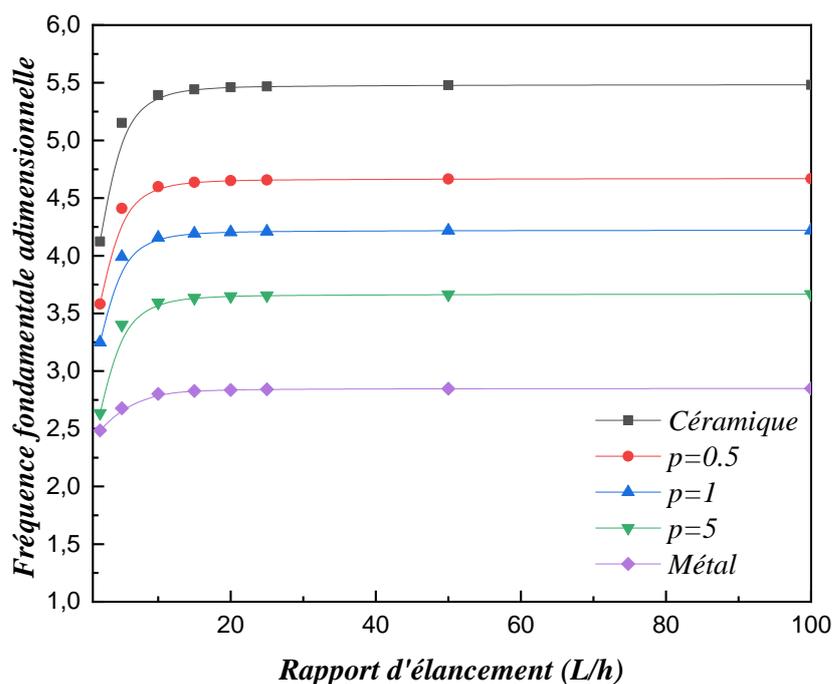
Théorie	Nombre d'éléments	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_5$	$\omega_6$
(M.E.F.) (Kumar, 2019)	6	2.9718	5.9538	9.0776	11.9792	15.9196	19.6760
	8	2.9713	5.9463	8.9450	11.9350	15.4421	18.3348
	10	2.9712	5.9438	8.9245	11.9256	15.0271	17.8877
	15	2.9711	5.9425	8.9154	11.8927	14.8800	17.8854
	18	2.9711	5.9424	8.9143	11.8884	14.8672	17.8548
	20	2.9711	5.9424	8.9140	11.8870	14.8631	17.8450
(D.Q.M.) (Kumar, 2019)	10	2.9711	5.9377	9.1127	12.8014	12.8014	13.2845
	15	2.9711	5.9423	8.9133	11.8901	14.9077	17.5143
	18	2.9711	5.9423	8.9134	11.8846	14.8538	17.8108
	19	2.9711	5.9423	8.9134	11.8846	14.8559	17.8199
	20	2.9711	5.9423	8.9134	11.8845	14.8558	17.8282
(R.R.M.) (Kumar, 2019)	6	2.9711	5.9423	8.9889	12.1326	21.3250	27.7222
	8	2.9711	5.9423	8.9145	11.8925	15.4499	18.9988
	10	2.9711	5.9423	8.9134	11.8846	14.8893	17.9279
	13	2.9711	5.9423	8.9134	11.8845	14.8557	17.8308
	15	2.9711	5.9423	8.9134	11.8845	14.8557	17.8269
Présent modèle	/	2.9474	5.8934	8.8366	11.7756	14.7091	17.6356

**Tableau IV. 8 :** Comparaison et convergence des six premières fréquences naturelles des poutres en matériaux fonctionnellement gradués ( $R_E = 2$ )

Théorie	Nombre d'éléments	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_5$	$\omega_6$
(M.E.F.) (Kumar, 2019)	6	3.4181	6.8479	10.4407	13.7780	18.3101	22.6306
	8	3.4175	6.8392	10.2883	13.7272	17.7609	21.0880
	10	3.4174	6.8364	10.2647	13.7163	17.2837	20.5737
	15	3.4173	6.8349	10.2542	13.6786	17.1144	20.5711
	18	3.4173	6.8347	10.2529	13.6736	17.0997	20.5359
	20	3.4173	6.8347	10.2526	13.6720	17.0950	20.5247
(D.Q.M.) (Kumar, 2019)	10	3.4172	6.8293	10.4810	14.7237	14.7237	15.2793
	15	3.4173	6.8346	10.2518	13.6756	17.1463	20.1443
	18	3.4173	6.8346	10.2519	13.6692	17.0843	20.4853
	19	3.4173	6.8346	10.2519	13.6692	17.0868	20.4957
	20	3.4173	6.8346	10.2519	13.6692	17.0866	20.5053
(R.R.M.) (Kumar, 2019)	6	3.4173	6.8346	10.3387	13.9545	24.5272	31.8850
	8	3.4173	6.8346	10.2531	13.6783	17.7699	21.8517
	10	3.4173	6.8346	10.2519	13.6693	17.1251	20.6201
	13	3.4173	6.8346	10.2519	13.6692	17.0865	20.5084
	15	3.4173	6.8346	10.2519	13.6692	17.0865	20.5038
Présent modèle	/	3.3782	6.7546	10.1275	13.4951	16.8558	20.2077

Encore une fois, il est clair que dans le cas des modes de vibration fondamentales et un nombre d'élément tend vers 20, les présents résultats sont en excellent accord avec ceux obtenus par le modèle de Rayleigh–Ritz, la méthode quadratique différentielle et la méthode des éléments finis.

La figure (IV.1) montre l'effet du paramètre de la fraction volumique et le rapport d'élanement de la structure sur la fréquence fondamentale adimensionnelle ( $\hat{\omega}$ ).

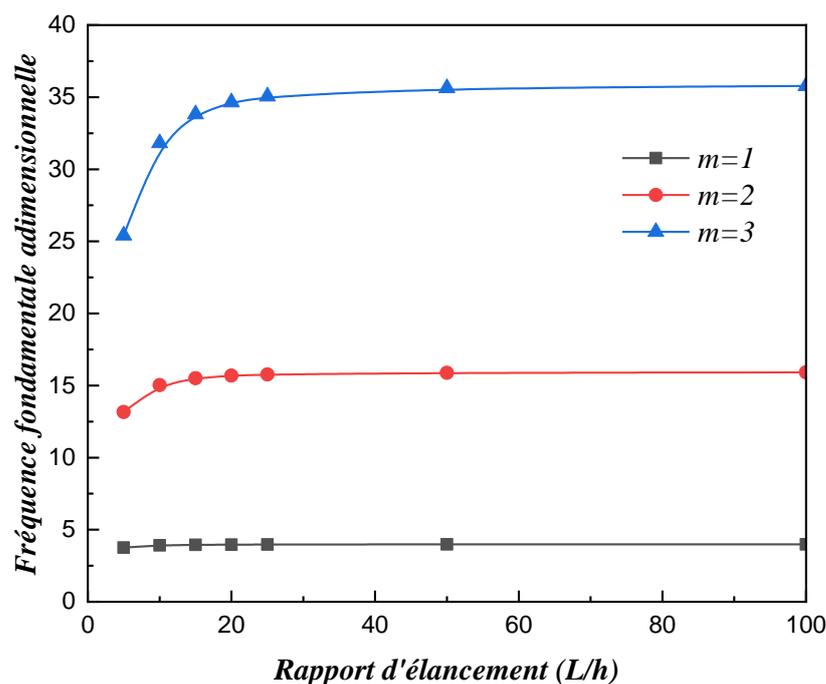


**Figure IV. 1 :** L'effet des valeurs de l'indice de puissance ( $p$ ) sur les fréquences fondamentales adimensionnelles ( $\hat{\omega}$ ) des poutres en (F.G.M.) simplement appuyées.

. À partir des courbes tracées, on peut constater que :

- la fréquence fondamentale adimensionnelle diminue avec l'augmentation de paramètre de matériaux ( $p$ ) car la poutre devient de plus en plus métallique (c'est-à-dire la poutre est souple).
- Il est clair aussi d'après la figure (VI.1) que la fréquence fondamentale adimensionnelle est en relation de corrélation directe avec le rapport d'élanement ( $L/h$ ).
- Il est a noté que la fréquence fondamentale adimensionnelle augmente puis elle devient constante à partir de ( $L/h=25$ ) car l'effet de la déformation de cisaillement devient négligeable dans le cas des poutres élancées.

La figure (IV.2) Montre L'impact du nombre des modes de vibration et le rapport d'élanement ( $L/h$ ) sur la variation des fréquences naturelles ( $\hat{\omega}$ ) des poutres en (F.G.M.) simplement appuyées.

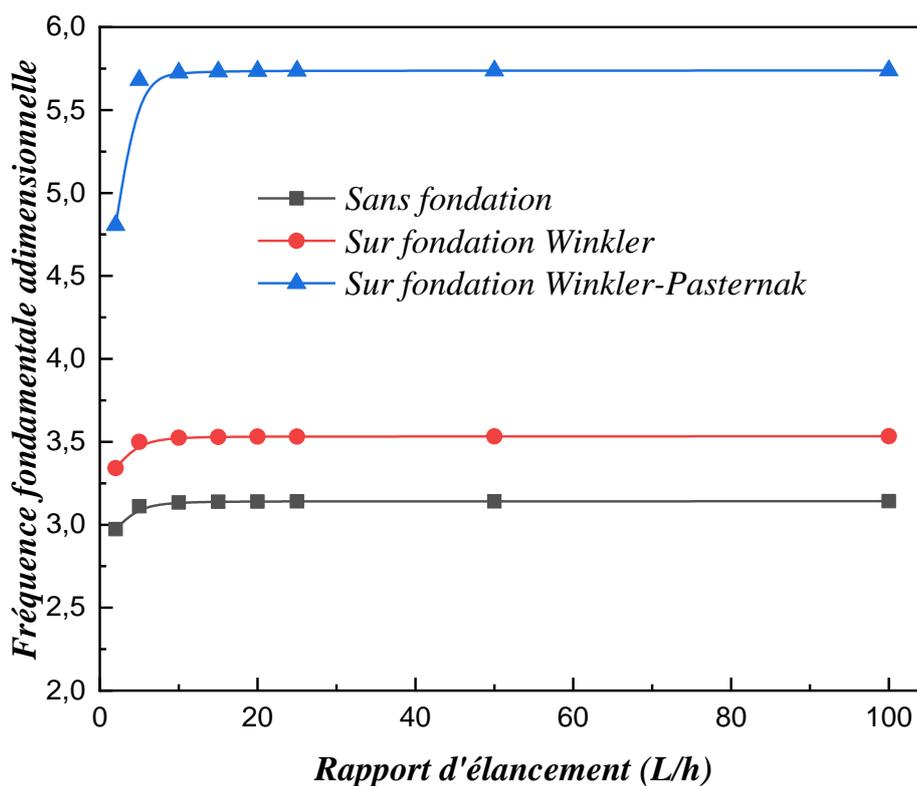


**Figure IV. 2 :** L'impact du nombre du mode de vibration et le rapport d'élanement ( $L/h$ ) sur la vibration des fréquences fréquence fondamentale adimensionnelle ( $\hat{\omega}$ ) des poutres en (F.G.M.) ( $P=1,5$ ).

On peut noter que :

- L'augmentation des valeurs du rapport ( $L/h$ ) conduit à une augmentation des valeurs de la fréquence naturelle car la poutre devient flexible.
- Cette augmentation devient considérable dans le cas des modes vibratoire élevés. Par contre cette augmentation est légère dans le cas du premier mode vibratoire car c'est le mode le plus simple.

La figure (IV.3) présente la variation de la fréquence fondamentale adimensionnelle ( $\varpi$ ) des poutres en (F.G.M.) pour ( $P=2$ ) simplement appuyées (reposant sur une fondation de type Winkler, une fondation de type Winkler-Paternak et sans fondation).



**Figure IV. 3 :** L'effet du type de fondation élastique et le rapport d'élanement sur les fréquences fondamentales adimensionnelles ( $\varpi$ ) des poutres en (F.G.M.) simplement appuyées.

A partir des courbes tracées, on remarque que :

- La présence d'une fondation élastique conduit à une augmentation des valeurs des fréquences fondamentales adimensionnelles car la présence de la fondation augmente la rigidité de la poutre.
- L'effet de la déformation du cisaillement transverse devient significatif dans le cas des poutres sur fondation de type Winkler-Pasternak. La présence de la couche de cisaillement de Pasternak augmente les fréquences.

### IV.2.2 Poutre isotrope simplement supportée

Les tableaux (IV.9) et (IV.10) montrent respectivement les comparaisons des six premières fréquences naturelles adimensionnelles des poutres isotropes flexible et rigide simplement appuyées.

**Tableau IV. 9 :** Comparaison et convergence des six premières fréquences naturelles des poutres rigides isotropes simplement appuyées

Théorie	Nombre d'élément	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_5$	$\omega_6$
(M.E.F.) (Kumar, 2019)	6	2.6424	5.2938	8.0712	10.6512	14.1547	17.4947
	8	2.6419	5.2871	7.9534	10.6119	13.7302	16.3022
	10	2.6418	5.2849	7.9351	10.6035	13.3612	15.9046
	15	2.6418	5.2838	7.9270	10.5743	13.2304	15.9026
	18	2.6418	5.2836	7.9261	10.5704	13.2190	15.8754
	20	2.6418	5.2836	7.9258	10.5692	13.2154	15.8667
(D.Q.M.) (Kumar, 2019)	10	2.6417	5.2794	8.1024	11.3823	11.3823	11.8118
	15	2.6418	5.2835	7.9252	10.5720	13.2550	15.5727
	18	2.6418	5.2835	7.9253	10.5670	13.2071	15.8362
	19	2.6418	5.2835	7.9253	10.5670	13.2090	15.8443
	20	2.6418	5.2835	7.9253	10.5670	13.2089	15.8517
(R.R.M.) (Kumar, 2019)	6	2.6418	5.2836	7.9924	10.7876	18.9609	24.6489
	8	2.6418	5.2835	7.9262	10.5741	13.7371	16.8925
	10	2.6418	5.2835	7.9253	10.5671	13.2387	15.9404
	13	2.6418	5.2835	7.9253	10.5670	13.2088	15.8541
	15	2.6418	5.2835	7.9253	10.5670	13.2088	15.8506
Présent modèle	/	2.6415	5.2817	7.9192	10.5528	13.1810	15.8027

Les résultats sont calculés en utilisant la présente théorie de déformation de cisaillement avec deux variables.

On peut observer que les résultats actuels sont en bon accord avec ceux des autres modèles existants dans la littérature tel que la méthode des éléments finis, la méthode quadratique différentielle et le modèle de Rayleigh–Ritz dans le cas où le nombre des éléments égal à 20, par

contre les résultats d'autres modèles sont divergent pour un nombre d'éléments petits et un nombre de mode élevé.

**Tableau IV. 10 :** Comparaison et convergence des six premières fréquences naturelles des poutres en FGM simplement appuyées

Théorie	Nombre d'éléments	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_5$	$\omega_6$
(M.E.F.) (Kumar, 2019)	6	3.7369	7.4866	11.4144	15.0630	20.0178	24.7413
	8	3.7362	7.4771	11.2478	15.0074	19.4174	23.0547
	10	3.7361	7.4740	11.2220	14.9956	18.8956	22.4925
	15	3.7360	7.4724	11.2105	14.9543	18.7106	22.4897
	18	3.7360	7.4722	11.2092	14.9489	18.6945	22.4512
	20	3.7360	7.4721	11.2088	14.9471	18.6894	22.4389
(D.Q.M.) (Kumar, 2019)	10	3.7359	7.4662	11.4586	16.0969	16.0969	16.7044
	15	3.7360	7.4720	11.2079	14.9510	18.7454	22.0231
	18	3.7360	7.4720	11.2080	14.9441	18.6777	22.3958
	19	3.7360	7.4720	11.2080	14.9440	18.6804	22.4073
	20	3.7360	7.4720	11.2080	14.9440	18.6802	22.4177
(R.R.M.) (Kumar, 2019)	6	3.7360	7.4721	11.3029	15.2560	26.8147	34.8588
	8	3.7360	7.4720	11.2094	14.9540	19.4272	23.8897
	10	3.7360	7.4720	11.2080	14.9441	18.7223	22.5432
	13	3.7360	7.4720	11.2080	14.9440	18.6800	22.4211
	15	3.7360	7.4720	11.2080	14.9440	18.6800	22.4161
Présent modèle	/	3.7357	7.4695	11.1995	14.9239	18.6407	22.3483

Tableau (IV.11) présente les valeurs des fréquences naturelles adimensionnelles ( $\varpi$ ) des poutres simplement appuyées sans et avec fondation élastique de type Winkler et Winkler-Pasternak.

**Tableau IV. 11 :** Comparaison des valeurs du paramètre de fréquence ( $\varpi$ ) des poutres homogènes simplement appuyées

$L/h$	Modes	Fréquences	Présent modèle	Ref <sup>j</sup>	Ref <sup>a</sup>
100	1	$\varpi$	3.142	3.142	3.142
		$\varpi_w$	3.533	3.533	3.533
		$\varpi_{wp}$	3.588	3.588	3.588
	2	$\varpi$	6.283	6.283	6.283
		$\varpi_w$	6.341	6.341	6.341
		$\varpi_{wp}$	6.379	6.380	6.380
	3	$\varpi$	9.423	9.425	9.425
		$\varpi_w$	9.440	9.442	9.442
		$\varpi_{wp}$	9.467	9.468	9.468

<sup>(a)</sup>: (Avcar and Mohammed, 2018) ; <sup>(j)</sup>: (Obara, 2014)

Les résultats sont calculés pour le premier et le deuxième et troisième mode de vibration.

A partir de la comparaison effectuée avec les résultats de Obara (2014) et Avcar (2018) basés sur la théorie de Euler Bernoulli, il est clair que :

- Les résultats actuels sont presque identiques à ceux d'Obara (2014) et Avcar (2018).
- On peut constater que la fréquence adimensionnelle est en relation de corrélation directe avec le nombre de modes.

D'après le tableau (IV.11) on peut conclure qu'une poutre sur une fondation élastique donne les plus grandes valeurs des fréquences nature adimensionnelles car la structures devient plus rigide.

Le tableau (IV.12) Présente la comparaison des fréquences fondamentales ( $\varpi$ ) adimensionnelles des poutres isotropes simplement appuyées sans et avec fondation élastique en fonction du rapport d'élanement  $L/h$ .

**Tableau (IV. 12) :** Le paramètre de fréquence naturelle ( $\varpi$ ) des poutres simplement appuyées reposant sur des fondations élastiques

Paramètre des fondations		h=L/120				h=L/15			h=L/5		
$K_w$	$K_p/\pi^2$	Présente	Ref <sup>k</sup>	exact	Ref <sup>l</sup>	Présente	Ref <sup>k</sup>	exact	Présente	Ref <sup>k</sup>	exact
0	0	3.1414	3.1414	3.1414	3.1415	3.1299	3.1302	3.1302	3,0454	3.0480	3.0480
	0.5	3.4766	3.4765	3.4766	3.4767	3.4671	3.4667	3.4667	3,3987	3.3946	3.3946
	1	3.7359	3.7359	3.7359	3.7360	3.7274	3.7266	3.7266	3,6671	3.6580	3.6580
	2.5	4.2969	4.2969	4.2969	4.2970	4.2897	4.2881	4.2881	4,2395	4.2183	4.2183
10 <sup>2</sup>	0	3.7482	3.7482	3,6705	3,6705	3,6798	3,6705	3,6705	3,6798	3,6705	3,6705
	0.5	3.9607	3.9607	3,9607	3,9608	3,8970	3,8840	3,8840	3,8970	3,8840	3,8840
	2	4,1436	4.1436	4,1436	4,1437	4,0839	4,0664	4,0664	4,0839	4,0664	4,0664
	2.5	4,5823	4.5822	4,5823	4,5824	4,528	4,4991	4,4991	4,5279	4,4991	4,4991

(k): (Chen et al, 2004) ; (l): (De Rosa et Maurizi, 1998)

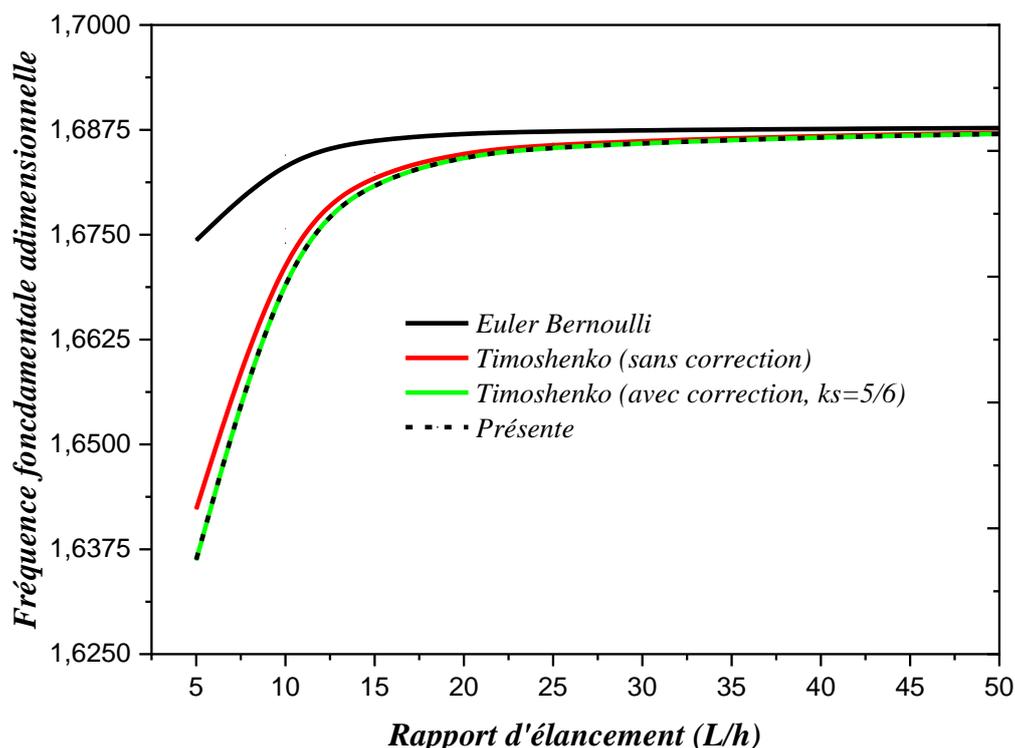
Les résultats obtenus en utilisant la présente théorie de déformation de cisaillement à deux variables sont comparés avec ceux de la méthode quadratique différentielle (D.Q.M.) de chen et al (2004), la théorie des poutres d'Euler Bernoulli développé par De rosa et maurizi (1998) et la méthode (exacte d'élasticité 3D).

A partir du tableau (IV.12), on peut dire que les résultats actuels sont en bon accord avec les modèles trouvés dans la littérature quel que soit le rapport d'élancement et le type de fondation utilisé, il est remarquable que :

- la diminution des rapports de l'élancement conduit à une réduction des valeurs des fréquences fondamentale adimensionnelles ( $\varpi$ ) car les poutres deviennent courtes.

- La fréquence naturelle est obtenue pour des poutres sans fondation élastique car dans ce cas la structure est moins rigide.

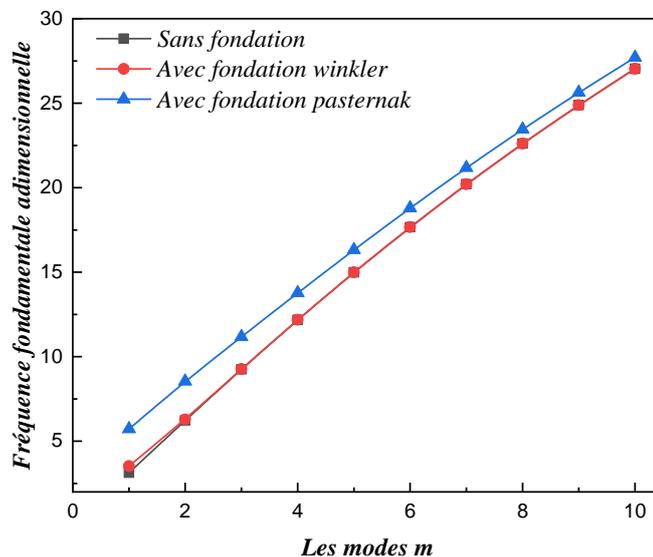
La figure (IV.4) Montre l'effet du rapport d'élançement et l'effet de la déformation de cisaillement sur les fréquences fondamentales adimensionnelles des poutres isotropes simplement appuyées.



**Figure IV. 4 :** La variation de la fréquence fondamentale adimensionnelle ( $\varpi$ ) en fonction du rapport d'élançement ( $L/h$ ) pour les différents modèles (CBT, FSDT et HSDT).

On remarque que le nouveau modèle proposé et la théorie de Timoshenko corrigée donne presque les mêmes valeurs, et la (C.B.T.) surestime les fréquences fondamentales adimensionnelles dans le cas des poutres courtes à cause de l'élimination de l'effet de la déformation de cisaillement transverse. La différence entre la théorie d'Euler Bernoulli et les théories de déformation de cisaillement diminue lorsque le rapport  $L/h$  devient important. Au fur et à mesure que la poutre devienne élancée, la différence entre la présente théorie, la (F.S.D.T.) et la théorie (C.B.T.) devient négligeable ce qui montre l'importance de l'introduction de l'effet de la déformation de cisaillement dans le cas des structures élancées.

La figure (IV. 5) présente l'effet du paramètre de la fondation élastique et le nombre de mode sur la variation des fréquences naturelles adimensionnelles des poutres isotropes simplement appuyées.



**Figure IV. 5 :** L'effet du nombre de modes et la fondation élastique sur les fréquences naturelles adimensionnelles ( $\varpi$ ) des poutres isotropes simplement appuyée.

On peut conclure :

- Les fréquences naturelles des poutres simplement appuyées reposant sur des fondations élastiques de type Winkler -Pasternak donnent les plus grandes valeurs, et les plus faibles sont obtenus pour les poutres sans fondation.
- Les résultats obtenus montrent encore une fois que l'augmentation du nombre des modes conduit une augmentation des valeurs des fréquences naturelles adimensionnelles.

On peut conclure aussi que la présence de la fondation élastique devient négligeable dans le cas des modes de vibration élevés.

### IV.3 Conclusion

Une nouvelle théorie de déformation de cisaillement du ordre élevée a été proposée pour analyser le comportement dynamique des poutres isotropes homogènes et (F.G.M.) simplement supportées et reposant sur des fondations élastiques type Winkler-Pasternak se trouvent être en excellent accord avec les solutions numériques de la méthode des éléments finis, la méthode quadratique différentielle et le model de Rayleigh–Ritz et des modèles analytique existantes dans la littérature ouverte.

On peut dire que la théorie proposée est non seulement précise, mais fournit également une approche élégante et facilement réalisable pour simuler le comportement dynamique des poutres fonctionnellement graduées et isotropes reposant sur des fondations élastiques.

# **Conclusion générale et perspectives**

Dans ce travail, des théories simples et efficaces de déformation de cisaillement d'ordre élevé avec deux et trois variables ont été développées pour l'analyse dynamique des poutres fonctionnellement graduées reposant sur des fondations élastiques de type Winkler-Pasternak. L'utilisation d'un facteur de correction de cisaillement n'est pas nécessaire car notre modèle donne une description parabolique des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur tout en satisfaisant les conditions de la nullité de la contrainte de cisaillement sur les surfaces inférieure et supérieure de la poutre en (F.G.M.). Les équations de mouvement de la vibration libre sont obtenues à partir du principe d'Hamilton. Des solutions analytiques des fréquences naturelles sont déterminées pour des poutres simplement appuyées isotropes et en (F.G.M.). Il a été confirmé que le présent modèle est en bon accord avec les modèles exactes trouvés dans la littérature.

A travers ce travail on peut conclure :

- La diminution des rapports de l'élancement conduit à une réduction des valeurs des fréquences fondamentale adimensionnelles car les poutres deviennent courtes.
- Il est noté aussi que la plus faible valeur de fréquence fondamentale adimensionnelle est obtenue pour des poutres sans fondation élastique, car dans ce cas la structure est moins rigide.
- La fréquence adimensionnelle est en corrélation directe avec le nombre de modes.
- La théorie classique des poutres surestime les résultats des fréquences pour les poutres courtes et cela est dû à l'omission de l'effet de déformation de cisaillement transverse.
- La fréquence naturelle adimensionnelle est en relation inverse avec le paramètre de matériaux car en augmentant ce paramètre la structure devient souple (métallique).
- La fréquence adimensionnelle augmente avec l'augmentation du paramètre  $p$  dans le cas ( $R_E < 1$ ) par contre cette fréquence diminue avec l'augmentation de l'indice  $p$  dans le cas ( $R_E > 1$ ).

Finalement, nous pouvons dire que les présentes théories sont simples, efficaces et exactes pour résoudre les problèmes de la vibration libre des poutres isotropes et en matériaux fonctionnellement gradués reposants sur des fondations élastiques.

Le travail présenté dans le cadre de ce mémoire de fin d'étude peut être développé et enrichi. Nous envisageons, par exemple, en perspective, d'appliquer les présents modèles pour l'étude statique et la stabilité des structures avec des différentes conditions aux limites, et de plusieurs formes reposants sur des fondations variables et de type Kerr.

# **Références bibliographiques**

- Abdizadeh, H., 1997. Elaboration et caractérisation de composites duplex" Composites laminaires tri-couches à base d'alumine" (Thèse Docteur d'état). Lyon, INSA.
- Alshorbagy, A.E., Eltaher, M.A., Mahmoud, F., 2011. Free vibration characteristics of a functionally graded beam by finite element method. *Applied Mathematical Modelling* 35, 412–425.
- Au, F.T.K., Zheng, D.Y., Cheung, Y.K., 1999. Vibration and stability of non-uniform beams with abrupt changes of cross-section by using C1 modified beam vibration functions. *Applied Mathematical Modelling* 23, 19–34.
- Avcar, M., Mohammed, W.K.M., 2018. Free vibration of functionally graded beams resting on Winkler-Pasternak foundation. *Arabian Journal of Geosciences* 11, 1–8.
- Ayvaz, Y., Özgan, K., 2002. Application of modified Vlasov model to free vibration analysis of beams resting on elastic foundations. *Journal of Sound and vibration* 255, 111–127.
- Baïlon, J.-P., Dorlot, J.-M., 2000. Des matériaux. Presses inter Polytechnique, 3.
- Benahmed, A., 2020. Etude des propriétés Physique des nanostructures fabriquées à partir des mélanges Céramique -métal. Université djillali liabes de sidi bel abbes, sidi bel abbes.
- Benguediab, S., Semmah, A., Chaht, F.L., Mouaz, S., Tounsi, A., 2014. An investigation on the characteristics of bending, buckling and vibration of nanobeams via nonlocal beam theory. *Int. J. Comput. Methods* 11, 1350085. <https://doi.org/10.1142/S0219876213500850>
- Berthelot, J.-M., 2010. Mécanique des matériaux et structures composites. Institut Supérieur des Matériaux et Mécaniques Avancés 667.
- Chakraborty, A., Gopalakrishnan, S., Reddy, J.N., 2003. A new beam finite element for the analysis of functionally graded materials. *International Journal of Mechanical Sciences* 45, 519–539. [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(03\)00058-4](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(03)00058-4)
- Chen, W.Q., Lü, C.F., Bian, Z.G., 2004. A mixed method for bending and free vibration of beams resting on a Pasternak elastic foundation. *Applied Mathematical Modelling* 28, 877–890. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2004.04.001>
- Clastornik, J., Eisenberger, M., Yankelevsky, D.Z., Adin, M.A., 1986. Beams on variable Winkler elastic foundation.
- De Rosa, M.A., 1995. Free vibrations of Timoshenko beams on two-parameter elastic foundation. *Computers & structures* 57, 151–156.
- De Rosa, M.A., Maurizi, M.J., 1998. The influence of concentrated masses and Pasternak soil on the free vibrations of Euler beams—exact solution. *Journal of Sound and Vibration* 212, 573–581.
- Ebrahimi, F., Jafari, A., 2018. A four-variable refined shear-deformation beam theory for thermo-mechanical vibration analysis of temperature-dependent FGM beams with porosities. *Mechanics of Advanced Materials and Structures* 25, 212–224. <https://doi.org/10.1080/15376494.2016.1255820>
- Eisenberger, M., Clastornik, J., 1987. Vibrations and buckling of a beam on a variable Winkler elastic foundation. *Journal of sound and vibration* 115, 233–241.
- Eisenberger, M., Yankelevsky, D.Z., Clastornik, J., 1986. Stability of beams on elastic foundation. *Computers & structures* 24, 135–139.
- EL-hassar, S.M., 2016. Contribution à l'étude du comportement mécanique des plaques composites «étude comparative entre les différentes théories d'ordre élevé» (PhD Thesis).
- Eringen, A.C., 1983. On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves. *Journal of applied physics* 54, 4703–4710.
- Farghaly, S.H., Zeid, K.M., 1995. An exact frequency equation for an axially loaded beam-mass-spring system resting on a Winkler elastic foundation. *Journal of Sound Vibration* 185, 357–363.
- Gornet, L., 2008. Généralités sur les matériaux composites 52.

- Hamdi, H., Farah, K., 2018. Beam finite element model of a vibrate wind blade in large elastic deformation. *Wind and Structures* 26, 25–34.
- Hetenyi, M., 1950. A general solution for the bending of beams on an elastic foundation of arbitrary continuity. *Journal of Applied Physics* 21, 55–58.
- Heyliger, P.R., Reddy, J.N., 1988. A higher order beam finite element for bending and vibration problems. *Journal of sound and vibration* 126, 309–326.
- Ilschner, B., 1993. Structural and compositional gradients : basic idea, preparation, applications. *Journal de Physique IV Proceedings* 03, C7-763-C7-772. <https://doi.org/10.1051/jp4:19937121>
- Kheroubi, B., 2017. L'étude de l'effet multi-échelle de nouveaux matériaux et application technologiques (Thèse Docteur d'état). Sidi bel abbes.
- Koizumi, M., 1997. FGM activities in Japan. *Composites Part B* 1–2, 1–4.
- Kumar, P.K., 2019. Computational Structural Mechanics - Static And Dynamic Behaviors [WWW Document]. URL <https://vdoc.pub/documents/computational-structural-mechanics-static-and-dynamic-behaviors-3lfuntsqugd0> (accessed 6.11.22).
- Larbi Chaht, F., 2014. Etude du comportement des nano-poutres en flexion, en flambement et en vibration en utilisant les théories non locales de déformation de cisaillement des poutres. Université djillali liabes sidi bel abbes.
- Mahato, K.K., Dutta, K., Ray, B.C., 2020. Emerging advancement of fiber-reinforced polymer composites in structural applications, in: *New Materials in Civil Engineering*. Elsevier, Waltham.
- Mercier, J.-P., Zambelli, G., Kurz, W., 1999. *Traité des matériaux*, 3. rev. et augm. ed. Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne.
- Micelli, F., Renni, A., Kandalaf, A.G., Moro, S., 2020. Fiber-reinforced concrete and ultrahigh-performance fiberreinforced concrete materials, in: *New Materials in Civil Engineering*. Elsevier, Waltham.
- Naidu, N.R., Rao, G.V., 1995. Vibrations of initially stressed uniform beams on a two-parameter elastic foundation. *Computers & structures* 57, 941–943.
- Nedri, K., El Meiche, N., Tounsi, A., 2014. Free Vibration Analysis of Laminated Composite Plates Resting on Elastic Foundations by Using a Refined Hyperbolic Shear Deformation Theory. *Mech Compos Mater* 49, 629–640. <https://doi.org/10.1007/s11029-013-9379-6>
- Obara, P., 2014. Vibrations and stability of Bernoulli-Euler and Timoshenko beams on two-parameter elastic foundation. *Archives of Civil Engineering* 60.
- Pasternak, P.L., 1954. On a new method of an elastic foundation by means of two foundation constants. *Gosudarstvennoe Izdatelstvo Literaturi po Stroitelstve i Arkhitekture*.
- Rahmani, O., Pedram, O., 2014. Analysis and modeling the size effect on vibration of functionally graded nanobeams based on nonlocal Timoshenko beam theory. *International Journal of Engineering Science* 77, 55–70.
- Reddy, J.N., 1984. A simple higher-order theory for laminated composite plates.
- SAID, A., 2015. Etude et analyse des plaques FGM en Génie Civil 107.
- Sallai, B. oumrane, Tounsi, A., 2015. Etude et analyse des structures en FGM: comparaison entre E-FGM, P-FGM et S-FGM (PhD Thesis).
- Sayyad, A.S., Ghugal, Y.M., 2018. Bending, buckling and free vibration responses of hyperbolic shear deformable FGM beams. *Mechanics of Advanced Composite Structures* 5, 13–24.
- Şimşek, M., 2010. Fundamental frequency analysis of functionally graded beams by using different higher-order beam theories. *Nuclear Engineering and Design* 240, 697–705.
- Şimşek, M., Kocatürk, T., 2009. Free and forced vibration of a functionally graded beam subjected to a concentrated moving harmonic load. *Composite Structures* 90, 465–473.
- Thai, H.-T., Vo, T.P., 2012. Bending and free vibration of functionally graded beams using various higher-order shear deformation beam theories. *International journal of mechanical sciences* 62, 57–66.

- Timoshenko, S.P., 1921. LXVI. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 41, 744–746.
- Vo, T.P., Thai, H.-T., Nguyen, T.-K., Inam, F., 2014. Static and vibration analysis of functionally graded beams using refined shear deformation theory. *Meccanica* 49, 155–168.
- Wattanasakulpong, N., Ungbhakorn, V., 2012. Free vibration analysis of functionally graded beams with general elastically end constraints by DTM. *World Journal of Mechanics* 2, 297.
- Zhou, D., 1993. A general solution to vibrations of beams on variable Winkler elastic foundation. *Computers & structures* 47, 83–90.