



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique
Université de Tissemsilt
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département des Sciences et de la Technologie



Mémoire de fin d'études pour l'obtention du diplôme
de Master académique en

Filière : **Génie civil**

Spécialité : **Structures**

Présenté par :

DJAAD Tahar

BEKDA Kheira

Thème

Etude de flexion des plaques en matériaux à gradient de propriétés FGM

Soutenu le,

Devant le Jury :

Dr. DJEFFAL Houcine	Président	M.C.B.	Univ-Tissemsilt
Dr. ADIM Belkacem	Encadreur	M.C.A.	Univ-Tissemsilt
Dr. BOURADA Fouad	Examineur	M.C.A.	Univ-Tissemsilt

Année universitaire : 2021-2022



Remerciements

Nous remercions en premier lieu "ALLAH" qui nous a donné la Puissance et donné la volonté, la force, la patience, le courage, la santé... pour faire ce travail.

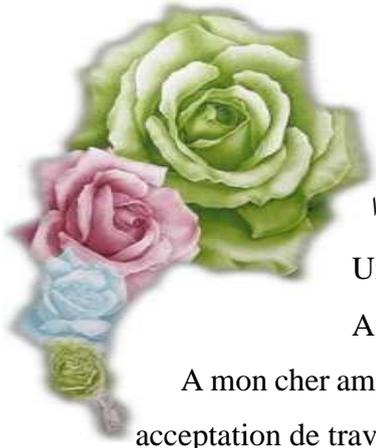
Nous tenons à remercier tout particulièrement nos parents, sœurs et frères pour leur soutenu moralement et leur encouragements durant la période de rédaction de ce mémoire.

Nous tenons à exprimer notre gratitude à notre encadreur Dr. ADIM Belkacem pour son grand aide, sa rigueur scientifique, la confiance qu'il nous accorde, sa grande disponibilité et l'importance de ses nombreux conseils, et pour nos avoir fourni tous les moyens nécessaires.

Nous exprimons notre profonde gratitude aux membres du jury, Messieurs : DJEFFAL Houcine et BOURADA Fouad qui ont aimablement accepté de faire partie du jury et d'examiner notre travail.

Enfin merci à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Dédicace



Je dédie ce travail

À mes parents ...

Une spéciale dédicace à mon encadreur, Dr. ADIM Belkacem.

A tous mes professeurs

A mon cher ami DJAAD Tahar pour la confiance son soutien dans ma vie et votre acceptation de travailler avec moi

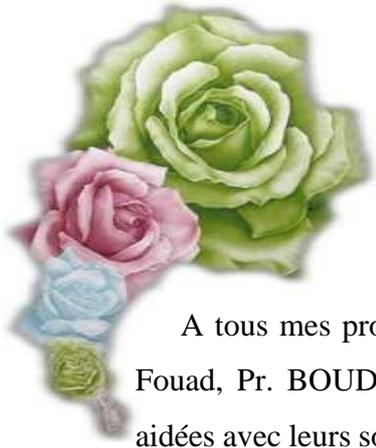
À mes meilleurs amis : BENCHEBIRA Kheira, LOUDJANI M'hamed, BESRI Rachid, et la promotion Master « structures »

A nos frères et sœurs, sans oublier nos chères amies et tous les membres de nos familles.

À vous, lecteur de cette dédicace,

Kheira

Dédicace



Je dédie Ce modeste travail :

A ma famille,

A tous mes professeurs est spécialement Dr ADIM Belkacem, Dr BOURADA Fouad, Pr. BOUDARBA Bachir et BESSEGHIER Abderrahmane qui m'ont tant aidées avec leurs soutient, ils ont ma source de courage et de patience à qui j'exprime toute ma reconnaissance pour leur patience et tous ses efforts.

Sans oublie bien sur ma chère sœur : Dr Kheira BEKDA nchlh que je souhaite à lui une bonne continuation et plein de réussite dans sa vie

A mes chers amis :

CHRIET M'hamed, ABBA Med, LOUDJANI Med, ZERADNA Belkacem,
BASRI Rachid, Ayad Abdelali et la promotion Master « structures »

À vous, lecteur de cette dédicace,

Tabar

Résumé

Ce travail de recherche a pour but d'étudier l'analyse de comportement mécanique de la flexion des plaques fonctionnellement graduées simplement appuyées sous chargement sinusoïdal en proposant une théorie de déformation et de cisaillement raffinée en utilisant quatre fonctions de cisaillement (exponentielle, polynômiale, hyperbolique et trigonométrique). Le nombre d'inconnues impliqués dans la présente théorie est quatre contre cinq dans les autres théories. Les équations d'équilibre sont déduites par le principe des travaux virtuels et les déplacements et les contraintes sont déterminées par la solution de Navier. Dans cette étude, on suppose que les propriétés matérielles (le module de Young) de la plaque FGM varient graduellement dans la direction de l'épaisseur selon la distribution de la loi de mélange P-FGM en fonction du degré d'homogénéité.

Dans notre travail on a basé sur la théorie de déformation et de cisaillement des plaques quasi 3-D pour valider nos résultats.

Une étude paramétrique est présentée par la suite pour déterminer l'influence de plusieurs paramètres sur le comportement des plaques fonctionnellement graduées à savoir : l'effet du rapport d'aspect géométrique coté sur épaisseur et longueur sur largeur en fonction de l'indice matériel des constituants « céramique-métal » sur les déplacements et les contraintes normales et tangentielles.

De cette étude, on peut dire que la précision et l'efficacité de la présente théorie raffinée de cisaillement et de déformation en utilisant les quatre fonctions de cisaillement a été bien démontré pour l'étude de flexion mécanique des plaques en matériaux à gradient de propriétés.

Mots clés : plaque FGM ; solution de Navier ; théorie de déformation de cisaillement ; Fonction de cisaillement, flexion.

Abstract

This research aims to study the analysis of the mechanical behavior of the bending of functionally graded simply supported plates under sinusoidal loading by proposing a theory shear deformation refined using four shearing functions (exponential, polynomial, hyperbolic and trigonometric). The number of variables involved in this theory is four against five in the other theories. The equilibrium equations are deduced by the principle of virtual works and the displacements and stresses are determined by Navier's solution. In this study, it is assumed that the material properties (Young's modulus) of the FGM plate vary gradually in the thickness direction by rule of mixture P-FGM according to the degree of homogeneity.

In our work we have based on the quasi 2-D theory of shear and deformation of plates to validate our results.

A parametric study is presented afterward to determine the influence of several parameters on the behavior of functionally graduated plates, namely: the effect of the geometric aspect ratio side on thickness and length on width according to the material index of the "ceramic-metal" constituents on displacements and normal and tangential stresses.

From this study, it can be said that the accuracy and efficiency of the present refined shear and deformation theory using the four shear functions has been well demonstrated for the study of mechanical bending of functionally graded plates.

Keywords: FGM plate; Navier's solution; shear deformation theory; Shear function, bending

ملخص

يهدف هذا البحث إلى دراسة تحليل السلوك الميكانيكي لانحناء الصفائح المتدرجة وظيفيًا والمدعومة بمساند بسيطة تحت تأثير الحمولة الجيبية من خلال اقتراح نظرية دقيقة للتشوه والقص العرضي باستخدام أربع دوال قص (أسية، كثير حدود، قطع مكافئ ومثلثية)، عدد المجاهيل المتضمنة في هذه النظرية هو أربعة مقارنة بخمسة مجاهيل فيما يخص النظريات الأخرى. يتم استنتاج معادلات التوازن من خلال مبدأ الأعمال الافتراضية ويتم تحديد الانتقالات والاجهادات بواسطة حل نايفي. نفترض في هذه الدراسة أن خصائص المواد (معامل المرونة يونغ) للصفائح المتدرجة وظيفيًا تتغير عبر سمك الصفيحة وفقًا لقانون التوزيع P-FGM حسب معامل التجانس

اعتمدنا في عملنا هذا على نظرية التشوه والقص لألواح شبه ثلاثية الأبعاد للتحقق من صحة نتائجننا.

بعد ذلك، تم تقديم دراسة متغيرات لتحديد تأثير عدة عوامل على سلوك الصفائح المتدرجة وظيفيًا، من بينها: تأثير نسبة الأبعاد الهندسية الضلع على السمك والطول على العرض وفقًا لمعامل التجانس لمكونات المادة "المعدن - السيراميك". على الانتقالات والاجهادات العادية والمماسية.

من هذه الدراسة، يمكن القول إن دقة وكفاءة النظرية المكررة الحالية للقص والتشوه باستخدام دوال القص الأربعة قد تم إثباتها جيدًا لدراسة الانحناء الميكانيكي للصفائح المتدرجة وظيفيًا.

الكلمات المفتاحية: الصفائح المتدرجة وظيفيًا؛ حل، نايفي نظرية تشوه القص، الدالة القص، الانحناء.

Table des matières

REMERCIEMENTS -----	I
DEDICACE-----	II
DEDICACE-----	III
RESUME-----	IV
ABSTRACT -----	V
ملخص -----	VI
TABLE DES MATIERES -----	VII
LISTE DES FIGURES -----	IX
LISTE DES TABLEAUX -----	XI
LISTE DES ABREVIATIONS -----	XII
INTRODUCTION GENERALE-----	1
 CHAPITRE I:GENERALITES SUR LES MATERIAUX A GRADIENT DE PROPRIETES	
I.1. INTRODUCTION -----	3
I.2. LE CONCEPT D'UN MATERIAU A GRADIENT DE PROPRIETES -----	3
I.3. HISTORIQUE SUR LE DEVELOPPEMENT DES MATERIAUX FGM -----	4
I.4. DEFINITION DES MATERIAUX FGM-----	5
I.5. TYPES DES FGM -----	6
I.6. DOMAINES D'APPLICATION DES MATERIAUX A GRADIENT DE PROPRIETES	7
I.6.1. AÉROSPATIALE-----	7
I.6.2. MÉDECINE -----	7
I.6.3. DÉFENSE -----	8
I.6.4. MARINE -----	8
I.6.5. GÉNIE CIVIL -----	8
I.6.6. CHIMIQUE-----	8
I.6.7. L'ÉNERGIE NUCLÉAIRE-----	8
I.6.8. ÉLECTRONIQUE -----	8
I.6.9. OPTIQUE -----	9
I.6.10. CONVERSION D'ÉNERGIE -----	9
I.6.11. INDUSTRIE AUTOMOBILE -----	9
I.6.12. ÉQUIPEMENTS SPORTIFS -----	9
I.7. COMPARAISON ENTRE LES MATERIAUX A GRADIENT DE PROPRIETES ET LES MATERIAUX COMPOSITES TRADITIONNELS-----	10
I.8. LES TECHNIQUES DE FABRICATION DES FGM-----	12
I.8.1. LES PROCÈDES À L'ÉTAT SOLIDE -----	12
I.8.1.1. <i>Compaction Sèche des Poudres</i> -----	12
I.8.1.2. <i>Diffusion collage</i> -----	13
I.8.2. LES PROCÈDES À L'ÉTAT LIQUIDE -----	13
I.8.2.1. <i>Frittage et Infiltration</i> -----	13
I.8.2.2. <i>Coulée par centrifugation (centrifugal casting)</i> -----	13
I.8.3. PROCESSUS DE DÉPÔT-----	14
I.8.3.1. <i>Dépôt physique en phase vapeur</i> -----	14
I.8.3.2. <i>Dépôts laser</i> -----	14
I.9. PROPRIETES EFFECTIVES DES MATERIAUX FONCTIONNELLEMENT GRADUEES -----	14
I.9.1. LOIS DE MÉLANGE-----	16
I.9.1.1. <i>Propriétés matérielles des structures P-FGM</i> -----	16
I.9.1.2. <i>Propriétés matérielles des structures S-FGM</i> -----	17
I.9.1.3. <i>Les propriétés matérielles de la plaque E-FGM</i> -----	18
I.9.2. LES MODÈLES D'HOMOGENÉISATION -----	19
I.9.2.1. <i>La méthode Voigt et Reuss</i> -----	19

1.9.2.2. <i>Modèle TTO</i> -----	19
1.9.2.3. <i>La méthode de Mori–Tanaka</i> -----	20
I.10. LES PRINCIPAUX AVANTAGES DE L’UTILISATION DES FGM-----	21
I.11. INCONVENIENTS DES FGM-----	21
I.12. CONCLUSION -----	21
CHAPITRE II: LES THEORIES DES PLAQUES	
II.1. INTRODUCTION -----	22
II.2. HISTORIQUE -----	22
II.3. CONCEPTIONS DES PLAQUES FGM -----	22
II.4. DEFINITION DES PLAQUES -----	23
II.5. DIFFERENTS TYPES DES PLAQUES-----	23
II.5.1. LES PLAQUES ISOTROPES-----	23
II.5.2. LES PLAQUES ORTHOTROPES -----	23
II.5.3. LES PLAQUES ANISOTROPES -----	23
II.6. DIFFERENTS TYPES DE COMPORTEMENTS DES PLAQUES-----	24
II.7. ETAT MEMBRANAIRE ET ETAT FLEXIONNEL -----	24
II.8. DOMAINE D’UTILISATION LES PLAQUES -----	26
II.9. LES MODELES ANALYTIQUES DES PLAQUES FGM-----	27
II.9.1. PRINCIPE DE NAVIER BERNOULLI GÉNÉRALISÉ-----	27
II.9.2. LA THÉORIE CLASSIQUE DES PLAQUES MINCES DE LOVE-KIRCHHOFF (CPT)-----	27
II.9.3. LA THÉORIE DE DÉFORMATION EN CISAILLEMENT DU PREMIER ORDRE (FIRST ORDER SHEAR DEFORMATION THEORY FSDT)-----	28
II.9.4. LA THÉORIE DE DÉFORMATION EN CISAILLEMENT D’ORDRE ÉLEVÉ (HIGHER ORDER SHEAR DEFORMATION THEORY HSDT) -----	30
II.9.5. LA THÉORIE DE DÉFORMATION EN CISAILLEMENT D’ORDRE ZÉRO (ZEROTH ORDER SHEAR DEFORMATION THEORY ZSDT)-----	31
II.9.6. LES MODÈLES ZIG-ZAG -----	32
II.10. CONCLUSION -----	33
CHAPITRE III: ETUDE DE FLEXION DES PLAQUES EN MATERIAUX A GRADIENT DE PROPRIETES FGM	
III.1. INTRODUCTION -----	34
III.2. HYPOTHESES DE BASE-----	34
III.3. CINEMATIQUES-----	36
III.4. LE CHAMP DE DEFORMATION-----	36
III.5. LES EQUATIONS CONSTITUTIVES-----	37
III.6. EQUATIONS D’EQUILIBRE -----	37
III.7. SOLUTION ADOPTEE POUR UNE PLAQUE EN FGM -----	40
III.8. CONCLUSION -----	41
CHAPITRE IV : RESULTATS ET DISCUSSION	
IV.1. INTRODUCTION -----	42
IV.2. PROPRIETES MATERIELLES DE LA PLAQUE FONCTIONNELLEMENT GRADUEE ETUDIEE -----	42
IV.3. ÉTUDES COMPARATIVES ET VALIDATION -----	43
IV.4. DETERMINATION DES DIFFERENTS PARAMETRES QUI INFLUENT SUR LE COMPORTEMENT EN FLEXION DES PLAQUES FGM-----	45
IV.5. CONCLUSION-----	56
CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES-----	57
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES -----	58

Liste des figures

Figure I.1: Le nombre annuel de publications sur le sujet des FGM fournies par le moteur de recherche de Scopus	5
Figure I.2: Quelques exemples de matériaux à fonctionnel gradues FGM.....	5
Figure I.3 : Classification matériaux à gradient fonctionnel	6
Figure I.4 : Application dans le domaine aérospatial.....	7
Figure I.5 : Variation graduelle dans l'os humain.....	7
Figure I.6 : Utilisation dans l'industrie de la défense	8
Figure I.7 : Utilisation dans l'industrie d'énergie	9
Figure I.8 : Les principaux domaines d'utilisation des FGM	10
Figure I.9 : Comparaison entre les matériaux composites traditionnels et les FGM	11
Figure I.10 : La distribution composante des matériaux	11
Figure I.11 : Méthodes de fabrication de FGM	12
Figure I.12 : Schéma du procédé dépôt par centrifugation.....	13
Figure I.13 : Modèle analytique pour une couche d'un matériau à fonctionnel gradues.....	15
Figure I.14 : Géométrie d'une plaque FGM	15
Figure I.15 : Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM	16
Figure I.16 : Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.....	18
Figure I.17 : Variation du module de Young à travers l'épaisseur de la structure E-FGM	18
Figure I.18 : Schéma de la courbe contrainte-déformation pour le modèle TTO	20
Figure II.1: Géométrie d'une plaque	23
Figure II.2: Efforts intérieurs dans une plaque	25
Figure II.3: les Domaines d'utilisation des plaques	26
Figure II.4: model de Love-Kirchhoff.....	27
Figure II.5 : Cinématique de Reissner-Mindlin.....	28
Figure II.6: Variation de la fonction de gauchissement $\psi(z) = z$ et $\psi'(z)$ suivant l'épaisseur ..	29
Figure II.7: Cinématique de la théorie d'ordre élevé.....	30
Figure II.8 : Champ de déplacement des modèles zig-zag du premier ordre	32
Figure II.9 : Champ de déplacement des modèles zig-zag d'ordre supérieur	33
Figure III.1 : Géométrie d'une plaque en FGM	34
Figure IV.1 : Variation du déplacement longitudinal adimensionnel U en fonction du rapport coté sur épaisseur « a/h » et le degré d'homogénéité « P » d'une plaque carrée en FGM	47

Figure IV.2 : Variation de la flèche adimensionnelle W en fonction du rapport coté sur épaisseur « a/h » et le degré d’homogénéité « P » d’une plaque carrée en FGM.....48

Figure IV.3 : Variation du déplacement longitudinal adimensionnel U en fonction du rapport d’aspect « a/b » et le rapport coté sur épaisseur « a/h » d’une plaque en FGM ($p=2$)49

Figure IV.4 : Variation de la flèche adimensionnelle \bar{W} en fonction du rapport d’aspect « a/b » et le rapport coté sur épaisseur « a/h » d’une plaque en FGM ($p=2$)50

Figure IV.5 : Distribution des contraintes normales σ_{xx} suivant la direction de l’épaisseur de la plaque rectangulaire en FGM ($p=2$) en fonction du rapport coté sur épaisseur a/h 51

Figure IV.6 : Distribution des contraintes normales σ_{yy} suivant la direction de l’épaisseur de la plaque rectangulaire en FGM ($p=2$) en fonction du rapport coté sur épaisseur a/h 52

Figure IV.7 : Distribution des contraintes de cisaillement τ_{xy} suivant la direction de l’épaisseur de la plaque rectangulaire en FGM ($p=2$) en fonction du rapport coté sur épaisseur a/h 53

Figure IV.8 : Distribution des contraintes de cisaillement τ_{xz} suivant la direction de l’épaisseur de la plaque rectangulaire en FGM ($p=2$) en fonction du rapport coté sur épaisseur a/h 54

Figure IV.9 : Distribution des contraintes de cisaillement τ_{yz} suivant la direction de l’épaisseur de la plaque rectangulaire en FGM ($p=2$) en fonction du rapport coté sur épaisseur a/h 55

Liste des tableaux

Tableau I.1 : Progrès de la recherche sur les matériaux FGM au Japon	4
Tableau II.1 : Modèles des déplacements	31
Tableau III.1 : Fonctions de cisaillement utilisée dans cette étude.	35
Tableau IV.1 : Les propriétés mécaniques des matériaux utilisés.	42
Tableau IV.2 : Effet de degrés d'homogénéité « p » sur les déplacements et les contraintes d'une plaque carrée en FGM.	43
Tableau IV.3 : Variation de la flèche adimensionnelle \bar{W} en fonction du degré d'homogénéité « p » et l'épaisseur d'une plaque carrée en FGM soumise à une charge sinusoïdale.	44
Tableau IV.4 : Variation de la contrainte normale adimensionnelle σ_x en fonction du degré d'homogénéité « p » et l'épaisseur d'une plaque carrée en FGM soumise à une charge sinusoïdale.	44
Tableau IV.5 : Variation du déplacement longitudinal adimensionnel \bar{U} en fonction du rapport coté sur épaisseur « a/h » et le degré d'homogénéité « P » d'une plaque carrée en FGM.	46
Tableau IV.6 : Variation de la flèche adimensionnelle \bar{W} en fonction du rapport coté sur épaisseur « a/h » et le degré d'homogénéité « P » d'une plaque carrée en FGM	46

Liste des abréviations

a	longueur de la plaque
b	largeur de la plaque
h	l'épaisseur de la plaque
E	Module de Young
ν	Coefficient de Poisson
G	module de cisaillement transverse
u, v, w	Les déplacements suivant les directions x, y et z
u_0, v_0	Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque
$f(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
$f'(z)$	La première dérivée de la fonction de gauchissement par rapport à z
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Contraintes normales suivant les directions x, y et z
$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$	Contraintes de cisaillement
$\varepsilon_x, \varepsilon_y$	Déformations dans les directions x et y
$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	Déformations de distorsion
$\delta u_0, \delta v_0, \delta w_b, \delta w_s$	Champ virtuel de déplacement
w_b	Composante de la flèche due à la flexion
w_s	Composante de la flèche due au cisaillement
N_x, N_y, N_{xy}	Efforts normaux de membrane
M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b	Moments de flexion pure
M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s	Moments de flexion supplémentaire due au cisaillement transverse
K_x^b	Courbure de flexion suivant x

K_x^s	Courbure de cisaillement suivant x
K_y^b	Courbure de flexion suivant y
K_y^s	Courbure de cisaillement suivant y
K_{xy}^b	Courbure de flexion suivant xy
K_{xy}^s	Courbure de cisaillement suivant xy
Q_{yz}^s, Q_{xz}^s	Effort de cisaillement pur
A_{ij}	Termes de rigidité en membrane de la plaque
B_{ij}	Termes de rigidité de couplage de la plaque
D_{ij}	Termes de rigidité de flexion de la plaque
A_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
B_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
D_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
H_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
Q_{ij}	Les coefficients de rigidité
k_{ij}	Valeurs propres
$\{\Delta\}$	Le vecteur des déplacements

Introduction générale

Introduction générale

Dans les dernières années, la nécessité de développement du monde industriel a mené à l'amélioration remarquable de la science et la recherche scientifique. Cette évolution ne peut être produite sans le progrès de la science qui donnait les résultats de l'étude scientifique, ce qui admet la création des procédés modernes dans le monde industriel.

Le concept des matériaux à gradients de propriétés FGM est apparu comme nouveau matériau au niveau du laboratoire national d'aérospatial au Japon en 1984 par Sendai et son groupe de recherche. Généralement, les matériaux à gradient de propriétés (FGM) sont un type des matériaux composites dans lesquels les propriétés changeant de manière continue des fractions de volume suivant la direction d'épaisseur pour créer une plaque bien déterminée. Cette plaque en matériau fonctionnellement gradué est constituée de deux matériaux : la face inférieure de la plaque FGM est en métal, où les propriétés matérielles varient graduellement suivant l'épaisseur jusqu'à atteindre la face supérieure de la plaque qui est entièrement en céramique. L'association de ces deux composants permet d'avoir une augmentation de la rigidité, de la résistance à la corrosion et de la résistance très élevée à la température. Ils sont utilisés dans les divers domaines d'application, à savoir l'Aérospatiale, Médecine, Défense, Marine, Génie civil, Chimique, L'énergie nucléaire, Électronique, Conversion d'énergie, Industrie automobile, équipements sportifs.

L'objectif de notre mémoire, est l'utilisation de la théorie raffinée de déformation de cisaillement d'ordre élevé en adoptant quatre types de fonctions de cisaillement (la fonction exponentielle, la fonction polynômiale, la fonction hyperbolique et la fonction trigonométrique) afin d'analyser le comportement de flexion des plaques fonctionnellement graduées soumises à une charge mécanique sinusoïdale « q » et reposant sur un appui simple. L'influence des plusieurs paramètres géométriques et mécaniques comme le rapport d'élancement et le degré d'homogénéité sur le comportement mécanique des plaques FGM (la variation des déplacements et des contraintes normales et tangentielles) est déterminée par la suite.

Le présent travail de recherche sera donc organisé comme suit :

Dans le premier chapitre, nous exprimerons une recherche bibliographique sur le concept général des matériaux à gradients de propriétés (FGM), sur la conception et l'histoire de développement des FGM, ainsi que les différentes procédures d'homogénéisation pour la fabrication et l'élaboration de ces matériaux, les lois de mélanges qui régissent les plaques FGM et les avantages et les inconvénients de ces derniers.

Dans le second chapitre, nous rappelons les différentes théories de déformation et/ou de cisaillement avec différents nombres de variables pour les plaques fonctionnellement graduées dans un but d'étudier le comportement des plaques, à savoir : le Principe de Navier Bernoulli généralisé et La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff « CPT » qui néglige l'effet de cisaillement, la théorie de premier ordre de déformation et de cisaillement « FSDT », les théories de déformation et de cisaillement d'ordre élevé « HSDT », la théorie de déformation en cisaillement d'ordre zéro « ZSDT » ainsi que la théorie raffinée de déformation des plaques « RPT » .

Le troisième chapitre est consacré au développement des formulations mathématiques pour l'étude théorique d'un modèle analytique sur le comportement en flexion de la plaque en FGM sous un chargement mécanique sinusoïdal, Ces modèles analytiques basés sur une théorie raffinée de déformation et de cisaillement d'ordre élevé à quatre variables.

Dans le dernier chapitre, nous allons présenter les résultats numériques obtenus par application du modèle proposé pour l'analyse du comportement mécanique dans le cas de flexion des plaques a fonctionnellement graduées, ces résultats seront validés par la suite avec les résultats des autres théories issues de la littérature.

Ce travail s'achèvera par une conclusion générale de l'étude réalisée ainsi que par des perspectives pour des travaux futurs.



CHAPITRE I

**Généralités sur les matériaux à gradient
de propriétés FGM**

I.1. Introduction

Ces dernières années, le domaine de la recherche scientifique et technologique a connu une étude intense sur les propriétés mécaniques et physiques remarquables et leurs différences pour différents matériaux, les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) sont un composite non homogène composé de différentes phases de constituants de matériaux (généralement de la céramique et du métal) [1], pour développer un matériau simple et nouveaux contient des avantages fonctionnels tel que le poids léger, très bonne caractéristiques mécanique et chimique, de leur excellente durabilité, couramment appelés par (FGM)

Les matériaux fonctionnellement gradués, un type de matériaux composites procédant en varient avec continuation les fractions de volume suivant la direction d'épaisseur pour création un profil bien déterminé.

Le but de ce chapitre est de donner quelques notions sur le type et le concept de base du matériau utilisé et caractéristiques mécaniques et physiques, ainsi leurs domaines d'applications.

I.2. Le concept d'un matériau à gradient de propriétés

Le matériau à gradient fonctionnel a été introduit la première fois dans le laboratoire national d'aérospatial du Japon en 1984 par M. Niino et ses collègues à Sendai [2].

Ce concept a été évalué en premier lieu dans le développement de revêtement des barrières thermiques pour augmenter la résistance thermique des lames dans les moteurs de turbine à gaz pour diverses applications telles que les systèmes de protection thermique [3], les FGM sont développés pour minimiser les contraintes thermiques qui conduisent à la rupture de la céramique [4].

Généralement, les FGM sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux, Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement hétérogènes. Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure du matériau distingue les FGM des matériaux composites conventionnels [5].

En 1993, un atelier sur les matériaux à gradient de propriétés a été organisé en Allemagne, en mars 1994, un autre atelier sur les FGM a eu lieu aux États-Unis. À l'heure actuelle, des colloques internationaux sur les FGM se tiennent régulièrement dans le monde entier [6].

I.3. Historique sur le développement des matériaux FGM

Le tableau I.1 représente l'évolution de la recherche sur les matériaux à gradients de propriétés depuis leur découverte

Tableau I.1 : Progrès de la recherche sur les matériaux FGM au Japon [4].

Année	Progrès de recherche sur les FGM
1984	Concept initial par Dr Niino et d'autres scientifiques dans la région de Sendai, (Japon)
1986	Etude de faisabilité sur la technologie de base pour le développement des FGM sur la relaxation des contraintes thermiques sous l'auspice de la science et de l'agence de technologie (STA).
1987-1989	Recherche nationale de projet sur la technologie de base pour le développement des FGM sur la relaxation des contraintes thermique. FGM partie I-phase (1).
1988	Fonctionnellement gradient matériaux forum (FGMF) 1 ^{er} Colloque sur FGM organisé par FGMF.
1989	Conférence d'Allemagne-Japon (FGM) a Köln, (Allemagne).
1990	1 ^{er} Colloque international sur FGM à Sendai, (Japon). Comité consultatif international de FGM (IACFGM).
1990-1991	FGM partie I-phase (2).
1992	Études de faisabilité sur la R & D de FGM en tant que matériaux fonctionnels sous l'auspice du STA.
1993	Projet de recherche national sur les matériaux de conversion d'énergie avec une structure FGM.
1994	3 ^{ème} colloque international sur FGM à Lausanne, (Suisse)
1995	Atelier : Japon-Russie-Ukraine sur des matériaux de conversion d'énergie (ENECOM-95), (Sendai).
1996	4 ^{ème} colloque international sur FGM dans la ville de la science de Tsukuba, (Japon)

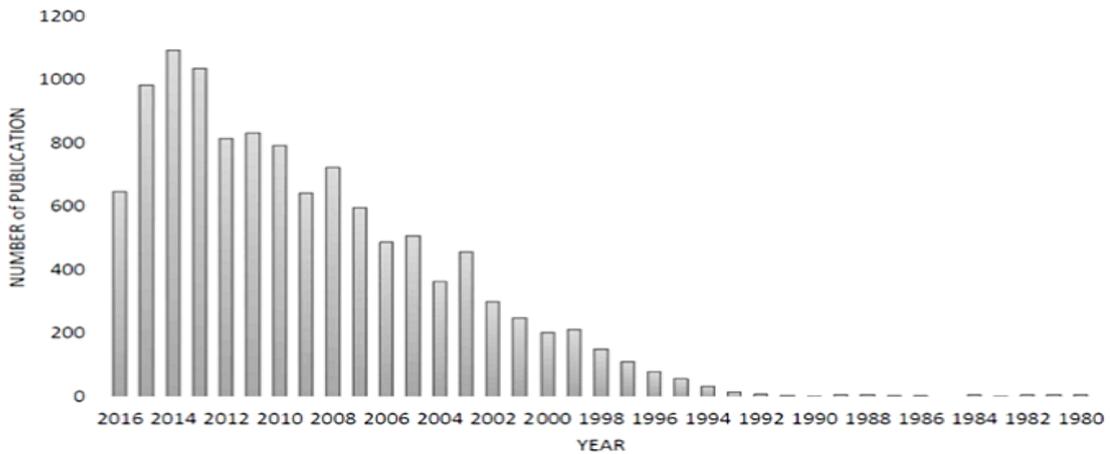
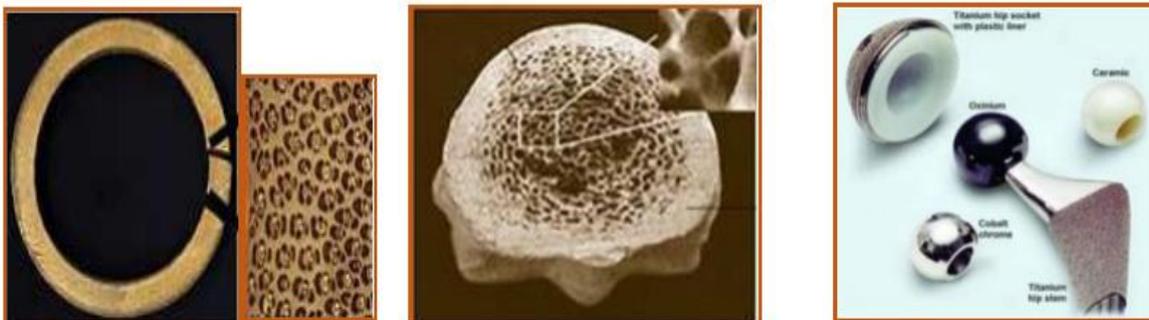


Figure I.1: Le nombre annuel de publications sur le sujet des FGM fournies par le moteur de recherche de Scopus [6]

L'intérêt pour les FGM a récemment augmenté en raison de la capacité à produire des matériaux avec des propriétés sur mesure qui sont des candidats appropriés pour de nombreuses applications de haute technologie telles que l'aérospatiale, le génie biologique les industries nucléaires. À ce titre le nombre de publications dans ce domaine de recherche a augmenté de façon exponentielle au cours des 20 dernières années, La figure illustre le nombre annuel de publications sur les FGM [6]

I.4. Définition des matériaux FGM

Un matériau fonctionnellement gradué (FGM) est un matériau dans lequel la composition et la structure changent graduellement en entraînant une modification correspondante dans les propriétés du matériau [4] Dans ce cas, un matériau FGM dont la face supérieure est complètement en céramique, ce qui a la conductivité faible et peut résister aux températures plus élevées, est placée dans les régions de grands gradients de la température, qui varie graduellement à travers l'épaisseur jusqu'à la face inférieure 100 % en métal est typiquement placé dans les régions où les propriétés mécaniques comme la dureté nécessitent d'être élevées [7]



(a) : Bambou

(b) : L'os

(c) : articulation artificielle

Figure I.2: Quelques exemples de matériaux à fonctionnel gradues FGM.

Le choix des deux matériaux est essentiellement dû à leurs caractéristiques complémentaires [8] à savoir :

Face supérieure de la plaque (100% Céramique) :

- Résistance thermique ;
- Résistance à l'oxydation ;
- Faible conductivité thermique.
- Faible coefficient de dilatation thermique.

Face gradient de la plaque (Céramique-métal) :

- Élimination des problèmes de l'interface ;
- Relaxer les contraintes thermiques

Face inférieure de la plaque (100% métal) :

- Résistance mécanique ;
- Conductivité thermique élevée,
- Très bonne ténacité.

I.5. Types des FGM

Les FGM peuvent être divisés en deux critères différents sont utilisés pour classer les matériaux à gradient fonctionnel [9]. Le premier critère est repose sur les FGM à structure et deuxième critère est basé sur la taille des matériaux

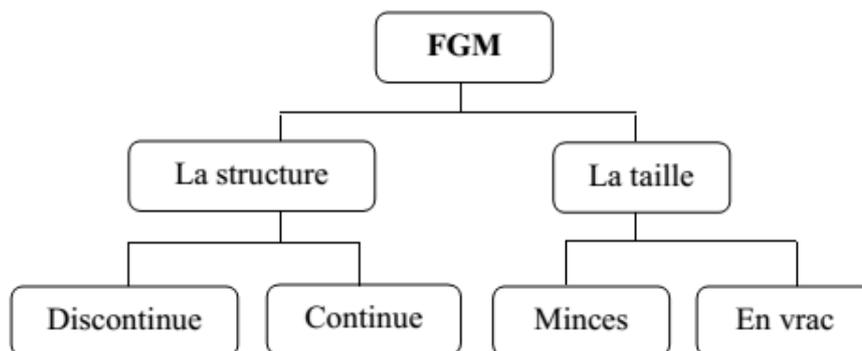


Figure I.3 : Classification matériaux à gradient fonctionnel [9].

I.6. Domaines d'application des matériaux à gradient de propriétés FGM

Le concept des matériaux à gradient de propriétés FGM est utilisable non seulement pour l'industrie de l'aéronautique et aérospatial, Il existe un large intervalle des domaines d'application tels que :

I.6.1. Aérospatiale

Etant le premier domaine d'application des matériaux FGM, ils étaient utilisés dans les composants d'engins pour fusée, la structure de botte de vaisseau spatial, les panneaux d'échange de chaleur, les réflecteurs, les panneaux solaires, le logement d'appareil photo, les roues de turbine, les revêtements de lame de turbine, les casquettes de nez, le bord d'attaque de missiles et navettes spatiales [8]



Figure I.4 : Application dans le domaine aérospatial

I.6.2. Médecine

Implants, peau artificielle, le scanner IRM des tubes cryogéniques,

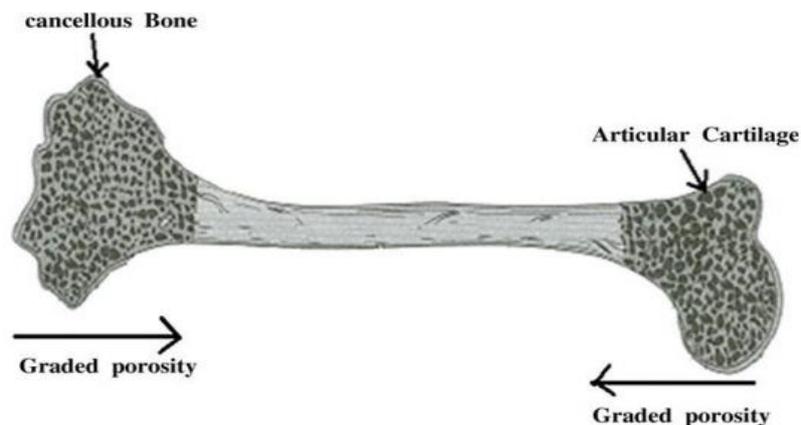


Figure I.5 : Variation graduelle dans l'os humain [10].

I.6.3. Défense

Les FGM sont appliqué dans la défense telle que les gilets pare-balles et les plaques d'armure ainsi véhicules blindés.



Figure I.6 : Utilisation dans l'industrie de la défense [8]

I.6.4. Marine

Les applications des matériaux fonctionnels dans l'industrie marine et sous-marine comprennent l'arbre d'hélice, les cylindres de plongée, les dômes sonar, le système de tuyauterie composite et la coque cylindrique sous pression.

I.6.5. Génie civil

Ponts à poutre en caisson, les cheminées, les fondations élastiques (ces structures de plaques peuvent être trouvées dans différents types d'applications industrielles telles que radiers), réservoirs de stockage, les piscines.

I.6.6. Chimique

L'échangeur de chaleur, tube de chaleur, récipient de réaction.

I.6.7. L'énergie nucléaire

Les FGM sont utilisés dans les dispositifs de conversion d'énergie. Ils fournissent également une barrière thermique et ils sont utilisés comme revêtement de protection sur des aubes de turbine dans le moteur à turbine à gaz et aussi dans le générateur thermoélectrique, pile à combustible, réacteurs nucléaires, pastilles de combustible [8].

I.6.8. Électronique

Semi-conducteur à bande graduée, capteurs.

I.6.9. Optique

Fibres optiques, lentilles.

I.6.10. Conversion d'énergie

Générateur thermoélectrique, convertisseur thermoïonique, pile à combustible.



Figure I.7 : Utilisation dans l'industrie d'énergie [8]

I.6.11. Industrie automobile

les matériaux FGM sont utilisée dans l'industrie automobile, à cause du coût élevé de création dans les parties nécessaire de l'automobile les application présente à savoir: corps de voiture, les volants, les amortisseurs

I.6.12. Équipements sportifs

Les matériaux FGM sont utilisés dans un certain nombre d'équipements sportifs, tel que les clubs de golf, des raquettes de tennis et des skis.

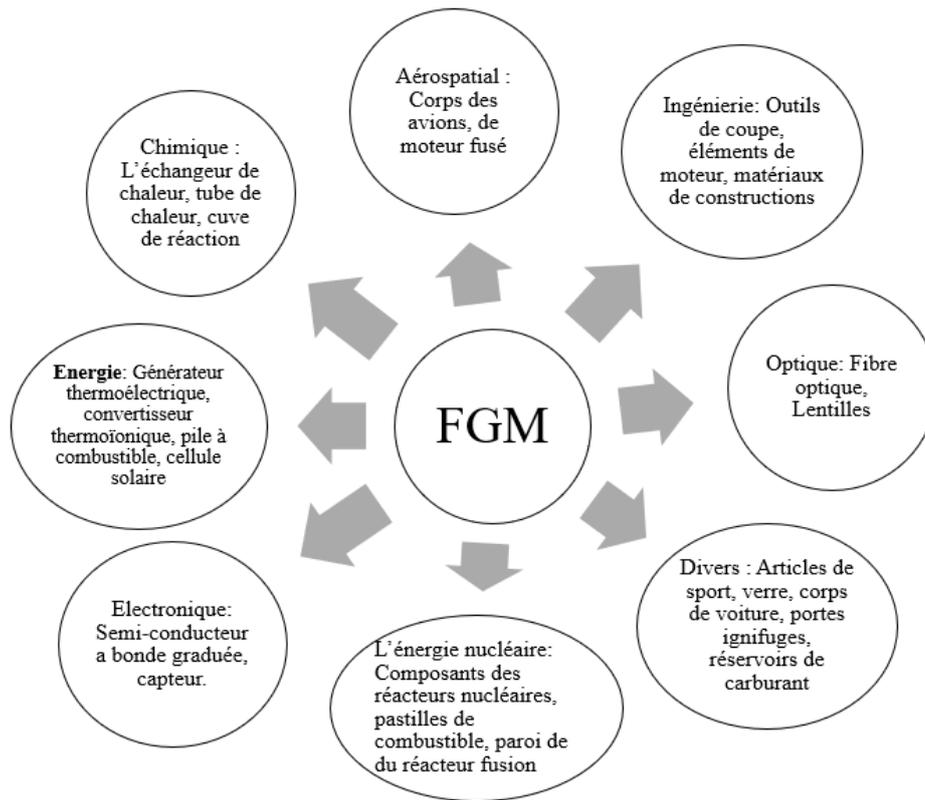


Figure I.8 : Les principaux domaines d'utilisation des FGM [9].

I.7. Comparaison entre les matériaux à gradient de propriétés et les matériaux composites traditionnels

Les matériaux à gradient fonctionnels sont un cas particulier des matériaux composites traditionnels grâce à leurs changements graduels et continus de leur caractéristique mécanique et thermique suivant une loi de fonction à travers l'épaisseur, Généralement qu'ils existent différentes couches contenant des éléments différents tels que les céramiques et les métaux. Ils sont donc des composites exprimant des propriétés macroscopiquement hétérogènes. La différence entre eux est le changement continu dans la microstructure du matériau FGM des matériaux composites conventionnels comme montré sur la Figure I.9. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés matérielles des FGM. Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente [10].

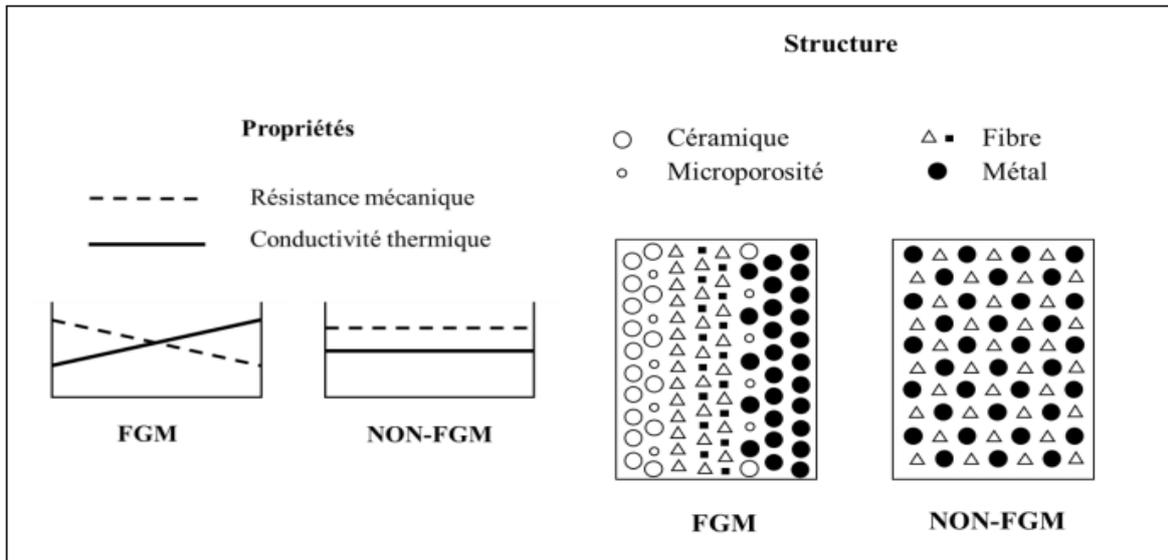


Figure I.9 : Comparaison entre les matériaux composites traditionnels et les FGM [8]

Yoshihisa a créé un modèle simplifié expliquant les différences entre les matériaux à gradient de propriétés (FGM) et les matériaux traditionnels par convention est illustré sur la (Figure I.10) : (a) un matériau plans composé, (b) un matériau relié et (c) un matériau à gradient de propriété. Le matériau plan composé à une propriété plane, et le matériau relié à une partie extrême sur l'interface de deux matériaux. Les FGM ont de très bonne propriété qui diffèrent de ceux des matériaux plans composés et reliés. Par conséquent, les FGM attirent l'attention en termes de leur application dans les domaines industriels. Ainsi ils ont une double propriété des deux matières premières qui sont mélangées ensemble, et la distribution composante est graduée sans interruption [10].

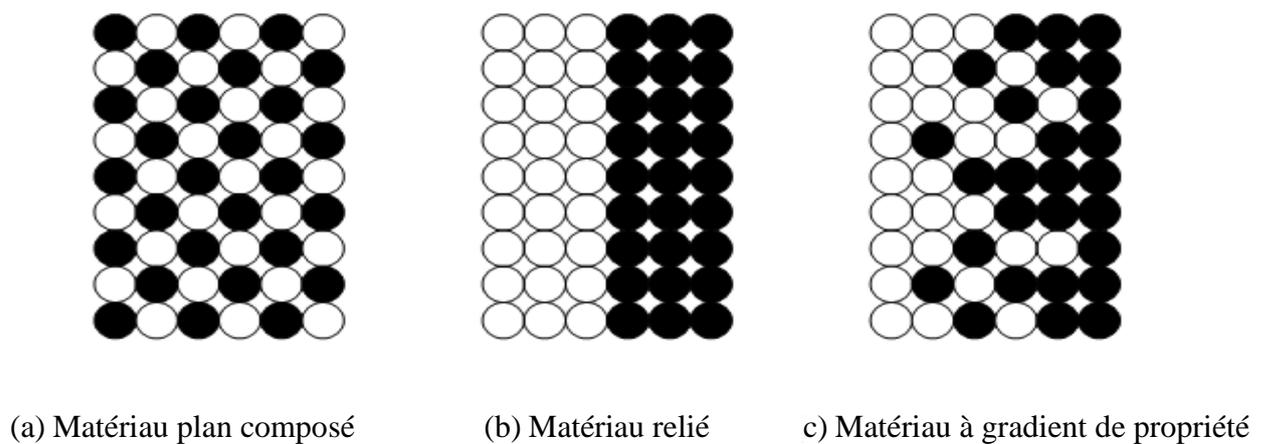


Figure I.10 : La distribution composante des matériaux [10]

I.8. Les techniques de fabrication des FGM

La production des matériaux FGM a été développée par Mortensen et Hirai. Les opérations essentielles pour fabriquer la structure graduée sont basées sur une technique de traitement par étapes à partir des poudres métallurgie ou des matériaux de précurseur.

Dans le traitement des matériaux de précurseur, la structure FGM est réalisée couche par couche en commençant par une répartition appropriée dans laquelle les gradients sont régulièrement fabriqués dans l'espace, tandis que dans le transport de masse, les gradients à l'intérieur d'un composant dépendent des phénomènes de transport naturels, tels que la conduction thermique, la diffusion de espèces atomiques et écoulement de fluide [11]. Basé sur la voie de traitement différentes méthodes de fabrication sont disponibles [11]

Les matériaux à gradient de propriétés sont ordinairement sous forme de revêtement de surface, il existe une large gamme de fabrication de dépôts de surface en fonction de l'exigence de service du processus, la Figure I.11 illustre quelques procédés de fabrication des FGM. [12]

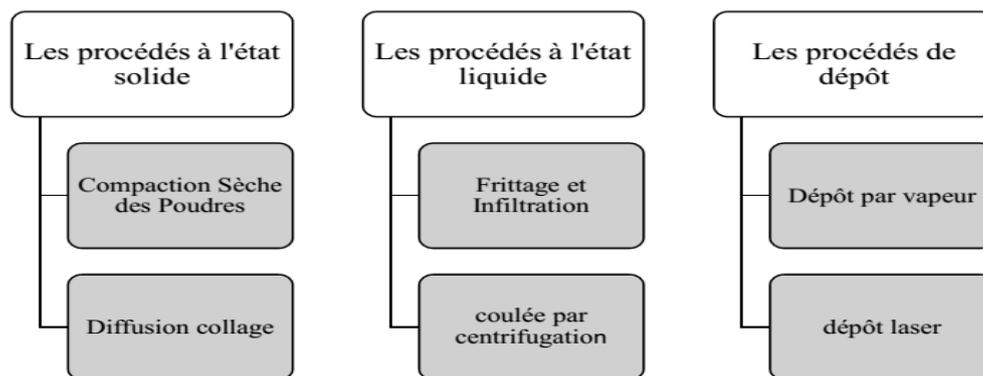


Figure I.11 : Méthodes de fabrication de FGM [12]

Un certain nombre de documents de recherche ont été publiés jusqu'à ce jour sur les techniques de traitement des FGM donnant de nouvelles méthodes de fabrication des FGM.

I.8.1. Les procédés à l'état solide

I.8.1.1. Compaction Sèche des Poudres

Dans Cette technique consiste à répandre successivement dans un moule en acier les poudres, et à chaque fois qu'une poudre est versée une faible compression est exercée. Ensuite la compaction de l'ensemble des couches sera effectuée. Généralement par une pression isostatique et un délainage. La densification sera enfin l'étape finale. Ce procédé peut être envisagé pour la fabrication de pièces de formes complexes [12].

I.8.1.2. Diffusion collage

Ce processus suppose la réalisation des structures graduées par l'injection des plaques métalliques de différents quantités et épaisseur avec la modification de fraction volumique de la phase de céramique continue par diffusion de collage à des températures très haute [12]

I.8.2. Les procédés à l'état liquide

I.8.2.1. Frittage et Infiltration

Cette technique appliquée pour plusieurs combinaisons de matériaux qui sont chimiquement inertes et qui ont des points de fusion bien différents les uns par rapport aux autres [12]. Généralement est composée de deux étapes à la production d'un composite à gradient de fonction constitué de deux matériaux dont les températures de fusion sont plus différentes. L'étape initiale est d'établir une matrice frittée du matériau à température élevée de fusion avec un gradient de porosité. La deuxième étape est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration. Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique [12].

I.8.2.2. Coulée par centrifugation (centrifugal casting)

La procédé consiste à verser une suspension colloïdale relativement diluée dans des flacons cylindriques, le tout est soumis à une centrifugation. La sédimentation s'opère et le liquide surnageant est retiré. Ce procédé est répété pour obtenir des multicouches (Figure I.12) [10].

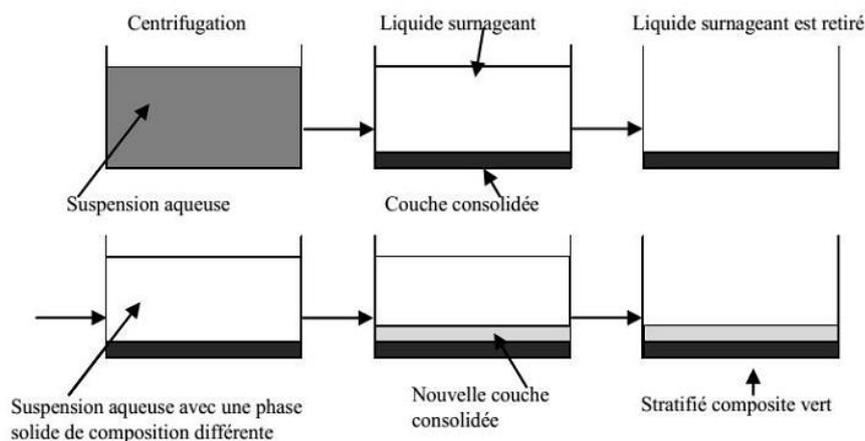


Figure I.12 : Schéma du procédé dépôt par centrifugation [10]

I.8.3. Processus de dépôt

I.8.3.1. Dépôt physique en phase vapeur

La technique de dépôt physique en phase vapeur (PVD) à base de gaz fait partie essentielle dans la fabrication des FGM minces en raison de ses énormes avantages tels que la production des films minces très purs avec une structure graduée, peut créer une grande variété de composés. La méthode PVD est l'une des méthodes, du dépôt de métal de base aux alliages et respectueux de l'environnement par rapport à d'autres techniques [11].

I.8.3.2. Dépôts laser

Le laser forme un bassin de métal sur le substrat dans lequel on injecte de poudre métallique. la poudre injectée fusible sur les substrats comme le laser balaie la partie, laissant un cordon de matériel déposé. Le matériel est déposé seulement lorsque le laser frappe la surface. Depuis le laser peut être positionné avec précision, il est facile de déposer du matériel sélectivement réduisant le temps d'usinage autrement requise dans les opérations de traitement ultérieur. [12]

I.9. Propriétés effectives des matériaux fonctionnellement gradués

Les matériaux à gradient de propriétés FGM sont des matériaux fonctionnels. La combinaison des matériaux différents permet d'améliorer les propriétés électriques, magnétiques, mécaniques, thermiques du système global [13]. Conçue pour optimiser l'exécution des éléments des structures par la distribution des propriétés correspondantes. Une description détaillée d'une microstructure graduée réelle et généralement non disponible, sauf peut-être pour des informations sur la distribution de la fraction volumique pendant que la fraction volumique de chaque phase varie graduellement dans la direction de gradation, les propriétés effectives des matériaux à fonctionnellement gradués FGM changent le long de cette direction [3]. Nous avons obtenu deux possibilités pour les modèles FGM :

1. Une variation par morceaux de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumée, et le matériau fonctionnellement gradué FGM est pris pour être posé avec la même fraction volumique dans chaque région, c-à-d couche quasi-homogène de céramique-métal (Figure I.13 (a)) [14] ;
2. Une variation continue de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumé (Figure I.13 (b)).

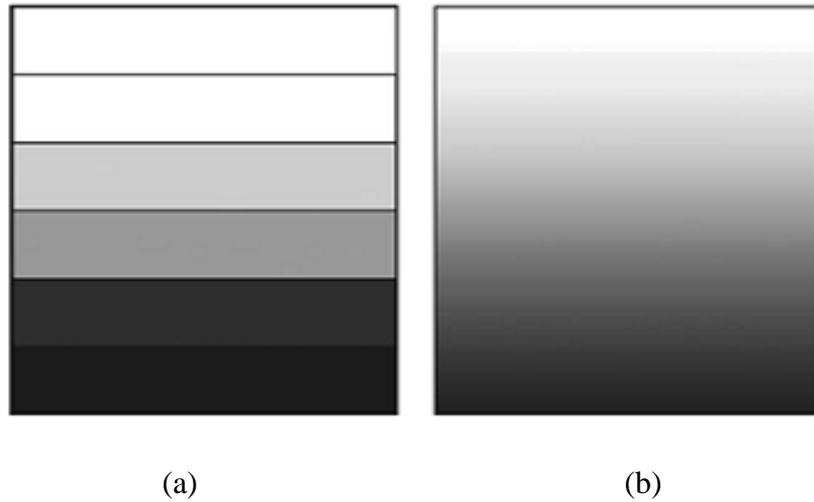


Figure I.13 : Modèle analytique pour une couche d'un matériau à fonctionnel gradues [3].

Un FGM peut être définie par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume. Les liaisons entre les particules doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture, et également assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure [13].

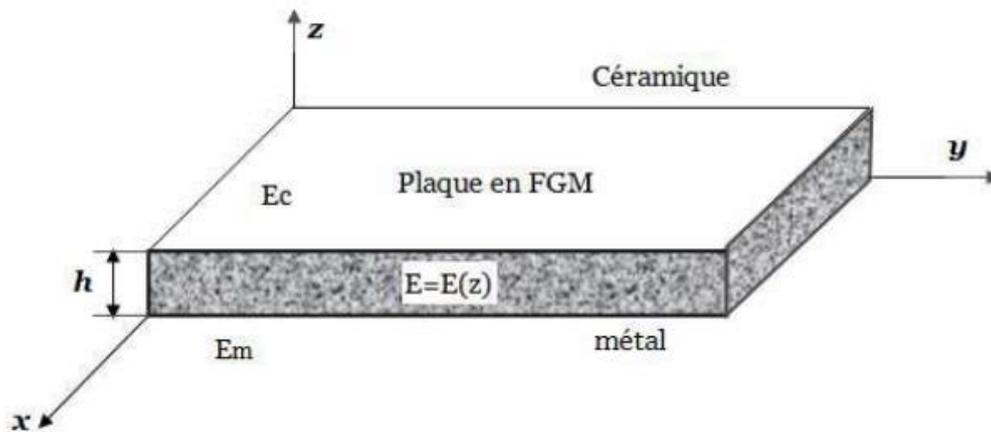


Figure I.14 : Géométrie d'une plaque FGM [3]

Les coordonnées x et y définissent le plan de la plaque, tandis que l'axe z est perpendiculaire à la surface moyenne de la plaque et dans la direction de l'épaisseur. Les propriétés du matériau dont le module de Young et le coefficient de Poisson sur les faces supérieures et inférieures sont différentes. Ils varient de façon continue, suivant l'épaisseur (l'axe z) soit [13] :

$$E = E(z) \tag{I.1}$$

$$\nu = \nu(z) \tag{I.2}$$

I.9.1. Lois de mélange

La plupart des articles de la littérature sur les FGM utilisent la loi simple du mélange pour obtenir les propriétés matérielles effectives. En ce qui concerne les fonctions de distribution de fraction volumique [11], les propriétés matérielles équivalentes des FGM pourraient être déterminées par diverses fonctions sous forme de loi de puissance (P-FGM), sigmoïde (S-FGM) ou exponentielle (E-FGM)

I.9.1.1. Propriétés matérielles des structures P-FGM

La fraction volumique du type P-FGM est considérée comme variation dans l'épaisseur de la plaque en fonction de la loi de puissance :

$$V(z) = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^k \tag{I.3}$$

Avec :

k : représente paramètre matériel,

h : l'épaisseur de la structure

z : la coordonnée suivant l'épaisseur.

Les propriétés matérielles d'un matériau P-FGM peuvent donc s'écrire comme suit

$$E(z) = (E_c - E_m)V(z) + E_m \tag{I.4}$$

E_c et E_m Sont respectivement les modules de Young de la surface supérieure (céramique) $z = +h/2$ et de la surface inférieure (métal) $z = -h/2$ de la structure P-FGM

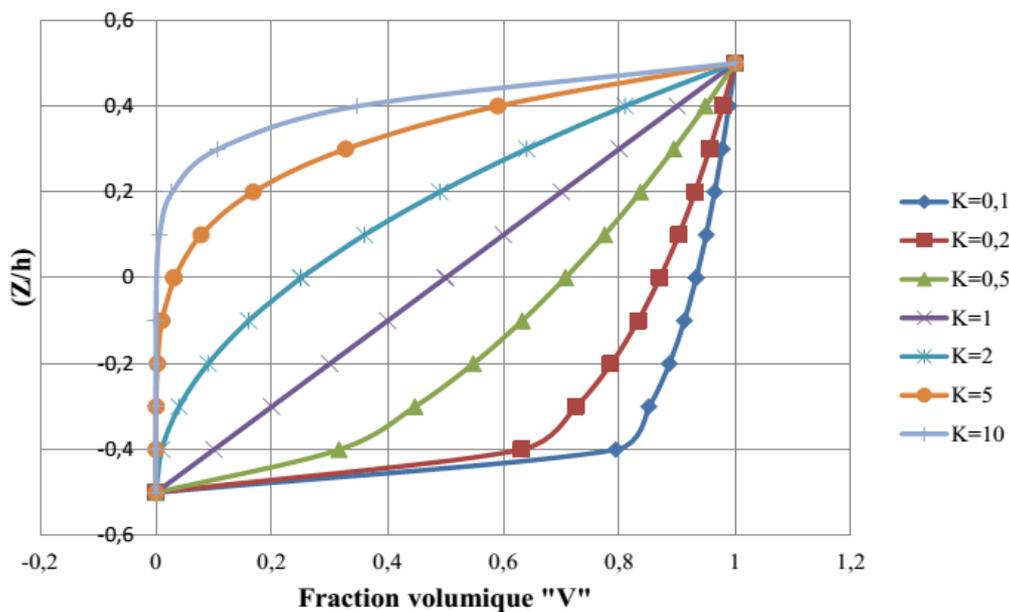


Figure I.15 : Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM [13]

La variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM est illustrée sur la Figure I.15. Il apparaît clairement que la fraction volumique se rapproche vers la surface métallique pour « $K < 1$ », et pour « $K > 1$ » elle augmente rapidement près de la surface céramique et la variation du module de Young devient linéaire pour $k = 1$.

On constate aussi que la plaque devient plus résistante en raison de l'augmentation de la valeur de son module de résistance, si on l'augmente bien sûr, le pourcentage de la céramique dans la plaque, et vice versa : la plaque devient de moins résistance si son module de Young est faible, et ceci est dû à la diminution de la quantité de la céramique et l'augmentation de celle du métal [3].

I.9.1.2. Propriétés matérielles des structures S-FGM

Chung et chi [11] ont défini la fraction de volume de la structure FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par :

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2+z}{h/2} \right)^k \text{ pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad \text{I.7a}$$

$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2-z}{h/2} \right)^k \text{ pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad \text{I.7b}$$

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé par :

$$E(z) = (1 - V_2(z))E_1 + V_2(z)E_2 \text{ pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad \text{I.8a}$$

$$E(z) = (1 - V_1(z))E_2 + V_1(z)E_1 \text{ pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad \text{I.8b}$$

La Figure I.16 exprime que la variation de la fraction volumique déterminée par les équations (I.7) et (I.8) en distributions sigmoïdes, et cette plaque FGM est appelée (Plaque S-FGM).

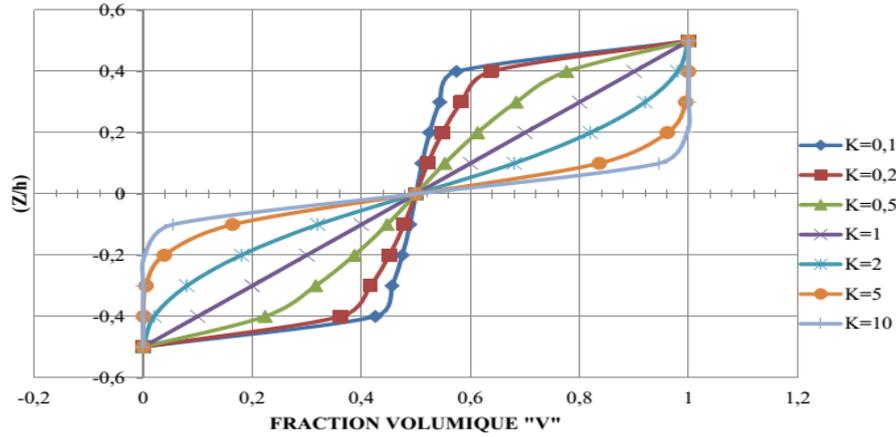


Figure I.16 : Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM

I.9.1.3. Les propriétés matérielles de la plaque E-FGM

Pour déduire les propriétés matérielles des matériaux FGM, les chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s’écrit sous la forme :

$$E(z) = Ae^{B(z+h/2)} \tag{I.9a}$$

$$A = E_2 \tag{I.9b}$$

$$B = \frac{1}{h} \ln\left(\frac{E_1}{E_2}\right) \tag{I.9c}$$

D’après la Figure I.17, on observe que l’accroissement du module de Young est proportionnel à l’augmentation de la quantité de la céramique par rapport à celle du métal tout en allant vers l’extrémité supérieure de la structure [3].

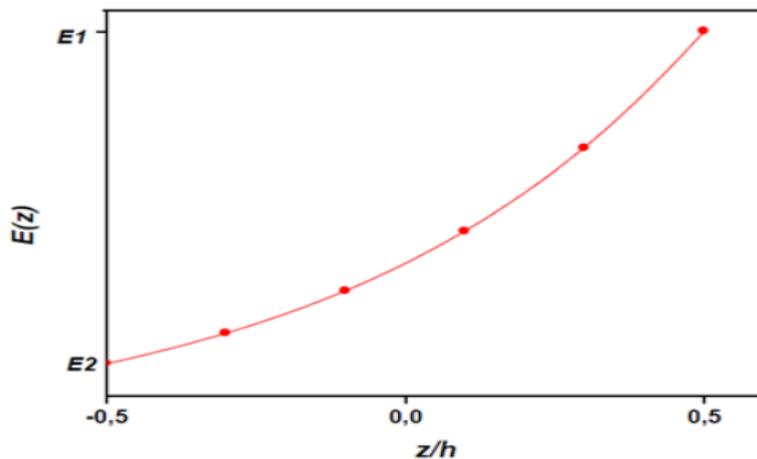


Figure I.17 : Variation du module de Young à travers l’épaisseur de la structure E-FGM

I.9.2 Les modèles d'homogénéisation

La principale caractéristique des FGM réside dans la microstructure non uniforme avec un changement continu des fractions volumiques. En fait, les modèles micromécaniques largement applicables aux FGM Les modèles de Voigt et de Reuss sont les modèles les plus simples utilisés pour évaluer les propriétés matérielles effectives des composites, modèle Mori-Tanaka et une règle modifiée de modèle de mélange proposé par Tamura est discuté. Enfin, le modèle Hashin et Shtrikman sont introduites [11]

I.9.2.1. La méthode Voigt et Reuss

L'idée de Voigt était de définir les propriétés macroscopiques en faisant la moyenne des contraintes sur toutes les phases avec l'hypothèse d'uniformité de déformation. Estime les propriétés matérielles des FGM comme [11]

$$P(z) = P_m V_F(z) + P_c(1 - V_F(z)) \quad \text{I.10a}$$

$$V(z) = V_m V_F(z) + V_c(1 - V_F(z)) \quad \text{I.10b}$$

Avec

- $p(z)$: toute propriété matérielle effective
- c et m : les indices des particules céramiques (inclusions) et le métal (matrice)

D'autre part, Reuss [11]. a obtenu le module d'Young effectif et le coefficient de poisson comme suit :

$$E(z) = \frac{E_c E_m}{V_m V_F(z) + E_c(1 - V_F(z))} \quad \text{I.11a}$$

$$\nu(z) = \frac{\nu_c \nu_m}{\nu_m V_F(z) + \nu_c(1 - V_F(z))} \quad \text{I.11b}$$

I.9.2.2. Modèle TTO

Le Modèle TTO (Tamura – Tomota – Ozawa) basé sur la loi de mélange, Tamura et al. [11]. ont proposé un modèle simple pour décrire les courbes contrainte-déformation des matériaux composites.

Le modèle TTO a été utilisé pour étudier les FGM par Carpenter et Jin Le modèle TTO couple la contrainte uni-axiale et la déformation du composite aux contraintes et déformations uni-axiales moyennes correspondantes des deux matériaux constituants par [11]:

$$\sigma = \sigma_m V_m + \sigma_c V_c \quad \text{I.12a}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_m V_m + \varepsilon_c V_c \quad \text{I.12b}$$

La formulation du module d'Young est montré sur la figure I.18. Ce paramètre empirique relie la contrainte et la déformation dans les phases de matrice et d'inclusions. Par conséquent, le module d'Young effectif serait défini comme suit

$$E(r, z) = \left[\frac{q+E_c}{q+E_m} \cdot E_m V_m + E_c (1 - V_m) \right] / \left[\frac{q+E_c}{q+E_m} \cdot V_m + (1 - V_m) \right] \quad \text{I.13}$$

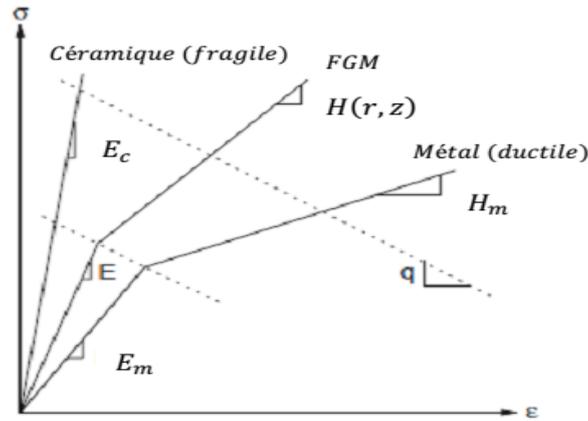


Figure I.18 : Schéma de la courbe contrainte-déformation pour le modèle TTO [11].

La formulation de Tamura se réduit à l'estimation de Voigt pour : $qt = \pm\infty$ et l'estimation de Reuss pour $qt = 0$

I.9.2.3. La méthode de Mori-Tanaka

La méthode de Mori-Tanaka implique des manipulations assez compliquées des variables de champ ainsi que les concepts de contrainte propre. Les estimations de Mori-Tanaka du cisaillement G effectif et module d'élasticité isostatique K du FGM sont donnée par Benveniste, Y. [12]:

$$K = K_m + \frac{(K_c - K_m)V_c}{1 + (1 - V_c)\frac{(K_c - K_m)}{3K_m + 4G_m}} \quad \text{I.14a}$$

$$K = G_m + \frac{(G_c - G_m)V_c}{1 + (1 - V_c)\frac{(G_c - G_m)}{G_m + f_1}} \quad \text{I.14b}$$

$$K = \frac{G_m(9K_m - 8G_m)}{6(K_m - 2G_m)} \quad \text{I.14c}$$

Ensuite, la valeur effective du module de Young E et du coefficient de poisson ν peuvent être données comme :

$$E = \frac{9K_c}{3K + G} \quad \text{I.14d}$$

$$\nu = \frac{3K - 2G}{2(3K + G)} \quad \text{I.14e}$$

I.10. Les principaux avantages de l'utilisation des FGM

On peut énumérer certains avantages qui en résultent principalement de la non-existence d'une interface forte dans la structure FGM [12], tels que :

1. Diminuer les contraintes thermiques causées par les différences de coefficients de dilatation thermique des matériaux utilisés.
2. Absence d'une interface nette devrait conduire à un contrôle d'ensemble mieux des contraintes.
3. Meilleure cohésion entre différents matériaux, par exemple un métal et une céramique.
4. Extension de la région fonctionnelle avant d'atteindre la valeur limite de la déformation plastique.
5. Suppression de délaminage.
6. Augmentation de la ténacité à la rupture.
7. Elimination des singularités des contraintes à divers endroits, tels que les surfaces libres, des coins, des racines de fissures, etc.

I.11. Inconvénients des FGM

Le principal obstacle à une application plus large des FGM est leur fabrication compliquée en raison de l'inadéquation des propriétés différentes, par exemple, la température de fusion, des affinités différentes pour divers autres éléments, la taille des particules, la morphologie, etc... ; un exemple type est un mélange d'un métal avec la température de fusion (T_1) et une céramique avec une température de fusion (T_2). Dans la plupart des cas, un tel couple est habituellement ($T_1 \ll T_2$). Puis, si la température de fabrication est d'environ (T_1), la céramique est encore non fondue et la structure finale contient des particules de céramique non fondues dans une matrice métallique. Dans de nombreux cas, une telle structure présente une grande porosité et une petite adhérence entre les différents composants et son application générale est limitée. Cependant, pour des applications spéciales, la présence de particules très dures (carbures) dans une matrice solide peut être souhaitable [12].

I.12. Conclusion

En conclusion, nous avons vu dans ce chapitre une brève introduction aux matériaux fonctionnellement gradués qui représentent une évolution rapide en sciences et en ingénieries avec de plus grandes applications pratiques. Les nécessités de recherche dans un nouveau domaine sont particulièrement riches et variées, les FGM promettent des potentiels importants qui expliquent l'obligation des efforts importants.



CHAPITRE II

Les théories des plaques

II.1. Introduction

Les théories des plaques adoptent ses méthodes pour le calcul des contraintes et des déformations dans une plaque soumise à des charges, elle est déduite de la théorie des poutres. Afin de les résoudre dans le domaine élastique, plusieurs difficultés sont rencontrées comme les constituants des structures (poutres et plaques) en FGM, il est important de choisir la théorie adéquate qui décrit correctement leur comportement ainsi que le procédé de résolution à appliquer.

Dans ce chapitre nous allons montrer les hypothèses nécessaires des théories des plaques appliquées dans la littérature.

II.2. Historique

En 1888, Love a utilisé les hypothèses de Gustav Kirchhoff, elles-mêmes inspiré par des hypothèses d'Euler Bernoulli pour la théorie des poutres, pour instituer une théorie des plaques minces. La théorie des plaques épaisses a été affirmée par Mindlin à partir des travaux de Rayleigh (1877), Timoshenko (1921), Reissner (1945) et Uflyand (1948).

II.3. Conceptions des Plaques FGM

Dans la majorité des cas, les chercheurs considèrent le FGM sont de type de matériaux composites produit en variaient sans interruption les fractions de volume dans la direction d'épaisseur pour déduire un profil bien déterminé.

Un matériau FGM est un type de matériaux composites classé par leur microstructure variable dans l'espace ; conçue pour optimiser l'exécution des éléments de structures par la distribution de propriétés correspondantes. Les répartitions de propriété sont trouvées dans une variété de produits communs qui doivent avoir des fonctions multiples comme les liaisons entre les particules ; qui doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture ; mais doivent également être assez dures sur l'extérieur pour empêcher l'usure [5].

En dernières années, plusieurs modèles bidimensionnels ont été évoluées pour la modélisation des structures à plusieurs couches tenant compte des cisaillements transverses, ainsi qu'une approche 3D peut donner des informations dans certains cas, mais il est meilleur d'envisager des démarches bidimensionnelles (2D) de type plaque.

II.4. Définition des plaques

La plaque est un solide tridimensionnel (3D) dont une des dimensions, nommée « épaisseur », est petite par rapport aux autres dimensions. Cette plaque particulière contient majoritairement une ligne de référence en $z=0$ ou bien plan « Oxy » désigné « surface moyenne » de la plaque.

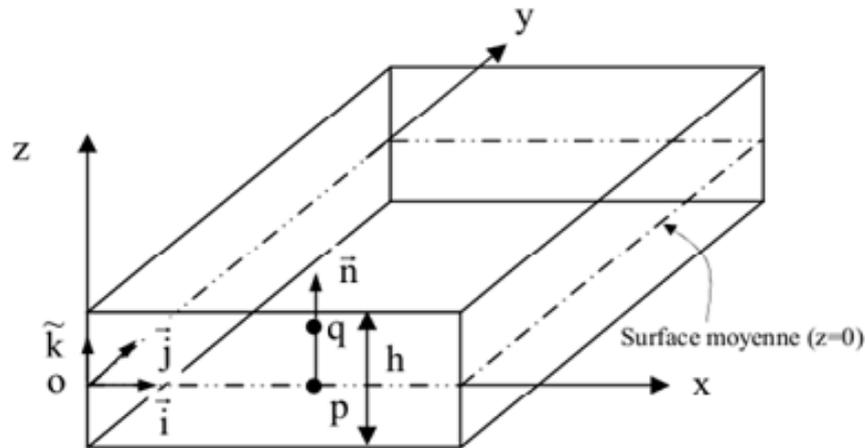


Figure II.1: Géométrie d'une plaque [2]

II.5. Différents types des plaques

Les plaques peuvent être divisées en trois principales classes selon la géométrie de section transversale ainsi que la nature des matériaux qui les constituent, d'où les catégories des plaques sont indiquées comme suit :

II.5.1. Les plaques isotropes

Elles sont constituées d'un matériau isotrope (acier, béton) et leur section transversale est homogène. Elles sont définies par deux paramètres élastiques (respectivement le module d'élasticité et le coefficient de Poisson). On les retrouve dans les constructions civiles courantes (bâtiments, ouvrages d'art, ...) [15]

II.5.2. Les plaques orthotropes

Leurs propriétés élastiques sont différentes dans deux directions perpendiculaires. L'orthotrope peut être naturelle (bois) ou techniques (dalles). Le comportement de ces dalles est défini par quatre paramètres élastiques et on les retrouve dans les constructions navales, aéronavales, de réservoirs de l'industrie chimique, des bâtiments et d'ouvrages d'art [15]

II.5.3. Les plaques anisotropes

Les propriétés élastiques des plaques anisotropes sont différentes dans toutes les directions.

II.6. Différents types de comportements des plaques

La flexion, la membrane et le cisaillement sont des termes essentiels pour définir l'énergie de déformation d'une plaque. Lorsque l'épaisseur est très petit ou tend vers zéro, l'énergie de cisaillement devient négligeable et la déformation subie par la plaque appartient à l'une des trois catégories asymptotiques suivantes en fonction de la géométrie, des conditions aux limites et des forces appliquées [15]:

- La flexion dominante ;
- La membrane dominante ;
- Le cas mixte ;

II.7. Etat membranaire et état flexionnel

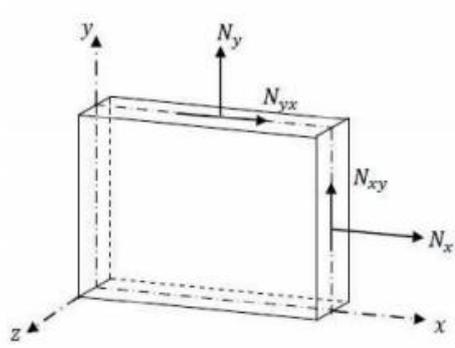
L'état de contrainte par lequel l'élément structural résiste aux actions extérieures, est caractérisé par les efforts intérieurs définis au niveau de la surface moyenne. La trace de cette surface dans une section droite s'appelle la ligne moyenne. Les efforts intérieurs sont décrits par unité de longueur de ligne moyenne dans les sections droites.

- *L'état membranaire* s'associe aux efforts intérieurs de type force agissant dans la surface moyenne, à savoir les efforts normaux et les efforts tangentiels.
- *L'état flexionnel* regroupe les efforts intérieurs de caractère flexionnel, soit les moments de flexion, les moments de torsion et les efforts tranchants.

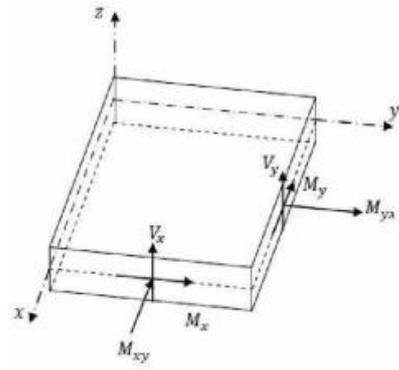
Selon le mode du comportement, on peut distinguer quatre types d'éléments structuraux :

- L'élément de paroi est défini par la géométrie plane de surface moyenne (plan moyen) et par son épaisseur : sollicitée par des charges agissant dans son plan moyen, il résiste par un état membranaire (Figure II.2. a); les efforts normaux et tangentiels résultent d'ailleurs de l'état plan de contrainte.
- L'élément de plaque est défini par la géométrie plane de sa surface moyenne (plan ou feuillet moyen); il résiste aux charges agissantes normalement à son plan moyen par un état flexionnel (Figure II.2. b).
- L'élément de plaque-membrane est la superposition des deux cas précédents et réunit donc l'état membranaire de paroi et l'état flexionnel de plaque (Figure II.2.c); bien que plan, il se comporte de manière spatiale, pouvant être soumis à des charges quelconques, tant parallèles que perpendiculaires à son plan moyen; il constitue la base des structures plissées.

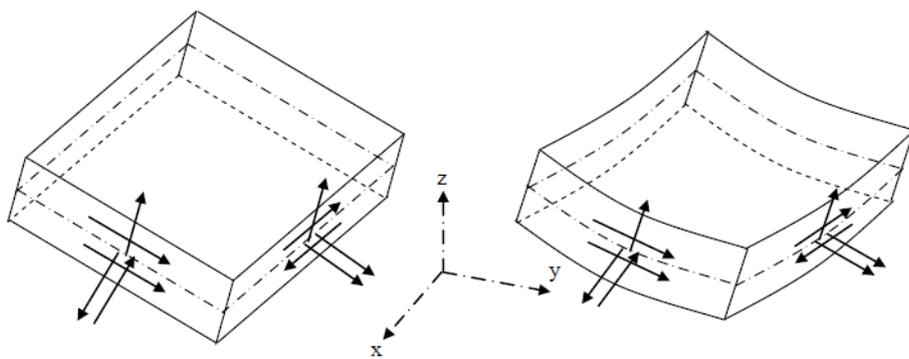
- En fin l'élément structural de plaque est, par nature, la courbe spatiale ; il utilise les deux états d'effort, membranaire et flexionnel, pour s'opposer aux actions arbitraires pouvant le solliciter (Figure II.2. d) ; exceptionnellement grâce à sa courbure, une plaque peut ne résister aux charges que par l'état membranaire (structure gonflable, textile, peau, etc....) [15]



(a) Etat membranaire de paroi



(b) Etat flexionnel de plaque



(c) Plaque membrane : superposition

(d) Plaque cinq efforts intérieurs par section droit des états membranaire et flexionnel

Figure II.2: Efforts intérieurs dans une plaque. [15]

II.8. Domaine d'utilisation les plaques

Les espace d'application des plaques est très distribué dans tous les domaines, pertinent dans le domaine du génie civil ou, on les utilise dans les constructions simples par exemple habitation ou les ouvrages d'art, elle existe en plusieurs formes différentes y compris les circulaires et rectangulaires et d'autre formes selon la qualité de l'ouvrage, comme illustré dans les figures ci-contre :



a. Ouvrages d'arts ponts



b. Ouvrages d'arts ponts (tabliers)



c. Ouvrages d'arts (plaques circulaire)



d. Ouvrages souterrains



e. Constructions civiles

Figure II.3: les Domaines d'utilisation des plaques [15]

II.9. Les modèles analytiques des plaques FGM

II.9.1. Principe de Navier Bernoulli généralisé

L'hypothèse de Navier Bernoulli comporte à supposer que les sections planes, normales à la fibre moyenne avant chargement demeurent planes et normales à la ligne moyenne après déformation.

Cette hypothèse qui permet de calculer les contraintes normales dues au moment fléchissant, est bien vérifiée dans le cas de flexion pure où l'effort tranchant est nul.

Le principe de Navier Bernoulli est créé par les observations suivantes :

- Le gauchissement d'une section est toujours très petit vis-à-vis des dimensions de la section.
- La variation du gauchissement, lorsqu'on passe d'une section à une section infiniment voisine, est toujours très petite, vis-à-vis la distance des deux sections infiniment voisines.

Le principe de Navier Bernoulli revient à négliger le cisaillement et le gauchissement des sections transversales dans l'étude de déplacement et de déformation d'un élément de poutre [16].

II.9.2. La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT)

On commence par le model le plus simple et le plus général appelé model de Love Kirchhoff. Ce modèle est basé sur une distribution linéaire des déplacements suivant l'épaisseur [5]. L'hypothèse adoptée est celle de Love-Kirchhoff [15] des contraintes planes, les déformations dues au cisaillement transverse sont négligées. La normale à la surface moyenne de la plaque reste perpendiculaire et droite à celle-ci après déformation (Figure II.4).

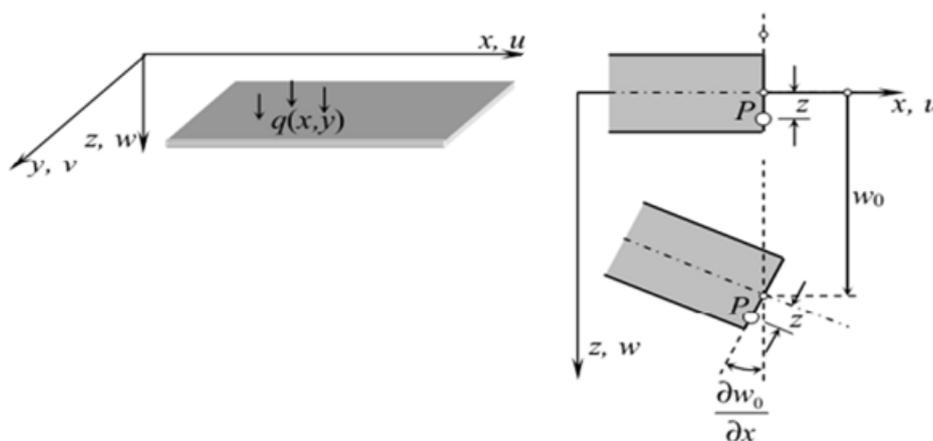


Figure II.4: model de Love-Kirchhoff.

Le champ de déplacements de Love-Kirchhoff s'écrit alors,

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (\text{II.1})$$

Avec,

u_0 et v_0 : Le déplacement de membrane dans la direction x et y,

w_0 : La flèche de la plaque,

$\frac{\partial w_0}{\partial x}$ et $\frac{\partial w_0}{\partial y}$: La rotation due à la flexion (sans cisaillement). Mesurées sur le plan autour

La principale limitation de la théorie classique de Kirchhoff et que l'on néglige les effets dus aux efforts tranchants et à l'inertie de rotation, or dans la pratique les plaques ont des épaisseurs significatives et il devient nécessaire de tenir en compte de ces effets pour décrire leur comportement. [2]

II.9.3. La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (First Order Shear Deformation Theory FSDT)

Cette théorie (également appelée théorie de Mindlin) est une extension des travaux de Timoshenko [17] et est considérée comme une amélioration de la théorie classique des plaques minces (théorie de Kirchhoff).

En tenant compte de l'effet de cisaillement transverse par l'introduction d'un facteur de correction de cisaillement. La conséquence de cette hypothèse est qu'une section droite reste droite mais non perpendiculaire à la surface moyenne à cause de l'effet du cisaillement transverse [18] [19].

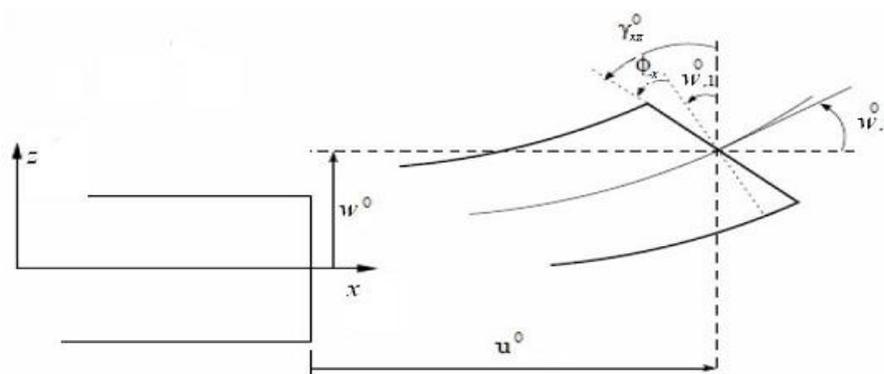


Figure II.5 : Cinématique de Reissner-Mindlin

Le champ de déplacement doit être reformulé de la manière suivante :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\phi_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\phi_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (\text{II.2})$$

Avec : ϕ_x et ϕ_y Les rotations de la normale au plan moyen autour x et y, respectivement, Dans

lequel : $\phi_x = \gamma_{xz}^0 + \frac{\partial w_0}{\partial x}$ et $\phi_y = \gamma_{yz}^0 + \frac{\partial w_0}{\partial y}$

Où γ_{xz}^0 et γ_{yz}^0 les déformations de cisaillement transverse mesurées sur le plan moyen.

Avec ce choix de la forme des champs de déplacements, les déformations transversales sont constantes en z. Les contraintes de cisaillement sont donc uniformes à n'importe quel point suivant l'épaisseur et ça évite la discontinuité entre les couches dans les composites conventionnels. Cette mauvaise description d'uniformité de distribution des contraintes oblige à introduire des coefficients correcteurs pour mieux prendre en compte, dans l'écriture de l'énergie, les effets du cisaillement transversal. Les résultats obtenus dépendent essentiellement du choix empirique dans des situations complexes des coefficients correcteurs et l'étude des plaques épaisses reste aléatoire par ce type d'approche cinématique [10].

La Figure II.6 illustre le changement de la fonction de forme ainsi que sa dérivée relativement à l'épaisseur de la plaque. Cette modification est plus véritable pour le cas des plaques stratifiés ou au niveau de l'interface il y a une interruption de répartition des propriétés alors que pour les FGM cette interruption est rectifiée.

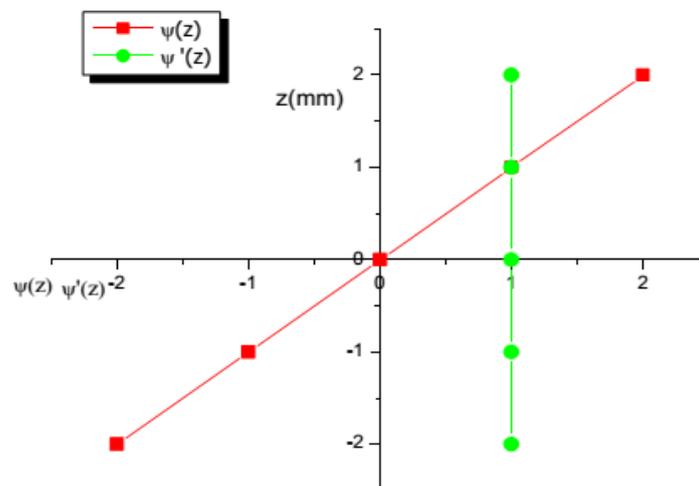


Figure II.6: Variation de la fonction de gauchissement $\psi(z) = z$ et $\psi'(z)$ suivant l'épaisseur [10].

II.9.4. La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (Higher Order Shear Deformation Theory HSDT)

La théorie d'ordre élevé est basée sur une distribution non linéaire des champs de déplacement suivant l'épaisseur de la plaque. Elle est plus précise que la théorie du premier ordre puisqu'elle introduit une fonction qui tient compte du phénomène « gauchissement »

Par définition : le gauchissement apparaît lorsque la section transversale de la plaque perd sa planéité (Figure II.7). La fonction représente le gauchissement et sa dérivée le cisaillement [3].

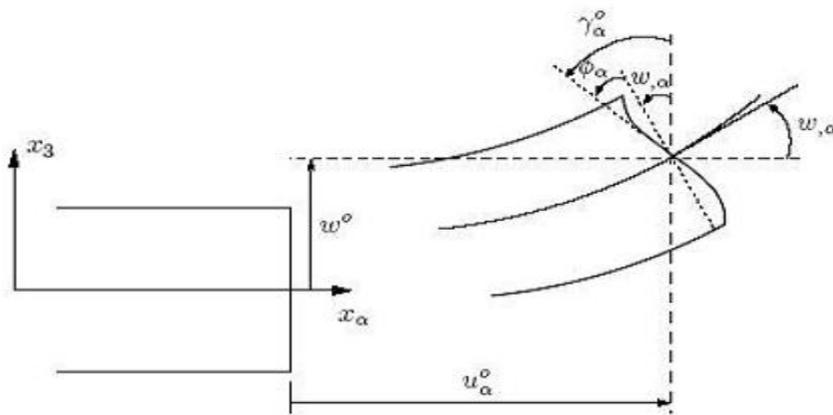


Figure II.7: Cinématique de la théorie d'ordre élevé

Et le champ de déplacements s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + f(z) \phi_x(x, y) \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + f(z) \phi_y(x, y) \\
 w(x, y, z) &= w_0(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{II.3}$$

Avec :

$(u_0, v_0 \text{ et } w_0)$: Sont les déplacements en membrane.

$\phi_x \text{ et } \phi_y$: Les rotations autour des axes x et y .

$f(z)$ Est une fonction de cisaillement transverse caractérisant les théories correspondantes.

Cependant, plusieurs fonctions de cisaillement ont été utilisées dans les modèles d'ordre supérieur sont indiqués comme suit :

Tableau II.1: Modèles des déplacements [20].

Modèle	Théorie	Fonction de cisaillement transverse	Nombre des inconnues
CPT	La théorie classique des plaques	$f(z) = 0$	3
FSDPT	La théorie de déformation de cisaillement du premier ordre	$f(z) = z$	5
PSDPT	La théorie de déformation de cisaillement parabolique	$f(z) = z\left(1 - 4z^2/3h^2\right)$	5
SSDPT	La théorie de déformation de cisaillement trigonométrique	$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)$	5

II.9.5. La théorie de déformation en cisaillement d'ordre zéro (Zeroth Order Shear Deformation Theory ZSDT)

Une nouvelle théorie de déformation de cisaillement est adoptée, cette théorie basée en supposant que la contrainte de cisaillement transversal varie de façon parabolique dans l'épaisseur de la plaque de telle façon qu'elle disparaît sur les surfaces en bas et en haut de la plaque.

La théorie d'ordre zéro tient en compte l'effet de cisaillement sans l'introduction de facteurs de correction de cisaillement en gardant un niveau minimum de complexité pour obtenir la solution [21].

Le champ de déplacement de la théorie ZSDT est donné par :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z \frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{1}{\lambda_x} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{z}{h} \right) - 2 \left(\frac{z}{h} \right)^3 \right] Q_x \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{1}{\lambda_y} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{z}{h} \right) - 2 \left(\frac{z}{h} \right)^3 \right] Q_y \\
 w(x, y, z) &= w_0(x, y)
 \end{aligned} \tag{II.4}$$

Où : Q_x et Q_y sont des résultantes des contraintes transversales de cisaillement.

λ_x et λ_y sont des constantes qui peuvent être déterminés en considérant la définition des résultantes Q_x et Q_y .

II.9.6. Les modèles zig-zag

Di Sciuva est le premier à proposer le modèle zig-zag du premier ordre. Dans ce modèle, les déplacements membranaires sont les résultats de la superposition du champ de déplacement global d'une théorie du premier ordre et d'une fonction zig-zag donne une contribution des déplacements membranaires qui est continue en z mais sa dérivée première est discontinue à l'interface (Figure. II.8). Les déformations transversales sont donc discontinues et la continuité des contraintes de cisaillement transverse aux interfaces est assurée. [13]

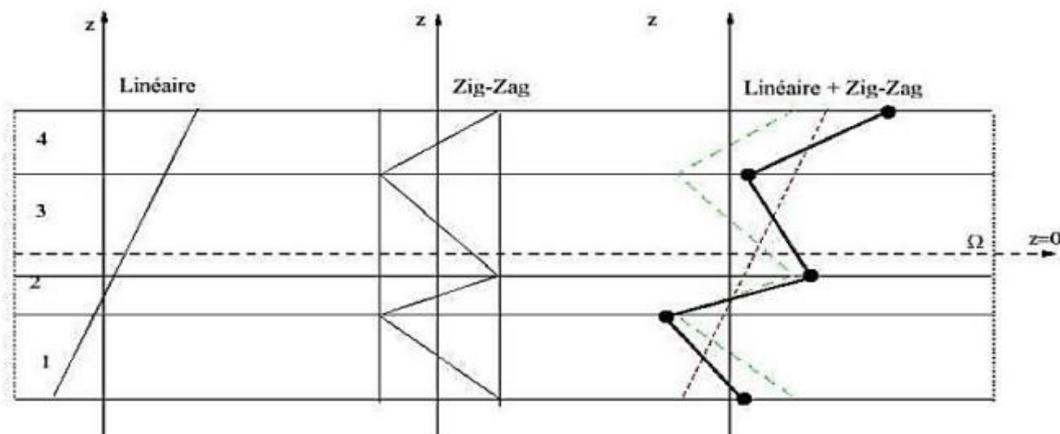


Figure II.8 : Champ de déplacement des modèles zig-zag du premier ordre [10]

L'avantage principal du champ de déplacement des modèles zig-zag réside dans la bonne modélisation de la distorsion de la normale de la surface déformée, ainsi que dans la vérification des conditions de continuité, et ce sans augmenter pour autant le nombre et l'ordre des équations fondamentales de la théorie du premier ordre. Le recours à des coefficients de correction en se basant sur le concept de plusieurs auteurs a réalisé des améliorations significatives pour le modèle zig-zag, [13]

Pour éviter l'introduction des coefficients de correction pour le cisaillement transverse. Plusieurs chercheurs ont réalisé des améliorations significatives pour le modèle zig-zag. L'amélioration principale est l'introduction d'une distribution non linéaire des déplacements. On superpose le champ zig-zag (linéaire par morceau) à un champ de déplacement d'ordre élevé (souvent cubique) Les conditions de compatibilité sont satisfaites sur les surfaces supérieures et inférieures des plaques pour réduire le nombre de paramètres [13]

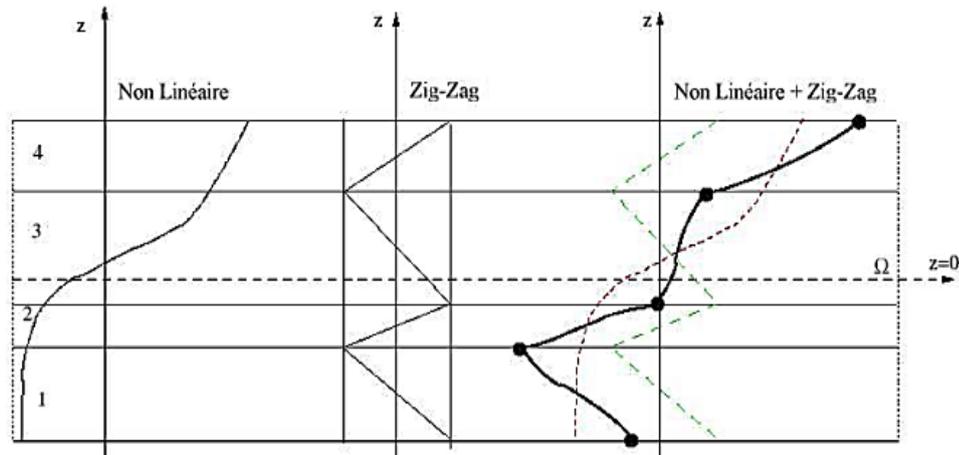


Figure II.9 : Champ de déplacement des modèles zig-zag d'ordre supérieur [10]

II.10. Conclusion

Dans ce chapitre, on a vu ci-dessus les différents types de plaques (isotropes, anisotropes et orthotropes) qui contiennent différents comportements (flexionnel, membrane et mixte), dont les études se font dans plusieurs états tel que ; statique, dynamique, ...etc.

Généralement, ces études se basent sur plusieurs modèles pour calcul des plaques minces et épaisses en FGM. À savoir le principe de Navier Bernoulli et la théorie classique avec la théorie du premier ordre, aussi les théories d'ordre élevé. A la fin du chapitre on a présenté le modèle d'ordre zéro ainsi que les modèles zig-zag.

CHAPITRE III

Etude de flexion des plaques en matériaux à gradient de propriétés FGM

III.1. Introduction

Le but de toute théorie est le calcul approché des grandeurs généralisées, elle est développée par des calculs approximatifs sur la base d'un système d'équations d'équilibre, de compatibilité.

Dans ce chapitre, nous allons présenter une étude analytique du comportement en flexion des plaques en matériaux à gradient de propriétés FGM, d'abord en utilisant une nouvelle théorie raffinée d'ordre élevée de la déformation des plaques (Refined Plate Theory « RPT ») pour étudier la flexion des plaques de matériau fonctionnellement gradués « FGM ». L'utilisation d'un champ de déplacement raffinée implique la réduction du nombre de variables, par conséquent permet de déterminer un modèle mathématique simplifié. Les solutions analytiques et les relations constitutives sont obtenues en résolvant un problème aux valeurs propres.

III.2. Hypothèses de base

Considérons une plaque en FGM d'épaisseur totale « h » (Figure III. 1). La plaque est réalisée par un matériau transversalement isotrope possédant des caractéristiques variables en continue dans l'épaisseur de la plaque. Le plan « oxy » est considéré comme étant la surface moyenne de la plaque avant la déformation ainsi que l'axe « z » positif vers le haut à partir du plan médian.

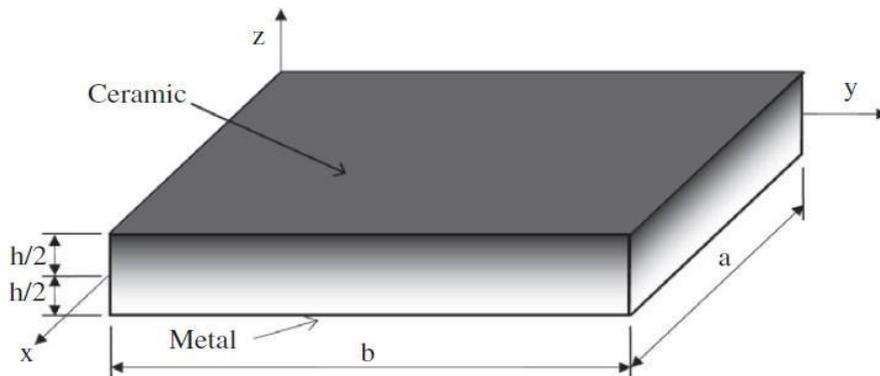


Figure III.1 : Géométrie d'une plaque en FGM [7].

Les hypothèses de la présente théorie raffinée des plaques sont les suivantes

- L'origine du système de coordonnées cartésiennes est prise à la surface neutre de la plaque FGM.
- Les déplacements sont petits par rapport à l'épaisseur de la plaque et, en conséquence les déformations impliquées sont infinitésimales.
- Le déplacement transverse w contient deux composantes de flexion w_b et de cisaillement w_s . Ces composantes sont en fonction des coordonnées x et y

$$w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) \quad (\text{III.1})$$

- La contrainte normale transversale σ_z est négligeable devant la contrainte plane σ_x et σ_y
- Le déplacement u dans la direction x et Le déplacement v dans la direction y sont définis par superposition des déplacements dus aux effets d’extension (déformations de membrane), de flexion et de cisaillement :

$$u = u_0 + u_b + u_s, v = v_0 + v_b + v_s \tag{III.2}$$

- Les composantes de flexion u_b et v_b (déplacements de flexion) sont supposées similaires aux déplacements donnés par la théorie classique des plaques. Par conséquent, les expressions de u_b et v_b peuvent être donnés comme suit :

$$u_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial x} ; \text{ et } v_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial y} \tag{III.3}$$

- À partir de la composante de déplacements u_s et v_s (déplacements de cisaillement) qui donnent lieu, en relation avec « w_s » aux variations paraboliques des déformations de cisaillement γ_{xz}, γ_{yz} donc aux contraintes τ_{xz}, τ_{yz} se dérive la composante de déformation γ_{xz}, γ_{yz} qui varie suivant une forme parabolique à travers l’épaisseur de la plaque, tout en assurant la condition de nullité des contraintes de cisaillement τ_{xz} aux surfaces inférieure et supérieure de la plaque. Par conséquent, l’expression pour u_s et v_s respectivement peut personnalité donnée comme :

$$u_s = -f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} ; \text{ et } v_s = -f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \tag{III.4}$$

Où les fonctions du cisaillement $f(z)$ proposée sont données dans le tableau III.1 :

Tableau III.1 : Fonctions de cisaillement utilisée dans cette étude.

Type de fonction	Fonction du cisaillement	Théorie d’origine
Fonction exponentielle	$f(z) = z - z * e^{\left(-2\left(\frac{z}{h}\right)^2\right)}$	Théorie de Karama [22]
Fonction polynomiale	$f(z) = z - z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2}\right)$	Théorie de Reddy [22]
Fonction hyperbolique	$f(z) = z - \left(h * \sinh\left(\frac{z}{h}\right) - z * \cosh\left(\frac{1}{2}\right)\right)$	Théorie de Soldatos [22]
Fonction trigonométrique	$f(z) = z - \left(h * \arctan\left(\frac{2z}{h}\right) - z\right)$	Théorie de Ferreira [23]

III.3. Cinématiques

Basée sur les hypothèses précédentes, le champ de déplacement de la théorie raffinée développée à quatre variables d'ordre élevée peut être obtenu en utilisant les équations (III.1) – (III.4) par :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (\text{III.5a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (\text{III.5b})$$

$$w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) \quad (\text{III.5c})$$

III.4. Le champ de déformation

Les relations cinématiques peuvent être écrites de la manière suivante, le champ de déformations se déduit alors des déplacements des équations (III.5) soit :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} \quad (\text{III.6a})$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} \quad (\text{III.6b})$$

$$\{\varepsilon_z\} = \left\{ \frac{\partial w}{\partial z} \right\} = 0 \quad (\text{III.6c})$$

Avec :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.7a})$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ \frac{\partial w_s}{\partial x} \end{Bmatrix}, f'(z) = \frac{d(f(z))}{d(z)}, g(z) = 1 - f'(z) \quad (\text{III.7b})$$

III.5. Les équations constitutives

Pour les plaques fonctionnellement graduées « FGM » transversalement isotropes, Les propriétés matérielles sont données par :

$$E(z) = (E_c - E_m)v(z) + E_m \quad (\text{III.8a})$$

Où

$$v(z) = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^p \quad (\text{III.8b})$$

E_c et E_m Sont respectivement les modules de Young de la céramique et métal, et p est un paramètre déterminant le profil de variation du matériau à travers l'épaisseur (degré d'homogénéité) qui prend des valeurs supérieures ou égales à zéro.

les équations constitutives (relations contraintes –déformations) peuvent être définie par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.9})$$

Dans lesquelles (σ_x , σ_y , τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{xz}) et (ε_x , ε_y , γ_{xy} , γ_{yz} , γ_{xz}) sont respectivement les termes des contraintes et des déformations. En utilisant les propriétés des matériaux, définies dans l'équation (III.8), les coefficients de rigidité peuvent être donnée comme suit :

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z)}{1-\nu^2}; Q_{12} = \nu * Q_{11}; Q_{66} = Q_{44} = Q_{55} = \frac{(1-\nu)}{2} Q_{11} \quad (\text{III.10})$$

III.6. Equations d'équilibre

Les équations gouvernantes de la plaque FGM peuvent être exprimées en utilisant le principe des travaux virtuels, dans ce cas le principe est utilisé pour dériver les équations d'équilibre dans le domaine du déplacement approprié.

La formulation analytique de ce principe peut être énoncée de la manière suivante :

$$\delta \int_V (U + V) dv = 0 \quad (\text{III.11})$$

Où

δU : est la variation virtuelle de l'énergie de déformation;

δV : est la variation virtuelle de l'énergie due aux charges appliquées.

La variation de l'énergie de déformation est définie par :

$$\delta U = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{\Omega} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_{xy} \delta \gamma_{xy} + \sigma_{yz} \delta \gamma_{yz} + \sigma_{xz} \delta \gamma_{xz}) dz d\Omega \quad (\text{III.12})$$

En substituant les équations (III.6) et (III.9) dans l'équation (III.12) et en l'intégrant par rapport la hauteur des plaques, Le principe du travail virtuel pour le problème actuel peut être exprimé par :

$$\delta U = \int_{\Omega} N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_y^b \delta k_y^b + M_{xy}^b \delta k_{xy}^b + M_x^s \delta k_x^s + M_y^s \delta k_y^s + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + Q_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^s + Q_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^s dx dy \quad (III.13)$$

La variation de l'énergie due aux charges appliquées s'écrit sous la forme suivante :

$$\delta V = \int_{\Omega} q \delta (w_b + w_s) d\Omega \quad (III.14)$$

Avec $dv = dx dy dz$; $d\Omega = dx dy$

q : désigne la charge appliquée ;

Les efforts normales N et les moments résultants M^b , M^s et Q^s sont définis par :

$$\begin{aligned} (N_x, N_y, N_{xy}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) dz \\ (M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) z dz \\ (M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) f dz \\ (Q_{xz}^s, Q_{yz}^s) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) g dz \end{aligned} \quad (III.15)$$

En remplaçant l'équation (III.9) à l'équation (III.15) et en intégrant par rapport la hauteur de la plaque, les expressions des efforts résultants de la plaque FGM sont liées aux déformations par la relation suivante :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ B & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} Q_{yz}^s \\ Q_{xz}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} \quad (III.16)$$

Où

$$N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^t, M^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}^t, M^s = \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\}^t \quad (III.17)$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \varepsilon_{xy}^0\}^t, k^b = \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\}^t, k^s = \{k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s\}^t \quad (III.18)$$

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \\ B^s &= \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s \end{bmatrix}, D^s = \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^s \end{bmatrix}, H^s = \begin{bmatrix} H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ H_{12}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (III.19)$$

Où les composantes de rigidité A_{ij}, B_{ij}, \dots etc, sont définis comme :

$$\begin{Bmatrix} A_{11} & B_{11} & D_{11} & B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s \\ A_{12} & B_{12} & D_{12} & B_{12}^s & D_{12}^s & H_{12}^s \\ A_{66} & B_{66} & D_{66} & B_{66}^s & D_{66}^s & H_{66}^s \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11}(1, z, z^2, f(z), zf(z), f^2(z)) \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ \frac{1-v}{2} \end{pmatrix} dz \quad (III.20a)$$

$$\left(A_{22}, B_{22}, D_{22}, B_{22}^s, D_{22}^s, H_{22}^s \right) = \left(A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s \right) \quad (\text{III.20b})$$

$$A_{44}^s = A_{55}^s = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{66} [g(z)]^2 dz \quad (\text{III.20c})$$

En remplaçant les expressions de « $\delta U, \delta V$ » et des équations (III.12) et (III.14) dans l'équation (III.11) et en intégrant par rapport l'épaisseur de la plaque, tout en rassemblant les facteurs ($\delta u_0, \delta v_0, \delta w_b$ et δw_s) les équations d'équilibre pour la plaque FGM sont obtenues :

$$\begin{aligned} \delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \delta v_0 : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= 0 \\ \delta w_b : \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + q &= 0 \\ \delta w_s : \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + \frac{\partial Q_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial Q_{yz}^s}{\partial y} + q &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III.21})$$

Les équations (III.21) peuvent être exprimées en coefficient de déplacements (u_0, v_0, w_b et w_s) en utilisant les équations (III.5), (III.6), (III.7), (III.9) et (III.15) comme suit :

$$A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - B_{11} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial y^2} - B_{11}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3} - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x \partial y^2} = 0 \quad (\text{III.22a})$$

$$(A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^2 \partial y} - B_{22} \frac{\partial^3 w_b}{\partial y^3} - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^2 \partial y} - B_{22}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial y^3} = 0 \quad (\text{III.22b})$$

$$\begin{aligned} B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + B_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} - D_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} \\ - 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22} \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} - D_{11}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} \\ - D_{22}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} + q = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.22c})$$

$$\begin{aligned} B_{11}^s \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + B_{22}^s \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} - D_{11}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} \\ - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} - H_{11}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} \\ - H_{22}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} + A_{55}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + A_{44}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} + q = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.22d})$$

III.7. Solution adoptée pour une plaque en FGM

La solution de Navier est utilisée dans cette étude afin de déterminer les solutions analytiques pour lesquelles les déplacements sont écrites comme produit de paramètres arbitraires et fonctions trigonométriques connues pour satisfaire les équations d'équilibre et les conditions aux limites [24]

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_b \\ w_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_{mn} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) \\ V_{mn} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) \\ W_{bmn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\ W_{smn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \end{Bmatrix} \quad (\text{III.23})$$

La charge transversale q est également exprimée par la série double de sinus de Fourier sous la forme suivante :

$$q = q_0 \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \quad (\text{III.24})$$

Où U_{mn} , V_{mn} , W_{bmn} et W_{smn} sont des éléments arbitraires à déterminer sous condition que la solution de l'équation (III.23) satisfait les relations d'équilibre, Avec : $\alpha = \frac{\pi}{a}$; $\beta = \frac{\pi}{b}$ et q_0 sont des constants.

D'où, on obtient le système d'équations suivant :

$$[K]\{\Delta\} = \{Q\} \quad (\text{III.25})$$

Où $\{\Delta\} = \{U_{mn}, V_{mn}, W_{bmn}, W_{smn}\}^t$ et $\{Q\} = \{0, 0, q, q\}^t$

$[K]$ est la matrice symétrique donnée par :

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} & k_{34} \\ k_{14} & k_{24} & k_{34} & k_{44} \end{bmatrix} \quad (\text{III.26})$$

Pour lequel ;

$$\begin{aligned} k_{11} &= -(A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2), \\ k_{12} &= -\alpha\beta(A_{12} + A_{66}), \\ k_{13} &= \alpha[B_{11}\alpha^2 + (B_{12} + 2B_{66})\beta^2], \\ k_{14} &= \alpha[B_{11}^s\alpha^2 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s)\beta^2] \\ k_{22} &= -(A_{66}\alpha^2 + A_{22}\beta^2), \\ k_{23} &= \beta[B_{22}\beta^2 + (B_{12} + 2B_{66})\alpha^2] \\ k_{24} &= \beta[B_{22}^s\beta^2 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s)\alpha^2] \\ k_{33} &= -(D_{11}\alpha^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2\beta^2 + D_{22}\beta^4) \\ k_{34} &= -(D_{11}^s\alpha^4 + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)\alpha^2\beta^2 + D_{22}^s\beta^4) \\ k_{44} &= -(H_{11}^s\alpha^4 + 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s)\alpha^2\beta^2 + H_{22}^s\beta^4 + A_{55}^s\alpha^2 + A_{44}^s\beta^2) \end{aligned} \quad (\text{III.27})$$

III.8. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons développé une solution analytique pour l'étude du comportement mécanique dans le cas de la flexion des plaques simplement appuyées en matériaux fonctionnellement gradués « FGM » sous chargement mécanique sinusoïdale, La partie suivante de ce mémoire sera consacré au validation de la présente théorie raffinée en utilisant quatre type de fonctions, et par la suite, la réalisation d'une étude paramétrique pour déterminer les différentes facteurs qui influent sur le comportement des plaques FGM.

CHAPITRE IV

Résultats et discussion

IV.1. Introduction

Dans ce chapitre, une analyse de la flexion mécanique est présentée en se basant sur la théorie raffinée de déformation d'ordre élevé des plaques, notre étude est fondée au premier lieu sur une validation des résultats obtenus par l'exécution d'un programme de calcul développé en utilisant quatre types de fonctions de cisaillement à savoir : la fonction exponentielle, la fonction polynômiale, la fonction hyperbolique et la fonction trigonométrique.

Ensuite, on va réaliser une étude paramétrique pour déterminer les différents paramètres qui influent sur le comportement en flexion mécanique des plaques en matériaux à gradient de propriétés (FGM) simplement appuyées.

IV.2. Propriétés matérielles de la plaque fonctionnellement graduée étudiée

A ce stade de notre recherche, nous allons étudier le comportement en flexion d'une plaque FGM soumise à une charge sinusoïdale « q » reposant sur un appuie simple. La face inférieure de la plaque FGM est riche en métal (aluminium, Al), où les propriétés matérielles varient graduellement suivant l'épaisseur jusqu'à atteindre la face supérieure de la plaque qui est entièrement en céramique (alumine, Al₂O₃).

Les propriétés matérielles de la plaque FGM étudiée sont présentées dans le tableau suivant.

Tableau IV.1: Les propriétés mécaniques des matériaux utilisés.

Matériau	Métal (Aluminium, Al)	Céramique (Alumina, Al ₂ O ₃)
Module de Young (GPa)	70	380
Coefficient de poisson	0.3	0.3

Les résultats numériques sont présentés sous forme des grandeurs adimensionnelles comme suit :

La flèche maximale adimensionnelle

$$\bar{W} = \frac{10E_c h^3}{a^4 q_0} w \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right); \quad (IV.1)$$

Le déplacement longitudinal adimensionnel :

$$\bar{u} = \frac{100E_c h^3}{a^4 q_0} u \left(0, \frac{b}{2}, z \right) \quad (IV.2)$$

Les contraintes normales :

$$\bar{\sigma}_{xx}(z) = \frac{h}{a q_0} \sigma_x \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z \right); \bar{\sigma}_{yy}(z) = \frac{h}{a q_0} \sigma_y \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z \right); \quad (IV.3)$$

Les contraintes de cisaillement transversales :

$$\bar{\tau}_{xy}(z) = \frac{h}{a q_0} \tau_{xy}(0,0,z); \bar{\tau}_{xz}(zz) = \frac{h}{a q_0} \tau_{xz} \left(0, \frac{b}{2}, z \right); \bar{\tau}_{yz}(z) = \frac{h}{a q_0} \tau_{yz} \left(\frac{a}{2}, 0, z \right); \quad (IV.4)$$

IV.3. Études comparatives et validation

Cette partie du mémoire est consacrée à la validation de la présente étude, où les présents résultats sont comparés avec celles issues de la littérature dans les tableaux IV.2, IV.3 et IV.4.

Tableau IV.2: Effet de degrés d'homogénéité « p » sur les déplacements et les contraintes d'une plaque carrée en FGM.

		Théorie	P=1	Erreur %	P=2	Erreur %	P=4	Erreur %	P=8	Erreur %	
\bar{U}	Quasi-3D [25]		0,6436	—	0,9012	—	1,0541	—	1,083	—	
	SSDT [26]		0,6626	0,0295	0,9281	0,0298	1,0941	0,0379	1,134	0,6626	
	HSDT [27]		0,6398	-0,0059	0,8957	-0,0061	1,0457	-0,0080	1,0709	0,6398	
	TSDT [28]		0,6414	-0,0034	0,8984	-0,0031	1,0502	-0,0037	1,0763	0,6414	
	Présente	Exponentielle		0,6407	-0,0045	0,8972	-0,0044	1,0483	-0,0055	1,074	-0,0083
		Polynômiale		0,6414	-0,0034	0,8984	-0,0031	1,0502	-0,0037	1,0763	-0,0062
		Hyperbolique		0,6414	-0,0034	0,8984	-0,0031	1,0503	-0,0036	1,0764	-0,0061
		Trigonométrique		0,6403	-0,0051	0,8966	-0,0051	1,0473	-0,0065	1,0728	-0,0094
\bar{W}	Quasi-3D [25]		0,5875	—	0,757	—	0,8823	—	0,9739	—	
	SSDT [26]		0,5889	0,0024	0,7573	0,0004	0,8819	-0,0005	0,975	0,0011	
	HSDT [27]		0,5880	0,0009	0,7564	-0,0008	0,8814	-0,0010	0,9737	-0,0002	
	TSDT [28]		0,5890	0,0026	0,7573	0,0004	0,8815	-0,0009	0,9747	0,0008	
	Présente	Exponentielle		0,5888	0,0022	0,7572	0,0003	0,8821	-0,0002	0,9751	0,0012
		Polynômiale		0,589	0,0026	0,7573	0,0004	0,8815	-0,0009	0,9746	0,0007
		Hyperbolique		0,589	0,0026	0,7573	0,0004	0,8814	-0,0010	0,9746	0,0007
		Trigonométrique		0,5885	0,0017	0,757	0,0000	0,882	-0,0003	0,9749	0,0010
$\bar{\sigma}_x(h/3)$	Quasi-3D [25]		1,5062	—	1,4147	—	1,1985	—	0,9687	—	
	SSDT [26]		1,4894	-0,0112	1,3954	-0,0136	1,1783	-0,0169	0,9466	-0,0228	
	HSDT [27]		1,4888	-0,0116	1,394	-0,0146	1,1755	-0,0192	0,9431	-0,0264	
	TSDT [28]		1,4898	-0,0109	1,396	-0,0132	1,1794	-0,0159	0,9477	-0,0217	
	Présente	Exponentielle		1,4891	-0,0114	1,3949	-0,0140	1,1774	-0,0176	0,9456	-0,0238
		Polynômiale		1,4898	-0,0109	1,396	-0,0132	1,1794	-0,0159	0,9477	-0,0217
		Hyperbolique		1,4898	-0,0109	1,3961	-0,0131	1,1795	-0,0159	0,9478	-0,0216
		Trigonométrique		1,4891	-0,0114	1,3947	-0,0141	1,1768	-0,0181	0,9449	-0,0246
$\bar{\tau}_{xy}(-h/3)$	Quasi-3D [25]		0,6081	—	0,5421	—	0,5666	—	0,5879	—	
	SSDT [26]		0,6110	0,0048	0,5441	0,0037	0,5667	0,0002	0,5865	-0,0024	
	HSDT [27]		0,6109	0,0046	0,5438	0,0031	0,5662	-0,0007	0,585	-0,0049	
	TSDT [28]		0,6111	0,0049	0,5442	0,0039	0,5669	0,0005	0,5858	-0,0036	
	Présente	Exponentielle		0,611	0,0048	0,544	0,0035	0,5666	0,0000	0,5854	-0,0043
		Polynômiale		0,6111	0,0049	0,5442	0,0039	0,5669	0,0005	0,5858	-0,0036
		Hyperbolique		0,6111	0,0049	0,5442	0,0039	0,567	0,0007	0,5859	-0,0034
		Trigonométrique		0,611	0,0048	0,5439	0,0033	0,5664	-0,0004	0,5853	-0,0044
$\bar{\tau}_{xz}(h/3)$	Quasi-3D [25]		0,2510	—	0,2496	—	0,2362	—	0,2262	—	
	SSDT [26]		0,2622	0,0446	0,2763	0,1070	0,2580	0,0923	0,2121	-0,0623	
	HSDT [27]		0,2566	0,0223	0,2741	0,0982	0,2623	0,1105	0,2140	-0,0539	
	TSDT [28]		0,2599	0,0355	0,2721	0,0901	0,2519	0,0665	0,2087	-0,0774	
	Présente	Exponentielle		0,2624	0,0454	0,2777	0,1126	0,2612	0,1058	0,2143	-0,0526
		Polynômiale		0,2608	0,0390	0,2737	0,0966	0,2537	0,0741	0,2088	-0,0769
		Hyperbolique		0,2606	0,0382	0,2734	0,0954	0,2533	0,0724	0,2084	-0,0787
		Trigonométrique		0,2595	0,0339	0,2758	0,1050	0,2614	0,1067	0,2139	-0,0544

Tableau IV.3: Variation de la flèche adimensionnelle \bar{W} en fonction du degré d'homogénéité « p » et l'épaisseur d'une plaque carrée en FGM soumise à une charge sinusoïdale.

a/h	Théorie	P=1	Erreur %	P=4	Erreur %	P=10	Erreur %	
4	Quasi-3D [25]	0,7171	—	1,1558	—	1,3745	—	
	FSDT [25]	0,7291	0,0169	1,1125	-0,0397	1,3178	-0,0413	
	CPT [25]	0,5623	-0,2158	0,8281	-0,2852	0,9354	-0,3195	
	Présente	Exponentielle	0,7271	0,0141	1,1627	0,006	1,3906	0,01175
		Polynômiale	0,7284	0,0159	1,1599	0,0035	1,3909	0,0119
		Hyperbolique	0,7284	0,0159	1,1596	0,0033	1,4069	0,02357
		Trigonométrique	0,7254	0,0117	1,1621	0,0054	1,3871	0,00915
10	Quasi-3D [25]	0,5875	—	0,8821	—	1,0072	—	
	FSDT [25]	0,5889	0,0024	0,8736	-0,0096	0,9966	-0,0105	
	CPT [25]	0,5623	-0,0429	0,8281	-0,0612	0,9354	-0,0713	
	Présente	Exponentielle	0,5888	0,0022	0,8821	0,0002	1,0088	0,0016
		Polynômiale	0,5890	0,0025	0,8815	-0,0007	1,0087	0,0015
		Hyperbolique	0,5890	0,0025	0,8814	-0,0004	1,0101	0,0029
		Trigonométrique	0,5885	0,0018	0,8820	0,0207	1,0084	0,0012
100	Quasi-3D [25]	0,5625	—	0,8286	—	0,9361	—	
	FSDT [25]	0,5625	0,0000	0,8286	0,0000	0,9360	-0,0001	
	CPT- [25]	0,5623	-0,0004	0,8281	-0,0006	0,9354	-0,0007	
	Présente	Exponentielle	0,5625	0,0000	0,8287	0,0001	0,9362	0,0001
		Polynômiale	0,5625	0,0000	0,8287	0,0001	0,9362	0,0001
		Hyperbolique	0,5625	0,0000	0,8287	0,0001	0,9362	0,0001
		Trigonométrique	0,5625	0,0000	0,8287	0,0001	0,9362	0,0001

Tableau IV.4: Variation de la contrainte normale adimensionnelle $\bar{\sigma}_x$ en fonction du degré d'homogénéité « p » et l'épaisseur d'une plaque carrée en FGM soumise à une charge sinusoïdale.

a/h	Théorie	P=1	Erreur %	P=4	Erreur %	P=10	Erreur %	
4	Quasi-3D [25]	0,6211	—	0,4877	—	0,3695	—	
	FSDT [25]	0,8060	0,2977	0,6420	0,3164	0,4796	0,2980	
	CPT [25]	0,8060	0,2977	0,6420	0,3164	0,4796	0,2980	
	Présente	Exponentielle	0,5796	-0,0668	0,4401	-0,0976	0,3213	-0,1304
		Polynômiale	0,5812	-0,0642	0,4449	-0,0878	0,3259	-0,1180
		Hyperbolique	0,5813	-0,0641	0,4451	-0,0873	0,3227	-0,1267
		Trigonométrique	0,5795	-0,0670	0,4387	-0,1005	0,3108	-0,1589
10	Quasi-3D [25]	1,5064	—	1,1971	—	0,8965	—	
	FSDT [25]	2,0150	0,3376	1,6049	0,3407	1,1990	0,3374	
	CPT [25]	2,0150	0,3376	1,6049	0,3407	1,1910	0,3285	
	Présente	Exponentielle	1,4891	-0,0115	1,1774	-0,0165	0,8766	-0,0222
		Polynômiale	1,4898	-0,0110	1,1794	-0,0148	0,8785	-0,0201
		Hyperbolique	1,4898	-0,0110	1,1795	-0,0147	0,8790	-0,0195
		Trigonométrique	1,4891	-0,0115	1,1768	-0,0170	0,8760	-0,0229
100	Quasi-3D [25]	14,9690	—	11,9230	—	8,6077	—	
	FSDT [25]	20,1500	0,3461	16,0490	0,3461	11,9900	0,3929	
	CPT [25]	20,1500	0,3461	16,0490	0,3461	11,9900	0,3929	
	Présente	Exponentielle	14,9675	-0,0001	11,9208	-0,0002	8,9058	0,0346
		Polynômiale	14,9676	-0,0001	11,9210	-0,0002	8,9060	0,0347
		Hyperbolique	14,9676	-0,0001	11,9210	-0,0002	8,9061	0,0347
		Trigonométrique	14,9675	-0,0001	11,9207	-0,0002	8,9058	0,0346

Les tableaux précédents (IV.2, IV.3 et IV.4) représentent la variation des déplacements (la flèche maximale \bar{W} et déplacement longitudinal \bar{U}) ainsi que les contraintes (normale $\bar{\sigma}_x$ et tangentielles $\bar{\tau}_{xy}$ et $\bar{\tau}_{xz}$) en utilisant la présente théorie raffinée (avec quatre fonctions de cisaillement d'ordre élevé) et des différentes théories de déformation à savoir : La théorie classique des plaque CPT [25] qui négligé l'effet de cisaillement, La théorie de premier ordre de déformation et de cisaillement FSDT [25] ainsi que quelque théories de déformation et de cisaillement d'ordre élevé (SSDT [26], HSDT [27] et TSDT [28]) et la théorie tridimensionnelle Quasi-3D [25] qui prend en considération la déformation suivant l'axe z ($\varepsilon_z \neq 0$). D'après la comparaison entre la présente théorie et les autres théories, on constate un très bon accord des résultats avec celles d'ordre élevé (SSDT [26], HSDT [27] et TSDT [28]) et surtout celle de la théorie tridimensionnelle Quasi-3D [25], où on a obtenu une erreur infiniment faible (erreur tend vers zéro).

Il est à noter que la présente théorie inclue seulement quatre variables (U_0 , V_0 , W_b et W_s) contre cinq variables ou plus dans les autres théories d'ordre élevé de déformation et de cisaillement.

Les résultats tirés en utilisant les quatre présentes types de fonctions se convergent très bien (la différence est de l'ordre de 10^{-3}). Les fonctions polynomiales et hyperboliques surestiment les déplacements et les contraintes, tandis que, les fonctions trigonométriques et exponentielles les sous-estiment

IV.4. Détermination des différents paramètres qui influent sur le comportement en flexion des plaques FGM

Après la vérification de l'exactitude et la précision de la présente théorie dans la section précédente pour des plaques carrées en FGM soumises à un chargement sinusoïdal, nous présentons dans la partie suivante une étude paramétrique pour déterminer les différents facteurs qui influent sur les déplacements et les contraintes des plaques en matériaux à gradient de propriétés.

Tableau IV.5: Variation du déplacement longitudinal adimensionnel \bar{U} en fonction du rapport coté sur épaisseur « a/h » et le degré d'homogénéité « P » d'une plaque carrée en FGM

a/h		Théorie	Céramique	P = 1	P = 2	P = 5	P = 10	Métal
4	Présente	Exponentielle	0,5156	1,5525	2,1625	2,5269	2,5305	2,7991
		Polynômiale	0,5221	1,5635	2,1810	2,5598	2,5666	2,8344
		Hyperbolique	0,5224	1,5640	2,1818	2,5613	2,5731	2,8360
		Trigonométrique	0,5124	1,5471	2,1533	2,5102	2,5127	2,7818
10	Présente	Exponentielle	0,2179	0,6407	0,8972	1,0648	1,0743	1,1828
		Polynômiale	0,2183	0,6414	0,8984	1,0670	1,0766	1,1851
		Hyperbolique	0,2183	0,6414	0,8984	1,0671	1,0775	1,1852
		Trigonométrique	0,2177	0,6403	0,8966	1,0637	1,0731	1,1817
20	Présente	Exponentielle	0,1098	0,3217	0,4509	0,5363	0,5416	0,5959
		Polynômiale	0,1098	0,3218	0,4510	0,5366	0,5419	0,5962
		Hyperbolique	0,1098	0,3218	0,4511	0,5366	0,5420	0,5962
		Trigonométrique	0,1098	0,3217	0,4508	0,5362	0,5415	0,5958
50	Présente	Exponentielle	0,4401	0,1289	0,1806	0,2150	0,2171	0,2389
		Polynômiale	0,0440	0,1289	0,1806	0,2150	0,2172	0,2389
		Hyperbolique	0,0440	0,1289	0,1806	0,2150	0,2172	0,2389
		Trigonométrique	0,0440	0,1289	0,1806	0,2150	0,2171	0,2389
100	Présente	Exponentielle	0,0644	0,0220	0,0903	0,1075	0,1086	0,1195
		Polynômiale	0,0220	0,0644	0,0903	0,1075	0,1086	0,1195
		Hyperbolique	0,0220	0,0644	0,0903	0,1075	0,1086	0,1195
		Trigonométrique	0,0220	0,0644	0,0903	0,1075	0,1086	0,1195

Tableau IV.6: Variation de la flèche adimensionnelle \bar{W} en fonction du rapport coté sur épaisseur « a/h » et le degré d'homogénéité « P » d'une plaque carrée en FGM

a/h		Théorie	Céramique	P = 1	P = 2	P = 5	P = 10	Métal
4	Présente	Exponentielle	0,3779	0,7271	0,9484	1,2244	1,3907	2,0512
		Polynômiale	0,3786	0,7284	0,9492	1,2207	1,3909	2,0555
		Hyperbolique	0,3786	0,7284	0,9491	1,2204	1,3909	2,0555
		Trigonométrique	0,3769	0,7254	0,9466	1,2240	1,3871	2,0459
10	Présente	Exponentielle	0,2960	0,5888	0,7573	0,9121	1,0089	1,6066
		Polynômiale	0,2961	0,5890	0,7573	0,9114	1,0087	1,6072
		Hyperbolique	0,2961	0,5890	0,7573	0,9113	1,0108	1,6072
		Trigonométrique	0,2958	0,5886	0,7570	0,9121	1,0084	1,6059
20	Présente	Exponentielle	0,2842	0,5689	0,7298	0,8671	0,9538	1,5427
		Polynômiale	0,2842	0,5690	0,7298	0,8669	0,9538	1,5429
		Hyperbolique	0,2842	0,5690	0,7298	0,8669	0,9541	1,5429
		Trigonométrique	0,2842	0,5689	0,7297	0,8671	0,9537	1,5426
50	Présente	Exponentielle	0,2809	0,5633	0,7220	0,8545	0,9384	1,5248
		Polynômiale	0,2809	0,5634	0,7221	0,8545	0,9384	1,5249
		Hyperbolique	0,2809	0,5634	0,7221	0,8544	0,9384	1,5249
		Trigonométrique	0,2809	0,5633	0,7220	0,8545	0,9384	1,5248
100	Présente	Exponentielle	0,2804	0,5625	0,7209	0,8527	0,9362	1,5223
		Polynômiale	0,2804	0,5626	0,7209	0,8527	0,9362	1,5223
		Hyperbolique	0,2804	0,5626	0,7209	0,8527	0,9362	1,5223
		Trigonométrique	0,2804	0,5625	0,7209	0,8527	0,9362	1,5223

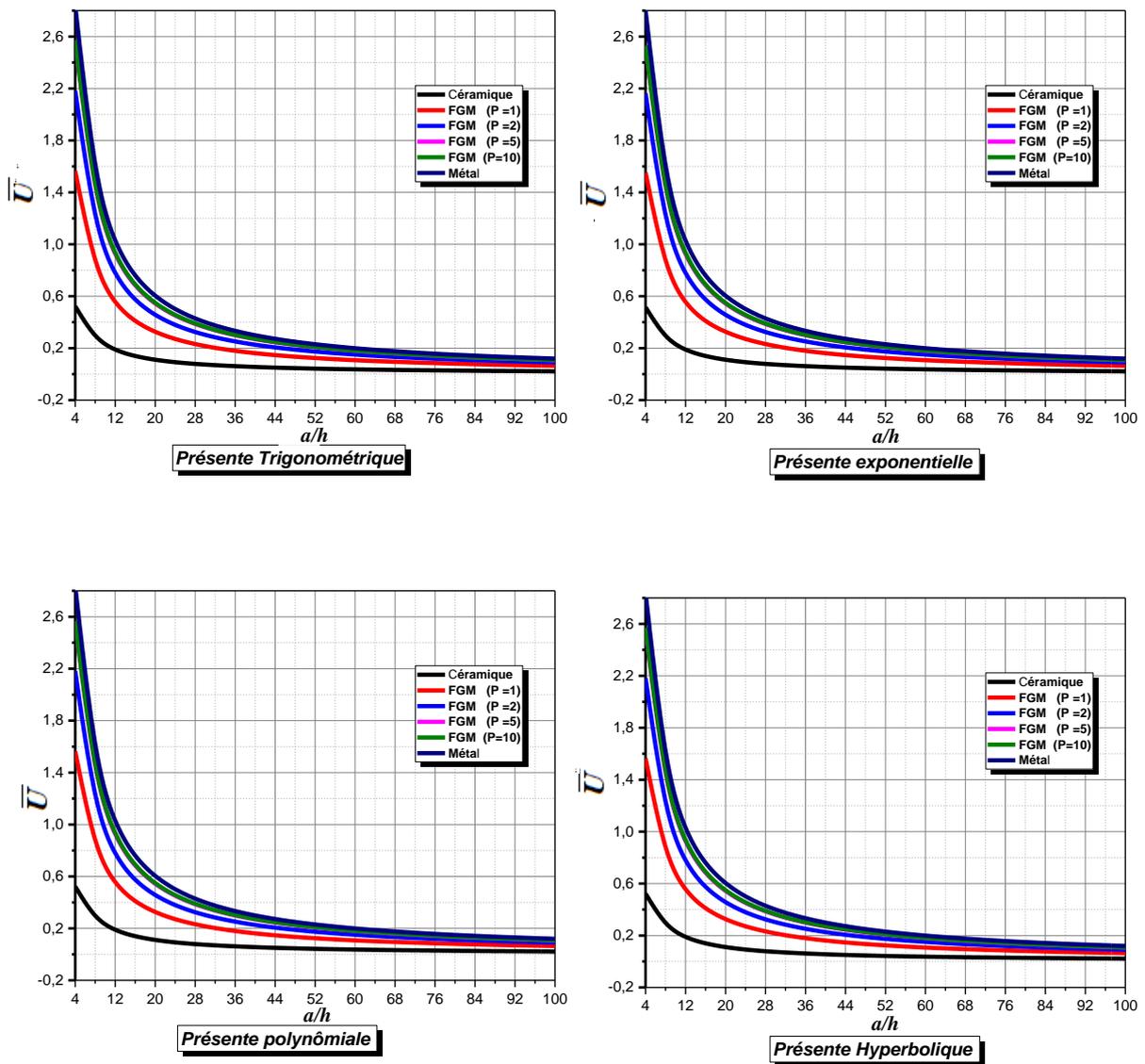


Figure IV.1 : Variation du déplacement longitudinal adimensionnel \bar{U} en fonction du rapport cote sur epaisseur « a/h » et le degre d'homogeneite « p » d'une plaque carree en FGM

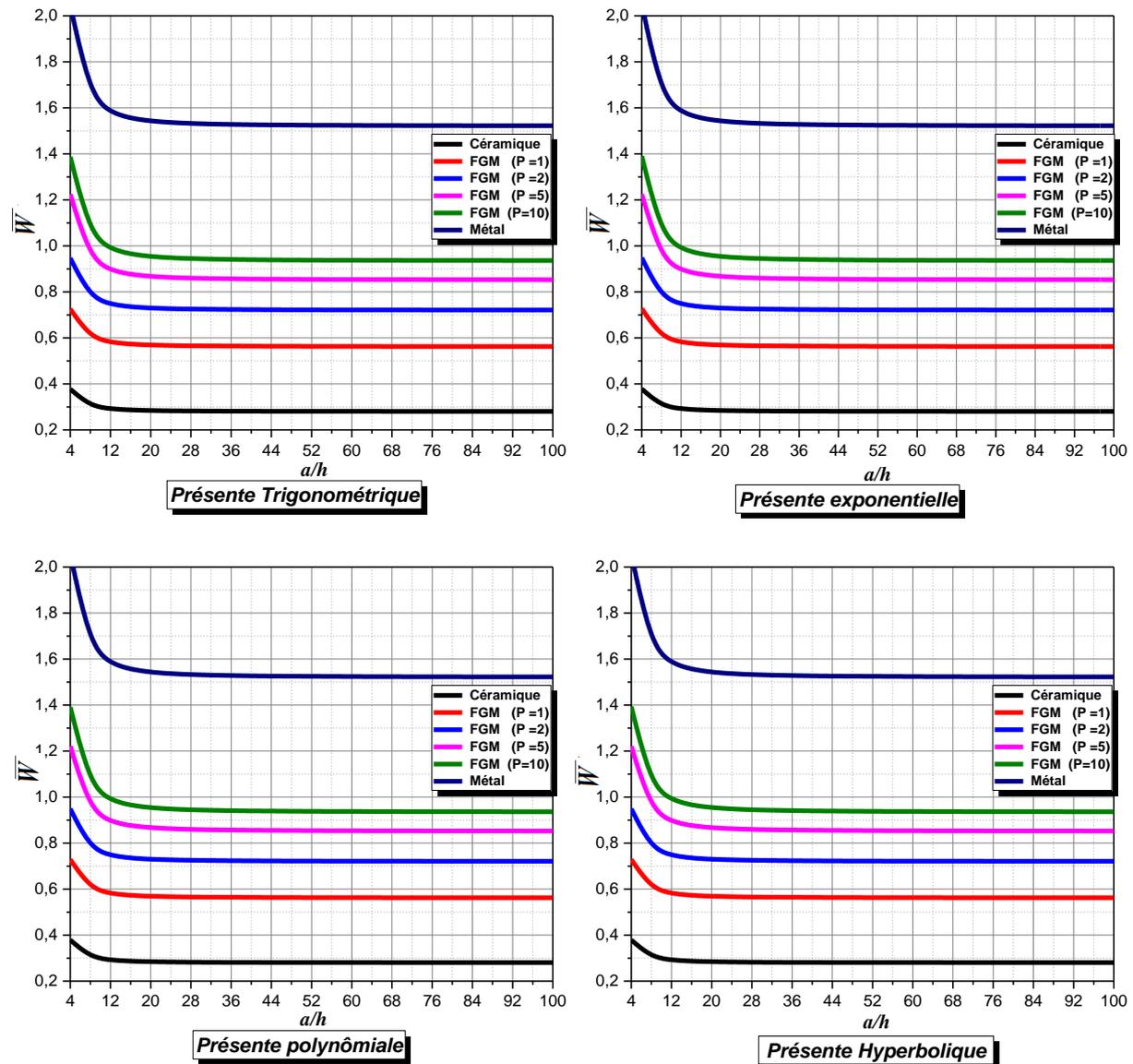


Figure IV.2 : Variation de la flèche adimensionnelle \bar{W} en fonction du rapport coté sur épaisseur « a/h » et le degré d'homogénéité « P » d'une plaque carrée en FGM

Les tableaux IV.5 et IV.6 ainsi que les figures IV.1 et IV.2 montrent la variation du déplacement longitudinal \bar{U} et la flèche dimensionnelle \bar{W} pour les quatre fonctions de cisaillement utilisées (exponentielle, polynômiale, hyperbolique et trigonométrique). D'après l'analyse de ces résultats, on constate que les déplacements (\bar{U} et \bar{W}) sont minimales pour un gradient de propriétés $p=0$ (plaque en céramique) et qui s'accroissent en fonction de ce gradient ($p=1, 2, 5, 10$) jusqu'à atteindre les déplacements maximales à $p=\infty$ (plaque en métal), cette variation est due à l'influence de la rigidité de la plaque en FGM, où les déplacements augmentent en fonction de la rigidité et à mesure que la rigidité diminue, ce qui signifie que les propriétés mécaniques des plaques fonctionnellement graduées et surtout la rigidité ont une importance primordiale sur le comportement en flexion de ce type de structures.

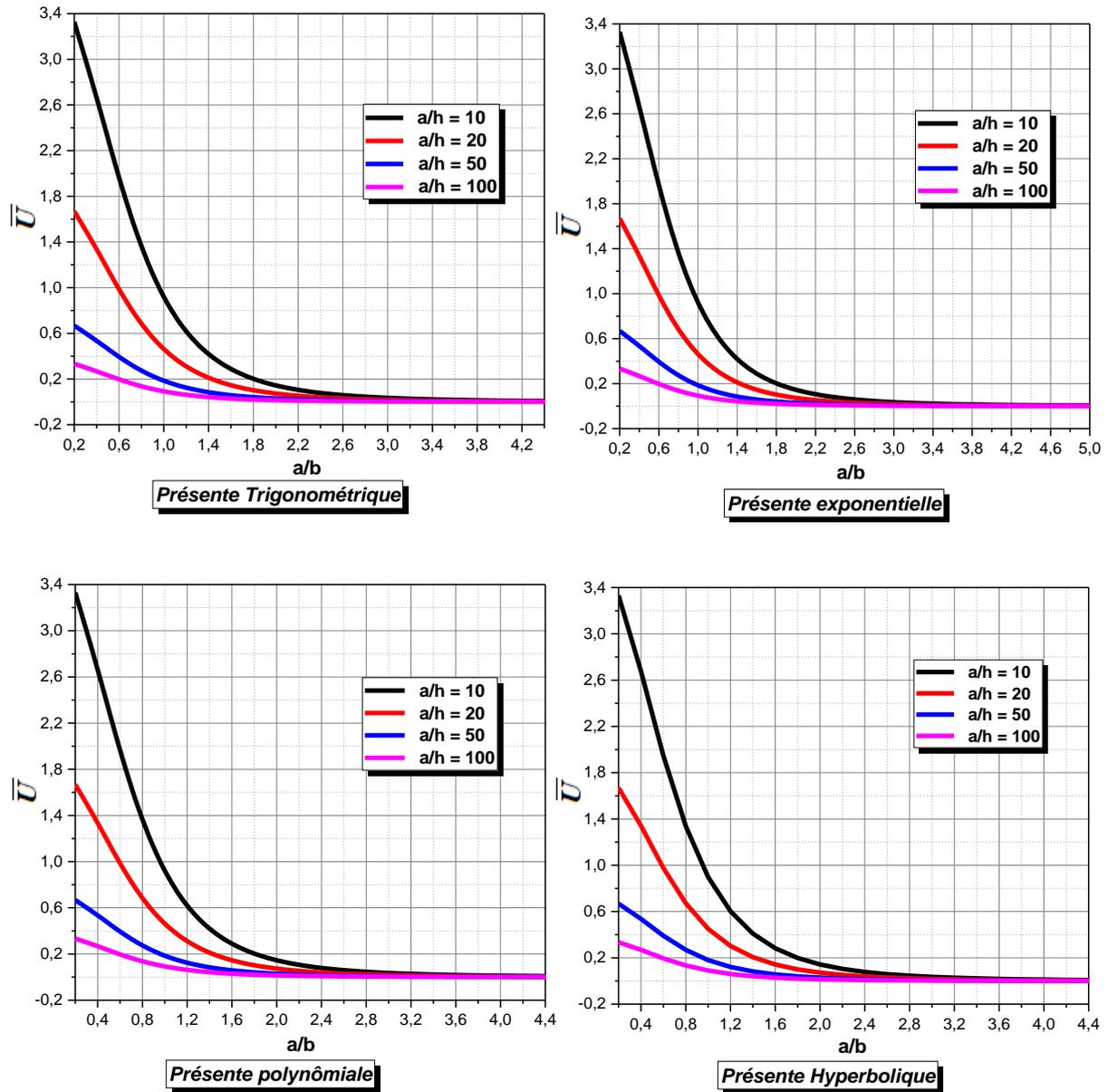


Figure IV.3 : Variation du déplacement longitudinal adimensionnel \bar{U} en fonction du rapport d'aspect « a/b » et le rapport coté sur épaisseur « a/h » d'une plaque en FGM ($p=2$)

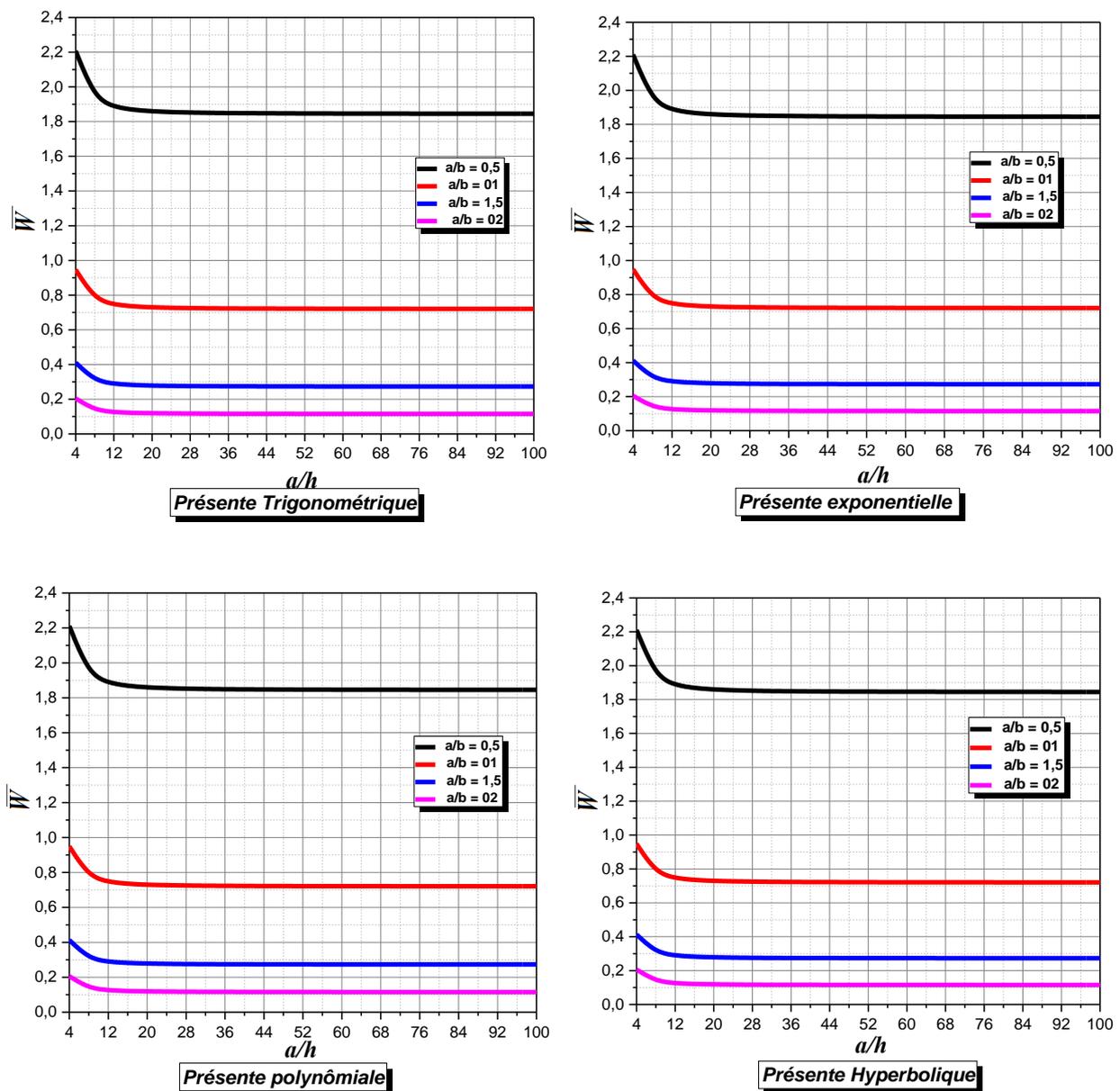


Figure IV.4 : Variation de la flèche adimensionnelle \bar{W} en fonction du rapport d'aspect « a/b » et le rapport coté sur épaisseur « a/h » d'une plaque en FGM ($p=2$)

Les figures IV.3 et IV.4 illustrent la variation des déplacements (longitudinal \bar{U} et la flèche \bar{W}) en fonction des différentes configurations géométriques à savoir ; variation du rapport longueur sur largeur a/b ainsi que la variation du rapport coté sur épaisseur a/h . Ces déplacements diminuent avec l'augmentation des rapports d'aspect a/b et d'épaisseur a/h ,

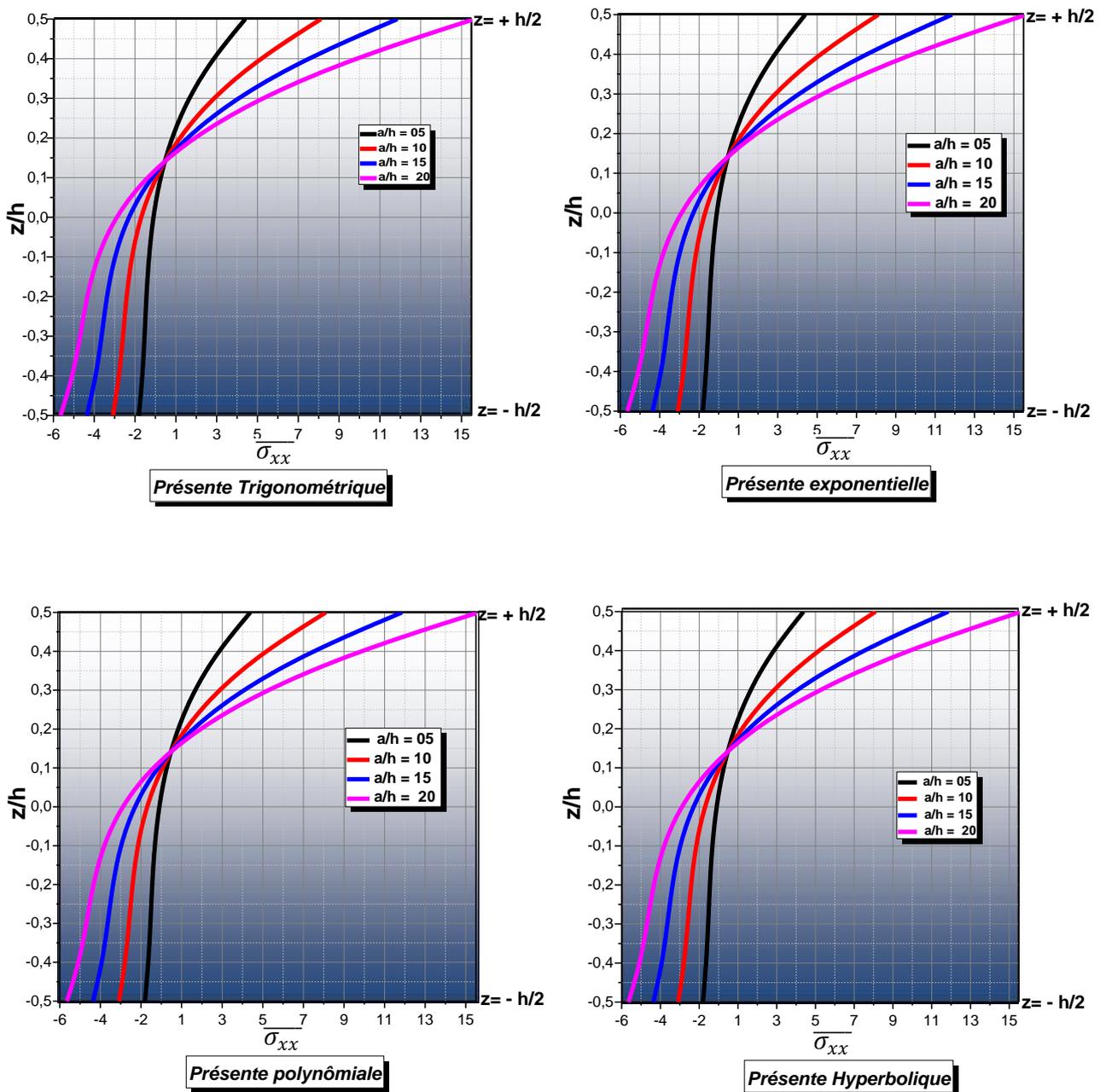


Figure IV.5 : Distribution des contraintes normales $\overline{\sigma_{xx}}$ suivant la direction de l'épaisseur de la plaque rectangulaire en FGM ($p=2$) en fonction du rapport coté sur épaisseur a/h

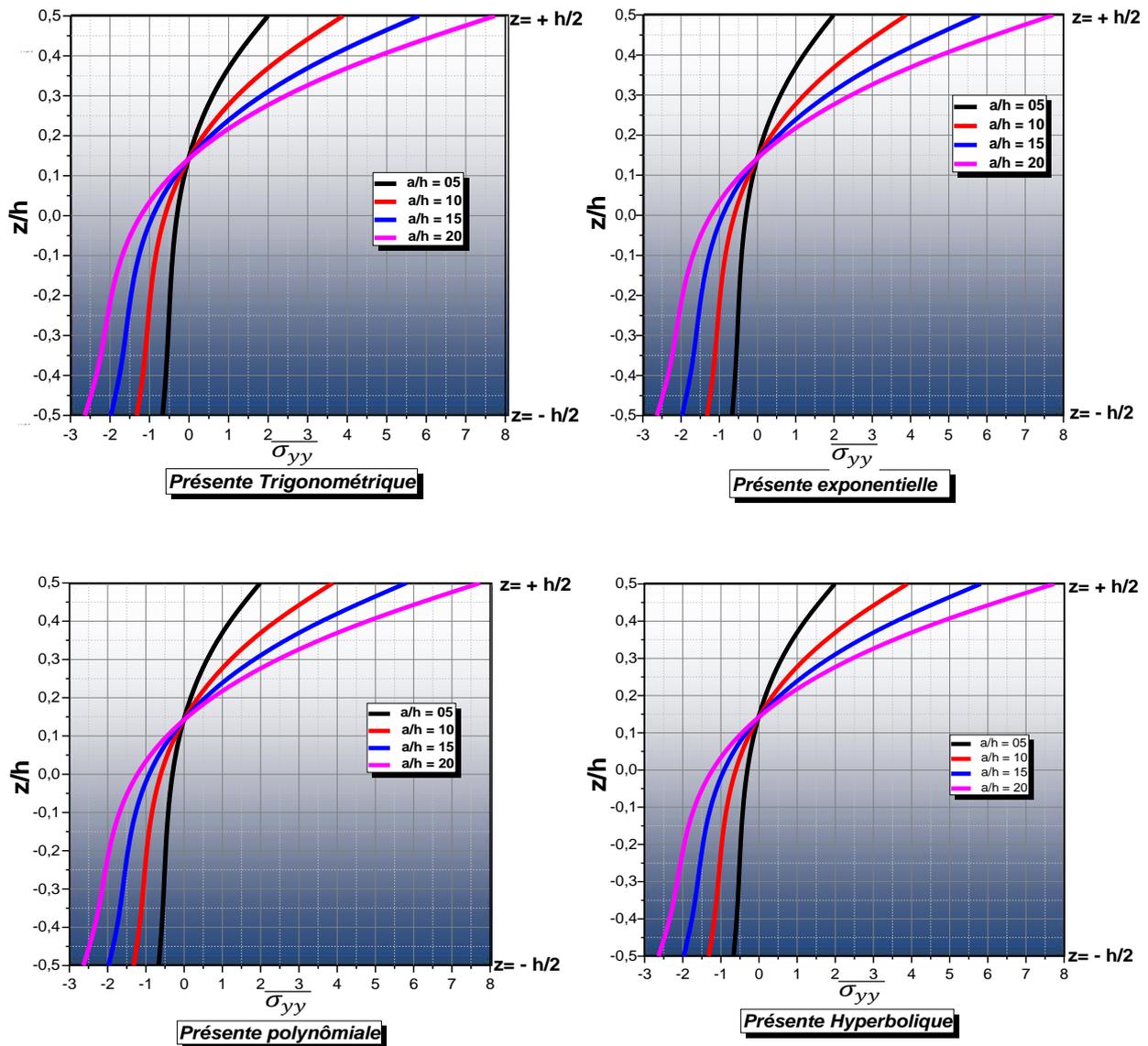


Figure IV.6 : Distribution des contraintes normales $\overline{\sigma_{yy}}$ suivant la direction de l'épaisseur de la plaque rectangulaire en FGM ($p=2$) en fonction du rapport coté sur épaisseur a/h

Les courbes illustrées dans les figures IV.5 et IV.6, représentent la répartition des contraintes normales adimensionnelles $\overline{\sigma_{xx}}$ et $\overline{\sigma_{yy}}$ à travers l'épaisseur en utilisant la présente théorie proposée avec quatre fonctions de cisaillement (exponentielle, polynômiale, hyperbolique et trigonométrique) d'une plaque rectangulaire ($a/b=0.5$) en FGM soumise à une charge mécanique sinusoïdale pour différentes valeurs du rapport longueur sur épaisseur « a/h » qui prend les valeurs de 5, 10, 15 et 20.

Comme indiqué dans les figures précédentes, les contraintes normales ($\overline{\sigma_{xx}}$ et $\overline{\sigma_{yy}}$) sont des contraintes de compression suivant l'épaisseur de la plaque jusqu'à l'axe neutre à la position ($z/h \approx 0.15$), et ensuite deviennent des contraintes de traction. Ces contraintes sont maximales sur les bords de la plaque (de compression sur la face inférieure et de traction sur la face supérieure).

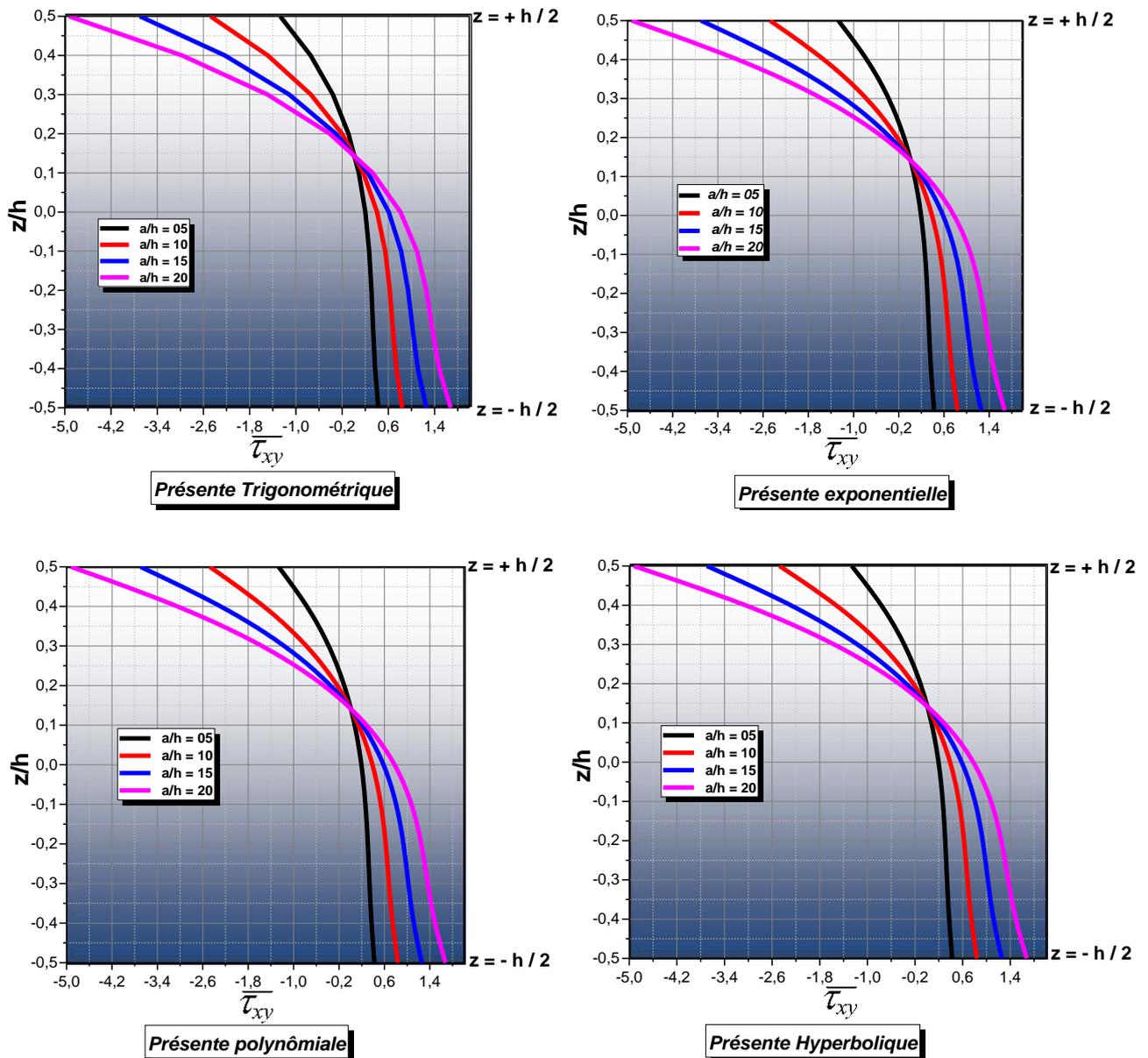


Figure IV.7 : Distribution des contraintes de cisaillement $\overline{\tau}_{xy}$ suivant la direction de l'épaisseur de la plaque rectangulaire en FGM ($p=2$) en fonction du rapport coté sur épaisseur a/h

Les courbes illustrées dans la figure IV.7, représentent la distribution des contraintes de cisaillement non dimensionnelles $\overline{\tau}_{xy}$ suivant la direction de l'épaisseur d'une plaque rectangulaire ($a/b=0.5$) en FGM en utilisant la présente théorie proposée avec quatre fonctions de cisaillement (exponentielle, polynômiale, hyperbolique et trigonométrique) soumise à une charge mécanique sinusoïdale.

Comme indiqué dans la figure précédente, la contrainte de cisaillement $\overline{\tau}_{xy}$ est une contrainte de traction suivant l'épaisseur dans la surface inférieure de la plaque et diminue jusqu'à atteindre la valeur nul ($\overline{\tau}_{xy} = 0$) à la position de l'axe neutre ($z/h \approx 0.15$), et qui devient par la suite une contrainte de compression dans la partie supérieure de la plaque fonctionnellement graduée.

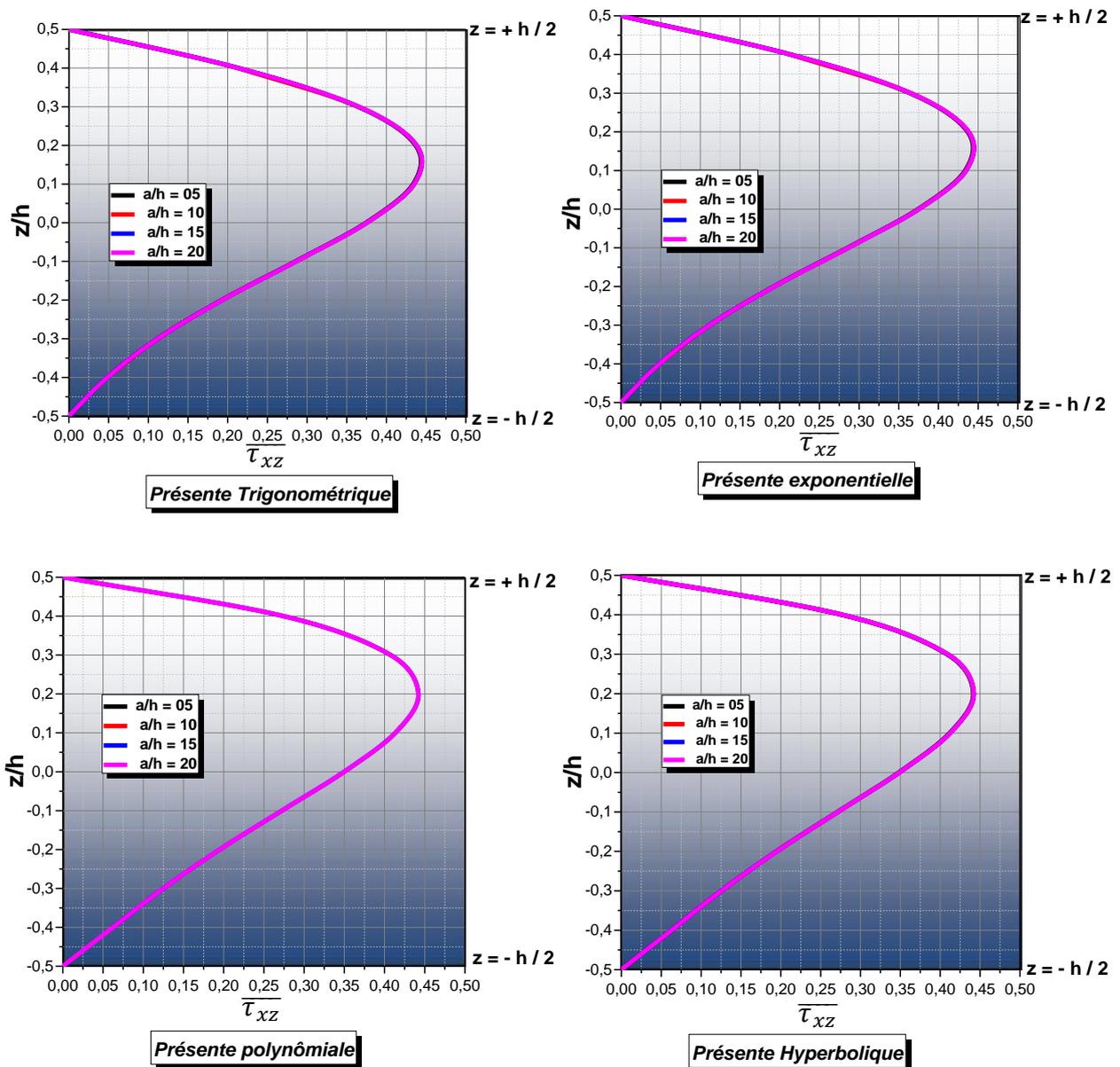


Figure IV.8 : Distribution des contraintes de cisaillement $\bar{\tau}_{xz}$ suivant la direction de l'épaisseur de la plaque rectangulaire en FGM ($p=2$) en fonction du rapport coté sur épaisseur a/h

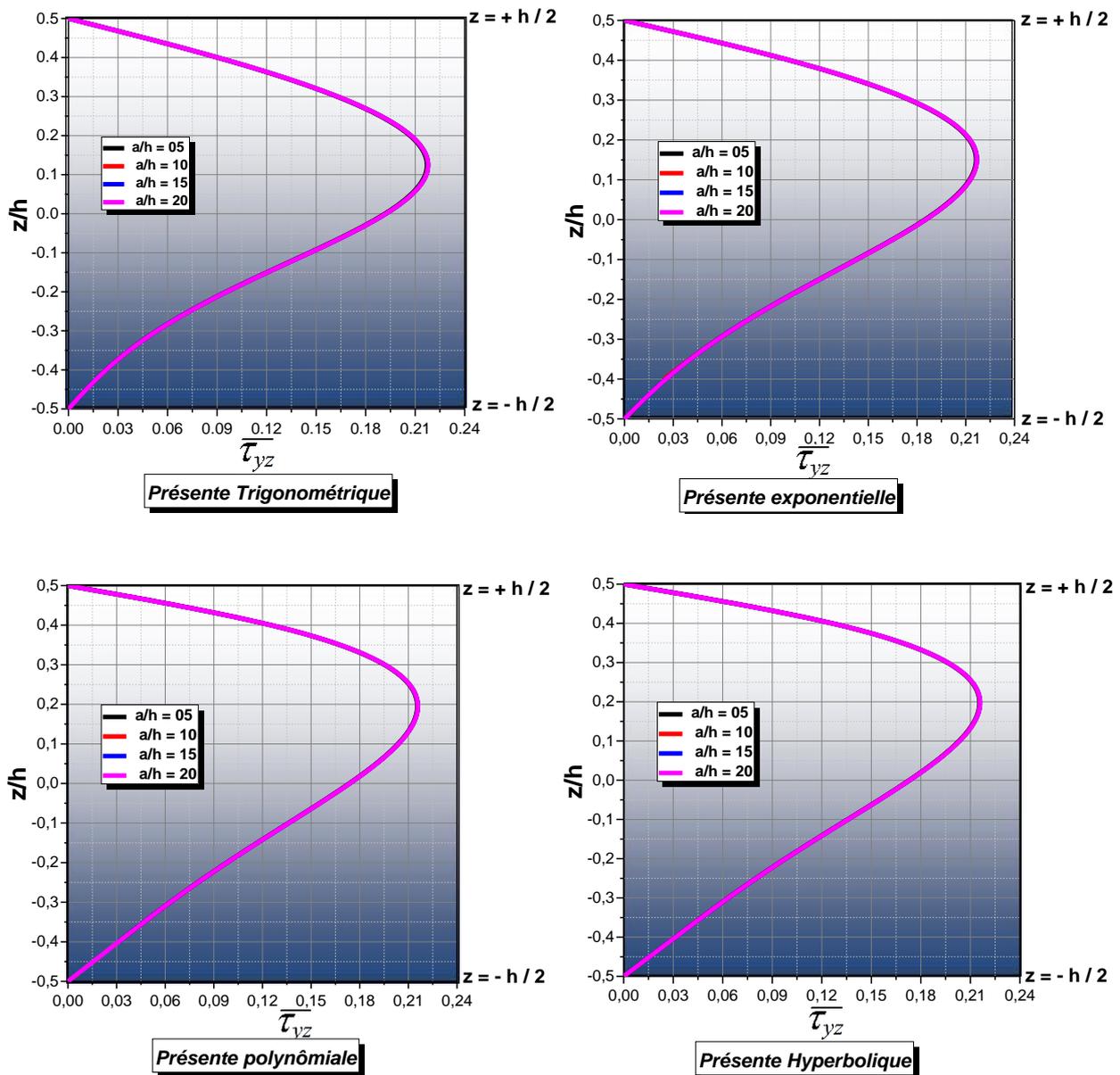


Figure IV.9 : Distribution des contraintes de cisaillement $\bar{\tau}_{yz}$ suivant la direction de l'épaisseur de la plaque rectangulaire en FGM ($p=2$) en fonction du rapport coté sur épaisseur a/h

Les courbes illustrées dans les figures IV.8 et IV.9 représentent la distribution des contraintes de cisaillement non dimensionnelles $\bar{\tau}_{xz}$ et $\bar{\tau}_{yz}$ suivant la direction de l'épaisseur d'une plaque rectangulaire ($a/b=0.5$) en FGM en utilisant la présente théorie proposée avec quatre fonctions de cisaillement (exponentielle, polynômiale, hyperbolique et trigonométrique).

À partir des figures précédentes, on peut voir que ces contraintes de cisaillement sont réparties dans une forme parabolique suivant la direction de l'épaisseur de la plaque, la valeur maximale des contraintes $\bar{\tau}_{xz}$ et $\bar{\tau}_{yz}$ se situe à l'axe neutre de la plaque. On observe aussi que ces contraintes tangentielles sont nuls dans les deux faces supérieur et inférieur de la plaque.

Les figures IV.8 et IV.9 confirment l'hypothèse sur laquelle la présente théorie raffinée de cisaillement et de déformation est fondée, c'est-à-dire que, pour les quatre fonctions utilisées cette théorie à assurer la distribution parabolique des contraintes de cisaillement suivant l'épaisseur de la plaque et la nullité de ces contraintes dans les bords inférieur et supérieur de la plaque FGM

IV.5. Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté l'analyse du comportement mécanique en flexion d'une plaque en matériaux à gradient de propriétés FGM sous chargement mécanique sinusoïdal en utilisant la présente théorie raffinée de déformation et de cisaillement à quatre variables avec quatre types de fonctions (exponentielle, polynômiale, hyperbolique et trigonométrique).

La présente théorie est validée avec la théorie quasi 3-D qui tient en compte la déformation suivant l'axe « z » ($\varepsilon_z \neq 0$)

Par la suite, on a effectué une étude paramétrique pour déterminer les différents facteurs qui influent sur les déplacements et les contraintes comme le type de fonction utilisé, les propriétés matérielles et la géométrie de la plaque.

Conclusion générale et perspectives

Conclusion générale et perspectives

L'objectif de notre travail de recherche était d'étudier le comportement mécanique en flexion des plaques en matériaux fonctionnellement gradués « FGM ».

Cette étude est structurée sur deux volets, en premier lieu, une étude analytique sur la flexion des plaques FGM est réalisée en utilisant une nouvelle théorie raffinée des plaques de déformation et de cisaillement d'ordre élevé à quatre inconnus, en deuxième lieu, des résultats numériques sont présentés dans le dernier chapitre sous forme des tableaux et des graphes qui représentent la variation des déplacements et des contraintes sous différentes paramètres.

La présente théorie raffinée implique quatre fonctions de cisaillement, à savoir : la fonction exponentielle, la fonction polynomiale, la fonction hyperbolique et la fonction trigonométrique, ces quatre fonctions assurent une répartition parabolique des contraintes de cisaillement suivant l'épaisseur de la plaque, et donnent des contraintes de cisaillement nulles dans les deux bords (supérieure et inférieure) de la plaque fonctionnellement gradué FGM. Les résultats obtenus par la théorie proposée sont validés avec les résultats publiés dans la littérature (théorie quasi-3D et d'autre théorie) où les erreurs obtenues sont infiniment faibles. Cette comparaison met en évidence l'exactitude de la présente théorie raffinée de déformation et de cisaillement considérée dans ce mémoire.

L'avantage de notre modèle proposé est son excellente convergence avec la théorie Quasi-3D qui prend en considération la déformation suivant l'axe z ($\varepsilon_z \neq 0$). Il est à noter que le champ de déplacements de la présente théorie implique seulement quatre variables, au lieu de cinq variables dans la théorie de déformation de cisaillement de premier d'ordre qui nécessite l'utilisation des facteurs de correction de cisaillement et les autres théories d'ordre élevé, cette réduction du nombre de variables nous permettra d'optimiser considérablement le temps de calcul.

En conclusion, on peut dire que la précision et l'efficacité de la présente théorie raffinée de cisaillement et de déformation en utilisant les quatre fonctions de cisaillement a été bien démontré pour l'étude de flexion mécanique des plaques en matériaux à gradient de propriétés.

Finalement, dans l'espoir d'avoir plus de compréhension des structures en FGM, nous envisageons en perspectives d'étudier le comportement des plaques fonctionnellement gradués FGM sous autres types de chargement (mécanique, thermique et hygrothermique), différentes conditions d'appuis, l'utilisation d'autres formes géométriques ainsi que de propriétés mécaniques différentes des matériaux.

Références bibliographiques

Références bibliographiques

- [1] F. Z.DERKAOUI et S. GORINE, Analyse des contraintes d'une plaque FGM avec des couches de surface piézoélectriques par la théorie de déformation en cisaillement, Université Abdel Hamid IBN Badis – Mostaganem, 2018 / 2019.
- [2] D. E.KADDOURI, Analyse des effets de l'amplitude et température sur le comportement non linéaire d'une plaque annulaire sectorielle à gradient fonctionnel, Tlemcen, 2014.
- [3] K.BOUAFIA, Etude du comportement physique des nanostructures pour les matériaux graduée (F.G.M), Sidi Bel Abbes, 2017.
- [4] I. BELKORISSAT, Etude de la réponse dynamique des plaques FGM avec la prise en compte de l'effet d'échelle, Sidi Bel Abbes , 2015.
- [5] F.A, A. A. H, T. A et A. BEDIA, conception des plaques fgm ayant un comportement similaire aux plaques homogènes sous charge thermique, "SICZS_2010" Symposium International sur la Construction en Zone Sismique , Université Chlef, 26–27 octobre 2010
- [6] W.GUERROUDJ, Étude de comportement plaques FGM pour les applications enveloppe de bâtiment à énergie solaire, Saïda, 2020.
- [7] I.KLOUCHE DJEDID, Analyse des plaques fgm en se basant sur le concept physique de la surface neutre, Sidi Bel-Abbes, 2016.
- [8] S. BRAIRI, ANALYSE DE LA DÉGRADATION DES STRUCTURES FGM RENFORCÉES PAR FRP PRÉCONTRAINTS, Université Abou Bekr Belkaid-Tlemcen, 2018/2019.
- [9] S.Hamzi, Comportement vibratoire des nanostructures viscoélastiques en composite et matériaux FGM, Mascara, 2021.
- [10] A.SAID, Etude et analyse des plaques FGM en Génie Civil, Sidi Bel Abbes, 2016.
- [11] a.HOUARI, Endommagement dans les plaques entaillées en FGM, Sidi bel abbes, 2021.
- [12] M.ELLALI, Analyse du flambement thermique des matériaux FGM piézoélectriques, Ain Témouchent , 2019.
- [13] R.MEKSI, investigation sur les différents comportements mécaniques des structures en matériaux composites avancés, Sidi Bel Abbes, 2019.
- [14] Z.Hassina, Contribution à la modélisation des structures en Matériaux à Gradient Fonctionnel, Biskra, 2017.
- [15] G.Kirchhoff., «Uber das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scheibe,» *furreine und angewandte Mathematik*, vol. 40, pp. 51-88, 1850.
- [16] B. Mamia, Etude de la réponse mécanique des structures en matériaux composites avancés en utilisant un modèle de déplacement d'ordre élevé, SIDI BEL ABBES, 2018.
- [17] S. P. T. e. S. Woinowsky-Krieger, Theory of Plates and Shells, 1959.
- [18] E. Reissner, «The Effect of Transverse Shear Deformations on the Bending of Elastic Plates,» n° 112: A69-A77., 1945.
- [19] R. D. Mindlin, «Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates,» n° 118: 31-38., 1951.
- [20] B.Bouderba et A. B. Benyamina, «Analyse statique des plaques en matériaux composites "Cas d'un FGM typique céramique/métal" dans des environnements thermiques,» *JOURNAL OF MATERIALS AND ENGINEERING STRUCTURES* 5, p. 33–45, 2018.

-
- [21] B. ADIM, Etude de la stabilité des plaques en matériaux composites: analyse et modélisation, Tiaret, 2016.
- [22] M. AYDOGDU, An equivalent single layer shear deformation plate theory with uperposed shape functions for laminated composite plates,» *ARCHIVES OF MECHANICS*, vol. 71(3), n° %110.24423/aom.3170, p. 239–262, 2019.
- [23] C. H. Thai, A. Ferreira, S. Bordas, T. Rabczuk et H. Nguyen-Xuan, «Isogeometric analysis of laminated composite and sandwich plates using a new inverse trigonometric shear deformation theory,» *European Journal of Mechanics A/Solids*, vol. 43, pp. 89-108, 2014.
- [24] N. HEBBAR, etude de l'effet de deformation de cisaillement sur la reponse statique et dynamique des structures composites epaisses, Sidi Bel Abbes, 2019.
- [25] c. E, B. S et R. A, «Variable kinematic model for the analysis of functionally graded material plates,» *AIAA* , vol. vol. 46(1), pp. p. 194-203..., 2008.
- [26] Z. A, «Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates,» *Appl Math Modell*, vol. 30(1), pp. 67-84..., 2006.
- [27] M. J, O. A et G. S. C, « bending response of functionally graded plates by using a new higher order shear deformation theory,» *Compos Struc*, vol. 94(2), pp. 714-23..., 2012.
- [28] W. C, L. H et R. An, «based third-order shear deformation theory of multilayerd functionally graded material plates,» *Compos Struc*, vol. 94(10), pp. 2591-605..., 2010.
- [29] o.boudjefna, Analyse de flambement des plaque sandwichs, Tissemsilt, 2021.

Résumé

Ce travail de recherche a pour but d'étudier l'analyse de comportement mécanique de la flexion des plaques fonctionnellement graduées simplement appuyées sous chargement sinusoïdal en proposant une théorie raffinée de déformation et de cisaillement en utilisant quatre fonctions de cisaillement (exponentielle, polynômiale, hyperbolique et trigonométrique). Le nombre d'inconnues impliqués dans la présente théorie est quatre contre cinq dans les autres théories. Les équations d'équilibre sont déduites par le principe des travaux virtuels et les déplacements et les contraintes sont déterminées par la solution de Navier. Dans cette étude, on suppose que les propriétés matérielles (le module de Young) de la plaque FGM varient graduellement dans la direction de l'épaisseur selon la distribution de la loi de mélange P-FGM en fonction du degré d'homogénéité.

Dans notre travail on a basé sur la théorie de déformation et de cisaillement des plaques quasi 3-D pour valider nos résultats.

Une étude paramétrique est présentée par la suite pour déterminer l'influence de plusieurs paramètres sur le comportement des plaques fonctionnellement graduées à savoir : l'effet du rapport d'aspect géométrique coté sur épaisseur et longueur sur largeur en fonction de l'indice matériel des constituants « céramique-métal » sur les déplacements et les contraintes normales et tangentielles.

De cette étude, on peut dire que la précision et l'efficacité de la présente théorie raffinée de cisaillement et de déformation en utilisant les quatre fonctions de cisaillement a été bien démontré pour l'étude de flexion mécanique des plaques en matériaux à gradient de propriétés.

Mots clés : plaque FGM ; solution de Navier ; théorie de déformation de cisaillement ; Fonction de cisaillement, flexion.

Abstract

This research aims to study the analysis of the mechanical behavior of the bending of functionally graded simply supported plates under sinusoidal loading by proposing a refined shear deformation theory using four shearing functions (exponential, polynomial, hyperbolic and trigonometric). The number of variables involved in this theory is four against five in the other theories. The equilibrium equations are deduced by the principle of virtual works and the displacements and stresses are determined by Navier's solution. In this study, it is assumed that the material properties (Young's modulus) of the FGM plate vary gradually in the thickness direction by rule of mixture P-FGM according to the degree of homogeneity.

In our work we have based on the quasi 3-D theory of shear and deformation of plates to validate our results.

A parametric study is presented afterward to determine the influence of several parameters on the behavior of functionally graded plates, namely: the effect of the geometric aspect ratio side on thickness and length on width according to the material index of the "ceramic-metal" constituents on displacements and normal and tangential stresses.

From this study, it can be said that the accuracy and efficiency of the present refined shear and deformation theory using the four shear functions has been well demonstrated for the study of mechanical bending of functionally graded plates.

Keywords: FGM plate; Navier's solution; shear deformation theory; Shear function, bending

ملخص

يهدف هذا البحث إلى دراسة تحليل السلوك الميكانيكي لانحناء الصفائح المتدرجة وظيفيًا والمدعومة بمساند بسيطة تحت تأثير الحمل الجببية من خلال اقتراح نظرية دقيقة للتشوه والقص العرضي باستخدام أربع دوال قص (أسية، كثير حدود، قطع مكافئ ومثلثية)، عدد المجاهيل المتضمنة في هذه النظرية هو أربعة مقارنة بخمسة مجاهيل فيما يخص النظريات الأخرى. يتم استنتاج معادلات التوازن من خلال مبدأ الأعمال الافتراضية ويتم تحديد الانتقالات والاجهادات بواسطة حل نافيي. نفترض في هذه الدراسة أن خصائص المواد (معامل المرونة يونغ) للصفائح المتدرجة وظيفيًا تتغير عبر سمك الصفيحة وفقًا لقانون التوزيع P-FGM حسب معامل التجانس اعتمدنا في عملنا هذا على نظرية التشوه والقص لألواح شبه ثلاثية الأبعاد للتحقق من صحة نتائجنا.

بعد ذلك، تم تقديم دراسة متغيرات لتحديد تأثير عدة عوامل على سلوك الصفائح المتدرجة وظيفيًا، من بينها: تأثير نسبة الأبعاد الهندسية الضلع على السمك والطول على العرض وفقًا لمعامل التجانس لمكونات المادة "المعدن - السيراميك". على الانتقالات والاجهادات العادية والمماسية.

من هذه الدراسة، يمكن القول إن دقة وكفاءة النظرية المكررة الحالية للقص والتشوه باستخدام دوال القص الأربعة قد تم إثباتها جيدًا لدراسة الانحناء الميكانيكي للصفائح المتدرجة وظيفيًا.

الكلمات المفتاحية: الصفائح المتدرجة وظيفيًا؛ حل، نافيي نظرية تشوه القص، الدالة القص، الانحناء.
