

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE
CENTRE UNIVERSITAIRE DE TISSEMSILT
INSTITUT DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
DÉPARTEMENT DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE

Visa du chef de département des
Sciences et de la Technologie
Signature :
Date : 14/06/2018

Analyse de la vibration libre des plaques stratifiées en matériaux composites

Mémoire de fin d'études pour l'obtention du diplôme de master académique en :
Filière : Génie civil
Spécialité : Structures

Encadreur : ADIM Belkacem
Signature :
Date : 14/06/2018

Réalisé par : GOUCHAM Hayat
Signature :
Date : 14/06/2018

Membres du jury

Boubekeur Toufik	(Président)
Bessegghier Abderrahmane	(Examineur)
Adim Belkacem	(Encadreur)

Tissemsilt - 2017/2018

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Remerciement

Je tiens à remercier, tout d'abord ALLAH le tout puissant qui m'a guidé et qui m'a donné la force et la volonté de réaliser ce travail.

*Je tiens à exprimer mes vifs remerciements à mon encadreur **Dr. ADIM Belkacem** pour son aide et ses orientations durant la réalisation de ce travail et sa générosité dont il m'a fait preuve.*

Mes vifs remerciements iront aux membres de jury qui nous ferons l'honneur de juger ce modeste travail.

Mes vifs remerciements vont aussi aux membres de ma famille et plus particulièrement mon père et ma mère pour leur soutien et leur encouragement et qu'ils trouvent ici mes profondes reconnaissances.

Dédicace

Ce modeste travail est dédié à :

Mes très chers parents

Mes Sœurs et mon Frère

Mon encadreur

Et bien sûr sans oublier mes amis

Hayat

Abstract

The aim of this work is to study the free-vibration stability of composite laminates by using a novel high-order, four-variable, shear deformation theory.

This new refined theory takes into account the effect of transverse shear as well as the parabolic distribution of shear stresses and satisfies the conditions of zero shear stresses in the upper and lower faces of the plate without the aid of shear correction factor.

In the present study, we performed a comparison between the results obtained by the present refined high order theory and the different theories existing in the literature, namely: high order shear deformation plates theory of Reddy HSDPT1, high order shear deformation plates theory of Swaminathan HSDPT2 as well as the exact theory, where a convergence of results from these different theories has been observed.

In the light of this study, it can conclude that the present refined high-order shear deformation theory is accurate, simple and effective for the analysis of the vibratory behavior of composite laminated plates.

Keywords: Composite materials, Free Vibration, Refined shear deformation theory, laminated plate.

Résumé

Ce mémoire a pour objet d'étudier la stabilité à la vibration libre des plaques stratifiées en matériaux composites en utilisant une nouvelle théorie raffinée de déformation et de cisaillement d'ordre élevé à quatre variables.

Cette nouvelle théorie raffinée prend en considération l'effet du cisaillement transversal en assurant une distribution parabolique des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur et satisfaisant les conditions de nullité de ces contraintes dans les bords supérieures et inférieures de la plaque sans l'aide des facteurs de correction de cisaillement.

Dans la présente étude, nous avons effectué une comparaison entre les résultats obtenus par la présente théorie raffinée d'ordre élevé de cisaillement transverse et les différentes théories existantes dans la littérature, à savoir : la théorie d'ordre élevé de Reddy (HSDPT1), la théorie d'ordre élevé de Swaminathan (HSDPT2) ainsi que la théorie exacte, où on a constaté une convergence des résultats issues de ces différentes théories.

A la lumière de cette étude on peut conclure que la présente théorie raffinée de cisaillement et de déformation d'ordre élevé est précise, simple et efficace pour l'analyse du comportement vibratoire des plaques stratifiées en matériaux composites.

Mots-clés : Matériaux composites, Vibration Libre, Théorie raffinée de déformation de cisaillement, plaque stratifiée

ملخص

الهدف من هذه المذكرة هو دراسة استقرار الاهتزازات الحرة للصفائح المركبة باستخدام نظرية جديدة للقص العرضي باستخدام أربع متغيرات

تأخذ هذه النظرية المكررة الجديدة بعين الاعتبار تأثير القص العرضي وتضمن توزيع إجهادات القص بشكل قطع مكافئ وتفي بشروط انعدام إجهادات القص عند السطوح (العلوي والسفلي) للصفحة دون الحاجة الى معامل تصحيح القص.

أجرينا في هذه الدراسة، مقارنة بين النتائج التي تم الحصول عليها من النظرية المكررة الجديدة والنظريات المختلفة الموجودة في المراجع، وهي: نظرية عالية الترتيب HSDPT ، فضلا عن النظرية الدقيقة، حيث لوحظ تقارب النتائج من هذه النظريات المختلفة.

في ضوء هذه الدراسة، يمكن القول ان النظرية المكررة الحالية دقيقة وبسيطة وفعالة لتحليل السلوك الاهتزازي. للصفائح المركبة

الكلمات المفتاحية: المواد المركبة، الاهتزاز الحر، نظرية تشوه القص العرضي، الصفائح المكسدة.

Table des matières

Abstract	III
Résumé.....	IV
ملخص.....	V
Table des matières.....	VI
Liste des figures	IX
Liste des tableaux.....	XI
Liste des abréviations.....	XII
Introduction générale.....	1

Chapitre I : Généralités sur les matériaux composites

I.1. Introduction.....	3
I.2. Définition d'un matériau composite	3
I.3. Type de composite	3
I.3.1. Composites de Grande Diffusion GD	4
I.3.2. Composites de Haute Performance HP	4
I.4. Composition des matériaux composites.....	4
I.4.1. La matrice	5
I.4.1.1. Les composites à matrices organiques (CMO)	5
I.4.1.2. Les composites à matrices céramiques (CMC).....	7
I.4.1.3. Les composites à matrices métalliques (CMM).....	7
I.4.2. Les renforts	7
I.4.2.1. Fibres de verre.....	8
I.4.2.2. Fibres de carbone	13
I.4.2.3. Fibres d'aramide.....	14
I.4.2.4. Fibres de bore.....	15
I.4.2.5. Fibres métalliques (acier, cuivre, aluminium)	15
I.4.2.6. Fibres naturelles	16
I.4.3. Les charges et les additifs	16
I.4.3.1. Les charges	16
I.4.3.2. les additifs	17
I.4.4. L'interface.....	18
I.5. Structures du composite.....	18
I.5.1. Monocouches.....	18
I.5.2. Les stratifiées	19
I.5.2.1. Différents types des stratifiés.....	20

I.5.3. Les sandwichs	20
I.6. Procédés de fabrication des structures composites	21
I.6.1. Moulage au contact	21
I.6.2. Moulage par compression	22
I.6.3. Moulage sous vide	23
I.6.4. Moulage par injection de mousse.....	23
I.6.5. Pultrusion	24
I.6.6. Moulage par enroulement filamentaire	24
I.7. Domaines d'application des composites.....	25
I.7.1. Les composites dans l'aéronautique	25
I.7.2. Les composites dans l'automobile.....	25
I.7.3. Les composites dans le ferroviaire.....	25
I.7.4. Les composites dans la construction civile	26
I.7.5. Les composites et la construction industrielle	26
I.7.6. Les composites dans la construction nautique	26
I.7.7. Les composites dans le secteur médical.....	27
I.7.8. Les composites dans les équipements de sports et loisirs	27
I.7.9. Les composites et la construction électrique.....	28
I.8. Avantages et inconvénients des composites	28
1.8.1. Avantages :	28
1.8.2. Inconvénients :	28
I.9. Conclusion	29

Chapitre II : Investigation sur les différentes théories des plaques

II.1. Introduction	30
II.2. Les hypothèses fondamentales de la théorie des poutres et des plaques	30
II.2.1. Principe de Saint venant	30
II.2.2. Principe de Navier Bernoulli généralisé	30
II.3. La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (Classical Laminated Plate Theory CLPT).....	31
II.4. La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (First Order Shear Deformation Plate Theory FSDPT).....	32
II.5. La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (Higher Order Shear Deformation Plate Theory HSDPT)	34
II.6. Théorie de zig-zag	37
II.7. Conclusion.....	38

Chapitre III :Analyse de la vibration libre des plaques stratifiées en matériaux composites

III.1. Introduction	39
III.2. La théorie d'ordre élevé à quatre variables	39
III.3. Les hypothèses de la présente théorie	39
III.4. Champs de déplacement et les déformations.....	41
III.5. Equations constitutives.....	42
III.6. Equations gouvernantes.....	43
III.7. Solution de Navier des plaques composites stratifiées simplement appuyées	46
III.7.1. Cas des composites stratifiées à plis croisés ($0^\circ/90^\circ$) (cross-ply)	46
III.7.2. Cas des composites stratifiées à plis alternées et équilibrés ($\theta^\circ/-\theta^\circ$) (angle-ply).....	48
III.8. Conclusion.....	49
Chapitre IV :Validation et discussion des résultats	
IV.1. Introduction.....	50
IV.2. Conclusion	65
Conclusion générale et perspectives.....	66
Références bibliographiques	68

Liste des figures

Figure I.1. Exemple d'un matériau composite [6].....	4
Figure I.2. Différentes familles de matrices [7]	5
Figure I.3. Exemple d'un élastomère	7
Figure I.4. Les différents types de renfort de base [14]	8
Figure I.5. Fibres de verre	8
Figure I.6. La laine de verre	11
Figure I.7. Fibres de carbone.....	13
Figure I.8. Fibres d'aramide.....	14
Figure I.9. Fibres de bore	15
Figure I.10. Fibres naturelles.....	16
Figure I.11. Composite monocouche	18
Figure I.12. Composite stratifiée.....	19
Figure I.13. Composite sandwichs [20].....	20
Figure I.14. Moulage par contact [2].....	21
Figure I.15. Moulage par compression.....	22
Figure I.16. Moulage sous vide	23
Figure I.17. Moulage par injection de mousse	23
Figure I.18. Procédé de pultrusion	24
Figure I.19. Enroulement filamentaire	24
Figure II.1. Cinématique de Kirchhoff-Love [34]	31
Figure II.2. Géométries déformées et non déformées d'un bord d'une plaque sous l'hypothèse de Reissner-Mindlin [43]	33
Figure II.3. Variation du déplacement et des contraintes transversales à travers l'épaisseur pour les deux théories : théorie classique (à droite) et la théorie du premier ordre (à gauche) [44].....	34
Figure II.4. Cinématique de la théorie d'ordre supérieur.....	36
Figure II.5. Géométries non déformées et déformées d'une plaque selon les trois théories CLPT, FSDPT et HSDPT	36
Figure III.1. Géométrie d'une plaque rectangulaire en matériau composite.....	39
Figure IV.1. Effet de la fraction volumique V_f sur la variation des fréquences naturelles adimensionnelles $\bar{\omega}$ d'une plaque carrée stratifiée croisée $(0^\circ / 90^\circ)_n$ en matériaux composites CFRP	54
Figure IV.2. Effet de la fraction volumique V_f sur la variation des fréquences naturelles adimensionnelles $\bar{\omega}$ d'une plaque carrée stratifiée croisée $(0^\circ / 90^\circ)_n$ en matériaux composites KFRP	55
Figure IV.3. Effet de la fraction volumique V_f sur la variation des fréquences naturelles adimensionnelles $\bar{\omega}$ d'une plaque carrée stratifiée croisée $(0^\circ / 90^\circ)_n$ en matériaux composites GFRP	56
Figure IV.4. Effet de la fraction volumique V_f sur la variation des fréquences naturelles adimensionnelles $\bar{\omega}$ d'une plaque carrée stratifiée $(45^\circ / -45^\circ)_n$ en matériaux composites CFRP. ...	57
Figure IV.5. Effet de la fraction volumique V_f sur la variation des fréquences naturelles adimensionnelles $\bar{\omega}$ d'une plaque carrée stratifiée $(45^\circ / -45^\circ)_n$ en matériaux composites KFRP	58

Figure IV.6. Effet de la fraction volumique V_f sur la variation des fréquences naturelles adimensionnelles $\bar{\omega}$ d'une plaque carrée stratifiée $(45^\circ / -45^\circ)_n$ en matériaux composites GFRP . 59

Figure IV.7. Effet du rapport coté sur l'épaisseur a/h sur la variation des fréquences naturelles adimensionnelles $\bar{\omega}$ d'une plaque carrée stratifiée croisée $(0^\circ / 90^\circ)_4$ en matériaux composites..... 61

Figure IV.8. Effet du rapport coté sur l'épaisseur a/h sur la variation des fréquences naturelles adimensionnelles $\bar{\omega}$ d'une plaque carrée stratifiée $(45^\circ / -45^\circ)_4$ en matériaux composites 62

Figure IV.9. Effet d'angle d'orientation sur la variation des fréquences naturelles $\bar{\omega}$ d'une plaque carrée stratifiée en matériaux composites pour le CFRP..... 63

Figure IV.10. Effet d'angle d'orientation sur la variation des fréquences naturelles $\bar{\omega}$ d'une plaque carrée stratifiée en matériaux composites pour le KFRP 64

Figure IV.11. Effet d'angle d'orientation sur la variation des fréquences naturelles $\bar{\omega}$ d'une plaque carrée stratifiée en matériaux composites pour le GFRP 64

Liste des tableaux

Tableau IV.1. Propriétés matérielles des fibres et de la matrice utilisés [9]	50
Tableau IV.2. Effet de séquence d'empilement et du rapport coté sur l'épaisseur a/h sur la variation des fréquences naturelles adimensionnelles $\bar{\omega}$ d'une plaque carrée stratifiée $(0^\circ/90^\circ)_n$ en matériaux composites.....	51
Tableau IV.3. Effet de séquence d'empilement et le rapport de rigidité E_1/E_2 sur la variation des fréquences naturelles adimensionnelles $\bar{\omega}$ d'une plaque carrée stratifiée $(0^\circ/90^\circ)_n$ en matériaux composites.....	51
Tableau IV.4. Effet de séquence d'empilement et du rapport coté sur l'épaisseur a/h sur la variation des fréquences naturelles adimensionnelles $\bar{\omega}$ d'une plaque carrée stratifiée $(45^\circ/-45^\circ)_n$ en matériaux composites.....	52
Tableau IV 5 : Effet de la fraction volumique V_f et séquence d'empilement sur la variation des fréquences naturelles adimensionnelles $\bar{\omega}$ d'une plaque carrée stratifiée $(0^\circ/90^\circ)_n$ en matériaux composites CFRP	53
Tableau IV 6 : Effet de la fraction volumique V_f et séquence d'empilement sur la variation des fréquences naturelles adimensionnelles $\bar{\omega}$ d'une plaque carrée stratifiée $(0^\circ/90^\circ)_n$ en matériaux composites KFRP.....	54
Tableau IV 7 : Effet de la fraction volumique V_f et séquence d'empilement sur la variation des fréquences naturelles adimensionnelles $\bar{\omega}$ d'une plaque carrée stratifiée $(0^\circ/90^\circ)_n$ en matériaux composites GFRP	55
Tableau IV 8 : Effet de la fraction volumique V_f et séquence d'empilement sur la variation des fréquences naturelles adimensionnelles $\bar{\omega}$ d'une plaque carrée stratifiée $(45^\circ/-45^\circ)_n$ en matériaux composites CFRP.....	56
Tableau IV 9 : Effet de la fraction volumique V_f et séquence d'empilement sur la variation des fréquences naturelles adimensionnelles $\bar{\omega}$ d'une plaque carrée stratifiée $(45^\circ/-45^\circ)_n$ en matériaux composites KFRP.....	57
Tableau IV 10 : Effet de la fraction volumique V_f et séquence d'empilement sur la variation des fréquences naturelles adimensionnelles $\bar{\omega}$ d'une plaque carrée stratifiée $(45^\circ/-45^\circ)_n$ en matériaux composites GFRP.....	58
Tableau IV 11 : Effet de rapport d'aspect a/b et du rapport coté sur l'épaisseur a/h sur la variation des fréquences naturelles adimensionnelles $\bar{\omega}$ d'une plaque carrée stratifiée $(0^\circ/90^\circ)_4$ en matériaux composites.....	60
Tableau IV 12 : Effet de rapport d'aspect a/b et du rapport coté sur l'épaisseur a/h sur la variation des fréquences naturelles adimensionnelles $\bar{\omega}$ d'une plaque carrée stratifiée $(45^\circ/-45^\circ)_4$ en matériaux composites.....	61
Tableau IV.13 : Effet d'angle d'orientation $(0^\circ/90^\circ)_4$ et $(\theta/-\theta)_4$ sur la variation des fréquences naturelles adimensionnelles $\bar{\omega}$ d'une plaque carrée stratifiée en matériaux composites pour les différents types fibres CFRP, KFRP et GFRP.....	63

Liste des abréviations

CLPT	Classical Laminated Plate Theory
FSDPT	First Order Shear Deformation Plate Theory
HSDPT	Higher Order Shear Deformation Plate Theory
HSDPT1	Higher Order Shear Deformation Plate Theory of Reddy
HSDPT2	Higher Order Shear Deformation Plate Theory of Swaminathan
a	Longueur de la plaque
b	Largeur de la plaque
h	L'épaisseur de la plaque
E	Module de Young
E_1	Module de Young longitudinal
E_2	Module de Young transversal
ρ	Masse volumique
E_f	Module d'élasticité des fibres
E_m	Module d'élasticité de la matrice
G	Module de cisaillement transverse
G_{12}, G_{13}, G_{23}	Module de cisaillement
ν	Coefficient de Poisson
u, v, w	Les déplacements suivant les directions x , y et z

u_0, v_0	Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque
$f(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
$f'(z)$	La première dérivée de la fonction de gauchissement par rapport à z
$\psi(z)$	Est une fonction dérivée de cisaillement transverse caractérisant les théories correspondantes
$\omega, \bar{\omega}$	Fréquences naturelles
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Contraintes normales suivant les directions x, y et z
$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$	Contraintes de cisaillement
$\varepsilon_x, \varepsilon_y$	Déformations dans les directions x et y
$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	Déformations de distorsion
$\delta u_0, \delta v_0, \delta w_b, \delta w_s$	Champ virtuel de déplacement
w_b	Composante de la flèche due à la flexion
w_s	Composante de la flèche due au cisaillement
N_x, N_y, N_{xy}	Efforts normaux de membrane
M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b	Moments de flexion pure
M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s	Moments de flexion supplémentaire due au cisaillement transverse
K_x^b	Courbure de flexion suivant x
K_x^s	Courbure de cisaillement suivant x

K_y^b	Courbure de flexion suivant y
K_y^s	Courbure de cisaillement suivant y
K_{xy}^b	Courbure de flexion suivant xy
K_{xy}^s	Courbure de cisaillement suivant xy
S_{yz}^s, S_{xz}^s	Effort de cisaillement pur
n, m	Nombres de modes
A_{ij}	Termes de rigidité en membrane de la plaque
B_{ij}	Termes de rigidité de couplage de la plaque
D_{ij}	Termes de rigidité de flexion de la plaque
$A_{ij}^s, B_{ij}^s, D_{ij}^s, H_{ij}^s$	Sont des termes de rigidité de la plaque en cisaillement
Q_{ij}	Les coefficients de rigidité
\bar{Q}_{ij}	Les coefficients de rigidité en fonction de l'orientation des fibres
CFRP	plaque composite à base de fibre de Carbone
KFRP	plaque composite à base de fibre de Kevlar
GFRP	plaque composite à base de fibre de verre

INTRODUCTION
GÉNÉRALE

Introduction générale

De nos jours Le développement de nouveaux matériaux est soumis aux besoins des utilisateurs, ces matériaux sont plus importants par rapport aux matériaux traditionnels .Dans de nombreux cas les matériaux composites peuvent offrir des avantages fonctionnels : très grande rigidité, résistance à la fatigue acceptable, liberté de formes. Ils permettent d'augmenter la durée de vie de certains équipements grâce à leurs propriétés mécaniques et chimiques.

Les matériaux composites ont pris une place importante dans divers domaines : l'aéronautique, le ferroviaire, dans les constructions industrielle et civile, loisirs ainsi que le secteur médical

Ainsi Les matériaux composites, au sens le plus courant du terme, sont un ensemble de matériaux de synthèse conçus et mis en œuvre essentiellement pour des applications structurales.

L'objectif de cette investigation est de présenter une nouvelle théorie raffinée pour étudier la stabilité à la vibration libre des plaques stratifiées en matériaux composites et déterminer par la suite les différents paramètres qui influent sur ce comportement.

Ce travail est subdivisé en quatre chapitres articulés de la manière suivante :

Dans un premier chapitre nous présentons des généralités sur les matériaux composites (définition, une description de leurs types, leurs composition, leurs structures, les procédés de fabrication, les domaines d'application et finalement leurs avantages et leurs inconvénients).

Le deuxième chapitre est consacré à la présentation des différentes théories des plaques qui servent à analyser le comportement vibratoire des plaques à savoir : La théorie classique des plaques CLPT, la théorie du premier ordre FSDPT, la théorie d'ordre élevé HSDPT et la théorie zig-zag. Ces théories sont employées dans la littérature pour la modélisation, analytique ou numérique, des composites

Au troisième chapitre une étude analytique de la stabilité à la vibration libre des plaques stratifiées en matériaux composites en utilisant une nouvelle théorie raffinée d'ordre élevé à quatre variables. Basant sur cette théorie d'ordre élevée on présente la formulation mathématique qui nous aide à résoudre le problème posé : champ du déplacement les déformations, les équations constitutives et les équations de mouvement, ces derniers sont obtenus en utilisant le principe d'Hamilton, d'où, les fréquences naturelles sont obtenues par la solution de Navier.

Afin de valider notre théorie présentée dans le troisième chapitre cité précédemment, des études comparatives sont largement détaillées dans le quatrième chapitre ensuite une étude paramétrique a été

présentée pour déterminer les différents facteurs qui influents sur la stabilité à la vibration libre des plaques stratifiées en composites. Où Les résultats sont obtenus en utilisant le programme Maple, ce dernier est un logiciel qui aide à la résolution des problèmes mathématiques grâce à des fonctions permettant de résoudre des équations typiques (dérivées, intégrales...etc.).

Enfin, nous terminons notre travail par une conclusion générale construite avec les résultats obtenus à l'aide de la présente méthode et permet de souligner son efficacité pour l'analyse du comportement vibratoire des plaques stratifiées en matériaux composites, et nous tirons quelques perspectives pour les travaux futurs.

CHAPITRE I :
GÉNÉRALITÉS SUR
LES MATÉRIAUX
COMPOSITES

I.1. Introduction

Dans ce premier chapitre on s'intéresse aux matériaux composites, où on donne une définition de ces matériaux suivie par une description de leurs types, leurs constitutions, leurs structures, leurs procédés de fabrications et domaine d'application, et finalement leurs avantages et leurs inconvénients.

De manière général le matériau composite est un matériau macroscopiquement homogène, microscopiquement, très hétérogène et fortement anisotrope. Contrairement aux matières premières classiques. Ils apportent de nombreux avantages fonctionnels : légèreté, résistance mécanique et chimique, maintenance réduite, liberté de forme. Ils permettent d'augmenter la durée de vie de certains équipements grâce à leurs propriétés avantageuses.

I.2. Définition d'un matériau composite

Un matériau composite est la conjonction de plusieurs matériaux dans le but d'obtenir des propriétés supérieures à ce que l'on obtiendrait avec un seul matériau.

Il est constitué essentiellement :

- Un matériau fibreux jouant le rôle de renfort qui assure la tenue mécanique (résistance à la traction et rigidité) [1] ;
- Un matériau résineux appelé matrice qui lie les fibres renfort, répartit les efforts (résistance à la compression ou à la flexion) et assurer la cohésion entre les éléments du renfort [1];
- Les additifs sont des produits divers (colorants, plastifiants, ou lubrifiants) pour améliorer certaines caractéristiques, pour modifier son aspect, ou pour diminuer le cout des composites ;
- Les charges, sous forme d'éléments fragmentaires, de poudres ou liquide, modifient une propriété de la matière à laquelle on l'ajoute (par exemple la tenue aux chocs, la résistance aux UV, le comportement au feu...etc.) [2];
- L'interface matrice-renforts est la surface de contact entre la matrice et les différents renforts ajoutés.

I.3. Type de composite

Parmi les composites et selon le type des fibres, on distingue deux types : les composites grandes diffusions (**GD**) et les composites hautes performances (**HP**) :

I.3.1. Composites de Grande Diffusion GD

Plus courants, proviennent essentiellement du couple fibre de verre E/polyester, ou verre E/Techno polymère, avec un taux de renforcement voisin de 30 % (en masse). Ils représentent actuellement les plus gros volumes d'emploi avec un bon compromis performance/coût voisin du coût du matériau de base [3].

I.3.2. Composites de Haute Performance HP

Principalement utilisés dans l'aéronautique sont d'un coût élevé. Les renforts sont plutôt des fibres longues. Le taux de renfort est supérieur à 50%, et ce sont les renforts qui influent sur le coût. Les propriétés mécaniques (résistance mécanique et rigidité) sont largement supérieures à celles des métaux, contrairement aux GD. Des méthodes de calculs de structures et d'homogénéisations ont été développées pour les HP. On utilisera des composites à fibres longues et à matrice organique et pour les garnitures, capotages on utilisera des plastiques renforcés [4].

I.4. Composition des matériaux composites

Les matériaux composites sont constitués principalement :

- D'une matrice à laquelle sont ajoutés, dans certains composites des charges ;
- D'un renfort ;
- D'une interface [5];
- Des charges et des additifs.

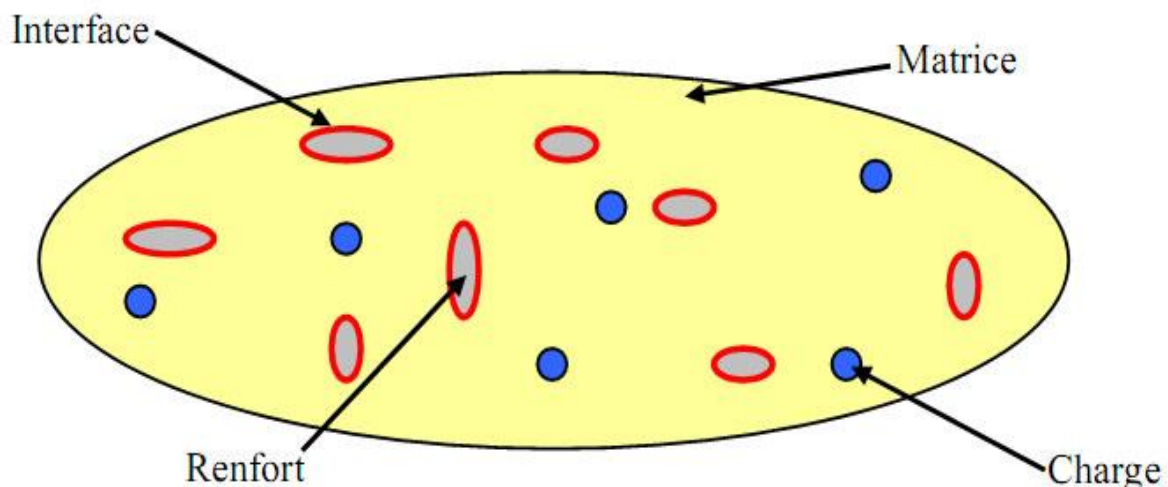


Figure I.1. Exemple d'un matériau composite [6]

I.4.1. La matrice

La matrice a pour rôle de :

- lier les fibres de renforts ;
- répartir les contraintes ;
- apporter la tenue chimique de la structure ;
- donner la forme désirée au produit final.

Elle se présente sous plusieurs formes :

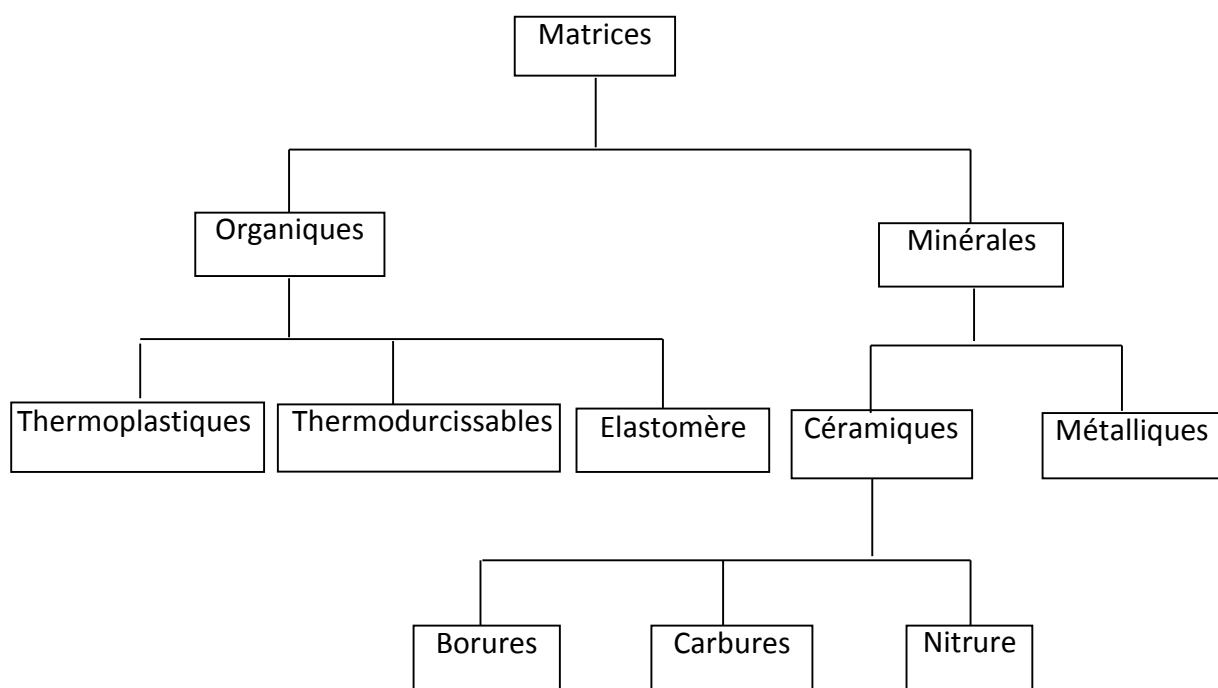


Figure I.2. Différentes familles de matrices [7]

I.4.1.1. Les composites à matrices organiques (CMO)

Il s'agit, de loin, des composites les plus répandus : ce sont en effet les seuls composites ayant, pour beaucoup d'entre eux, des coûts unitaires suffisamment réduits pour pouvoir être produits en grandes séries. Les matrices organiques sont obtenues à partir de polymères thermoplastiques ou thermodurcissables (résines). La résine joue le rôle d'une matrice pour lier les fibres renforts, répartir les contraintes subies, apporter la tenue chimique de la structure et donner la forme désirée au produit.

1.4.1.1.1. Thermodurcissables (TD)

Les résines thermodurcissables sont des polymères, qui, après un traitement thermique ou physico-chimique (catalyseur, durcisseur), se transforment en des produits essentiellement infusibles et insolubles. Ces résines ont donc la particularité de ne pouvoir être mises en forme qu'une seule fois [7].

Les principales résines thermodurcissables utilisées sont les suivantes :

- Polyesters : haute résistance à la lumière et aux intempéries, extrêmement fin (trois fois plus fin que la soie) ;
- Polyester insaturé : la facilité de mise en œuvre, une bonne résistance chimique aux hydrocarbures (essence, carburant,...etc.) [8];
- Vinylesters : excellente résistance à la fatigue, bonne adhérence sur les fibres de renfort ;
- Les époxydes : faibles retraits (1 à 2 %), tenue mécanique, thermique, chimique et fatigue [2];
- Les phénoliques : un faible coût, une bonne résistance aux agents chimiques [9];
- Polyuréthanes et polyurées : facilité de moulage in situ, tenue chimique [2].

1.4.1.1.2. Les thermoplastiques (TP)

Les thermoplastiques sont constitués de macromolécules linéaires qui peuvent devenir mobiles entre elles lorsqu'on élève la température. La mise en œuvre se fait avec un apport d'énergie par chauffage ou par frottement, la matrice passe d'un état solide à un état plastique ou fondu [10].

Les principales résines thermoplastiques utilisées sont les suivantes :

- Polyamide : une bonne tenue au choc, bonne résistance à la fatigue et aux hydrocarbures ;
- polytéréphtalate éthylénique et butylique : bonne rigidité ;
- polycarbonate : une bonne tenue au choc ;
- polysulfures de phénylène : une résistance à l'hydrolyse ;
- Polyoxyméthylènes : une bonne tenue à la fatigue ;
- polysulfurés : une bonne stabilité chimique ;
- polypropylène : assez stable en température, mais combustible [8].

I.4.1.1.3. Les élastomères

Sont des polymères naturels ou synthétiques dont la structure particulière confère une importante élasticité (jusqu'à 500% d'allongement par rapport à la taille initiale).

A titre d'exemple, nous pouvons citer les élastomères suivants : les silicones d'élastomères, les polyuréthanes, le néoprène, le latex, ...etc. [11]

L'élastomère possède une bonne tolérance à l'humidité et peut être utilisé pour effectuer des moulages, matrices de coffrage.



Figure I.3. Exemple d'un élastomère

I.4.1.2. Les composites à matrices céramiques (CMC)

Les matériaux utilisés sont les carbures de silicium et de carbone. Ils sont utilisés pour la fabrication des pièces qui subissent des contraintes d'origine thermique et leur coût est très élevé [12].

I.4.1.3. Les composites à matrices métalliques (CMM)

L'utilisation des matrices métalliques est encore actuellement en grande partie à un stade préindustriel. Plusieurs matériaux composites tels que ; l'Aluminium et ses alliages, Nickel, Titane, présentent une bonne conductibilité électrique et thermique, une bonne tenue à des températures élevées et de plus ils possèdent de bonnes caractéristiques mécaniques transverses. Leur fabrication conduit à des coûts très élevés [12].

I.4.2. Les renforts

C'est le principal porteur constitutif dans le composite (forme, volume). Il confère aux composites leurs caractéristiques mécaniques : rigidité, résistance à la rupture, dureté. Ces renforts permettent également d'améliorer certaines des propriétés physiques : comportement thermique, tenue en température, tenue au feu, résistance à l'abrasion, propriétés électriques, etc. Les caractéristiques

recherchées pour les renforts sont des propriétés mécaniques élevées, une masse volumique faible, une bonne compatibilité avec les résines, une facilité de mise en œuvre, un faible coût [13].

En fonction de leur utilisation, les renforts peuvent être d'origines diverses comme il est indiquée sur la figure I.3.

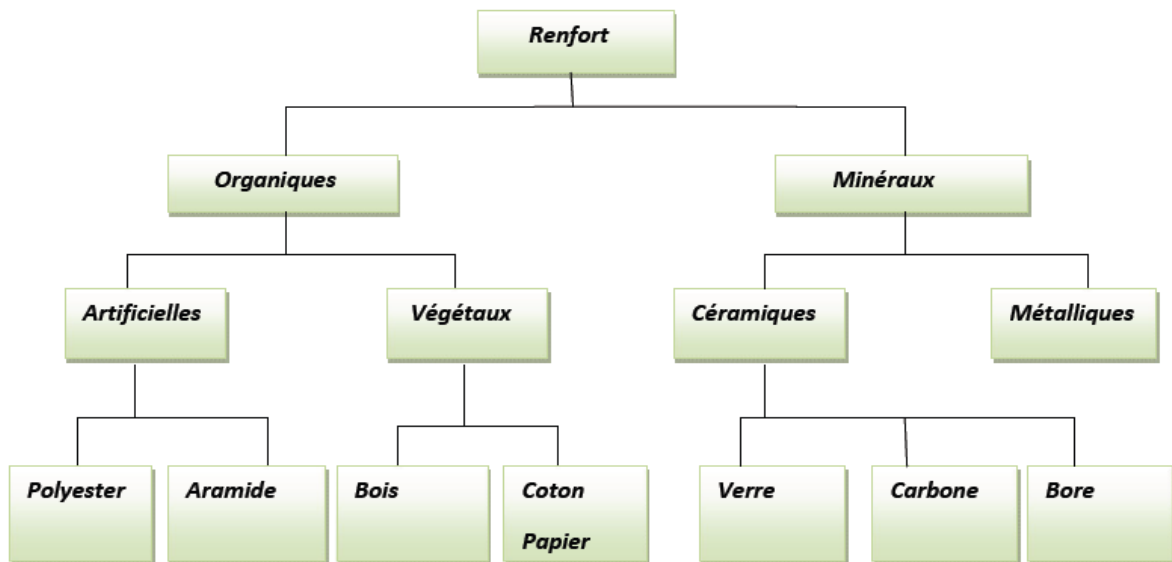


Figure I.4. Les différents types de renfort de base [14]

I.4.2.1. Fibres de verre



Figure I.5. Fibres de verre

Les fibres de verre constituent le principal renfort, utilisé dans plus de 95% des matériaux composites, et plus particulièrement pour les produits de grande diffusion (GD). L'industrie verrière

propose plusieurs produits différents par leur composition chimique et leurs prix : le verre E d'une part et d'autre part les verres R et S très voisins (le premier est français et le second américain).

Ils sont obtenus à partir de silice (SiO_2) et d'additifs. Le verre est coulé en fusion à 1250°C à travers une filière en platine-rhodium ; après refroidissement, les filaments sont étirés pour obtenir des fibres continues.

Les différents types de fibres de verre, classés selon leurs applications spécifiques, sont :

- Fibres E pour les composites grandes diffusions (GD) ; il est le moins cher que les autres types de verre ;
- Fibres D pour les applications dans la construction électrique (circuits imprimés) ;
- Fibres R et S qui contiennent plus d'alumine ; pour les composites hautes performances (HP) ;
- Fibres C résistent bien à la corrosion en milieu acide [15].

L'utilisation des fibres de verre dans les composites est principalement limitée par :

- Une rigidité insuffisante pour certaines applications comme les pièces de structure primaire en aéronautique ;
- Un vieillissement accéléré au contact prolongé de l'eau, des rayonnements UV ou de températures élevées.

1.4.2.1.1. Procédé de fabrication des fibres de verre

Ce procédé se déroule en cinq étapes principales :

1. Affinage à 1500°C : la composition est chauffée ; elle devient visqueuse (vers 800°C), puis liquide, et finalement se vitrifie. À 1500°C , elle est homogène, et les dernières bulles et impuretés disparaissent.

2. Filage par étirement : le verre en fusion se transforme en filament en étant étiré à grande vitesse ; la filature des filaments s'apparente en fait à la filature textile classique pour produire un fil. Ce fil de verre se bobine ensuite autour d'une broche.

3. Ensimage : l'étirage et le bobinage n'ont pas suffisamment d'effet pour rassembler durablement les centaines de filaments en un fil (le verre est trop lisse pour s'agglomérer). L'ensimage consiste à ajouter

un revêtement protecteur pour permettre l'agglomération des filaments et faciliter l'intégration dans les polymères.

4. Finition : les fils sont ensuite bobinés ou coupés selon les finalités.

5. Séchage (oven drying) : les fils sont finalement séchés à des températures de 700 à 800°C.

1.4.2.1.2. Utilisations des fibres de verre

Le renforcement est de loin l'application la plus importante. Dans 9 cas sur 10, les fibres de verre servent à renforcer les bétons ou les polymères (matériaux plastiques thermodurcissables comme le polyester ou l'époxy) en vue de fabriquer des matériaux composites capables de se substituer à l'acier.

Les principales utilisations de ces matériaux composites sont, par ordre d'importance :

- les bâtiments et les infrastructures (29%) ;
- les transports (25%) : avions ;
- l'électricité et l'électronique (16%) ;
- les sports et loisirs (14%) : perches d'athlétisme, skis et planches de surf ;
- les équipements industriels (11%).

Pour l'isolation, le verre est utilisé sous la forme d'un enchevêtrement de fibres assez courtes constituant une sorte de matelas, souvent désigné sous le nom de laine de verre. Ce matériau est utilisé pour l'isolation thermique des combles et des toitures.

Par ailleurs, les fibres de verres, grâce à leur souplesse, leur transparence et leur excellente capacité de transmission de la lumière, sont employées comme fibres optiques dans le domaine médical (endoscopie) et dans le domaine des télécommunications où la fibre optique est une technologie d'avenir [16].

1.4.2.1.3. Avantages et Inconvénients des fibres de verre

Avantages

- Bonne résistance spécifique (pour le verre R) ;
- une bonne adhérence entre fibres et résines ;
- tenue à la température élevée ;

- incombustibilité ;
- dilatation et conductivité thermique faible ;
- Bon rapport de performances mécanique/prix ;
- Bonnes propriétés diélectriques.

Inconvénients

- Faible module (par rapport au carbone ou aramide) ;
- Vieillessement au contact de l'eau [17].

1.4.2.1.4. La laine de verre



Figure I.6. La laine de verre

La laine de verre est un matériau se présentant comme un matelas de fibres de verre extrêmement fines. On l'utilise comme isolant thermique, isolant acoustique ou absorbant acoustique, ou pour la protection contre l'incendie.

a. Procédé de fabrication de la laine de verre

Etape 1 : Matières premières : Le verre de la laine de verre se compose de verre recyclé (dans une proportion pouvant aller jusqu'à 80%, à minima 40%), de sable et d'autres matières naturelles tels que le calcaire ou la dolomie qui sont des fondants et permettent l'abaissement de la température de fusion du verre.

Etape 2 : composition : Les matières premières sont stockées dans des silos, puis pesées et mélangées pour former la composition verrière.

Etape 3 : Fusion : La composition verrière entre en fusion dans le four.

Etape 4 : Fibrage : La matière en fusion passe dans une filière puis dans des assiettes de fibrage d'où elle ressort sous forme de fils de verre qui sont pulvérisés de polymère (le liant) pour former un matelas.

Etape 5 : Etuvage : Le matelas de laine cuit pour être polymérisé. Il devient ainsi un matelas élastique, qu'il devient possible de comprimer.

Etape 6 : Découpe par massicot : Les matelas sont surfacés puis découpés. Les chutes sont recyclées dans le processus.

Etape 7 : Conditionnement : Le conditionnement se fait en rouleaux et panneaux. Les matelas sont très fortement comprimés par une enrouleuse, jusqu'à 10 fois leur épaisseur, ce qui permet d'optimiser leur transport.

Etape 8 : Palettisation : L'opération de la palettisation automatique permet encore d'améliorer la compression des panneaux et rouleaux tout en rendant les produits stockables à l'extérieur.

b. Utilisations dès la laine de verre

- Elle peut être utilisée dans les bâtiments (maisons individuelle, habitat collectif, locaux commerciaux industriels et sportifs) ;
- Elle sert à la réalisation des murs, des cloisons pour les toitures, combles perdus ou aménagés et les planchers.

c. avantages et Inconvénients dès la laine de verre

Avantages

- Bon isolant thermique et acoustique ;
- Bonne résistance au feu ;
- Imputrescible.

Inconvénients

- Durée de vie de 10 ans, peut de tasser au fil du temps et perdre ses qualités d'isolation ;
- Faible densité et faible inertie ;
- Difficilement recyclable ;

- Nécessite des précautions lors de mise en œuvre.

I.4.2.2. Fibres de carbone

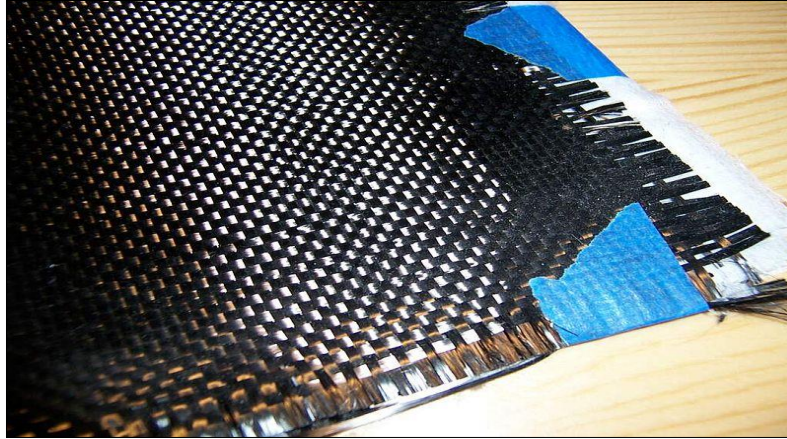


Figure I.7. Fibres de carbone

Elles sont principalement utilisées pour les composites « hautes performances » en aéronautique, en construction industrielle et dans les sports et loisirs.

Les fibres de carbone ont la structure du graphite. Elles proviennent de fibre acrylique et du brai. Actuellement, il existe deux procédés de préparation de la fibre de carbone : l'une des voies permet d'obtenir les fibres de types HM (Haut Module) et THM (Très Haut Module), l'autre donne les fibres HR (Haute résistance) et HT (Haute Ténacité).

I.4.2.2.1. Avantages des fibres de carbone

- Excellentes tenue à la compression ;
- Excellentes tenue à haute température ;
- Excellentes tenue à la fatigue ;
- Excellentes rigidité pour les fibres hautes modules ;
- Bonne conduction électrique et de la chaleur ;
- Inertie complète à la corrosion et aux agents chimiques ;
- Insensibilité à l'humidité.

I.4.2.2. Inconvénients des fibres de carbone

- Prix élevé ;
- Fibre difficile à imprégner par la résine époxy ;
- Sensibilité aux chocs mécaniques ;
- Sensibilité à l'abrasion ;
- Faible allongement (1%) ;
- Faible rayon de courbure.

I.4.2.3. Fibres d'aramide

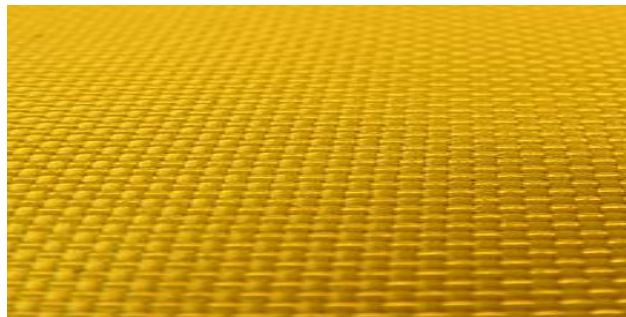


Figure I.8. Fibres d'aramide

La fibre aramide est obtenue à partir des polyamides aromatiques (ou polyaramide) par synthèse chimique à basse température ; ses propriétés diffèrent de celles des polyamides aliphatiques classiques on la nomme souvent « *Kevlar* », qui est la marque de son créateur Dupont de Nemours. Les composites renforcés de fibres d'aramide offrent une bonne stabilité en température (Jusqu'à 200°C en fonction de la matrice) mais souffrent :

- d'une adhérence moyenne entre matrice et fibres ;
- d'un prix encore trop élevé [3].

I.4.2.3.1. Avantages des fibres d'aramide

- Très haute résistance spécifique à la traction ;
- Masse volumique faible ;
- Excellente résistance au choc ;
- Isolation thermique et électrique ;

- Aucun vieillissement de la fibre aramide à l'humidité.

I.4.2.3.2. Inconvénients des fibres d'aramide

- Imprégnation difficile par les résines ;
- Nécessite d'étuver les fibres à 120°C avant utilisation, car l'humidité diminue l'alliance résine-fibre ;
- Usinage difficile ;
- Mauvaise résistance chimique aux acides et bases forts ;
- Prix très élevé.

I.4.2.4. Fibres de bore



Figure I.9. Fibres de bore

Elles peuvent être noyées sans difficulté dans des matrices métalliques et également organiques. Pourtant leur fabrication ne se fait pas facilement.

Le bore est dur, fragile, rigide et ne peut pas être étiré. Par conséquent la fabrication des fibres de bore se fait par dépôt en phase vapeur du bore sur un filament de tungstène. Les fibres de bore possèdent des propriétés élevées en traction mais il faut également noter leurs bonnes propriétés en compression [3].

I.4.2.5. Fibres métalliques (acier, cuivre, aluminium)

Sont utilisées souvent avec des matrices métalliques.

Ces fibres sont appréciées pour diverses raisons par exemple :

- leur prix de revient assez bas ;

- leur haute capacité d'isolation thermique ;
- leur bonne conductivité thermique et électrique ;
- leur propriété d'isolation acoustique.

I.4.2.6. Fibres naturelles



Figure I.10. Fibres naturelles

Les fibres naturelles sont des substances filamenteuses issues de végétaux et d'animaux ou minéral, susceptibles d'être filées pour fabriquer des fils et des cordes. Elles sont tissées, tricotées ou tressées pour confectionner des textiles indispensables à la société.

I.4.3. Les charges et les additifs

La matrice et les renforts reçoivent des additifs ou charges nécessaires pour assurer une adhérence suffisante. Ils permettent également, de réduire le coût, de modifier l'aspect ou les caractéristiques de la matière à laquelle ils sont ajoutés :

- Pigments de coloration, agents anti-UV ;
- Charges ignifugeantes ;
- Isolation thermique ou acoustique ;
- Lubrifiants et agents de démoulage.

I.4.3.1. Les charges

Ils sont le plus souvent minéraux : carbonate de calcium, mica, talc, carbone (noir de fumée), le graphite colloïdal,... etc.

Ils peuvent être rarement métalliques : aluminium et fer qui permettent d'augmenter la conductivité thermique des résines.

I.4.3.1.1. Charges renforçantes

L'objet de l'incorporation de charges renforçantes est d'améliorer les caractéristiques mécaniques de la résine. Ces charges peuvent être classées suivant leur forme géométrique en :

- Charges sphériques ;
- Charges non sphériques.

I.4.3.1.2. Charges non renforçantes

Les charges non renforçantes ont pour rôle soit de diminuer le coût des résines en conservant les performances des résines, soit d'améliorer certaines propriétés des résines.

Parmi ces classes on trouve :

- Charges de faible coût ;
- Charges ignifugeantes ;
- Charges conductrices et antistatiques [18].

I.4.3.2. les additifs

Les additifs se trouvent en faibles quantités (quelques % et moins) et interviennent comme :

- Lubrifiants et agents de démoulage : ces agents ont pour objet de faciliter le façonnage de la résine et de réduire la tendance de la résine à adhérer aux moules ;
- Pigments et colorants : sont des produits insolubles se présentant sous forme de poudres ou de paillettes. Ils sont obtenus à partir d'oxydes ou de sels métalliques. À partir de ces pigments, il est possible d'obtenir des pâtes colorantes ;
- Agents anti-retrait : sont généralement des produits à base de thermoplastiques ou d'élastomères, se présentent sous forme de poudre ou de solution. Ils diminuent ou annulent le phénomène de retrait. Ces produits améliorent également l'écoulement de la matière dans certaines techniques de moulage ;
- Agents anti-ultraviolets : ont pour fonction de protéger les résines des rayons ultraviolets. Le principe de ces agents est d'absorber le rayonnement ultraviolet et éviter ainsi la détérioration

prématurée de la résine par rupture de liaisons atomiques ou par passage à un état excité qui favorise l'oxydation [8].

I.4.4. L'interface

L'utilisation d'une couche interface permet d'assurer la compatibilité entre le renfort et la matrice. Qui se forme spontanément lorsque deux phases sont mises en présence l'une de l'autre au moment de l'élaboration du matériau et qui se maintient entre ces deux phases pendant toute la vie du matériau, l'interface n'est pas simplement une simple discontinuité entre les deux phases du matériau hétérogène ou leur juxtaposition [5].

I.5. Structures du composite

Les structures des matériaux composites peuvent être classées en trois types :

- Les monocouches ;
- Les stratifiées ;
- Les sandwichs.

1.5.1. Monocouches

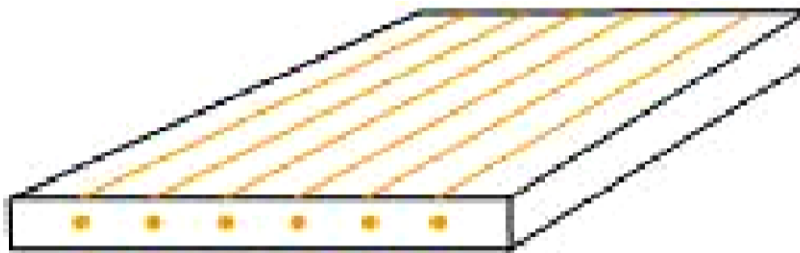


Figure I.11. Composite monocouche

Représentent l'élément de base de la structure composite. Les différents types de monocouches sont caractérisés par la forme du renfort : à fibres longues (unidirectionnelles UD, réparties aléatoirement), à fibres tissées, à fibres courtes.

I.5.2. Les stratifiées

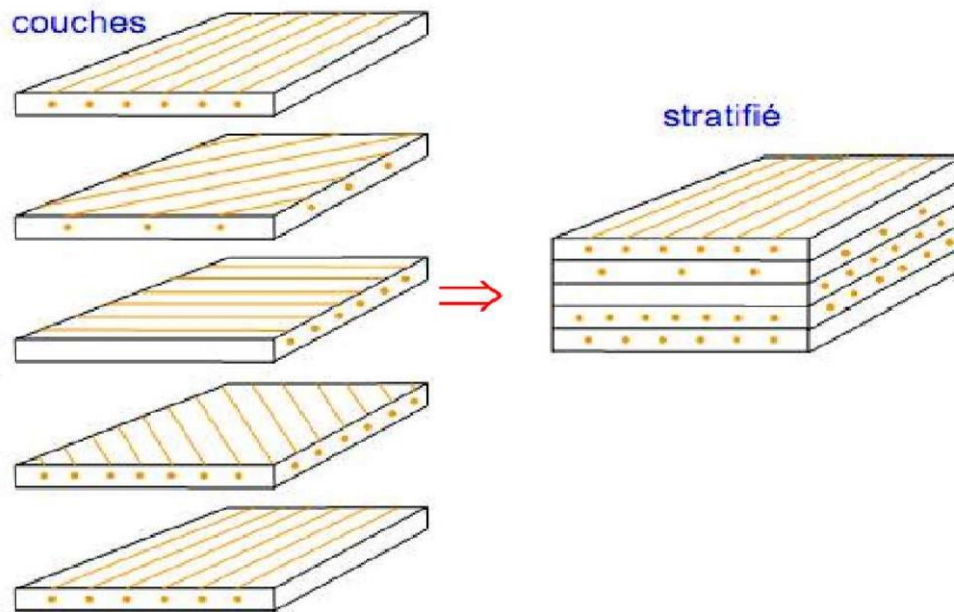


Figure I.12. Composite stratifiée

Un stratifié est constitué d'un empilement de monocouches ayant chacun une orientation propre par rapport à un référentiel commun aux couches et désigné comme le référentiel du stratifié. Le choix de l'empilement et plus particulièrement des orientations permettra d'avoir des propriétés mécaniques spécifiques.

Notation " composite " : Un stratifié possédant l'empilement (0, +45, +90, -45) est un stratifié avec 4 couches dans les directions 0° , -45° , 90° et $+45^\circ$, l'orientation 0° coïncidant avec la direction 1 du repère principal du composite. Ces plans seront réparties symétriquement par rapport au plan moyen du stratifié.

On pourra avoir des stratifiés de type :

1. Equilibré : stratifié comportant autant de couches orientées suivant la direction « $+\theta$ » que de couches orientées suivant la direction « $-\theta$ ».

2. Symétrique : stratifié comportant des couches disposées symétriquement par rapport à un plan moyen.

3. Orthogonal : stratifié comportant autant de couches à 0° que de couches à 90° .

I.5.2.1. Différents types des stratifiés

I.5.2.1.1. Stratifié Unidirectionnel

Les fibres sont orientées dans une même direction ; elles sont parallèles et peuvent se présenter sous deux formes :

- Sans liaison particulière (roving) ;
- Reliées par un fil (nappes).

I.5.2.1.2. Stratifié à Pli Orienté $\pm\theta$ (angle ply)

L'orientation des fibres est alternée d'un pli à l'autre, $(+\theta/-\theta)$, avec θ différent de 0 ou de 90°.

I.5.2.1.3. Stratifié à Pli Croisé (cross ply)

L'orientation des fibres est alternée d'un pli à l'autre, 0/90°/0/90°.

I.5.2.1.4. Stratifié Symétrique

L'orientation des fibres est symétrique par rapport à la ligne centrale du stratifié, c.à.d. pour chaque pli à angle θ au-dessus du plan médian il y a un pli à angle égal de l'autre côté du plan médian, $\theta(z) = \theta(-z)$ [19].

I.5.3. Les sandwichs

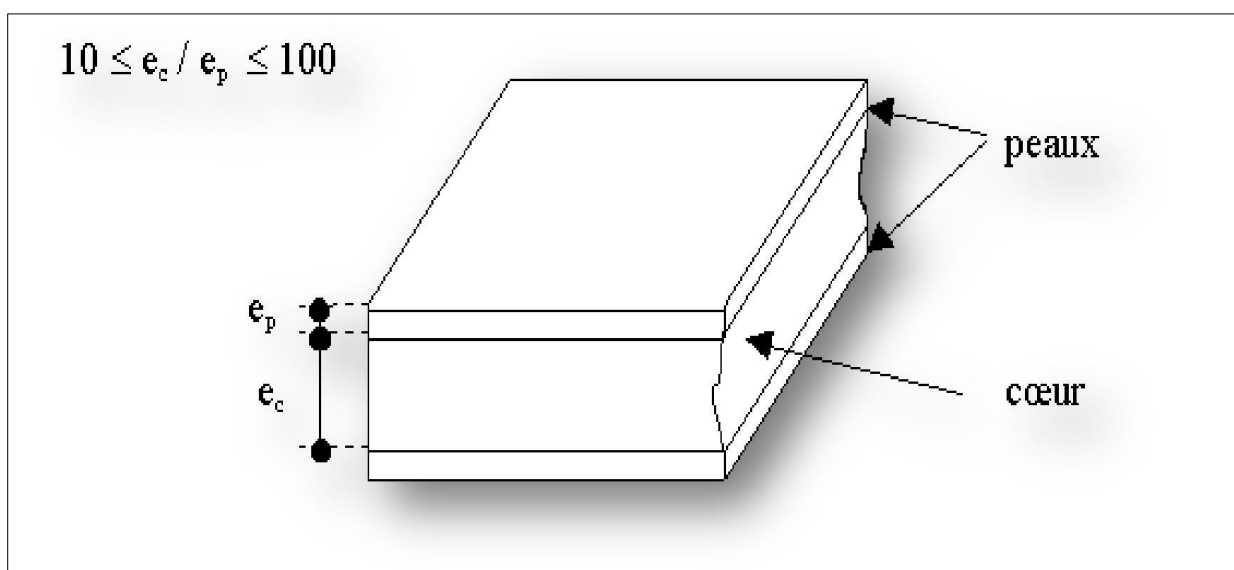


Figure I.13. Composite sandwichs [20]

Ils sont composés de deux revêtements (ou peaux) de faibles épaisseurs (possédant de bonnes caractéristiques en traction). Ces peaux sont collées ou soudées de part et d'autre d'une âme constituée d'un matériau ou d'une structure légère de forte épaisseur ayant de bonnes propriétés en compression. Cela permet de constituer un matériau permettant de concilier légèreté et rigidité avec des atouts considérables (une très bonne isolation thermique, etc.). Cependant, ils présentent un certain nombre d'inconvénients liés au fait de leur faible capacité à résister au feu, à isoler les sons acoustiques (vu qu'ils n'amortissent pas le son), ...etc.

I.6. Procédés de fabrication des structures composites

I.6.1. Moulage au contact

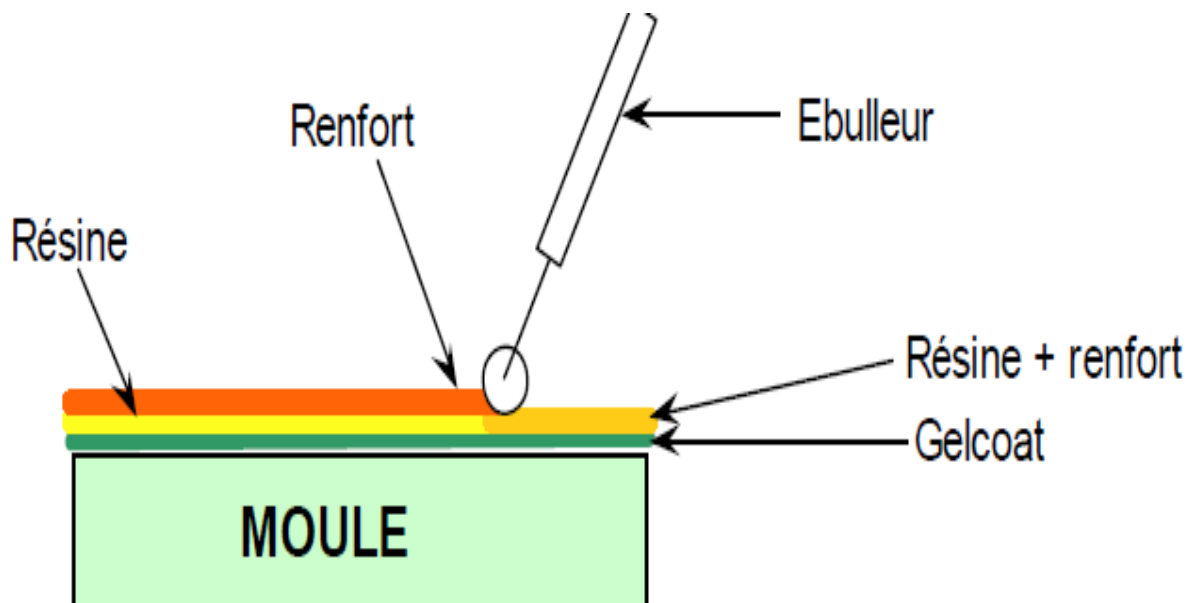


Figure I.14. Moulage par contact [2]

Est un procédé manuel (élaboration à façon) pour la réalisation de structures à partir de résines thermodurcissables, à température ambiante et sans pression. Les renforts sont déposés sur le moule approprié et imprégnés de résine liquide, accélérée et catalysée. Après durcissement de la résine, la pièce est démoulée puis détournée.

I.6.2. Moulage par compression

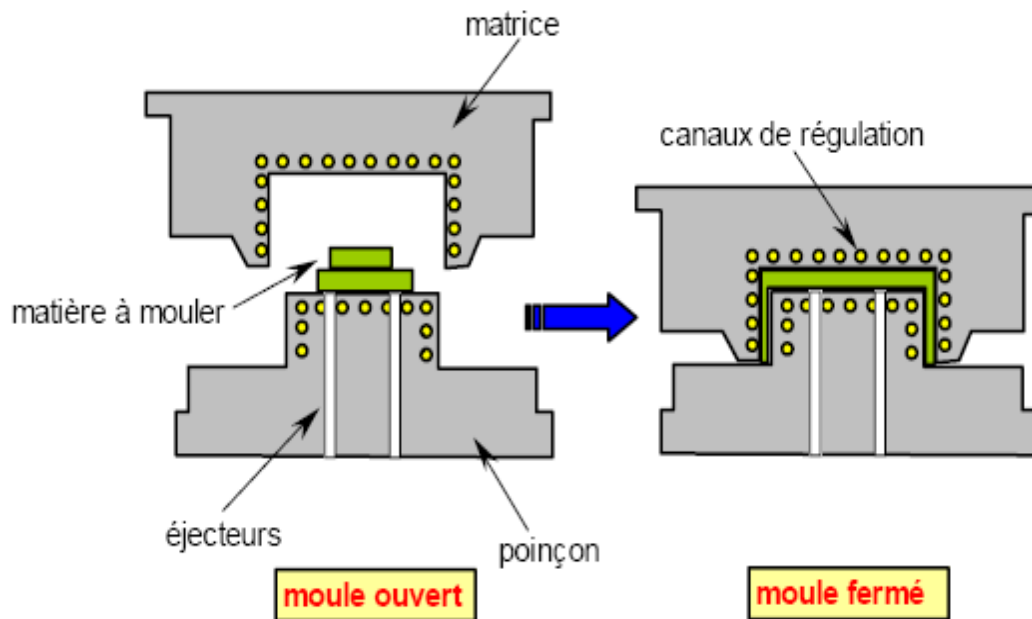


Figure I.15. Moulage par compression

Le moulage par compression s'applique au mat (produit constitué de filaments, de fibres discontinues ou de fils de base, coupés ou non, orientés ou non, et maintenus ensembles sous forme de nappe) ou aux tissus préimprégnés. Ceux-ci sont empilés dans un moule préchauffé.

Cet ensemble est mis sous une presse de façon à donner aux tissus la forme du moule et à polymériser la résine. Cette méthode permet donc d'avoir un produit fini ayant deux faces lisses similaires à celle du moule.

Cette technique est applicable aux moyennes et grandes séries et pour des cadences de production de 4 à 12 pièces par heure. Ce procédé nécessite un équipement plus important que pour le moulage de préimprégnés par sac à vide : un moule + contre moule, une presse et un système de chauffe dans le cas du moulage par compression à chaud. Il est applicable à des géométries simples ne comportant que des surfaces en dépouille.

I.6.3. Moulage sous vide

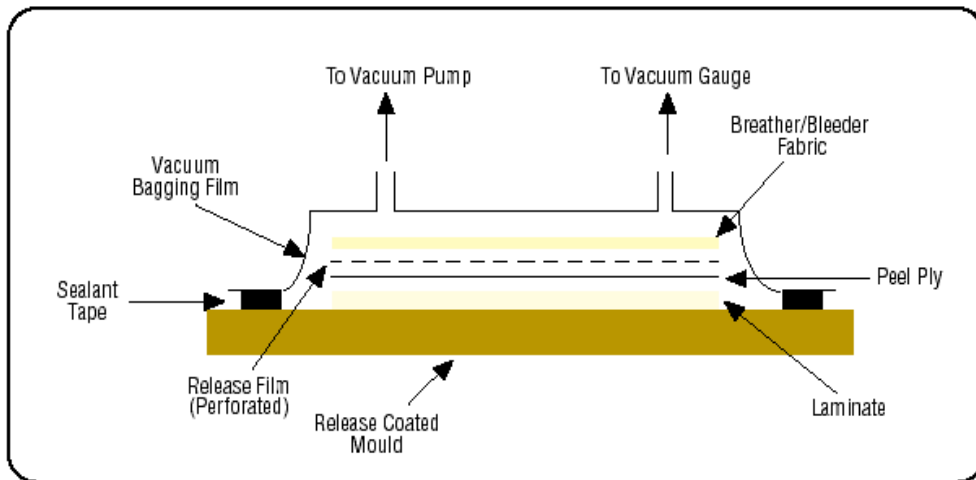


Figure I.16. Moulage sous vide

Ce procédé est encore appelé moulage en dépression ou moulage au sac. Il s'effectue entre moule et contre-moule rigide, semi-rigide ou souple suivant la technologie de mise en œuvre.

Le renfort (mat, tissu, préforme) est placé à l'intérieur du moule ; la résine catalysée est versée sur le renfort. On utilise la pression qui s'exerce sur le moule lors de la mise sous vide pour répartir la résine et imprégner le renfort.

La résine peut également être injectée par l'aspiration consécutive au vide.

I.6.4. Moulage par injection de mousse

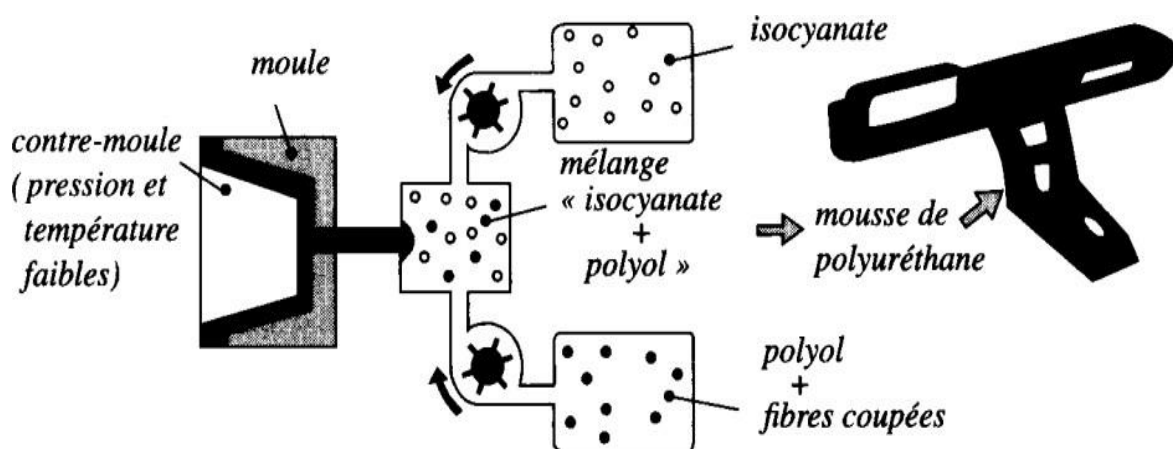


Figure I.17. Moulage par injection de mousse

Cette technique permet d'obtenir des pièces de mousse de polyéthane renforcées par des fibres de verre, relativement de grandes dimensions. Ces pièces restent stables dans le temps, présentent de bons états de surface et ont des résistances mécanique et thermiques satisfaisantes [21].

I.6.5. Pultrusion

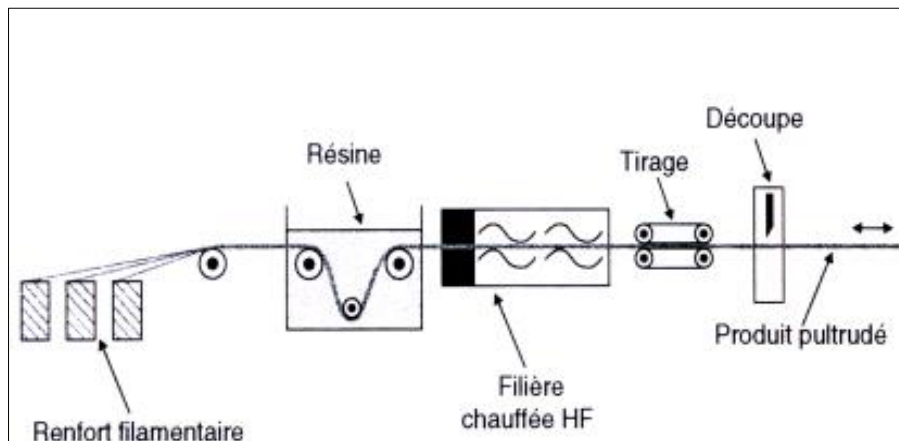


Figure I.18. Procédé de pultrusion

Est utilisée pour réaliser des matériaux composites à hautes performances industrielles. Les principales étapes sont : le tirage, la mise en forme et polymérisation de la matrice d'imprégnation. Les avantages sont : la production en continu, la possibilité de réaliser des pièces à section complexe, et d'avoir un taux de renfort élevé. Les limites sont la lenteur du procédé, et l'obtention, dans la très grande majorité des cas, de profilés droits à section constante.

I.6.6. Moulage par enroulement filamenteire

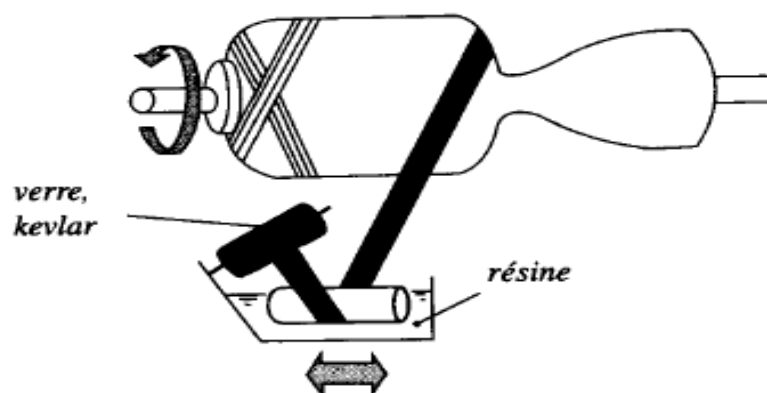


Figure I.19. Enroulement filamenteire

Suivant le schéma, il peut être intégré dans une chaîne de fabrication en continu, et ainsi autoriser l'obtention de tubes de grande longueur. Application aux enveloppes de fusées, de torpilles, de conteneurs,...etc.

Pour des pièces de révolution à méridienne quelconque, l'enroulement est réalisé sur un mandrin de forme démontable, puis polymérisé en étuve ou en autoclave. Ce procédé est utilisé pour la fabrication de pièces devant résister aux pressions internes, (réservoirs, corps de propulseur,...etc.).

I.7. Domaines d'application des composites

De nos jours, les matériaux composites ont pris une place importante dans divers domaines : aéronautique, transport, bâtiment, loisirs etc.

I.7.1. Les composites dans l'aéronautique

L'aéronautique utilise les composites « hautes performances » pour la fabrication de pièces de structure primaire des appareils en raison de leur légèreté et de leur souplesse de forme.

Les composites facilitent et réduisent la maintenance des appareils (par exemple les pales d'hélicoptère en métal doivent être remplacées toutes les 50 heures ; celles en composites, après plusieurs mois d'utilisation) grâce à :

- leur résistance à la corrosion ;
- leur résistance à la propagation des fissures ;
- leur excellente tenue à la fatigue.

I.7.2. Les composites dans l'automobile

Le secteur de l'automobile utilise pour 95% des composites à matrice polyesters et fibres de verre, mais devrait intégrer massivement les composites thermoplastiques.

Les composites les plus couramment utilisés dans le secteur automobile sont du type « grande diffusion » (GD) pour faciliter l'entretien, une grande liberté de conception

I.7.3. Les composites dans le ferroviaire

Le secteur ferroviaire utilise principalement des composites à matrice thermodurcissable et fibres longues pour faciliter la conception et le bon comportement au feu, mais il est peu dynamique.

Les composites les plus utilisés sont :

- à matrice thermodurcissable, essentiellement des polyesters ;
- renforcés en fibres de verre à fibres longues.

I.7.4. Les composites dans la construction civile

L'utilisation des composites renforcés de fibres de carbone pourra se développer dans le secteur de la construction civile lorsque leur prix deviendra inférieur à 30F/kg.

Les composites utilisés dans le bâtiment peuvent être :

- à matrice thermodurcissable (TD) (polyester, vinylester, phénolique, polyuréthane) ;
- à matrice thermoplastique (TP) ; ces derniers sont en nette progression ;
- les renforts sont en fibres de verre tissées ou non.

I.7.5. Les composites et la construction industrielle

Dans la construction industrielle, les fibres de carbone pourront être utilisées à la fois comme renfort et comme capteur, et seront associées à des résines polyesters ou époxy.

Les composites utilisés pour la fabrication des tuyauteries sont constitués par :

- une matrice polyester ou époxy ;
- des renforts en fibres de verre tissées ou fibres de carbone.

L'utilisation des matériaux composites peut contribuer à améliorer la sécurité de certains sites industriels sensibles et faciliter la conception des bâtiments.

I.7.6. Les composites dans la construction nautique

Dans la construction nautique de plaisance, les composites sont indispensables pour les embarcations de taille inférieure à 40 mètres.

L'allègement des structures est le principal apport des composites utilisées dans la construction nautique :

- des bateaux commerciaux de transport de fret et de passagers ;

- des dragueurs de mines ;
- des petites embarcations de tourisme et les bateaux de compétition.

Parmi les composites utilisés dans l'industrie nautique :

- les plus répandus sont à matrice polyester et fibres de verre ;
- les composites à matrice époxy et fibres de carbone ne sont utilisés que pour les bateaux de compétition ;
- les composites à matrice polyuréthane et fibres de verre et les composites à matrice Polypropylène et fibres courtes (Pultrex) pour les structures sandwich progressent notablement.

I.7.7. Les composites dans le secteur médical

Les applications des composites aux secteurs médical et de la sécurité sont très récentes et concernent très peu les solutions traditionnelles (résine polyester et fibres de verre), mais plutôt les composites :

- à matrice époxy et fibres de carbone, ou d'aramide ;
- à matrice thermoplastique (polyamide 12 ou autre) et fibres longues de verre, d'aramide ou de carbone.

L'utilisation des composites permet d'augmenter la fiabilité et la précision des instruments grâce à :

- une meilleure résistance aux chocs ;
- une grande rigidité pour les instruments chirurgicaux de précision (guides de perçage Auparavant en Inox, prothèses) ;
- une bonne résistance à la corrosion (prothèses, brancards).

I.7.8. Les composites dans les équipements de sports et loisirs

Les sports et loisirs utilisent des composites « hautes performances » avec un taux de renforts de plus de 70% :

- à matrice époxy et fibres de verre tissées avec un taux de renforts pouvant atteindre 70%, l'époxy assurant, en outre, une fonction adhésive entre les différents constituants ;
- à matrice polyamide 12 et fibres de carbone.

Les composites permettent d'augmenter sur mesure les performances et la fiabilité des articles de sports. Ils permettent d'accroître la longévité des articles de sport, sans réparation, pendant toute leur durée de vie (de 1 à 7 ans).

I.7.9. Les composites et la construction électrique

Le secteur de la construction électrique et électronique utilise massivement des composites

« Grande diffusion », essentiellement sous forme de semi-produits SMC comprimés :

- à matrice thermodurcissable (polyester) ;
- renforcés par des fibres de verre (courtes ou longues).

I.8. Avantages et inconvénients des composites

1.8.1. Avantages :

- Rapport résistance- poids très élevé ;
- Très grande rigidité ;
- Résistance à la fatigue acceptable ;
- Résistance à la corrosion ;
- Facilité de mise en place ;
- Possibilité d'optimisation (choix de renforcement, direction) ;
- Multifonctionnalité (résistance mécanique, résistance à l'eau et à la corrosion, etc.).

1.8.2. Inconvénients :

- Coût relativement élevé du produit de base jusqu'à 10 fois le coût de l'acier pour une masse identique ;
- Connaissances limitées sur leurs propriétés à long terme, notamment en ce qui concerne :
 - ✓ L'adhérence à l'interface béton ;
 - ✓ Composite -Manque de ductilité ;
 - ✓ Absence de normes de design.

I.9. Conclusion

Les matériaux composites sont très importants par rapport aux matériaux traditionnels car ils possèdent de nombreux avantages fonctionnels qui sont cités précédemment.

Ils permettent d'augmenter la durée de vie de certains équipements grâce à leurs propriétés. De plus ils ont pris une place importante dans divers domaines : l'aéronautique, le ferroviaire, dans les constructions industrielle et civile, loisirs ainsi que le secteur médical.

En conclusion, on peut dire que la conception d'un matériau composite dépend du choix de ces deux composants de base (matrice et fibres) qui varie en fonction des applications spécifiques qui lui sont envisagées, ce qui le diffère fortement des matériaux classiques. Toutefois il est très nécessaire de prendre en compte les propriétés interfaciales entre les composants.

Dans le deuxième chapitre nous allons voir les différentes hypothèses des théories des plaques.

CHAPITRE II :
INVESTIGATION SUR LES
DIFFÉRENTES THÉORIES
DES PLAQUES

II.1. Introduction

D'une manière générale, une plaque est un solide limité par deux plans parallèles dont la dimension transverse est petite en comparaison des deux autres dimensions. Il est alors possible de définir un plan moyen (référence) entre deux plans extrêmes qui est pris comme plan (oxy). L'axe OZ correspond à la direction de l'épaisseur.

Dans ce chapitre on va présenter investigation sur l'évolution des différentes hypothèses et théories qui régissent le comportement des structures et précisément les plaques au fil du temps à savoir : la Théorie Classique des Stratifiés (CLPT), la Théorie des Déformations en Cisaillement de Première Ordre (FSDPT), la Théorie des Déformations de Cisaillement d' Ordre élevé (HSDPT). ainsi que la Théorie de zig-zag.

II.2. Les hypothèses fondamentales de la théorie des poutres et des plaques

II.2.1. Principe de Saint venant

« L'état de contrainte et de déformation loin des extrémités dépend uniquement du torseur des efforts appliqués et non de la manière précise dont ces efforts sont appliqués ».

Ce principe précise que le comportement en un point quelconque de la poutre, pourvu que ce point soit suffisamment éloigné des zones d'applications des forces et des liaisons, est indépendant de la façon dont sont appliquées les forces et de la façon dont sont physiquement réalisées les liaisons; le comportement dépend alors uniquement du torseur des forces internes en ce point.

II.2.2. Principe de Navier Bernoulli généralisé

« Les sections droites restent planes et normales à la fibre moyenne ».

Ce principe précise que les sections droites le long de la fibre moyenne restent planes après déformation. Les déformations dues à l'effort tranchant montrent que les sections droites ne peuvent pas rester planes mais subissent un gauchissement. Pour tenir de ce fait l'énoncé de ce principe peut prendre la forme suivante : deux sections droites infiniment voisines deviennent après déformation deux sections gauches superposables par déplacement. Comme ce déplacement est petit, on peut considérer que les allongements ou raccourcissements de tout tronçon de fibre sont des fonctions linéaires des coordonnées de la fibre dans le plan de la section.

II.3. La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (Classical Laminated Plate Theory CLPT)

La théorie classique de plaque est la plus simple et la plus ancienne parmi les autres théories. Elle est initiée par Kirchhoff [22] en 1850, puis elle a été poursuivie par Love [23] au début du XX^{ème} siècle, voir [[24], [25]- [26] [27] [28] [29] [30] [31] [32] [33]]. Cette théorie est applicable uniquement pour les plaques/coques, minces. Cependant, elle a donné des résultats erronés quand elle a été utilisée dans l'analyse des plaques épaisses. L'hypothèse principale de la théorie CLPT est que les lignes normales au plan médian avant déformation restent droites et perpendiculaires à la surface moyenne après déformation (Figure II.1).

Dans la théorie CLPT les effets de déformations des cisaillements transversaux (γ_{xz}), (γ_{yz}) et la déformation normale transversale (ε_{zz}), ne sont pas considérés. Les hypothèses supplémentaires sont :

1. les plis sont parfaitement liés les uns aux autres ;
2. les déplacements selon les plis sont continus ;
3. le matériau de chaque pli présente un comportement élastique ;
4. le stratifié est considéré comme mince ;
5. les déformations, les déplacements et les rotations sont petits.

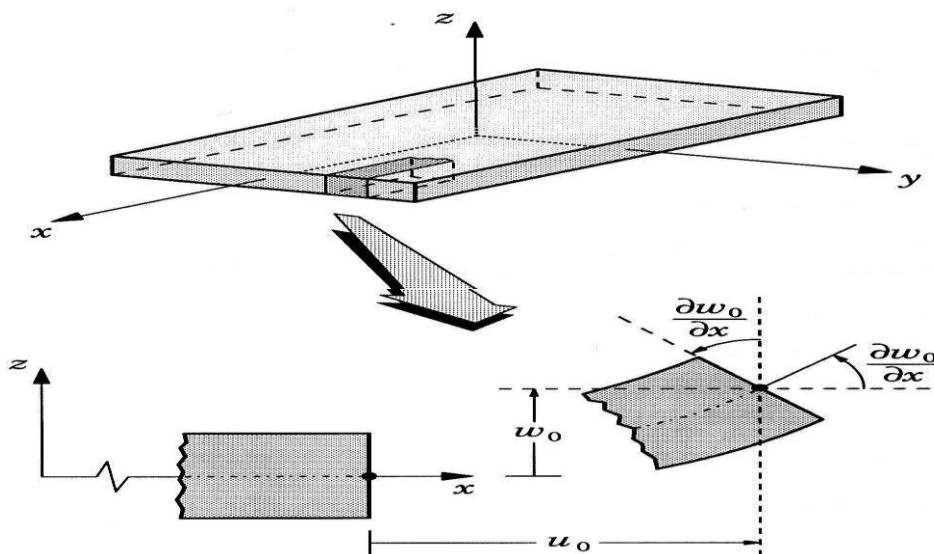


Figure II.1. Cinématique de Kirchhoff-Love [34]

La cinématique de cette théorie peut s'écrire d'une manière linéaire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ w(x, y, z) = w_0(x, y) \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

Avec :

u_0 et v_0 : Les déplacements de membrane dans les directions x et y respectivement,

w_0 : La flèche de la plaque

$\frac{\partial w_0}{\partial x}$ et $\frac{\partial w_0}{\partial y}$ Les rotations dues à la flexion (sans cisaillement).

Le plan principal de la plaque est le plan (o, x, y) et l'épaisseur est orientée selon l'axe

$$z \in \left[-\frac{h}{2}; \frac{h}{2} \right]$$

Puisque ce modèle ne tient pas en compte l'effet de cisaillement transverse, il donne des résultats imprécis pour les plaques épaisses.

II.4. La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (First Order Shear Deformation Plate Theory FSDPT)

La théorie du premier ordre (FSDPT) peut être considérée comme une amélioration par rapport à la théorie classique (CLPT). Cette théorie est basée essentiellement sur l'hypothèse de Reissner-Mindlin suivante : les lignes normales au plan médian avant déformation restent droites mais pas forcément perpendiculaires à la surface moyenne après déformation (à cause de l'effet du cisaillement transverse), (Figure II.2). Ils ont également supposé que la contrainte normale (σ_z) est négligeable par rapport aux autres composantes du tenseur de contraintes (l'hypothèse de déformation plane). Le champ de déplacement de la théorie du premier ordre s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x, y) - z\phi_x(x, y) \\ v(x, y, z) = v_0(x, y) - z\phi_y(x, y) \\ w(x, y, z) = w_0(x, y) \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

ϕ_x et ϕ_y sont les rotations de la normale autour des axes (x, y) , respectivement

A partir de l'équation (II.2), nous remarquons que les composantes de déplacements plans (u, v) varient d'une manière linéaire suivant l'axe z , tandis que la composante de déplacement transversal w est constante. Cela va conduire à un état de contrainte/déformation de cisaillement transverse constant sur toute l'épaisseur de la plaque (Figure II.3), alors que, selon la théorie de l'élasticité tridimensionnelle (3D), les contraintes de cisaillement transverse sont plutôt quadratiques à travers l'épaisseur [35]. Cette déficience est corrigée par l'introduction de ce qu'on appelle les facteurs de correction de cisaillement transverse [36], [37] [38] [39] [40] [41] [42].

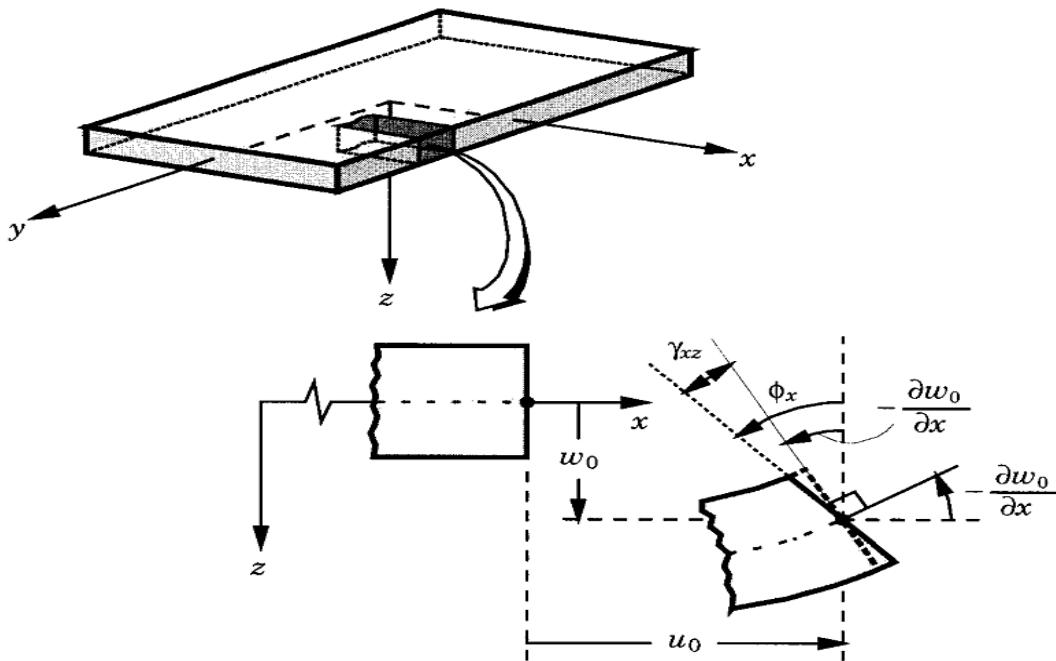


Figure II.2. Géométries déformées et non déformées d'un bord d'une plaque sous l'hypothèse de Reissner-Mindlin [43]

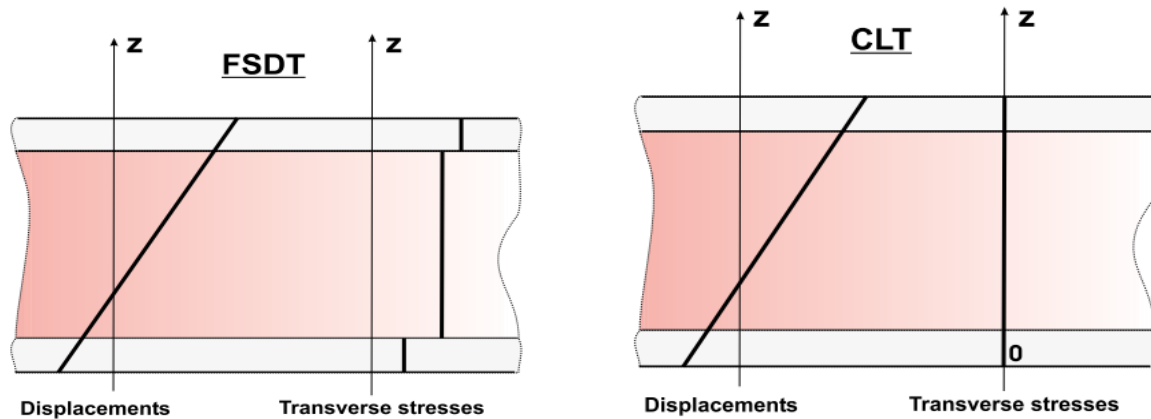


Figure II.3. Variation du déplacement et des contraintes transversales à travers l'épaisseur pour les deux théories : théorie classique (à droite) et la théorie du premier ordre (à gauche) [44]

II.5. La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (Higher Order Shear Deformation Plate Theory HSDPT)

Pour franchir les limites des théories du premier ordre et pour estimer correctement la distribution non linéaire des déformations de cisaillement transversales le long de l'épaisseur de la plaque, un certain nombre de théories d'ordre supérieur de déformation de cisaillement de la plaque ont été développées. Les modèles sont basés sur une distribution non linéaire des champs de déplacement dans l'épaisseur. Ces modèles permettent de représenter le gauchissement de la section dans la configuration déformée. Comme les théories HSDPT se sont avérées être tout à fait applicable à des plaques composites stratifiés.

Les théories développées de la plaque de Murthy [45] qui emploient des polynômes du troisième ordre pour étendre le déplacement dans un plan à travers l'épaisseur de la plaque, qui à son tour exclut la nécessité de facteurs de correction de cisaillement. Cependant, dans les théories de la plaque de Murthy [45] il a utilisé les équations d'équilibres de la théorie classique de la plaque, qui est variationnellement incompatible avec la cinématique des déplacements.

Afin de remédier à ce défaut, Reddy [46] a présenté sa théorie de la plaque en 1984, qui développe des équations d'équilibre variationnellement cohérentes pour les plaques. Plupart des modèles d'ordre supérieur utilisent un développement en série de Taylor

En principe, ces modèles d'ordre supérieur sont plus précis que les modèles du premier ordre. La précision est augmentée avec l'ordre du développement, c'est à dire avec le nombre de paramètres supplémentaires. Cette technique est peu adoptée par les chercheurs à cause de son coût élevé en termes de calcul. Dans ce contexte, plusieurs simplifications ont été proposées afin de réduire le nombre de

paramètres de déplacement. Une de ces simplifications consiste à raccourcir les derniers termes de la série de Taylor en introduisant une "fonction de cisaillement". La forme du déplacement proposée à travers l'épaisseur est alors la suivante :

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z)\phi_x \\ v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z)\phi_y \\ w(x, y, z) = w_0(x, y) \end{cases} \quad (\text{II.3})$$

$f(z)$ Peut être considérée comme la fonction de cisaillement qui permet de déterminer la distribution des déformations et des contraintes de cisaillement transversal à travers l'épaisseur. Selon cette fonction $f(z)$, nous pouvons distinguer quelques modèles d'ordre supérieurs importants dans la littérature qui sont décrites comme suit :

La théorie de la plaque d'ordre supérieur de J. N. Reddy [46] est considérée comme la théorie la plus populaire utilisée pour l'analyse de plaques composites stratifiées.

Selon Liu [47], un autre HSDPT a été développé par Ambartsumian [48] dans lequel il propose une autre fonction de contrainte de cisaillement transversale afin d'expliquer la déformation des couches de plaques anisotropes. Les théories de Reddy et Ambartsumian forment une référence solide pour le développement d'un nouveau HSDPT simple. En 2007, Shi [49] a présenté une nouvelle HSDPT qui est développée sur la base des théories de Murthy [45] et de Reddy.

En 2007 Guangyu Shi [49] a présenté une nouvelle théorie de la déformation de cisaillement des plaques, semblable à Reddy dans le sens où elles ont toutes les deux proposé une variation parabolique de la déformation de cisaillement transversal. Les deux théories de Reddy [46] et Shi [49] sont des théories de troisième ordre, ce qui signifie que le champ de déplacement est supposé être décrit par une fonction de troisième ordre.

Les théories de Touratier [50] (Distribution de déformation transversale en fonction sinus). Soldatos [51](théorie des déformations de cisaillement hyperbolique). Mechab [52] (théorie de déformation de cisaillement hyperbolique). Karama [53] (Variation exponentielle pour la déformation transversale).

Aydogdu [54] a présenté en 2006 une étude dans laquelle il a comparé diverses théories HSDPT avec l'analyse en trois dimensions disponibles. Il a montré que, bien que le déplacement transversal et les contraintes soient mieux prédits par la théorie de la déformation de cisaillement exponentielle [53], les

théories de déformation de cisaillement parabolique (Reddy) et la déformation de cisaillement hyperbolique (Soldatos) [51] donnent des prévisions plus précises pour les fréquences naturelles et les charges de flambement.

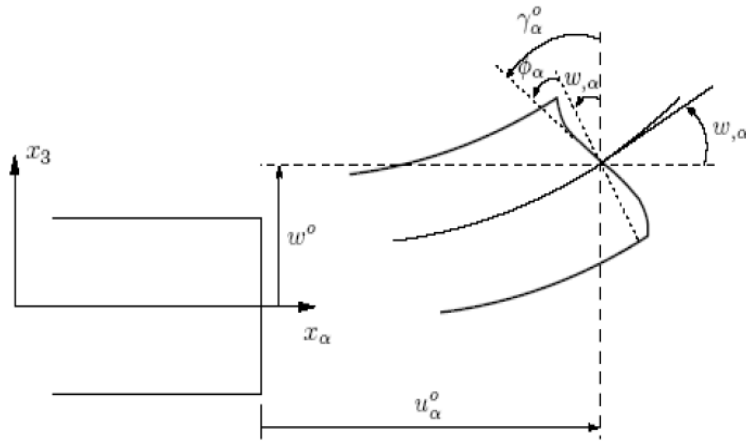


Figure II.4. Cinématique de la théorie d'ordre supérieur.

La figure II.5 montre une illustration de la façon dont la CLPT, FSDPT et HSDPT diffèrent les uns des autres en termes de déplacements dans le plan

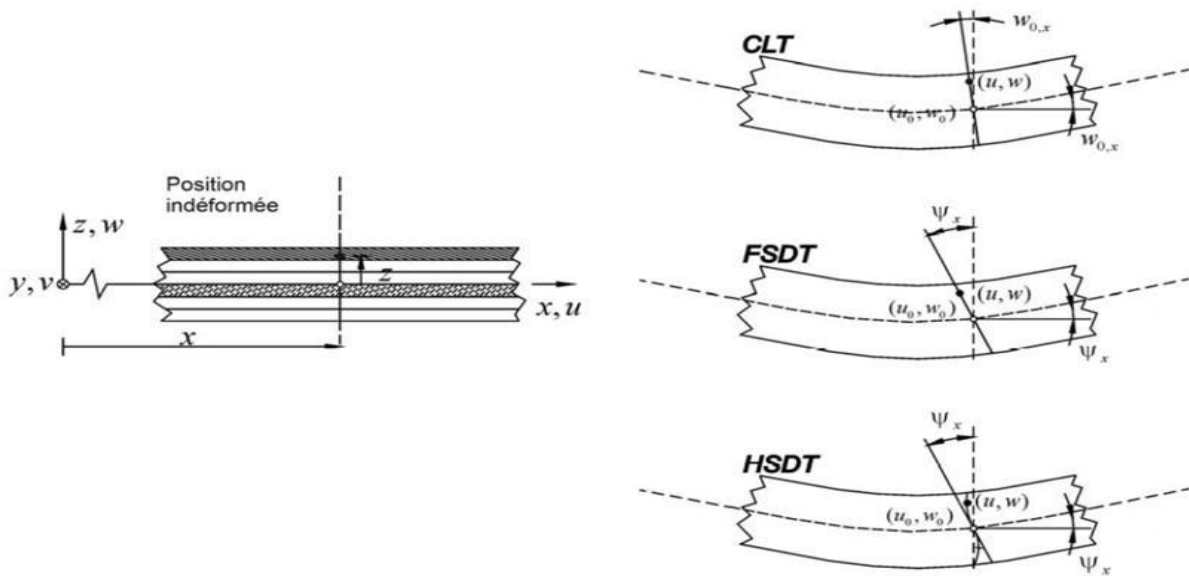


Figure II.5. Géométries non déformées et déformées d'une plaque selon les trois théories CLPT, FSDPT et HSDPT

On représente ci-dessous quelques contributions importantes de développement de modèles d'ordre supérieur qui diffèrent par la fonction de cisaillement $f(z)$:

Ambarsumyan	$f(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right)$
Murthy et Reddy	$f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$
Touratier	$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)$
Ferreira	$f(z) = \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)$
Reissner	$f(z) = \frac{5}{4} z \left(1 - 4 \frac{z^2}{3h^2} \right)$
Karama	$f(z) = z e^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}$
Aydogdu	$f(z) = z a^{\frac{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}{\ln(a)}} \quad \text{avec } a > 0$
Soldatos	$f(z) = h \sinh\left(\frac{z}{h}\right) - z \cosh\left(\frac{1}{2}\right)$

II.6. Théorie de zig-zag

Pour mieux décrire la déformation en cisaillement des matériaux composites, certains auteurs ont associé la théorie d'ordre élevé à celle dite de zig-zag [[55] et [56], Cette dernière est destinée justement à mieux décrire les effets d'interface. Ainsi, différents modèles issus de l'approche par couche ont été proposés. Le multicouche est subdivisé en sous-structures (correspondant en fait à chaque couche ou chaque ensemble de couches). On applique à chaque sous-structure une théorie du premier ordre ou un modèle d'ordre élevé. La cinématique des modèles zig-zag satisfait a priori les conditions de contact et elle est indépendante du nombre de couches. L'avantage principal du champ de déplacement des modèles zig-zag réside dans la bonne modélisation de la distorsion de la normale à la surface déformée, ainsi que dans la vérification des conditions de continuité, et ce sans augmenter pour autant le nombre et l'ordre des équations fondamentales de la théorie du premier ordre. Le recours à des coefficients de correction pour cisaillement transverse est évité. En se basant sur le concept de Di Sciuva [57], plusieurs auteurs ont réalisé des améliorations significatives pour le modèle zig-zag [[58] [59] [60] [61]]. L'amélioration principale est l'introduction d'une distribution non linéaire des déplacements. On superpose le champ zig-zag (linéaire par morceau) à un champ de déplacement d'ordre élevé (souvent cubique) figure II.6.

Les conditions de compatibilité sont satisfaites sur les surfaces supérieures et inférieures des plaques pour réduire le nombre de paramètres [62].

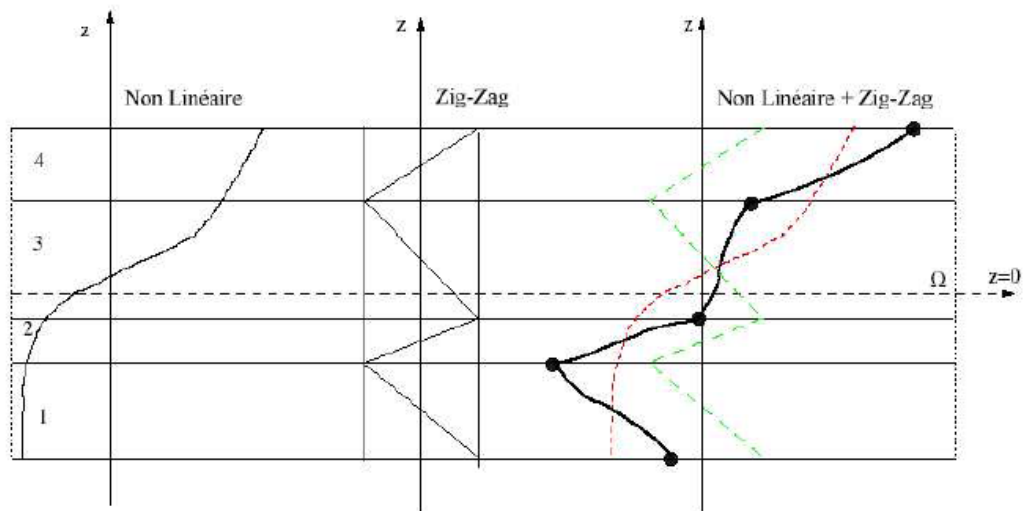


Figure II.6. Champ de déplacements du modèle zig-zag d'ordre élevé

A travers notre lecture de la littérature en matière de théories d'ordre élevé, il apparaît que celles-ci sont certes intéressantes du point de vue précision, mais demeurent néanmoins coûteuses en temps de calcul et assez complexes en termes de formulations.

II.7. Conclusion

Nous concluons qu'il existe plusieurs théories employées pour la formulation analytique ou numérique de structures composites. Parmi elles, on trouve CLPT, FSDPT, HSDPT, et la Théorie de zig-zag. Celles-ci sont employées pour la modélisation de différentes structures composites. Le choix de l'une ou l'autre des théories est dicté, essentiellement, par le type de géométrie de la structure analysée (structures minces ou épaisses).

Le chapitre suivant présente une analyse de la vibration libre des plaques stratifiées en matériaux composites on utilisant une nouvelle théorie raffinée de déformation de cisaillement d'ordre élevé.

CHAPITRE III :
ANALYSE DE LA
VIBRATION LIBRE DES
PLAQUES STRATIFIÉES
EN MATÉRIAUX
COMPOSITES

III.1. Introduction

Dans cette étude, une nouvelle théorie raffinée est présentée pour l'analyse de la stabilité à la vibration libre des plaques stratifiées en matériaux composites en utilisant une fonction raffinée de cisaillement de quatre variables.

Dans ce chapitre on présente les différentes hypothèses de la présente théorie, la formulation mathématique qui nous aide à résoudre le problème posé : champs de déplacement, les déformations, les équations constitutives et les équations de mouvement, ces derniers sont obtenus en utilisant le principe d'Hamilton, d'où, les fréquences naturelles sont obtenues par la solution de Navier

III.2. La théorie d'ordre élevé à quatre variables

Contrairement aux autres théories, le nombre de fonctions inconnues dans la présente théorie est seulement quatre, contre cinq en cas d'autres théories de déformation de cisaillement [46] et [63]. La présente théorie, prend en considération l'effet du cisaillement transversal sans nécessiter des facteurs de correction de cisaillement, et les contraintes de cisaillement transversales varient de manière parabolique à travers l'épaisseur et satisfaisant la nullité de ces contraintes aux bords supérieure et inférieure de la plaque.

III.3. Les hypothèses de la présente théorie

Considérons une plaque rectangulaire en matériau composite de longueur « a », de largeur « b » et d'épaisseur total « h » figure III.1.

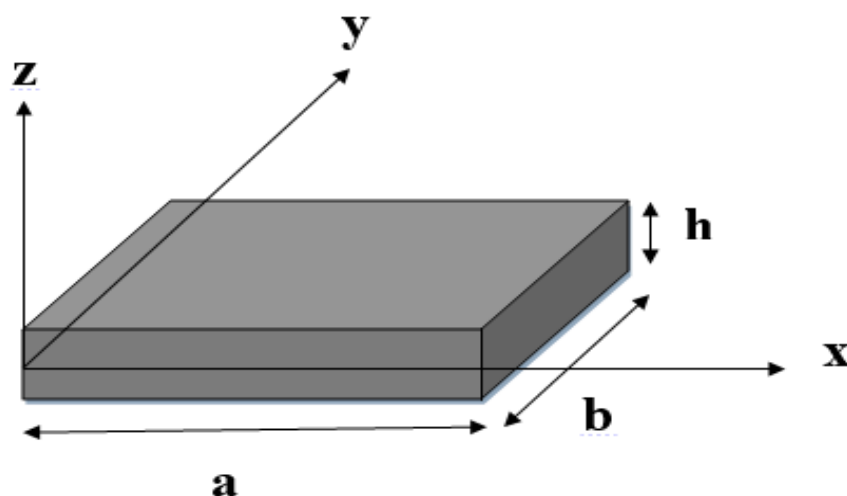


Figure III.1. Géométrie d'une plaque rectangulaire en matériau composite

Les hypothèses de la présente théorie raffinée de la plaque sont les suivantes :

- Le déplacement transversal w comprend une composante de flexion w_b et une composante de cisaillement w_s . Ces composants sont en fonction des coordonnées x, y .

$$w(x, y, z, t) = w_b(x, y, t) + w_s(x, y, t) \quad (\text{III.1})$$

- La contrainte transversale normale σ_z est négligeable en comparaison avec les contraintes dans le plan σ_x et σ_y ;
- Les déplacements « u » dans la direction « x » et « v » dans la direction « y » sont constitués des composants d'extension, de flexion, et de cisaillement ;

$$u = u_0 + u_b + u_s \quad (\text{III.2a})$$

$$v = v_0 + v_b + v_s \quad (\text{III.2b})$$

- Les composants de cisaillement u_s et v_s donne lieu, en collaboration avec w_s , aux variations paraboliques de déformations de cisaillement γ_{xz} , γ_{yz} et donc à des contraintes de cisaillement τ_{xz} , τ_{yz} à travers l'épaisseur de la plaque d'une manière telle que les contraintes de cisaillement τ_{xz} , τ_{yz} sont nulles au niveau des faces supérieures et inférieures de la plaque ; Par conséquent, l'expression pour u_s et v_s ne peut être donnée par :

$$u_s = -f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (\text{III.3a})$$

$$v_s = -f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (\text{III.3b})$$

- Les composantes de flexion sont supposées être similaires aux déplacements donnés par la théorie classique des plaques CLPT. Par conséquent, l'expression peut être donnée comme suit :

$$u_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial x} \quad (\text{III.4a})$$

$$v_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial y} \quad (\text{III.4b})$$

III.4. Champs de déplacement et les déformations

Basant sur la théorie d'ordre élevée, le champ du déplacement est obtenu comme suit [64]

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ w(x, y, z, t) &= w_b(x, y, t) + w_s(x, y, t) \end{aligned} \quad (\text{III.5})$$

La fonction du cisaillement proposée est donnée comme suit :

$$f(z) = z - \left(h \sinh\left(\frac{z}{h}\right) - z \cosh\left(\frac{1}{2}\right) \right) \quad (\text{III.6})$$

Les déformations sont calculées en dérivant l'équation (III.5) :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_x^0 + z k_x^b + f k_x^s \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_y^0 + z k_y^b + f k_y^s \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}^0 + z k_{xy}^b + f k_{xy}^s \\ \gamma_{yz} &= g \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz} &= g \gamma_{xz}^s \\ \varepsilon_z &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III.7a})$$

Où :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x}, k_x^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}, k_x^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y^0 &= \frac{\partial v_0}{\partial y}, k_y^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2}, k_y^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}, k_{xy}^b = -2 \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y}, k_{xy}^s = -2 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \\ \gamma_{yz}^s &= \frac{\partial w_s}{\partial y}, \gamma_{xz}^s = \frac{\partial w_s}{\partial x}, g = 1 - f'(z) \text{ et } f'(z) = \frac{df(z)}{dz} \end{aligned} \quad (\text{III.7b})$$

III.5. Equations constitutives

Sous l'hypothèse que chaque couche possède un plan de symétrie élastique parallèle au plan (x, y) les équations constitutives pour une couche peuvent être écrites comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.8a})$$

Où Q_{ij} sont les rigidités de la couche considérée :

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, Q_{66} = G_{12}, Q_{44} = G_{23}, Q_{55} = G_{13} \quad (\text{III.8b})$$

Etant donné que le stratifié est composé de plusieurs couches orthotropes orientés de manière arbitraire par rapport aux coordonnées principales du stratifié, les équations constitutives de chaque couche doivent être transformées en coordonnées du stratifié (x, y) . Les relations contrainte déformation dans les coordonnées du stratifié de la $k^{\text{ème}}$ couche sont donnés par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (\text{III.9})$$

Les rigidités \bar{Q}_{ij} sont données par :

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \cos \theta \sin^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta \\ \bar{Q}_{66} &= [(Q_{11} + Q_{22} - 2(Q_{12} + Q_{66})) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + Q_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta)] \\ \bar{Q}_{44} &= Q_{44} \cos^2 \theta + Q_{55} \sin^2 \theta \\ \bar{Q}_{45} &= (Q_{55} - Q_{44}) \cos \theta \sin \theta \\ \bar{Q}_{55} &= Q_{55} \cos^2 \theta + Q_{44} \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (\text{III.10})$$

III.6. Equations gouvernantes

Les équations de mouvement sont obtenus en utilisant le principe d'Hamilton qui est donné par : [65]

$$\int_0^t \delta(U - T)dt = 0 \quad (\text{III.11})$$

L'énergie de déformation de la plaque est donnée par

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz}) dV \quad (\text{III.12})$$

Substituant les équations (III.7) et (III.9) dans l'équation (III.12) et intégrant suivant l'épaisseur de la plaque, l'énergie de déformation de la plaque devient :

$$U = \frac{1}{2} \int_A (N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_y^b \delta k_y^b + M_{xy}^b \delta k_{xy}^b + M_x^s \delta k_x^s + M_y^s \delta k_y^s + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + S_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^s + S_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^s) dx dy = 0 \quad (\text{III.13})$$

D'où les efforts normaux N et les moments résultants M^b , M^s et S^s sont définis par :

$$\begin{aligned} (N_x, N_y, N_{xy}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) dz = \sum_{k=1}^{n_p} \int_{Z_k}^{Z_{k+1}} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) dz \\ (M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) z dz = \sum_{k=1}^{n_p} \int_{Z_k}^{Z_{k+1}} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) z dz \\ (M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) f(z) dz = \sum_{k=1}^{n_p} \int_{Z_k}^{Z_{k+1}} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) f(z) dz \\ (S_{xz}^s, S_{yz}^s) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) g(z) dz = \sum_{k=1}^{n_p} \int_{Z_k}^{Z_{k+1}} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) g(z) dz \end{aligned} \quad (\text{III.14})$$

Substituant l'équation(III.9) dans l'équation(III.14) et en intégrant suivant l'épaisseur de la plaque, les forces et les moments résultants sont donnés comme :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ B & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} S_{yz}^s \\ S_{xz}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44}^s & A_{45}^s \\ A_{45}^s & A_{55}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} \quad (\text{III.15})$$

Où

$$N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^t, M^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}^t, M^s = \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\}^t \quad (\text{III.16a})$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0\}^t, k^b = \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\}^t, k^s = \{k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s\}^t \quad (\text{III.16b})$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{III.16c})$$

$$B^s = \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & B_{16}^s \\ B_{12}^s & B_{22}^s & B_{26}^s \\ B_{16}^s & B_{26}^s & B_{66}^s \end{bmatrix}, D^s = \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & D_{16}^s \\ D_{12}^s & D_{22}^s & D_{26}^s \\ D_{16}^s & D_{26}^s & D_{66}^s \end{bmatrix}, H^s = \begin{bmatrix} H_{11}^s & H_{12}^s & H_{16}^s \\ H_{12}^s & H_{22}^s & H_{26}^s \\ H_{16}^s & H_{26}^s & H_{66}^s \end{bmatrix} \quad (\text{III.16d})$$

Où Les composantes de rigidité A_{ij} , B_{ij} , ...,etc, sont définis par :

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, B_{ij}^s, D_{ij}^s, H_{ij}^s) = \sum_{k=1}^{n_p} \int_{Z_k}^{Z_{k+1}} \bar{Q}_{ij} (1, z, z^2, f(z), zf(z), f^2(z)) dz \quad (i, j) = (1, 2, 6) \quad (\text{III.17a})$$

$$A_{ij}^s = \sum_{k=1}^{n_p} \int_{Z_k}^{Z_{k+1}} \bar{Q}_{ij} [g(z)]^2 dz \quad (i, j) = (4, 5) \quad (\text{III.17b})$$

L'énergie cinétique de la plaque est donnée par :

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_0^t \int_V \rho (\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w}) dV dt = \frac{1}{2} \int_V \rho (\ddot{u} \delta u + \ddot{v} \delta v + \ddot{w} \delta w) dV \\ T &= \frac{1}{2} \int_A \left\{ \delta u_0 (I_1 \ddot{u}_0 - I_2 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial x} - I_4 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial x}) + \delta v_0 (I_1 \ddot{v}_0 - I_2 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial y} - I_4 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial y}) \right. \\ &+ \delta w_b \left[I_1 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_2 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_3 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial y^2} \right) - I_5 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial y^2} \right) \right] \\ &\left. + \delta w_s \left[I_1 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_4 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_5 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial y^2} \right) - I_6 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial y^2} \right) \right] \right\} dx dy \quad (\text{III.18}) \end{aligned}$$

Où ρ est la masse volumique de la plaque et I_i sont les inerties définis par :

$$(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6) = \sum_{k=1}^{n_p} \int_{Z_k}^{Z_{k+1}} \rho (1, z, z^2, f(z), zf(z), [f(z)]^2) dz \quad (\text{III.19})$$

Substituant les équations (III.13) et (III.18) dans l'équation (III.11) et intégrant par partie, mettant les coefficients ($\delta u_0, \delta v_0, \delta w_b$ et δw_s) nuls séparément on obtient les équations d'équilibres suivants :

$$\delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_1 \ddot{u}_0 - I_2 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial x} - I_4 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial x} \quad (\text{III.20a})$$

$$\delta v_0 : \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = I_1 \ddot{v}_0 - I_2 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial y} - I_4 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial y} \quad (\text{III.20b})$$

$$\begin{aligned} \delta w_b : \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} &= I_1 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) \\ &+ I_2 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_3 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial y^2} \right) - I_5 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{III.20c})$$

$$\begin{aligned} \delta w_s : \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} &= I_1 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) \\ &+ I_4 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_5 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial y^2} \right) - I_6 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{III.20d})$$

Les équations (III.20) peuvent être exprimées en termes de déplacements ($\delta u_0, \delta v_0, \delta w_b$ et δw_s) en substituant l'équation (III.15) dans (III.20) :

$$\begin{aligned} &A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{16} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \\ &- B_{11} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} - 3B_{16} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^2 \partial y} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial y^2} - B_{26} \frac{\partial^3 w_b}{\partial y^3} \\ &- B_{11}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3} - 3B_{16}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^2 \partial y} - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x \partial y^2} - B_{26}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial y^3} \\ &= I_1 \ddot{u}_0 - I_2 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial x} - I_4 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial x} \end{aligned} \quad (\text{III.21a})$$

$$\begin{aligned} &A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + 2A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \\ &- B_{16} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^2 \partial y} - 3B_{26} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial y^2} - B_{22} \frac{\partial^3 w_b}{\partial y^3} \\ &- B_{16}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3} - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^2 \partial y} - 3B_{26}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial x \partial y^2} - B_{22}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial y^3} = I_1 \ddot{v}_0 - I_2 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial y} - I_4 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial y} \end{aligned} \quad (\text{III.21b})$$

$$\begin{aligned}
& B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + 3B_{16} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2 \partial y} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + B_{26} \frac{\partial^3 u_0}{\partial y^3} \\
& + B_{16} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + 3B_{26} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x \partial y^2} + B_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} \\
& - D_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - 4D_{16} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^3 \partial y} - 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - 4D_{26} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x \partial y^3} - D_{22} \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} \\
& - D_{11}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - 4D_{16}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^3 \partial y} - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} - 4D_{26}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x \partial y^3} - D_{22}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} \\
& = I_1(\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_2 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_3 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial y^2} \right) - I_5 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial y^2} \right)
\end{aligned} \tag{III.21c}$$

$$\begin{aligned}
& B_{11}^s \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + 3B_{16}^s \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2 \partial y} + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + B_{26}^s \frac{\partial^3 u_0}{\partial y^3} \\
& + B_{16}^s \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^3} + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + 3B_{26}^s \frac{\partial^3 v_0}{\partial x \partial y^2} + B_{22}^s \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} \\
& - D_{11}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - 4D_{16}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^3 \partial y} - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - 4D_{26}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial x \partial y^3} - D_{22}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} \\
& - H_{11}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - 4H_{16}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^3 \partial y} - 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} - 4H_{26}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x \partial y^3} - H_{22}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} \\
& + A_{55}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + A_{44}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} + 2A_{45}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \\
& = I_1(\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_4 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_5 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial y^2} \right) - I_6 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial y^2} \right)
\end{aligned} \tag{III.21d}$$

III.7. Solution de Navier des plaques composites stratifiées simplement appuyées

III.7.1. Cas des composites stratifiées à plis croisés (0°/90°) (cross-ply)

Les solutions de Navier peuvent être développés pour les stratifiés rectangulaires avec deux ensembles de conditions aux limites simplement appuyés, pour les stratifiées antisymétriques à plis croisés (cross-ply). Les rigidités de la plaque suivantes sont nulles.

$$\begin{aligned}
A_{16} &= A_{26} = D_{16} = D_{26} = D_{16}^s = D_{26}^s = H_{16}^s = H_{26}^s = 0 \\
B_{12} &= B_{26} = B_{16} = B_{66} = B_{12}^s = B_{16}^s = B_{26}^s = B_{66}^s = A_{45}^s = 0 \\
B_{22} &= -B_{11}, B_{22}^s = -B_{11}^s
\end{aligned} \tag{III.22}$$

Où les conditions aux limites peuvent être écrites comme suit :

$$\begin{aligned}
v(0, y) &= w_b(0, y) = w_s(0, y) = \frac{\partial w_b}{\partial y}(0, y) = \frac{\partial w_s}{\partial y}(0, y) = 0 \\
v(a, y) &= w_b(a, y) = w_s(a, y) = \frac{\partial w_b}{\partial y}(a, y) = \frac{\partial w_s}{\partial y}(a, y) = 0 \\
N_x(0, y) &= M_x^b(0, y) = M_x^s(0, y) = N_x(a, y) = M_x^b(a, y) = M_x^s(a, y) = 0 \\
u(x, 0) &= w_b(x, 0) = w_s(x, 0) = \frac{\partial w_b}{\partial x}(x, 0) = \frac{\partial w_s}{\partial x}(x, 0) = \\
u(x, b) &= w_b(x, b) = w_s(x, b) = \frac{\partial w_b}{\partial x}(x, b) = \frac{\partial w_s}{\partial x}(x, b) = 0 \\
N_y(x, 0) &= M_y^b(x, 0) = M_y^s(x, 0) = N_y(x, b) = M_y^b(x, b) = M_y^s(x, b) = 0
\end{aligned} \tag{III.23}$$

Les conditions aux limites en équation (III.23) sont satisfaites par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
u_0(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} \cos(\lambda x) \sin(\mu y) e^{i\omega t} \\
v_0(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} \sin(\lambda x) \cos(\mu y) e^{i\omega t} \\
w_b(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{bmn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) e^{i\omega t} \\
w_s(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{smn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) e^{i\omega t}
\end{aligned} \tag{III.24}$$

U_{mn} , V_{mn} , W_{bmn} et W_{smn} sont des paramètres arbitraires à déterminer

ω est la fréquence propre associée au (n, m) $n^{\text{ème}}$ mode de vibration

$$\alpha = \frac{m\pi}{a} \text{ et } \beta = \frac{n\pi}{b}$$

Remplaçant les équations (III.22 et III.24) dans l'équation (III.21), la solution de Navier des stratifiées antisymétriques croisés peut être déterminée à partir de l'équation suivante :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} m_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} & m_{34} \\ 0 & 0 & m_{34} & m_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{bmn} \\ W_{smn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{III.25})$$

Où

$$a_{11} = A_{11}\lambda^2 + A_{66}\mu^2, a_{12} = \lambda\mu(A_{12} + A_{66}), a_{13} = -B_{11}\lambda^3 \quad (\text{III.26a})$$

$$a_{14} = -B_{11}^s\lambda^3, a_{22} = A_{66}\lambda^2 + A_{22}\mu^2, a_{23} = B_{11}\mu^3, a_{24} = B_{11}^s\mu^3 \quad (\text{III.26b})$$

$$a_{33} = D_{11}\lambda^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\lambda^2\mu^2 + D_{22}\mu^4 \quad (\text{III.26c})$$

$$a_{34} = D_{11}^s\lambda^4 + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)\lambda^2\mu^2 + D_{22}^s\mu^4 \quad (\text{III.26d})$$

$$a_{44} = H_{11}^s\lambda^4 + 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s)\lambda^2\mu^2 + H_{22}^s\mu^4 + A_{55}^s\lambda^2 + A_{44}^s\mu^2 \quad (\text{III.26e})$$

$$m_{11} = m_{22} = I_1, m_{33} = I_1 + I_3(\lambda^2 + \mu^2) \quad (\text{III.26f})$$

$$m_{34} = I_1 + I_5(\lambda^2 + \mu^2), m_{44} = I_1 + I_6(\lambda^2 + \mu^2) \quad (\text{III.26g})$$

III.7.2. Cas des composites stratifiées à plis alternés et équilibrés ($\theta^\circ/-\theta^\circ$) (angle-ply)

Pour les stratifiées antisymétriques alternés et équilibrés (angle-ply), les rigidités suivantes de la plaque sont nulles :

$$\begin{aligned} A_{16} = A_{26} = D_{16} = D_{26} = D_{16}^s = D_{26}^s = H_{16}^s = H_{26}^s = 0 \\ B_{11} = B_{12} = B_{22} = B_{66} = B_{11}^s = B_{12}^s = B_{22}^s = B_{66}^s = A_{45}^s = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.27})$$

Les conditions aux limites suivantes pour les stratifiées antisymétriques alternés et équilibrés peuvent être écrites comme :

$$\begin{aligned} u(0, y) = w_b(0, y) = w_s(0, y) = \frac{\partial w_b}{\partial y}(0, y) = \frac{\partial w_s}{\partial y}(0, y) = 0 \\ u(a, y) = w_b(a, y) = w_s(a, y) = \frac{\partial w_b}{\partial y}(a, y) = \frac{\partial w_s}{\partial y}(a, y) = 0 \\ N_{xy}(0, y) = M_x^b(0, y) = M_x^s(0, y) = N_{xy}(a, y) = M_x^b(a, y) = M_x^s(a, y) = 0 \\ v(x, 0) = w_b(x, 0) = w_s(x, 0) = \frac{\partial w_b}{\partial x}(x, 0) = \frac{\partial w_s}{\partial x}(x, 0) = 0 \\ v(x, b) = w_b(x, b) = w_s(x, b) = \frac{\partial w_b}{\partial x}(x, b) = \frac{\partial w_s}{\partial x}(x, b) = 0 \\ N_{xy}(x, 0) = M_y^b(x, 0) = M_y^s(x, 0) = N_{xy}(x, b) = M_y^b(x, b) = M_y^s(x, b) = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.28})$$

Les conditions aux limites en équation (III.28) sont satisfaites par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
u_0(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} \sin(\lambda x) \cos(\mu y) e^{i\omega t} \\
v_0(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} \cos(\lambda x) \sin(\mu y) e^{i\omega t} \\
w_b(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{bmn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) e^{i\omega t} \\
w_s(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{smn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) e^{i\omega t}
\end{aligned} \tag{III.29}$$

Remplaçant les équations (III.27 et III.29) en équation (III.21), l'équation (III.25) peut être résolue en utilisant les coefficients suivants :

$$a_{11} = A_{11}\lambda^2 + A_{66}\mu^2, a_{12} = \lambda\mu(A_{12} + A_{66}), a_{13} = -(3B_{16}\lambda^2\mu + B_{26}\mu^3) \tag{III.30a}$$

$$a_{14} = -(3B_{16}^s\lambda^2\mu + B_{26}^s\mu^3), a_{22} = A_{66}\lambda^2 + A_{22}\mu^2, a_{23} = -(B_{16}\lambda^3 + 3B_{26}\lambda\mu^2) \tag{III.30b}$$

$$a_{24} = -(B_{16}^s\lambda^3 + 3B_{26}^s\lambda\mu^2), a_{33} = D_{11}\lambda^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\lambda^2\mu^2 + D_{22}\mu^4 \tag{III.30c}$$

$$a_{34} = D_{11}^s\lambda^4 + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)\lambda^2\mu^2 + D_{22}^s\mu^4 \tag{III.30d}$$

$$a_{44} = H_{11}^s\lambda^4 + 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s)\lambda^2\mu^2 + H_{22}^s\mu^4 + A_{55}^s\lambda^2 + A_{44}^s\mu^2 \tag{III.30e}$$

$$m_{11} = m_{22} = I_1, m_{33} = I_1 + I_3(\lambda^2 + \mu^2) \tag{III.30f}$$

$$m_{34} = I_1 + I_5(\lambda^2 + \mu^2), m_{44} = I_1 + I_6(\lambda^2 + \mu^2) \tag{III.30g}$$

III.8. Conclusion

L'objectif de ce chapitre était de proposer une nouvelle théorie raffinée de déformation de cisaillement pour l'analyse dynamique des plaques stratifiées en matériaux composites. Nous avons exposé dans ce chapitre : Les hypothèses de la présente théorie la relation entre les composantes de déformations et celles de déplacements, Les équations de mouvement qui sont obtenues en utilisant le principe d'Hamilton quant aux fréquences naturelles sont obtenues par la solution de Navier dans le cas des stratifiées à plis croisés (0/90) (cross-ply) et dans le Cas des stratifiées à plis alternées et équilibrés ($\theta^\circ / -\theta^\circ$) (angle-ply).

CHAPITRE IV :
VALIDATION ET
DISCUSSION
DES RÉSULTATS

IV.1. Introduction

Dans la présent chapitre, nous allons effectuer une comparaison entre les résultats des fréquences naturelles adimensionnelle obtenus par la présente théorie raffinée d'ordre élevé de cisaillement transverse et les différentes théories a savoir : la théorie d'ordre élevé de Reddy (HSDPT1), la théorie d'ordre élevé de Swaminathan (HSDPT2) ainsi que la théorie exacte. Le nombre des inconnues dans la présente théorie est seulement quatre, contre cinq variables dans la théorie d'ordre élevé (HSDPT1, HSDPT2), après on va réaliser une étude paramétrique pour déterminer les facteurs qui influent sur la stabilité de vibration libre des plaques stratifiées en matériaux composites.

Pour des raisons de validation, les propriétés matérielles suivantes seront utilisées :

Matériau1 [65] : $E1 = 40E2, G12 = G13 = 0.5E2, G23 = 0.6E2, \nu12 = 0.25$

Tableau IV.1. Propriétés matérielles des fibres et de la matrice utilisés [9]

Matériau	E(GPa)	$\rho(Kg / m^3)$	ν
Fibre de Verre	86	2550	0.22
Fibre de Carbone	380	1950	0.33
Fibre de Kevlar	135	1450	0.37
Matrice époxyde	3.45	1200	0.30

la fraction volumique : $V_f = 0.45$.

Les résultats numériques sont présentés en termes de fréquences adimensionnelles. Le paramètre de fréquence naturelle adimensionnelle est donné par :

$$\bar{\omega} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}} \quad (IV.1)$$

Tableau IV.2. Effet de séquence d'empilement et du rapport coté sur l'épaisseur a/h sur la variation des fréquences naturelles adimensionnelles $\bar{\omega}$ d'une plaque carrée stratifiée $(0^\circ/90^\circ)_n$ en matériaux composites.

Nombre de plis	Théorie	a/h					
		2	4	10	20	50	100
$(0^\circ/90^\circ)_1$	HSDPT1	5.7170	8.3546	10.5680	11.1052	11.2751	11.3002
	Présente [64]	5.7101	8.3506	10.5669	11.1048	11.2750	11.3001
$(0^\circ/90^\circ)_2$	HSDPT1	5.7546	9.7357	14.8463	16.5733	17.1849	17.2784
	présente	5.7529	9.7366	14.8473	16.5737	17.1850	17.2784
$(0^\circ/90^\circ)_3$	HSDPT1	5.8741	9.9878	15.4632	17.3772	18.0644	18.1698
	présente	5.8703	9.9870	15.4634	17.3773	18.0644	18.1698
$(0^\circ/90^\circ)_5$	HSDPT1	5.9524	10.1241	15.7700	17.7743	18.4984	18.6097
	présente	5.9477	10.1225	15.7700	17.7743	18.4983	18.6097

Tableau IV.3. Effet de séquence d'empilement et le rapport de rigidité E_1/E_2 sur la variation des fréquences naturelles adimensionnelles $\bar{\omega}$ d'une plaque carrée stratifiée $(0^\circ/90^\circ)_n$ en matériaux composites

Nombre de plis	Théorie	E_1/E_2				
		3	10	20	30	40
$(0^\circ/90^\circ)_1$	Exacte	6.2578	6.9845	7.6745	8.1763	8.6525
	HSDPT1	6.2169	6.9887	7.8210	8.5050	9.0871
	présente [64]	6.2167	6.9888	7.8196	8.5028	9.0840
$(0^\circ/90^\circ)_2$	Exacte	6.5455	8.1445	9.4055	10.1650	10.6790
	HSDPT1	6.5008	8.4143	9.6265	10.5348	11.1716
	présente	6.5008	8.1957	9.6272	10.5358	11.1727
$(0^\circ/90^\circ)_3$	Exacte	6.6100	8.4143	9.8398	10.6950	11.2720
	HSDPT1	6.5558	8.4052	9.9181	10.847	11.5012
	présente	6.5557	8.4052	9.9181	10.8546	11.5009
$(0^\circ/90^\circ)_5$	Exact	6.6458	8.5625	10.0843	11.0027	11.6245
	HSDPT1	8.5842	8.5126	10.0674	11.0197	11.6730
	présente	6.5842	8.5125	10.0671	11.0191	11.6721

Les tableaux IV.2 et IV.3 représentent la variation des fréquences naturelles adimensionnelles $\bar{\omega}$ des plaques carrées stratifiées en matériaux composites $(0^\circ / 90^\circ)_n$ en fonction de séquence d'empilement, le rapport de rigidité E_1 / E_2 et le rapport coté sur épaisseur a / h

Ces tableaux montrent la comparaison des fréquences naturelles $\bar{\omega}$ obtenus par la présente théorie raffinée d'ordre élevé de cisaillement transverse [64] et les différentes théories : la théorie d'ordre élevé de Reddy (HSDPT1) ainsi que la théorie exacte. D'où on constate que les résultats obtenus par la présente théorie raffinée et les autres théories sont presque identiques. Il est à noter que le nombre des inconnues dans la présente théorie est seulement quatre, contre cinq variables dans la théorie d'ordre élevé (HSPDT1)

Tableau IV.4. Effet de séquence d'empilement et du rapport coté sur l'épaisseur a / h sur la variation des fréquences naturelles adimensionnelles $\bar{\omega}$ d'une plaque carrée stratifiée $(45^\circ / -45^\circ)_n$ en matériaux composites

Nombre de plis	Théorie	a / h						
		4	5	10	20	25	50	100
$(45^\circ / -45^\circ)_1$	HSDPT1	9.7593	10.8401	13.2630	14.2463	14.3827	14.5723	14.6214
	HSDPT2	8.8426	10.0350	12.9115	14.1705	14.3500	14.6012	14.6668
	présente [64]	9.7517	10.8336	13.2605	14.2455	14.3823	14.5722	14.6211
$(45^\circ / -45^\circ)_2$	HSDPT1	10.6507	12.5331	18.3221	21.8063	22.3798	23.2236	23.4507
	HSDPT2	10.0731	11.9465	17.8773	21.6229	22.2554	23.1949	23.4499
	présente	10.6507	12.5341	18.3240	21.8072	22.3805	23.2248	23.4508
$(45^\circ / -45^\circ)_4$	HSDPT1	10.9905	12.9719	19.2659	23.2388	23.9091	24.9046	25.1744
	HSDPT2	10.7473	12.7523	19.1258	23.1829	23.8713	24.8959	25.1741
	présente	10.9870	12.9697	19.2658	23.2390	23.9092	24.9047	25.1745

Le tableau IV.4 représente la variation des fréquences naturelles adimensionnelles $\bar{\omega}$ des plaques stratifiées en matériaux composites $(45^\circ / -45^\circ)_n$ en fonction de séquence d'empilement, et du rapport

coté sur épaisseur a/h , où on a fait une comparaison entre la présente théorie raffinée d'ordre élevé de cisaillement transverse et les autres théories d'ordre élevé (HSDPT1, HSDPT2), ou on constate une bonne convergence des résultats.

Ces fréquences sont maximales pour les plaques minces et minimales pour les plaques épaisses, ce qui est logique puisque l'augmentation de nombre des plis et le rapport coté sur épaisseur a/h conduit à l'augmentation de la rigidité de la plaque qui devient par la suite plus stable.

Tableau IV 5 : Effet de la fraction volumique V_f et séquence d'empilement sur la variation des fréquences naturelles adimensionnelles $\bar{\omega}$ d'une plaque carrée stratifiée $(0^\circ/90^\circ)_n$ en matériaux composites CFRP

Nombre de plis	V_f								
	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5	0.55	0.6	0.65	0.7
$(0^\circ/90^\circ)_1$	8.3064	8.4254	8.4984	8.5294	8.5215	8.4765	8.3956	8.2791	8.2166
$(0^\circ/90^\circ)_2$	11.0150	11.2288	11.3559	11.4059	11.3845	11.2944	11.1354	10.9049	10.5972
$(0^\circ/90^\circ)_3$	11.4301	11.6560	11.7910	11.8426	11.8198	11.7243	11.5557	11.3108	10.9832
$(0^\circ/90^\circ)_4$	11.5722	11.8022	11.9386	11.9920	11.9688	11.8714	11.6996	11.4499	11.1155
$(0^\circ/90^\circ)_5$	11.6376	11.8694	12.0068	12.0607	12.0372	11.9390	11.7657	11.5138	11.1764
$(0^\circ/90^\circ)_6$	11.6730	11.9058	12.0438	12.0979	12.0743	11.9756	11.8015	11.5484	11.2093
$(0^\circ/90^\circ)_8$	11.7080	11.9418	12.0804	12.1348	12.1110	12.0112	11.8370	11.5827	11.2420
$(0^\circ/90^\circ)_{12}$	11.7330	11.9676	12.1066	12.1611	12.1372	12.0387	11.8624	11.6072	11.2653
$(0^\circ/90^\circ)_{16}$	11.7418	11.9766	12.1157	12.1702	12.1464	12.0469	11.8712	11.6158	11.2734
$(0^\circ/90^\circ)_{32}$	11.7502	11.9852	12.1245	12.1791	12.1552	12.0556	11.8797	11.6240	11.2813

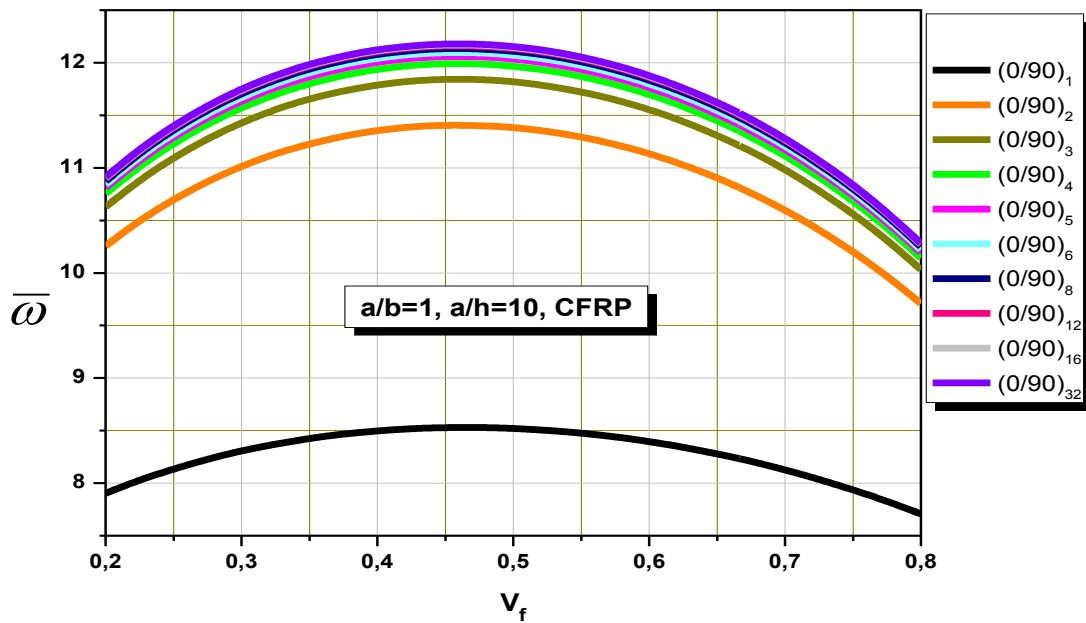


Figure IV.1. Effet de la fraction volumique V_f sur la variation des fréquences naturelles adimensionnelles $\bar{\omega}$ d'une plaque carrée stratifiée croisée $(0^\circ / 90^\circ)_n$ en matériaux composites CFRP

Tableau IV 6 : Effet de la fraction volumique V_f et séquence d'empilement sur la variation des fréquences naturelles adimensionnelles $\bar{\omega}$ d'une plaque carrée stratifiée $(0^\circ / 90^\circ)_n$ en matériaux composites KFRP

Nombre de plis	V_f								
	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5	0.55	0.6	0.65	0.7
$(0^\circ / 90^\circ)_1$	6.9907	7.0531	7.0944	7.1164	7.1202	7.1069	7.0770	7.0309	6.9685
$(0^\circ / 90^\circ)_2$	8.2170	8.3458	8.4253	8.4598	8.4527	8.4058	8.3201	8.1958	8.0319
$(0^\circ / 90^\circ)_3$	8.4258	8.5649	8.6502	8.6867	8.6779	8.6259	8.5318	8.3954	8.2156
$(0^\circ / 90^\circ)_4$	8.4980	8.6406	8.7279	8.7651	8.7557	8.7020	8.6050	8.4644	8.2792
$(0^\circ / 90^\circ)_5$	8.5313	8.6755	8.7637	8.8012	8.7916	8.7371	8.6387	8.4963	8.3086
$(0^\circ / 90^\circ)_6$	8.5493	8.6944	8.7831	8.8208	8.8110	8.7561	8.6570	8.5136	8.3245
$(0^\circ / 90^\circ)_8$	8.5672	8.7132	8.8023	8.8402	8.8303	8.7750	8.6752	8.5307	8.3403
$(0^\circ / 90^\circ)_{12}$	8.5800	8.7266	8.8161	8.8541	8.8441	8.7885	8.6881	8.5429	8.3516
$(0^\circ / 90^\circ)_{16}$	8.5845	8.7312	8.8209	8.8590	8.8489	8.7932	8.6927	8.5472	8.3555
$(0^\circ / 90^\circ)_{32}$	8.5888	8.7358	8.8255	8.8636	8.8536	8.7977	8.6970	8.5513	8.3593

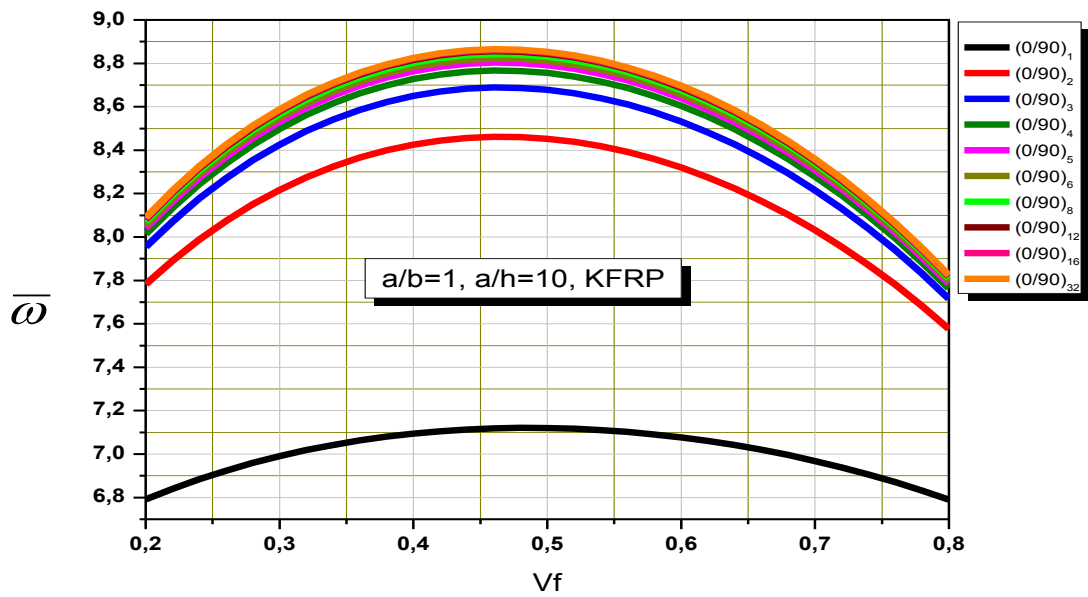


Figure IV.2. Effet de la fraction volumique V_f sur la variation des fréquences naturelles adimensionnelles $\bar{\omega}$ d'une plaque carrée stratifiée croisée $(0^\circ / 90^\circ)_n$ en matériaux composites KFRP

Tableau IV 7 : Effet de la fraction volumique V_f et séquence d'empilement sur la variation des fréquences naturelles adimensionnelles $\bar{\omega}$ d'une plaque carrée stratifiée $(0^\circ / 90^\circ)_n$ en matériaux composites GFRP

Nombre de plis	V_f								
	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5	0.55	0.6	0.65	0.7
$(0^\circ / 90^\circ)_1$	6.6240	6.6677	6.6963	6.7109	6.7122	6.7009	6.6769	6.6403	6.5903
$(0^\circ / 90^\circ)_2$	7.3748	7.4653	7.5204	7.5428	7.5346	7.4971	7.4312	7.3370	7.2140
$(0^\circ / 90^\circ)_3$	7.5075	7.6058	7.6652	7.6889	7.6792	7.6375	7.5646	7.4608	7.3256
$(0^\circ / 90^\circ)_4$	7.5537	7.6547	7.7156	7.7397	7.7294	7.6862	7.6110	7.5039	7.3644
$(0^\circ / 90^\circ)_5$	7.5751	7.6772	7.7388	7.7631	7.7526	7.7087	7.6324	7.5238	7.3824
$(0^\circ / 90^\circ)_6$	7.5866	7.6894	7.7514	7.7758	7.7652	7.7209	7.6440	7.5346	7.3921
$(0^\circ / 90^\circ)_8$	7.5981	7.7016	7.7639	7.7885	7.7777	7.7331	7.6556	7.5453	7.4018
$(0^\circ / 90^\circ)_{12}$	7.6063	7.7103	7.7729	7.7975	7.7866	7.7417	7.6638	7.5530	7.4087
$(0^\circ / 90^\circ)_{16}$	7.6092	7.7133	7.7760	7.8006	7.7891	7.7448	7.6667	7.5557	7.4111
$(0^\circ / 90^\circ)_{32}$	7.6120	7.7162	7.7790	7.8037	7.7927	7.7477	7.6695	7.5582	7.4135

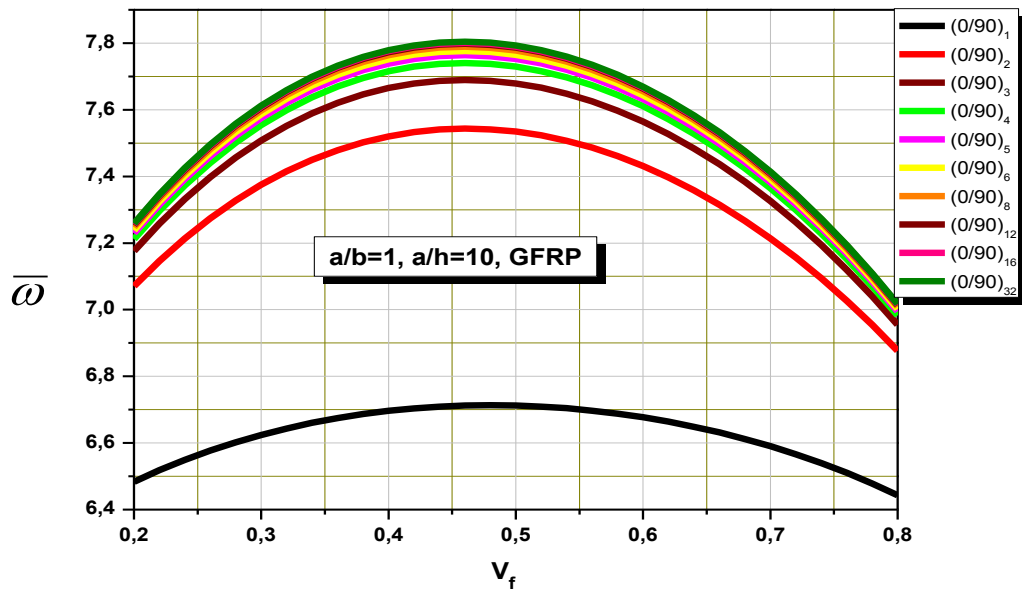


Figure IV.3. Effet de la fraction volumique V_f sur la variation des fréquences naturelles adimensionnelles $\bar{\omega}$ d'une plaque carrée stratifiée croisée $(0^\circ / 90^\circ)_n$ en matériaux composites GFRP

Tableau IV 8 : Effet de la fraction volumique V_f et séquence d'empilement sur la variation des fréquences naturelles adimensionnelles $\bar{\omega}$ d'une plaque carrée stratifiée $(45^\circ / -45^\circ)_n$ en matériaux composites CFRP.

Nombre de plis	V_f								
	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5	0.55	0.6	0.65	0.7
$(45^\circ / -45^\circ)_1$	10.3015	10.4639	10.5591	10.5934	10.5712	10.4948	10.3650	10.1808	9.9398
$(45^\circ / -45^\circ)_2$	13.6581	13.9139	14.0652	14.1248	14.0996	13.9915	13.7983	13.5137	13.1259
$(45^\circ / -45^\circ)_3$	14.1563	14.4231	14.5810	14.6438	14.6185	14.5071	14.3071	14.0112	13.6063
$(45^\circ / -45^\circ)_4$	14.3275	14.5980	14.7582	14.8220	14.7967	14.6842	14.4818	14.1819	13.7712
$(45^\circ / -45^\circ)_5$	14.4063	14.8785	14.8398	14.9041	14.8787	14.7657	14.5621	14.2604	13.8470
$(45^\circ / -45^\circ)_6$	14.4490	14.7222	14.8840	14.9485	14.9232	14.8098	14.6057	14.3030	13.8881
$(45^\circ / -45^\circ)_8$	14.4913	14.7655	14.9278	14.9927	14.9673	14.8537	14.6489	14.3452	13.9289
$(45^\circ / -45^\circ)_{12}$	14.5216	14.7964	14.9592	15.0242	14.9988	14.8850	14.6797	14.3754	13.9579
$(45^\circ / -45^\circ)_{16}$	14.5321	14.8072	14.9701	15.0352	15.0098	14.8959	14.6905	14.3859	13.9681
$(45^\circ / -45^\circ)_{32}$	14.5423	14.8176	14.9807	15.0458	15.0204	14.9064	14.7009	14.3960	13.9779

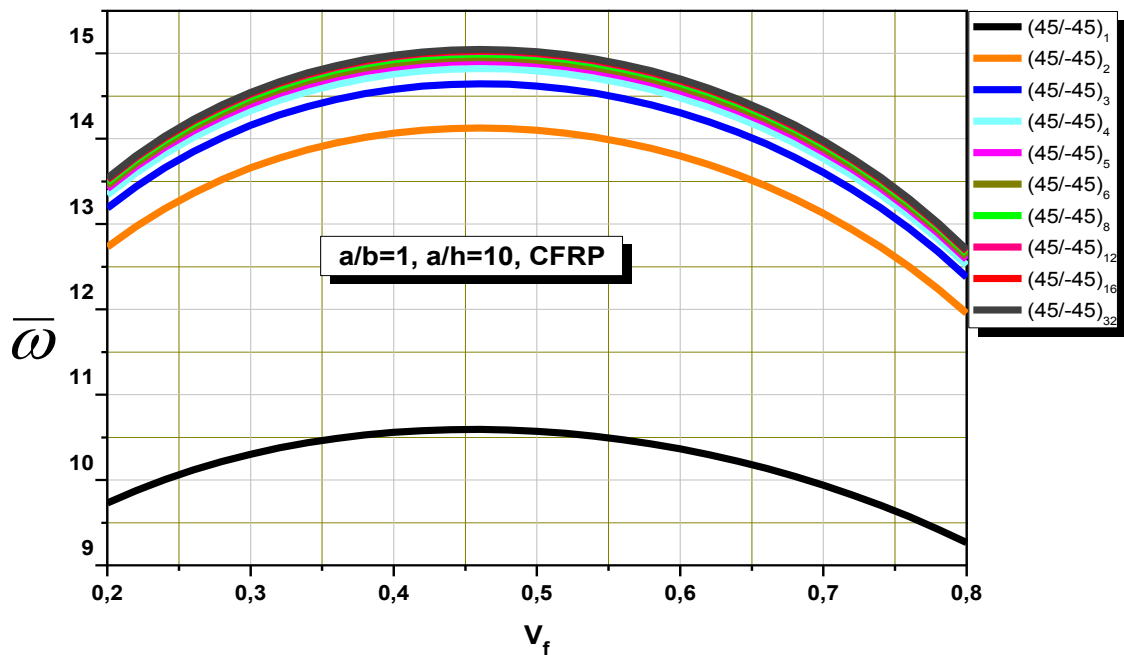


Figure IV.4. Effet de la fraction volumique V_f sur la variation des fréquences naturelles adimensionnelles $\bar{\omega}$ d'une plaque carrée stratifiée $(45^\circ / -45^\circ)_n$ en matériaux composites CFRP.

Tableau IV 9 : Effet de la fraction volumique V_f et séquence d'empilement sur la variation des fréquences naturelles adimensionnelles $\bar{\omega}$ d'une plaque carrée stratifiée $(45^\circ / -45^\circ)_n$ en matériaux composites KFRP

Nombre de plis	V_f								
	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5	0.55	0.6	0.65	0.7
$(45^\circ / -45^\circ)_1$	8.2162	8.3042	8.3562	8.3757	8.3650	8.3253	8.2572	8.1605	8.0337
$(45^\circ / -45^\circ)_2$	9.9243	10.1004	10.2038	10.2420	10.2194	10.1386	9.9997	9.8014	9.5400
$(45^\circ / -45^\circ)_3$	10.2081	10.3971	10.5079	10.5488	10.5246	10.4378	10.2887	10.0755	9.7940
$(45^\circ / -45^\circ)_4$	10.3061	10.4995	10.6128	10.6546	10.6298	10.5410	10.3885	10.1701	9.8818
$(45^\circ / -45^\circ)_5$	10.3512	10.5466	10.6612	10.7033	10.6783	10.5886	10.4344	10.2137	9.9222
$(45^\circ / -45^\circ)_6$	10.3757	10.5722	10.6873	10.7298	10.7046	10.6144	10.4593	10.2374	9.9442
$(45^\circ / -45^\circ)_8$	10.4000	10.5976	10.7133	10.7560	10.7307	10.6340	10.4840	10.2609	9.9659
$(45^\circ / -45^\circ)_{12}$	10.4174	10.6157	10.7319	10.7747	10.7493	10.6582	10.5017	10.2776	9.9815
$(45^\circ / -45^\circ)_{16}$	10.4234	10.6220	10.7384	10.7812	10.7558	10.6646	10.5079	10.2835	9.9869
$(45^\circ / -45^\circ)_{32}$	10.4293	10.6281	10.7446	10.7875	10.7620	10.6708	10.5138	10.2891	9.9922

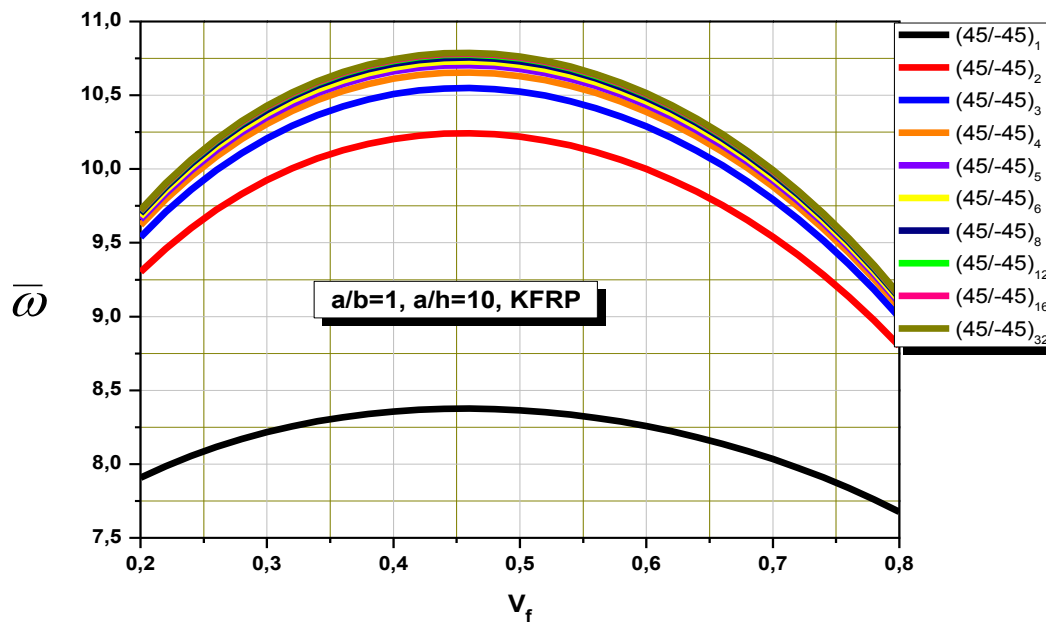


Figure IV.5. Effet de la fraction volumique V_f sur la variation des fréquences naturelles adimensionnelles $\bar{\omega}$ d'une plaque carrée stratifiée $(45^\circ/-45^\circ)_n$ en matériaux composites KFRP

Tableau IV 10 : Effet de la fraction volumique V_f et séquence d'empilement sur la variation des fréquences naturelles adimensionnelles $\bar{\omega}$ d'une plaque carrée stratifiée $(45^\circ/-45^\circ)_n$ en matériaux composites GFRP

Nombre de plis	V_f								
	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5	0.55	0.6	0.65	0.7
$(45^\circ/-45^\circ)_1$	7.5976	7.6641	7.7027	7.7161	7.7061	7.6735	7.6184	7.5405	7.4378
$(45^\circ/-45^\circ)_2$	8.6820	8.8169	8.8956	8.9233	8.9034	8.8379	8.7272	8.5708	8.3666
$(45^\circ/-45^\circ)_3$	8.8704	9.0161	9.1011	9.1311	9.1097	9.0389	8.9194	8.7504	8.5297
$(45^\circ/-45^\circ)_4$	8.9358	9.0852	9.1724	9.2031	9.1812	9.1086	8.9861	8.8128	8.5864
$(45^\circ/-45^\circ)_5$	8.9659	9.1171	9.2053	9.2363	9.2142	9.1408	9.0169	8.8415	8.6125
$(45^\circ/-45^\circ)_6$	8.9823	9.1344	9.2239	9.2544	9.2320	9.1582	9.0335	8.8571	8.6267
$(45^\circ/-45^\circ)_8$	8.9986	9.1516	9.2408	9.2723	9.2498	9.1756	9.0501	8.8727	8.6408
$(45^\circ/-45^\circ)_{12}$	9.0102	9.1638	9.2534	9.2850	9.2625	9.1879	9.0619	8.8837	8.6509
$(45^\circ/-45^\circ)_{16}$	9.0142	9.1681	9.2579	9.2895	9.2669	9.1922	9.0661	8.8876	8.6544
$(45^\circ/-45^\circ)_{32}$	9.0181	9.1723	9.2621	9.2938	9.2712	9.1964	9.0701	8.8913	8.6578

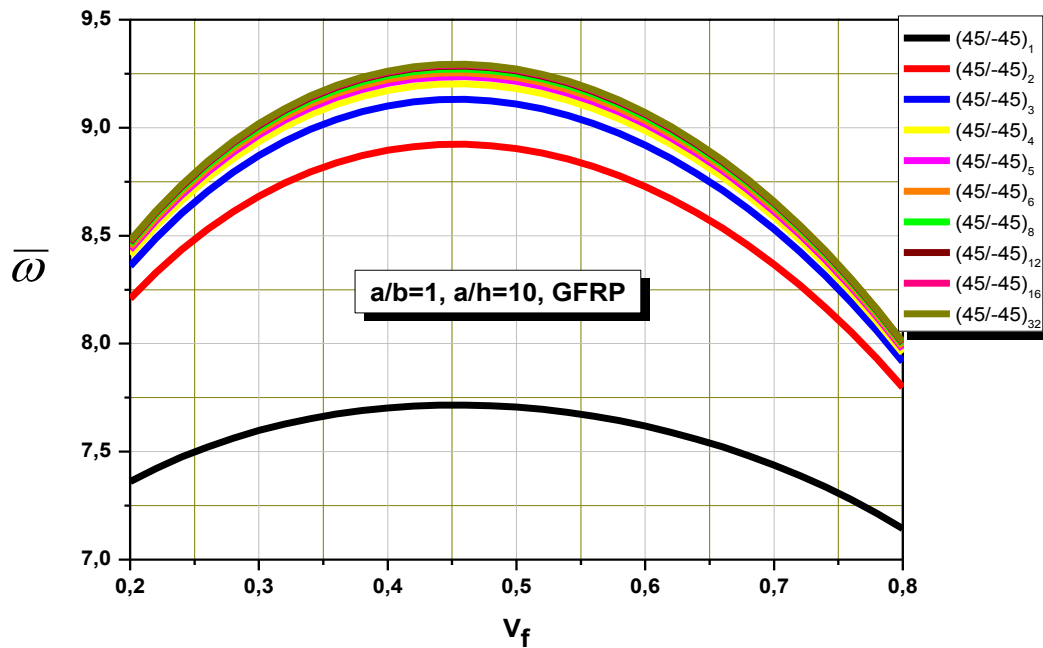


Figure IV.6. Effet de la fraction volumique V_f sur la variation des fréquences naturelles adimensionnelles $\bar{\omega}$ d'une plaque carrée stratifiée $(45^\circ / -45^\circ)_n$ en matériaux composites GFRP

Les tableaux (IV.5 - IV.10), ainsi que les figures (IV.1 - IV.6) représentent la variation des fréquences naturelles adimensionnelles $\bar{\omega}$ d'une plaque carrée stratifiée en matériaux composites obtenues en utilisant la présente théorie raffinée d'ordre élevé de cisaillement transverse en fonction de la fraction volumique V_f . Pour les deux cas de stratification (cross-ply $(0^\circ / 90^\circ)_n$ et angle-ply $(45^\circ / -45^\circ)_n$ et tous les types des fibres utilisés (fibre de Carbone (CFRP), fibre de Kevlar (KFRP) et fibre de verre (GFRP)), on constate que les fréquences naturelles adimensionnelles $\bar{\omega}$ dépendent de la fraction volumique V_f , où la variation de pourcentage des fibres influe directement sur la rigidité de la plaque et par la suite cause l'augmentation des fréquences naturelles graduellement jusqu'ils atteints le maximum à $V_f = 0.45$, de cette valeur ces fréquences diminuent à cause de l'instabilité de la plaque qui est due au diminution de la quantité de la matrice. De cette comparaison on va fixer le $V_f = 0.45$ pour le reste de l'étude comme valeur optimale.

Tableau IV 11 : Effet de rapport d'aspect a/b et du rapport coté sur l'épaisseur a/h sur la variation des fréquences naturelles adimensionnelles $\bar{\omega}$ d'une plaque carrée stratifiée $(0^\circ/90^\circ)_4$ en matériaux composites

a/h	a/b	CFRP	KFRP	GFRP
5	1	7.3549	6.3053	5.9996
	1.5	11.2261	9.6814	9.2241
	2	16.0544	13.9445	13.3033
10	1	8.5294	7.1164	6.7109
	1.5	13.8919	11.5450	10.866
	2	21.3222	17.6888	16.6183
20	1	8.9507	7.3883	6.9437
	1.5	15.0196	12.2621	11.477
	2	24.0121	19.3779	18.0499
50	1	9.0834	7.4717	7.0145
	1.5	15.4016	12.4947	11.6723
	2	25.0189	19.9689	18.5399
100	1	9.1029	7.4839	7.0248
	1.5	15.4592	12.5293	11.7012
	2	25.1758	20.0589	18.614

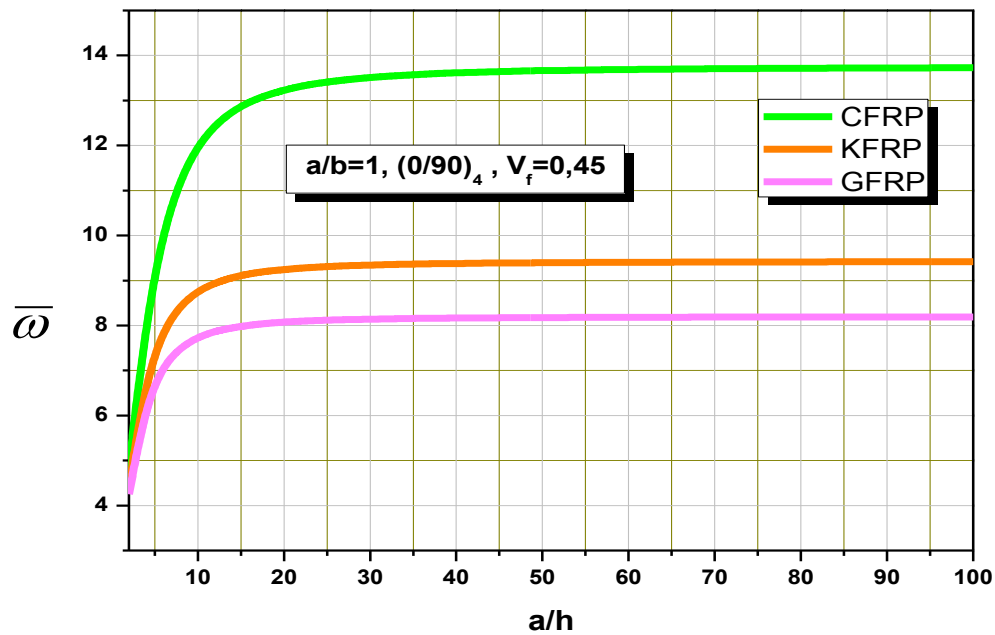


Figure IV.7. Effet du rapport coté sur l'épaisseur a/h sur la variation des fréquences naturelles adimensionnelles $\bar{\omega}$ d'une plaque carrée stratifiée croisée $(0^\circ/90^\circ)_4$ en matériaux composites

Tableau IV 12 : Effet de rapport d'aspect a/b et du rapport coté sur l'épaisseur a/h sur la variation des fréquences naturelles adimensionnelles $\bar{\omega}$ d'une plaque carrée stratifiée $(45^\circ/-45^\circ)_4$ en matériaux composites

a/h	a/b	CFRP	KFRP	GFRP
5	1	10.3973	8.5427	7.715
	1.5	14.1058	12.0722	11.1104
	2	18.1991	16.0203	14.9723
10	1	14.8220	10.6546	9.2031
	1.5	21.4085	16.0373	14.0450
	2	28.843	22.4412	19.9451
20	1	17.3072	11.5121	9.7522
	1.5	26.3546	17.9197	15.2899
	2	37.2061	25.9544	22.3571
50	1	18.2761	11.7959	9.9268
	1.5	28.5379	18.5914	15.7108
	2	41.3556	27.3135	23.2305
100	1	18.4289	11.8383	9.9526
	1.5	28.8988	18.6943	15.7742
	2	42.0767	27.5275	23.365

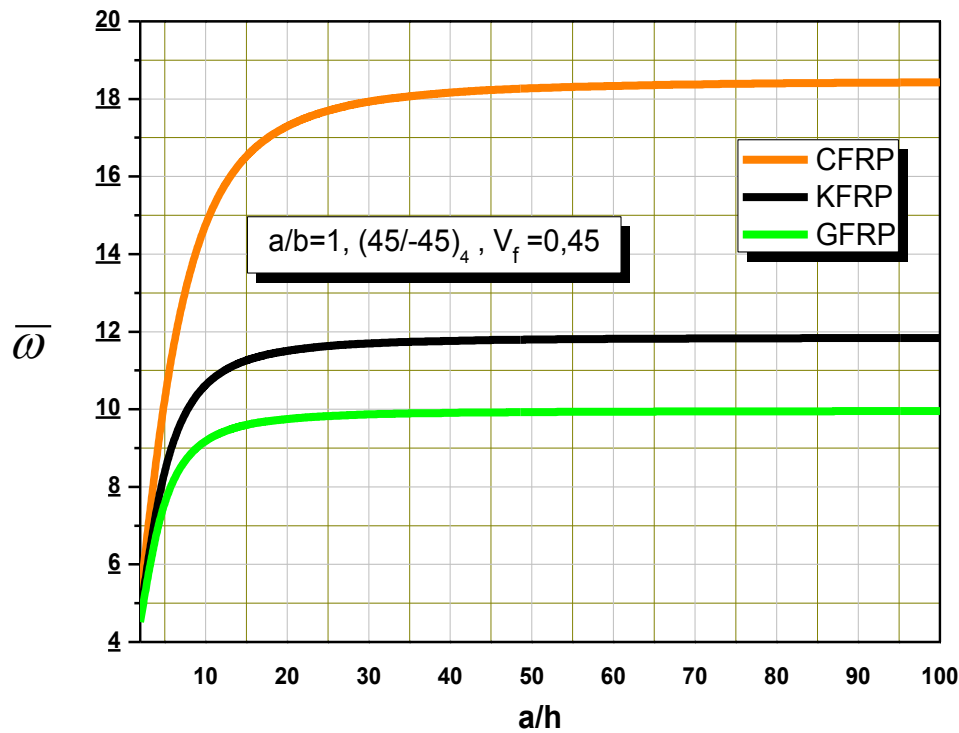


Figure IV.8. Effet du rapport coté sur l'épaisseur a/h sur la variation des fréquences naturelles adimensionnelles $\bar{\omega}$ d'une plaque carrée stratifiée $(45^\circ / -45^\circ)_4$ en matériaux composites

Les tableaux IV.11 et IV.12 ainsi que les figures IV.7 et IV.8 représentent la variation des fréquences naturelles adimensionnelles $\bar{\omega}$ d'une plaque carrée stratifiée en matériaux composites en fonction de différents types de fibres (CFRP, KFRP, GFRP). D'où, Les fréquences naturelles augmentent en fonction de rapport d'aspect a/b , ou ils sont minimales pour les plaques courtes et maximales pour les plaques élancées.

Quel que soit l'orientation choisie ($(45^\circ / -45^\circ)_4$ ou $(0^\circ / 90^\circ)_4$) ou la géométrie utilisée (le rapport d'aspect a/b et le rapport coté sur épaisseur a/h), on constate que les fréquences sont maximales pour le cas des fibres CFRP, ce qui signifie que le type des fibres utilisée influe directement sur les fréquences naturelles, ou la rigidité dépend de la fibre choisie. Il est à noter qu'il faut très attentif lors du choix de type de fibres puisque plusieurs paramètres interviennent dans ce choix comme : la rigidité et la résistance aux chocs.

Tableau IV.13 : Effet d'angle d'orientation $(0^\circ / 90^\circ)_4$ et $(\theta / -\theta)_4$ sur la variation des fréquences naturelles adimensionnelles $\bar{\omega}$ d'une plaque carrée stratifiée en matériaux composites pour les différents types fibres CFRP, KFRP et GFRP.

orientation	CFRP	KFRP	GFRP
$(5/-5)_4$	12.2666	8.9247	7.8508
$(15/-15)_4$	12.9211	9.3513	8.1795
$(30/-30)_4$	14.2936	10.3208	8.9503
$(45/-45)_4$	14.8220	10.6546	9.2031
$(0/90)_4$	11.9920	8.7651	7.7397

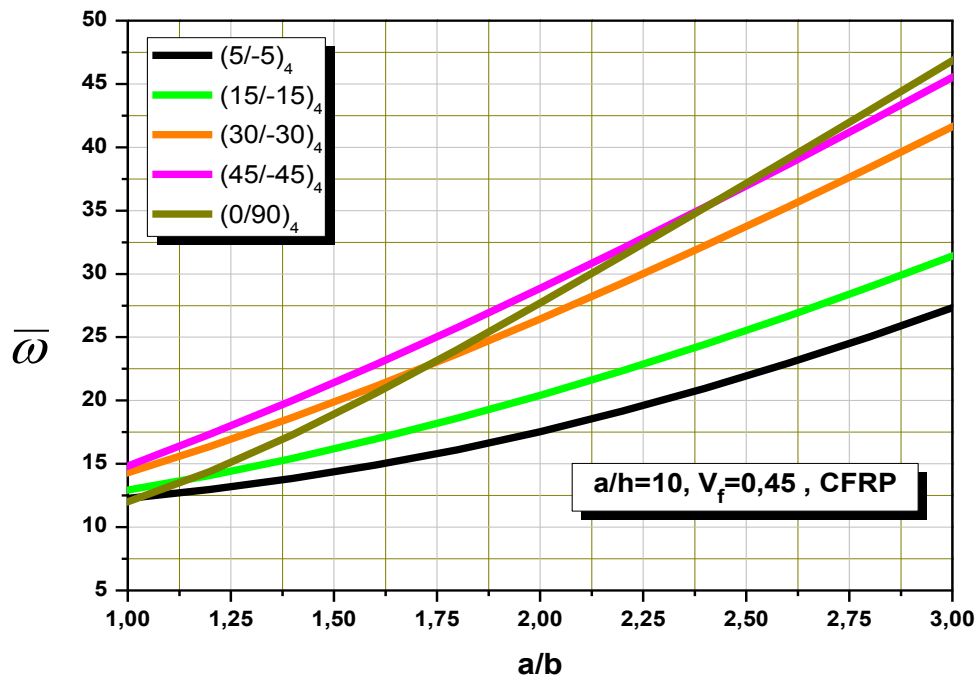


Figure IV.9. Effet d'angle d'orientation sur la variation des fréquences naturelles $\bar{\omega}$ d'une plaque carrée stratifiée en matériaux composites pour le CFRP

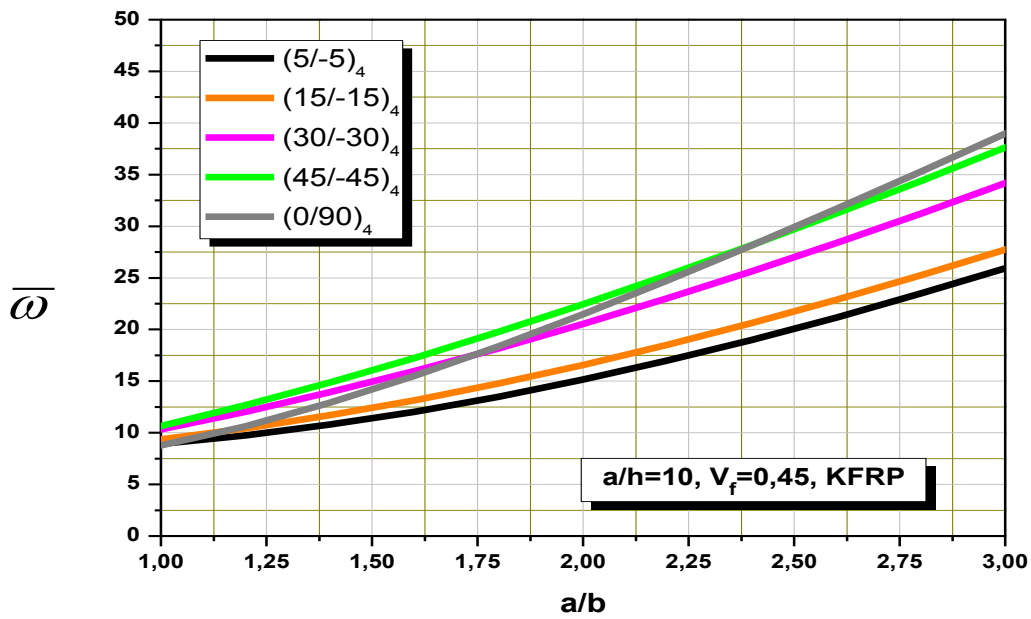


Figure IV.10. Effet d'angle d'orientation sur la variation des fréquences naturelles $\bar{\omega}$ d'une plaque carrée stratifiée en matériaux composites pour le KFRP

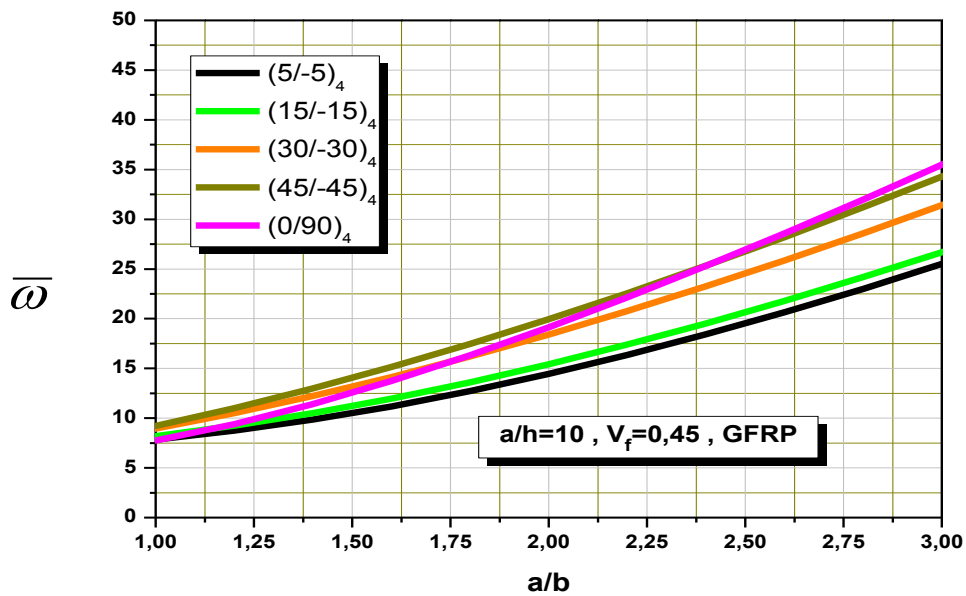


Figure IV.11. Effet d'angle d'orientation sur la variation des fréquences naturelles $\bar{\omega}$ d'une plaque carrée stratifiée en matériaux composites pour le GFRP

Le tableau IV.13 ainsi que les figures IV.9 - IV.11 représentent la variation des fréquences naturelles adimensionnelles $\bar{\omega}$ d'une plaque carrée stratifiée en matériaux composites sous l'influence de : l'orientation des fibres, le type des fibres (CFRP, GFRP et KFRP) et le rapport d'aspect a/b d'où on

constate que ces augmentent en fur et à mesure que le rapport d'aspect augmente et ces fréquences varient significativement en fonction de l'orientation des fibres.

Il est à noter que le choix de l'angle d'orientation des fibres dépend de la géométrie de la plaque : longueur, largeur, c'est-à-dire, que une orientation donnée est efficace pour une géométrie bien précise et non pas pour une autre, d'une autre manière il est difficile de trouver une orientation qui donne des résultats optimales pour toutes les géométries.

IV.2. Conclusion

Dans ce chapitre, la présente théorie raffinée de déformation de cisaillement d'ordre élevé a été utilisé pour déduire les fréquences naturelles adimensionnelles des plaques stratifiées en matériaux composites, où une comparaison entre cette présente théorie et les autres théories existantes dans la littérature a été faite en premier lieu en raison de validation de cette théorie, de cette comparaison il est constaté qu'il y a une convergence des résultats ce qui a confirmé les hypothèses sur lesquelles cette théorie a été fondée.

Deuxièmement, une étude paramétrique a été réalisée pour déterminer les différents facteurs qui influent sur la vibration libre des plaques stratifiées en matériaux composites à savoir : effet de séquence d'empilement, effet du rapport coté sur l'épaisseur a/h , effet du rapport d'aspect a/b , effet de la fraction volumique V_f , effet de l'orientation des fibres et l'effet de type des fibres utilisé.

*CONCLUSION GÉNÉRALE
ET PERSPECTIVES*

Conclusion générale et perspectives

L'objectif de ce mémoire est de proposer une nouvelle théorie raffinée de déformation et de cisaillement qui prend en considération l'effet de cisaillement transverse pour l'analyse de la stabilité à la vibration libre des plaques stratifiées en matériaux composites.

Cette théorie assure la distribution parabolique des déformations ainsi que des contraintes de cisaillement suivant l'épaisseur, et satisfait la nullité de ces contraintes de cisaillement aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque sans la nécessité d'utiliser des facteurs de correction de cisaillement. Le nombre des inconnues dans la présente théorie est quatre contre cinq dans le cas des autres théories de déformation de cisaillement.

Toutes les études comparatives effectuées dans cette analyse ont montrées que les résultats obtenus en utilisant la présente théorie sont presque identiques à celles issues des théories existantes dans la littérature.

La présente théorie proposée permet de traiter à la fois les structures minces et épaisses sans l'aide des coefficients correcteurs de cisaillement, d'où, une étude paramétrique a été réalisée pour déterminer les facteurs affectant les fréquences naturelles des plaques stratifiées en matériaux composites à savoir : séquence d'empilement, le rapport coté sur l'épaisseur a/h , le rapport de rigidité E_1/E_2 , effet de la fraction volumique V_f , effet de l'angle d'orientation, de rapport d'aspect a/b et le type de fibre utilisé.

De cette étude on a tiré les conclusions suivantes :

- La croissance de nombre des plis conduit à l'augmentation des fréquences naturelles de la plaque ;
- Les fréquences naturelles augmentent par l'augmentation de rapport coté sur épaisseur a/h . D'où, ces fréquences sont maximales pour les plaques minces et minimales pour les plaques épaisses ;
- les fréquences naturelles adimensionnelles dépendent de la fraction volumique V_f , où la variation de pourcentage des fibres influe directement sur la rigidité de la plaque ;
- Les fréquences naturelles augmentent lorsque l'orientation des fibres augmente, donc la variation de l'angle d'orientation des fibres influe sur le comportement de la plaque ;

- Les fréquences naturelles augmentent lorsque de rapport d'aspect a/b , d'où ces fréquences sont maximales pour le cas des plaques élancées ;
- Les fréquences naturelles dépendent de choix du matériau utilisé, où la rigidité de ce dernier détermine la rigidité de la plaque. Il est à noter qu'il faut être très attentif lors du choix de type de fibres.

En conclusion, on peut dire que la présente théorie raffinée proposée est précise, simple et efficace pour résoudre les comportements dynamiques des plaques stratifiées en matériaux composites.

En perspective à ce travail, nous envisageons d'étudier l'utilisation de la nouvelle théorie pour les cas suivants :

- Utilisation de la théorie raffinée pour d'autres types de plaques telles que les plaques sandwichs ;
- Etudes d'autres types de structures comme les poutres ;
- L'influence de la température sur les plaques stratifiées.

RÉFÉRENCES
BIBLIOGRAPHIQUES

Références bibliographiques

- [1] T. ACHOUR, «Etude des techniques de réparation des structures composites endommagées », thèse de magister Université Mentouri-Constantine, 2011.
- [2] «Glossaire des matériaux composites-CARMA,» Actualisation octobre 2006.
- [3] M. LAAREJ, Etude par Spectroscopie Raman et modélisation d'une résine compositeRTM, L'université Paul Verlaine-Metz, Janvier 2010.
- [4] A. Gharbi, Analyse des fissurations des matériaux composites et détermination de leur délaminage utilisant des capteurs piézo-électriques ", Constantine: thèse de magister Université Mentouri, 2005.
- [5] N. KAOUCHE , «Prise en compte du vieillissement et de l'endommagement dans le dimensionnement de structures en matériaux composites», mémoire de magister université de Mohamed Boudiaf Oran, 27novembre 2016.
- [6] A. BOUDENNE, Etude expérimentale et théorique des propriétés thermo-physiques de matériaux composite à matrice polymère, Université PARISXII, 2003.
- [7] E. JULES, "Couplages entre propriétés thermiques, réactivité chimique et viscosité des matériaux composites thermodurcissables en relation avec les conditions de leur élaboration fondée sur l'hystérésis Diélectrique", Ecole nationale supérieure d'arts et métiers, 2001.
- [8] M. BOUKHEZAR , « Réhabilitation et renforcement des poutres au moyen des matériaux composites », thèse de magister Université Mentouri- Constantine, Juillet 2009.
- [9] J. BERTHELOT, Matériaux composites : Comportement mécanique et analyse des structures, Paris: Ed. MASSON, 1992.
- [10] J. PABIOT, «Plastiques renforcés : Propriétés mécaniques, Calcul,» *Techniques de l'ingénieur*, pp. A3245(1-13), Paris,1987.
- [11] Y. LEDRU, «Etude de la porosité dans les matériaux composites stratifiés aéronautiques », Thèse de doctorat université de Toulouse, 14 décembre 2009.
- [12] H. Bouazza , «Recyclage des matériaux composites thermodurcissables à usage naval», mémoire de magister université de Mohamed Boudiaf Oran, 2011.
- [13] C. Aribi, Etude comparative du comportement des différents matériaux composites (différentes matrices), Mémoire de magister, université de M'hamed Bouguera, Boumerdes. Algérie.
- [14] A. AL-Maghribi, Comportement des matériaux composites à fibres courtes : applications à l'impact basse vitesse, thèse de doctorat, l'université Paul Sabatier, 2008.
- [15] H. AIT ATMANE , «Vibration des structures composites en tenant compte de l'effet du cisaillement », Thèse de doctorat université de Djilali libes Sidi Bel Abbes, 07 février 2011.

- [16] B. Adim , «Etude de la stabilité des plaques en matériaux composites : analyse et modélisation», Thèse de doctorat Université de Ibn Khaldoun Tiaret, 21/09/2016.
- [17] R. Maurice, «technologie des composites,» 3ème édition, Hermès, Paris, 1998.
- [18] K. ROUAM , «Elaboration, caractérisation mécanique et hygrothermique d'un stratifié renforcé par des fibres naturelles», mémoire de magister université M'hamed Bougera-Boumerdes, 2014.
- [19] B. O. Sallai, A. Tounsi, I. Mechab, B. Boudierba, M. Meradjah et E. Adda Bedia, «A theoretical analysis of flexional bending of Al/Al₂O₃ S-FGM thick beams,» *Computational Materials Science*, vol. 44(4), p. 1344 – 1350, 2009.
- [20] P. Joeseph, G. Mathew, K. Joeseph, G. Groeninckx et S. Thomas, «Dynamic mechanical properties of short sisal fibre reinforced polypropylene composites,» *Comp. Part*, vol. A. 34, pp. 275-290, (2003).
- [21] D. Gay, Matériaux composites, 4ème édition, Hermès, Paris, 1997.
- [22] G. Kirchhoff, «Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe,» *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 40, pp. 51-88, 1850.
- [23] A. Love, A treatise on the mathematical theory of elasticity, Cambridge University Press, 1934.
- [24] R. Jones, Mechanics of composite materials, Second Editions CRC Press, 1998.
- [25] E. Reissner et Y. Stavsky, «Bending and Stretching of Certain Types of Heterogeneous Aeolotropic Elastic Plates,» *Journal of Applied Mechanics*, vol. 28 (3), pp. 402-408, 1961.
- [26] L. Librescu, «Elastostatics and kinetics of anisotropic and heterogeneous shell-type structures,» *Noordhoff, Leyden, Netherlands*, vol. 2, 1975.
- [27] J. Reddy, «On refined computational models of composite laminates,» *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 27 (2), pp. 361-382, 1989.
- [28] Y. Stavsky, «On the theory of symmetrically heterogeneous plates having the same thickness variation of the elastic moduli,» *Topics in applied mechanics*, p. 105, 1965.
- [29] K. Rohwer, S. Friedrichs et C. Wehmeyer, «Analyzing laminated structures from fibre-reinforced composite material—an assessment,» *Technische Mechanik*, vol. 25 (1), pp. 59-79, 2005.
- [30] S. Ambarsumyan, «K teorii izgiba anisotropnykh plasinok,» *Izv. Akad Nauk SSR*, vol. 5, pp. 69 - 77, 1958.
- [31] S. Dong , P.K.S et TRL, «On the Theory of Laminated Anisotropic Shells and Plates,» *Journal of the Aerospace Sciences*, vol. 29 (8), pp. 969-975, 1962.
- [32] Y. Stavsky, «Bending and stretching of laminated aeolotropic plates,» *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, vol. 127 (1), pp. 1194-1219, 1962.
- [33] C. Decolon, Analysis of composite structures, Butterworth-Heinemann, 2004.

- [34] J. Reddy, *Mechanics of laminated composite plates and shells, theory and analysis* (second edition). CRC Press, 2004.
- [35] L. He, «A linear theory of laminated shell accounting for continuity of displacement and transverse shear stresses at layer interfaces,» *Int J Solids Structures*, vol. 31(5), pp. 613-627, 1994.
- [36] P. Pai, «A new look at shear correction factors and warping functions of anisotropic laminates,» *International Journal of Solids and Structures*, vol. 32 (16), pp. 2295-2313, 1995.
- [37] S. Vlachoutsis, «Shear correction factors for plates and shells,» *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 33 (7), pp. 1537-1552, 1992.
- [38] J. Whitney, «Shear correction factors for orthotropic laminates under static load,» *Journal of applied mechanics*, pp. 40-302, 1973.
- [39] V. Birman et C. Bert, «On the choice of shear correction factor in sandwich structures,» *Journal of Sandwich Structures and Materials*, vol. 4 (1), pp. 83-95, 2002.
- [40] S. Chatterjee et S. Kulkarni, «Shear Correction Factors for Laminated Plates,» *AIAA Journal*, vol. 17 (5), pp. 498-499, 1979.
- [41] Madabhusi-Raman, P et J. et Davalos, «Static shear correction factor for laminated rectangular beams,» *Composites Part B: Engineering*, vol. 27 (3-4), pp. 285-293, 1996.
- [42] M. Laitinen, H. Lahtinen et S. Sjölin, «Transverse shear correction factors for laminates in cylindrical bending,» *Communications in numerical methods in engineering*, vol. 11 (1), pp. 41-47, 1995.
- [43] J. Reddy, *Mechanics of laminated composite plates and shells theory and analysis*, CRC press, 2003.
- [44] E. Carrera et S. Brischetto, «A Survey With Numerical Assessment of Classical and Refined Theories for the Analysis of Sandwich Plates,» *Applied Mechanics Reviews*, vol. 62 (1), pp. 010803-010803, 2008.
- [45] M. Murthy, *An improved transverse shear deformation theory for laminated anisotropic plate*, NASA: Rapport technique, 1981.
- [46] J. N. Reddy, «A simple higher-order theory for laminated composite plates,» *Journal of Applied Mechanics*, vol. 51, pp. 745-752, 1984.
- [47] Y. Liu, «A Refined Shear Deformation Plate Theory,» *Int. J. for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*, vol. 12, pp. 141-149, 2011.
- [48] S. A. Ambartsumian, *Theory of anisotropic plate*, Technomic Publishing Co, 1969.
- [49] G. Shi, «A new simple third-order shear deformation theory of plates. *Int. J. Solids Struct.*,» vol. 44, pp. 4299-4417, 2007.
- [50] M. Touratier, «An efficient standard plate theory. *Engng Sci.*,» vol. 29(8), pp. 901-916, 1991.

- [51] K. Soldatos, «a general laminated plate theory accounting for continuity of displacements and transverse shear stresses at material interfaces. *Composite structures*,» vol. 20, pp. 195-211, 1992.
- [52] Mechab, Ismail. Ait Atmane, Hassen. Tounsi, Abdlouahed, Hichem Abdesselem Belhadj et Adda Bedia El Abbas, «A two variable refined plate theory for the bending analysis of functionally graded,» *plates. Acta Mechanica Sinica*, vol. 26 (6), p. 941–949, 2010.
- [53] Karama, M. Abou Harb, B. Mistou et S. e. Caperaa, «Bending, buckling and free vibration of laminated composite with a transverse shear stress continuity model. *Composite Part B*,» vol. 29(3), pp. 223-234, 1998.
- [54] M. Aydogdu, «Comparison of Various Shear Deformation Theories for Bending, Buckling, and Vibration of Rectangular Symmetric Cross-ply Plate with Simply Supported Edges,» *Journal of Composite Materials*, vol. 40, p. 2143, 2006.
- [55] M. Cho, K. Kim et M. H. Kim, «Efficient high order shell theory for laminated composites,» *Composite Structures*, vol. 34, pp. 197-212, 1996.
- [56] M. Cho et J. Kim, «A postprocess method for laminated shells with a doubly curved nine-noded finite element,» *Composites: Part B*, vol. 31, pp. 65-74, 2000.
- [57] M. Di Sciuva, «A refined transverse shear deformation theory for multilayered anisotropic plates,» *Atti. Accad. Sci. Torino*, vol. 118, pp. 279-295, 1984.
- [58] H. Murakami, «Laminated composite plate theory with improved in-plane responses,» *Journal of Applied Mechanics*, vol. 53, pp. 661-666, 1986.
- [59] R. C. Averill, «Static and dynamic response of moderately thick laminate beams with damage,» *Composite Eng*, vol. 4, pp. 381-395, 1994.
- [60] U. Icardi, «Higher-order zig-zag model for analysis of thick composite beams with inclusion of transverse normal stress and sublaminates approximations,» *Composite Structures: Part B*, vol. 32, pp. 343-354, 2001.
- [61] E. Carrera, «On the use of Murakami's zig-zag fonction in the modeling of layered plates and shells,» *Computers and Structures*, vol. 82, pp. 541-554, 2004.
- [62] J. Sunôes et M. Moita, «Buckling behaviour of laminated composite structures using a discrete higher-order displacement model,» *Composite Structures*, vol. 35, pp. 15-92, 1996.
- [63] Karama, M. Afaq et S. Mistou, «Mechanical behavior of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity. *Int. J. Solids Struct*,» vol. 40(6), pp. 1525-1546, 2003.
- [64] H. Goucham, B. Adim, T. Hassaine Daouadji et A. Rabah, « Contribution à l'étude du comportement vibratoire des plaques en matériaux composites», 1ère journées des structures et développement durable ,Tissemsilt, 09Mai 2018.

- [65] B. Adim , A. Rabahi et T. Hassaine Daouadji, «A simple higher order shear deformation theory for mechanical behavior of laminated composite plates,» *Int. J. Adv. Struct. Eng*, accepted 30 January 2016.

Abstract

The aim of this work is to study the free-vibration stability of composite laminates by using a novel high-order, four-variable, shear deformation theory.

This new refined theory takes into account the effect of transverse shear as well as the parabolic distribution of shear stresses and satisfies the conditions of zero shear stresses in the upper and lower faces of the plate without the aid of shear correction factor.

In the present study, we performed a comparison between the results obtained by the present refined high order theory and the different theories existing in the literature, namely: high order shear deformation plates theory of Reddy, HSDPT1, high order shear deformation plates theory of Swaminathan HSDPT2 as well as the exact theory, where a convergence of results from these different theories has been observed.

In the light of this study, it can conclude that the present refined high-order shear deformation theory is accurate, simple and effective for the analysis of the vibratory behavior of composite laminated plates.

Keywords: Composite materials, Free Vibration, Refined shear deformation theory, laminated plate.

Résumé

Ce mémoire a pour objet d'étudier la stabilité à la vibration libre des plaques stratifiées en matériaux composites en utilisant une nouvelle théorie raffinée de déformation et de cisaillement d'ordre élevé à quatre variables.

Cette nouvelle théorie raffinée prend en considération l'effet du cisaillement transversal en assurant une distribution parabolique des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur et satisfaisant les conditions de nullité de ces contraintes dans les bords supérieures et inférieures de la plaque sans l'aide des facteurs de correction de cisaillement.

Dans la présente étude, nous avons effectué une comparaison entre les résultats obtenus par la présente théorie raffinée d'ordre élevé de cisaillement transverse et les différentes théories existantes dans la littérature, à savoir : la théorie d'ordre élevé de Reddy (HSDPT1), la théorie d'ordre élevé de Swaminathan (HSDPT2) ainsi que la théorie exacte, où on a constaté une convergence des résultats issues de ces différentes théories.

A la lumière de cette étude on peut conclure que la présente théorie raffinée de cisaillement et de déformation d'ordre élevé est précise, simple et efficace pour l'analyse du comportement vibratoire des plaques stratifiées en matériaux composites.

Mots-clés : Matériaux composites, Vibration Libre, Théorie raffinée de déformation de cisaillement, plaque stratifiée

ملخص

الهدف من هذه المذكرة هو دراسة استقرار الاهتزازات الحرة للصفائح المركبة باستخدام نظرية جديدة للقص العرضي باستخدام أربع متغيرات

تأخذ هذه النظرية المكررة الجديدة بعين الاعتبار تأثير القص العرضي وتضمن توزيع إجهادات القص بشكل قطع مكافئ وتفي بشروط انعدام إجهادات القص عند السطوح (العلوي والسفلي) للصفحة دون الحاجة إلى معامل تصحيح القص.

أجرينا في هذه الدراسة، مقارنة بين النتائج التي تم الحصول عليها من النظرية المكررة الجديدة والنظريات المختلفة الموجودة في المراجع، وهي: نظرية عالية الترتيب HSDPT، فضلا عن النظرية الدقيقة، حيث لوحظ تقارب النتائج من هذه النظريات المختلفة.

في ضوء هذه الدراسة، يمكن القول ان النظرية المكررة الحالية دقيقة وبسيطة وفعالة لتحليل السلوك الاهتزازي للصفائح المركبة

الكلمات المفتاحية: المواد المركبة، الاهتزاز الحر، نظرية تشوه القص العرضي، الصفائح المكسدة.