



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique
Université de Tissemsilt



Faculté des Sciences et de la Technologie
Département des Sciences et de la Technologie

Mémoire de fin d'études pour l'obtention du diplôme
de Master académique en

Filière : **Génie civil**

Spécialité : **Structures**

Présentée par : **KALALUKA Sibeso**

Thème

Analyse de la stabilité des structures (2D) non-homogènes

Soutenu le, 11 Juin, 2023.

Devant le Jury :

Bouزيد Haythem	Président	M.C.A.	Univ-Tissemsilt
Bourada Fouad	Encadrant	M.C.A.	Univ-Tissemsilt
Adim Belkacem	Examineur	M.C.A.	Univ-Tissemsilt

Année universitaire : 2022-2023

Remerciements

Remerciements

Je voudrais remercier mon Père céleste et mon frère aîné Jésus-Christ pour la volonté et la force qui m'ont permis de mener à bien ce projet malgré toutes les épreuves et les jours difficiles que j'ai traversés.

Je n'oublie pas ma très chère mère, qui n'a jamais cessé de m'encourager et de me soutenir, même lorsque j'avais l'impression de ne pas pouvoir continuer. Sa foi en moi m'a été d'un grand secours, tout comme son amour pour moi.

L'une de mes chansons préférées dit que la fin du voyage n'est pas du tout la fin, mais que le voyage est toujours le trésor et, en vérité, le temps que j'ai passé ici et cette période de recherche m'ont aidé à comprendre le sens de cette phrase. Ce voyage a été mon trésor, avec tous ses moments difficiles et heureux. En outre, cela n'aurait pas été possible sans l'aide de mes nombreux professeurs, pour lesquels j'aimerais exprimer mes remerciements les plus sincères à :

Le Professeur BOURADA Fouâd, mon encadreur, pour le temps qu'il a consacré à la transmission de son savoir et pour la patience avec laquelle il a supporté ce travail avec moi. Ses qualités humaines et scientifiques, ses conseils et son enthousiasme m'ont été très bénéfiques durant cette période.

Je tiens également à remercier le Chef du Département des Sciences et Technologies, Monsieur Kherrab, pour son soutien constant, sa disponibilité et ses précieux conseils qui m'ont permis de surmonter les différentes difficultés que j'ai rencontrées. A tous les professeurs du département de génie civil, merci.

A toutes les personnes qui m'ont aidé de près, Macklins et Waafa, et aussi de loin par le fruit de leur savoir tout au long de mon parcours scolaire.

Dédicace

Dédicace

Je dédie ce travail à mes adorables frères et sœur ; Nkisu, Buumba et Sikuniso, pour avoir cru en moi.

À mes chers parents pour leur amour et leur soutien financier.

À tous mes proches , mes amis et mes collègues, qui m'ont aidé et m'ont béni par leur tendre amour et leur sollicitude à mon égard ; merci.

En mémoire de mon défunt père, Kalaluka Kwibisa, je dédie ce travail.

Résumé

Résumé

Ce travail de recherche étudie l'analyse du flambement des structures hétérogènes (2D) simplement appuyées en utilisant une nouvelle théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé. Le modèle proposé ne contient que quatre variables inconnues ce qui est réduit par rapport aux autres modèles similaires. La formulation développée prend en compte l'effet de la déformation de cisaillement transverse et donne une distribution parabolique des contraintes de cisaillement transverse à l'aide de la nouvelle fonction de gauchissement hyperbolique simple sans l'exigence des facteurs de correction de cisaillement. Le module de Young de la plaque fonctionnellement graduée (FGM) est calculé à l'aide de la loi de puissance. Les équations différentielles d'équilibre sont dérivées par le principe des travaux virtuels et la solution de forme fermée d'une plaque rectangulaire simplement appuyées soumise à un chargement axial dans le plan est résolue par la solution de Navier. Les résultats numériques obtenus sont validés en les comparant avec ceux de la théorie classique des plaques, la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre et les résultats de la théorie raffinée des plaques trouvés dans la littérature ouverte. Plusieurs études paramétriques sont présentées pour examiner l'impact de l'indice de puissance, la géométrie et les rapports de dimension, la distribution des matériaux et du type de chargement sur la charge critique uni-axiale et bi-axiale de flambement des plaques FG simplement appuyées. En conclusion, on a constaté que cette théorie est non seulement simple mais très comparable aux théories de déformation du premier ordre et d'ordre supérieur.

Mots clés : Analyse de flambement, Théorie de déformation de cisaillement, Non homogène, Principe des travaux virtuels, Solutions de Navier, Charge critique de flambement.

Abstract

Abstract

This research work, investigates the buckling analysis of heterogeneous (2D) simply supported structures using a novel higher order shear deformation theory. The proposed model contains only four unknown variables which is reduced compared to the others similar model. The developed formulation takes into account the transverse shear deformation effect and gives a parabolic distribution of the transverse shear stresses with the help of the new simple hyperbolic warping function without requiring any shear correction factors. The Young modulus of the functionally graded plate (FGM) is computed using the power law. The stability differential equations are derived by the virtual works principle and the closed form solution of a simply supported rectangular plate subjected to in-plane axial loading are resolved by Navier's solutions. The obtained numerical results are validated by comparing with the classical plate theory, first-order shear deformation theory and the refined plate theory results found in the open literature. Several parametric studies are presented to examine the impact of the power index, the geometry and dimension ratios, the material distribution and the loading type on the uniaxial and biaxial critical buckling load of the simply supported FG plates. In conclusion, we found that this theory is not only simple but very comparable to the first-order and higher-order deformation theories.

Keywords: Buckling analysis, Shear deformation theory, nonhomogeneous, virtual works principle, Navier's solutions, critical buckling load.

ملخص

ملخص

يدرس هذا العمل البحثي في تحليل الإنبعاج للهياكل الغير متجانسة (ثنائية الأبعاد) المدعومة ببساطة باستخدام نظرية جديدة لتشوه القص ذات ترتيب أعلى. يحتوي النموذج المقترح فقط على أربعة متغيرات غير معرفة والتي تم تقليلها مقارنة بالنماذج الأخرى المماثلة. تأخذ الصيغة المطورة في الاعتبار تأثير تشوه القص العرضي وتعطي توزيعًا مكافئًا لضغوط القص العرضي بمساعدة الدالة الجديدة للإعوجاج زائدية بسيطة دون الحاجة إلى أي معاملات تصحيح القص. يُحسب المعامل يوتغ للصفحة المتدرجة وظيفيًا (FGM) باستخدام قانون القوة. يتم اشتقاق المعادلات التفاضلية للثبات من خلال مبدأ الأعمال الافتراضية ويتم حل الشكل المغلق للصفحة المستطيلة المدعومة ببساطة والتي تخضع للتحميل المحوري داخل المستوى بواسطة حلول نافيي. يتم التحقق من صحة النتائج العددية التي تم الحصول عليها من خلال المقارنة مع نظرية الصفائح الكلاسيكية ونظرية تشوه القص الدرجة الأولى ونتاج نظرية المكررة للصفائح الموجودة في الأدبيات المفتوحة. تم تقديم العديد من الدراسات البارامترية لفحص تأثير مؤشر القوة ، ونسب الهندسة والأبعاد ، وتوزيع المواد ونوع التحميل على حمل الإنبعاج الحرج أحادي المحور وثنائي المحور للصفائح المتدرجة وظيفيًا المدعومة ببساطة. في الختام ، وجدنا أن هذه النظرية ليست بسيطة فحسب ، ولكنها قابلة للمقارنة أيضًا مع نظريات التشوه من الدرجة الأولى وذات الرتبة الأعلى.

الكلمات الرئيسية : تحليل الإنبعاج ، نظرية تشوه القص ، الغير المتجانسة ، مبدأ الأعمال الافتراضية ، حلول نافيير ، الحمل الحرج للإنبعاج.

Tableau des matières

Tableau des matières

Remerciements	i
Dédicace	ii
Résumé	iii
Abstract	iv
ملخص	v
Sommaire	vi
Table des matières	vi
Liste des figures	x
Liste des tableaux	xiv
Liste des notations et symboles	xv
Introduction générale	1

Chapitre I : Généralités sur les matériaux FGM

I.1. Introduction	5
I.2. Matériau composite	5
I.2.1 Définition	5
I.2.2 Compositions des matériaux composites	6
I.2.2.1 Matrices	7
I.2.2.2 Les charge et additifs.	9
I.2.2.3 Renforts.	9
I.2.3 Comparaison des propriétés mécanique de différentes fibres de renfort	10
I.2.4 La classification de matériaux composites suivant la nature des constituants.	11
I.2.4.1 Selon la nature de la matrice.	11
I.2.4.2 Selon la nature du renfort	11
I.2.5 Disposition des fibres.	12
I.2.6 Avantages et inconvénients des matériaux composites.	12
I.2.6.1 Les Avantages.	12
I.2.6.2 Les inconvénients.	13
I.2.7 Comment le choisir ?	13
I.2.8 Architecture des matériaux composites	14
I.3 Matériaux fonctionnellement gradues (FGM).	14

I.3.1 Définition.	14
I.3.2 Histoire de développement des matériaux fonctionnellement gradués.	15
I.3.3 Le concept de matériaux fonctionnellement gradue.	17
I.3.4 Utilisation prévisionnelle des matériaux (FGM) dans le domaine du génie civil.	20
I.3.4.1 Les chaussées rigides (Functionally graded concrete Materials for Rigid Pavements).	20
I.3.4.2 Les chaussées souples.	21
I.3.4.3 Les grands vitrages dans les zones chaudes.	21
I.3.4.4 Les tunnels.	22
I.3.4.5 Les joints dans la charpente métallique.	22
I.3.5 Les matériaux composite traditionnels et matériaux FGM.	22
I.3.5 Quelques utilisation générale des (FGM).	24
I.3.6 Le Béton à gradient des propriétés.	24
I.3.6.1 Autres matériaux à gradient de propriétés.	25
I.3.7 Ingénierie de fabrication FGM.	27
I.3.7.1 Coulage en bande (Tape Casting).	27
I.3.7.2 Compactions sèche des poudres.	28
I.3.7.3 Coulages séquentiels en barbotine (slip casting).	28
I.3.7.4 Projection plasma.	29
I.3.7.5 Dépôts d'électro sphères.	30
I.3.7.6 Processus d'évaporation.	30
I.3.7.7 Frittage et infiltration.	30
I.3.7.8 Implantations ioniques (Sputtering).	30
I.3.7.9 Frittage laser différentiel.	31
I.3.7.10 Dépôts de centrifugation.	31
I.3.8 Lois de mélanges.	32
I.3.9 Propriétés matérielles de la plaque P-FGM.	34
I.3.9.1 Propriétés matérielles des plaques (S - FGM).	35
I.3.9.2 Propriétés matérielles de la plaque (E-FGM).	36
I.4 Conclusion.	37

Chapitre II : Stabilité et flambement.

II.1	Introduction	38
II.2	Définition de la stabilité	39
II.2.1	Analyse de la stabilité	39
II.3	Définition du flambement	40
II.3.1	Flambement en génie civil	42
II.3.2	Types de Flambement	47
II.3.3	Charge critique du flambement	48
II.3.4	Contrainte critique du flambement	48
II.3.5	Flambement des plaques FGM	48
II.3.6	Qu'est-ce que le flambement des plaques FGM ?	49
II.4	Analyse de la stabilité de structures 2D non homogènes	49
II.5	Analyse de stabilité et flambement	49
II.6	Pourquoi est-il important de déterminer la charge critique de flambage d'une structure ?	50
II.7	Analyse de la stabilité de structures 2D non homogènes	50
II.8	Conclusion	51

Chapitre III : Théories des plaques

III.1	Les théorie des plaques.	52
III.1.1	Développement des théories des plaques (Méthode de Navier)	53
III.1.2	Définition de la plaque	53
III.1.3	Domaines d'application des plaques	54
III.1.4	Catégorie de théorie des plaques	54
III.2	Les différents modelés des structures composites dans l'élasticité bidimensionnelle	54

III.2.1 La théorie des plaques minces ou le classique des plaques (CPT)	54
III.2.2 La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (First Shear Deformation Theory) FSDT.	56
III.2.2.1 Facteur de correction	58
III.2.3 Théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevée (HSDT)	59
III.2.4 Théories raffinées d'ordre élevé à quatre variables	62
III.3 Conclusion	63

Chapitre IV: Formulation théorique.

IV.1. Introduction	65
IV.2. Les Formulations théoriques	65
IV.2.1. Plaques P-FGM	65
IV.2.2. Le champ de déplacement	66
IV.2.3. Les équations constitutives des plaques	67
IV.2.4. Les équations d'équilibre.	68
IV.2.5. Solutions analytiques et conditions aux limites.	70
IV.3. Conclusion.	72

Chapitre V : Présentation et discussions des résultats.

V.1 Introduction	73
V.2 Résultats et discussions	73
V.2.1 Plaques simplement appuyée en FGM et types de chargement	73
V.2.2 Validation	74
V.3 Etude paramétrique	86
V.4 Conclusion	95
Conclusion générale	96
Références bibliographiques	98

Liste des figures

Liste des figures

Chapitre I : Généralités sur les matériaux FGM

Figure I.1 Classes des matériaux	6
Figure I.2 Illustration schématique d'un matériau composite	7
Figure I.3 Types de matrices	7
Figure. I.4 Types des renforts	10
Figure. I.5 Courbe de traction de différentes fibres de renfort	11
Figure. 1.6 Classification des matériaux composites selon la nature du renfort	11
Figure I.7 Disposition des fibres	12
Figure I.8 Structures de matériau composite	14
Figure I.9 Fraction volumiques phases constitutives gradues dans un seul sens d'un FGM	15
Figure I.10 Schéma de la hiérarchie de FGM	16
Figure I.11 Les concentrations de contraintes dans les panneaux de protection thermiques	18
Figure I.12 Protection thermique	19
Figure I.13 Variation continue de la microstructure (schématisé et photo)	19
Figure I.14 La variation de la fraction volumique des fibres dans la chaussée rigides	21
Figure I.15 La variation de la fraction volumique des constituants entre la couche : la couche de la Grave Bitume et la couche de roulement	21
Figure I.16 Répartition des composants des matériaux	23
Figure I.17 Structure de mur de chantier en pente, source : ILEK	25
Figure I.18 Construction en fibre de verre avec éléments gradués en silicone perméable. sous: Test d'étanchéité, source : ILEK	26

Figure I.19 Infiltration graduelle de mousse de polyuréthane réticulée avec la colle de ciment en vue de la variation de rigidité, source: ILEK	26
Projection Figure I.20 Transition continue des matériaux (du bois à l'aluminium), photomontage, source :ILEK	27
Figure I.21 Technologie pour développer des matériaux avec des gradients de propriétés physiques	27
Figure I.22 Principe de la méthode coulage en bande	28
Figure I.23 Projection par plasma pour former un matériau thermoélectrique	30
Figure I.24 Disposition du processus de frittage laser différentiel	31
Figure I.25 Illustration du processus de dépôt de spin	32
Figure I.26 Géométrie de la plaque en FGM	33
Figure I.27 La variation de la fraction volumique dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM	34
Figure I.28 La variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM	35
Figure I.29 La variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM	36
Figure I.30 La variation du module de Young dans la plaque E-FGM	37

Chapitre II : Stabilité et flambement

Figure II.1 Charlie Chaplin and his stick	38
Figure II.2 Flambement avec charges de compression	40
Figure II.3 Flambement associé à deux forces de compression	41
Figure II.4 Le pont du canyon de Pfeiffer sur l'autoroute 1 à Big Sur, en Californie	43
Figure II.5 Flambement total du fil supérieur d'une poutre grillagée d'un pont de chemin de fer (Russie, vers 1890)	43
Figure II.6 Flambement des éléments en charpente métalliques de la différente hauteur	44
Figure II.7a Flambement des éléments poteaux en béton armé	44

Figure II.7b Flambement des éléments poteaux en béton armé	45
Figure II.8 Formes de flambement des poteaux	46

Chapitre III: Théorie des plaques

Figure III.1 Schéma d'une plaque	53
Figure III.2 Schématisation des déformations dans le cas de la théorie CPT	56
Figure III.3 Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin Reddy(1997)	57
Figure .III.4 Approximations de la contrainte	58
Figure III.5 Comparaison de la théorie d'ordre élevé (HSDT) avec (CPT) et (FSDT)	60

Chapitre V: Présentation et discussions des résultats.

Figure V.1 Géométrie et conditions de chargement d'une plaque FG	73
Figure V.2 La variation de la charge critique adimensionnelle du flambement en fonctions des rapports d'hétérogénéité E_c/E_m	87
Figure V.3 La variation de la charge critique adimensionnelle du flambement en fonctions des rapports d'hétérogénéité E_c/E_m	88
Figure V.4 La variation de la charge critique adimensionnelle du flambement en fonctions des rapports d'hétérogénéité E_c/E_m	88
Figure.V.5 La variation de la charge critique adimensionnelle du flambement en fonctions des rapports d'hétérogénéité E_c/E_m	89
Figure V.6 La charge critique adimensionnelle du flambement en fonction du rapport a/b	89
Figure.V.7 La charge critique adimensionnelle du flambement en fonction du rapport a/h	90
Figure V.8 L'effet du rapport de dimension et la déformation du cisaillement transverse sur la charge critique adimensionnelle	91
Figure V.9 La variation de la charge critique adimensionnelle de plaques FGM, $p=3$, simplement appuyée sur différent type de chargement en fonction de mode	92
Figure V.10 La charge critique adimensionnelle du flambement en fonction du rapport a/h	92
Figure V.11 L'effet de la distribution de matériel a traversé l'épaisseur sur la charge critique adimensionnelle du flambement de plaque carre homogène.	93

Figure V.12 L'effet de la distribution quadratique a traversé l'épaisseur sur la charge critique adimensionnelle du flambement de plaque carre homogène.

94

Liste des tableaux

Liste des tableaux

Chapitre I : Généralité sur les matériaux (FGM)

Tableau I.1 Caractéristiques des céramiques et métaux	19
Tableau I.2 Propriétés des FGM par rapport aux composites conventionnels	23

Chapitre III : Théories des plaques

Tableau III.1 Différentes valeurs de K_s	58
Tableau III.2 Exemple de différentes fonctions connu	61

Chapitre V : Présentation et discussions des résultats.

Tableau V.1 Les propriétés des matériaux céramiques et métal	74
Tableau V.2 Convergence de charge critique adimensionnelle du flambement \bar{N}_{cr} d'un plaque rectangulaire isotropique avec ($a/h=100$) sous un chargement uniaxial de compression	75
Tableau V.3 Les valeurs de la charge critique adimensionnelle du flambement (\bar{N}_{cr}) de plaques en FGM simplement appuyée soumise à un chargement hyperbolique en fonction du rapport de géométrie et de l'indice d'hétérogénéité des matériaux	76
Tableau V.4 Vérification de la validité et l'efficacité de la présente théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevée à seulement quatre variables avec CPT et FSDT	77
Tableau V.5 Comparaison de charge de flambement critique (\hat{N}_{cr}) des plaque carre en Al/SiC ($a/h=10$).	78
Tableau V.6 L'effet de paramètre (ξ) de porosité sur la charge critique adimensionnelle du flambement (\hat{N}_{cr}) d'un plaque Al/SiC P-FG simplement appuyée ($p=5, a/b=1$ and $a/h=10$)	79
Tableau V.7 Charge critique adimensionnelle du flambement N_{cr} de plaque FG soumis sous chargement uni-axial compression suivant X ($a/b=1$)	80
Tableau V.8 La comparaison de la charge critique adimensionnelle du flambement	82
Tableau V.9 La comparaison de la charge critique adimensionnelle du flambement \hat{N}_{cr} des plaques simplement appuyée.	83

Liste des notations et abréviations

Liste des notations

$\{ \}$	Vecteur colonne.
$[]$	Matrice.
Σ	Sommation.
\int	Intégrale.
V_c	Fraction volumique.
a, b	La longueur et largeur de la plaque.
h	L'épaisseur de la plaque.
p	Indice de fraction volumique.
P_m	Propriété du métal.
P_c	Propriété de la céramique.
ν	Le coefficient de Poisson.
E_1, E_2	Module de Young.
$E(z), E_c, E_m$	Les modules d'élasticité du FGM, céramique, métal.
$\gamma_{xz}, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}$	Composantes de déformation.
$\tau_{xz}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$	Contrainte de cisaillement.
σ_{xx}, σ_{yy}	Contrainte normale.
ε	Contrainte de déformation.
$f(z)$	Fonction de forme.
u, v, w	Les composantes du déplacement.
x, y, z	Les coordonnées cartésiennes rectangulaires.
w_b	Déplacement dû à la flexion.

w_s	Déplacement dû au cisaillement.
u_0, v_0, w_0	Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque.
ϕ_x, ϕ_y	Les rotations autour des axes x, y et z.
P_x, P_y	Moment supplémentaire du au cisaillement transverse.
θ_x, θ_y	Les rotations autour des axes x et y.
$u_{mn}^0, v_{mn}^0, w_{bmn}^0$ et w_{smn}^0	Les coefficients de déplacement maximum inconnus.
A, B, D, B^S, D^S et H^S	Les composantes de rigidité.
$g(z)$	Dérivée de la fonction de cisaillement.
k^b	La courbure due à la flexion.
k^s	La courbure due au cisaillement.
δU	L'énergie de déformation virtuelle.
δV	Le travail virtuel externe.
∂	Dérivée partielle.
i, j	Des nombres naturels.
ω, λ, μ	Fréquence naturelle.
A	L'aire de la plaque.
$f(z)$	Fonction de cisaillement.
$\delta u, \delta v, \delta w$	Champ virtuel de déplacement.
λ, μ	Les pulsations.
K_s	Facteur de correction.
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Déformation dans la direction x,y et z

Liste des abréviations

Abréviation	En français	En anglais
F.G.M.	Matériaux fonctionnellement gradués	Functionally Graded Material
C.P.T.	Théorie classique des plaques	Classical plate theory
F.S.D.T.	Théorie de déformation de cisaillement du premier ordre	First shear deformation theory
H.S.D.T.	Théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé	Higher order shear deformation theory
<i>Hy.S.D.T</i>	Théorie de déformation hyperbolique de cisaillement d'ordre élevé	Higher order hyperbolic shear deformation theory
<i>P – FGM</i>	Loi de Puissance	Power law
<i>S – FGM</i>	Loi de Sigmoide	Sigmoid law
<i>E – FGM</i>	Loi d'exponentielle	Exponential law
<i>F.E.M.</i>	Méthode des éléments finis	Finite element method
<i>Al</i>	L'aluminium.	Aluminium
<i>Al2O3</i>	Oxyde d'aluminium.	Aluminium oxide
P.V.D	-	Powder Vapor Deposition.
C.V.D	-	Chemical Vapor Deposition

S.H.S	-	Self-propagating High-temperature Synthesis.
EBD	Le dépôt par faisceau d'électrons.	-
IBD	Le dépôt par faisceau ionique.	-
3D	3D Tridimensionnelle.	Tri-dimensional
2D	Bidimensionnelle.	Bi- dimensional

Introduction générale

Depuis leur invention par des scientifiques japonais dans les années 1980, les matériaux à fonctionnellement graduée (FGM) sont de plus en plus utilisés dans de nombreux domaines tels que l'aérospatiale, utilisé pour fabriquer des pièces structurelles résistantes à la chaleur telles que des fuselages d'avions et des parois de centrales nucléaires, l'énergie nucléaire, la construction, l'automobile, la biomécanique et l'optique. Les FGM courants sont constitués de matériaux céramiques et métalliques. La céramique offre une résistance aux hautes températures, tandis que les métaux ont une bonne ténacité. Par conséquent, comprendre le comportement de FGM est très important. L'étude du comportement statique et dynamique des structures dans les FGM est devenue un sujet intéressant pour les chercheurs du monde entier. Les matériaux fonctionnellement graduée (FGM), comme leur nom l'indique, sont des matériaux composites dont les propriétés varient continuellement dans une ou plusieurs directions. Ses propriétés changent continuellement dans une ou plusieurs directions. La plaque fonctionnellement graduée est couramment utilisée pour les applications structurelles et les propriétés varient avec l'épaisseur. La variation continue des propriétés, qui peuvent s'effectuer selon une loi de puissance ou une loi exponentielle, assure une variation régulière de la résistance au cisaillement transversal dans l'épaisseur.

Plusieurs articles de recherche sont disponibles pour les analyses structurelles des FGP utilisant une solution d'élasticité ainsi que diverses théories de déformation de cisaillement. Les solutions 3D précises de Kashtalyan (2004) et Zenkour (2007) servent de référence pour l'analyse. Trouver une solution exacte est un processus complexe et n'est possible que dans certains cas particuliers. Par conséquent, il est nécessaire de développer une théorie de déformation de cisaillement qui puisse être résolue avec une précision raisonnable d'une manière beaucoup plus simple.

La plupart des théories de déformation de cisaillement sont bidimensionnelles et supposent une condition de contrainte plane qui néglige les contraintes normales transversales. La théorie de la déformation la plus fondamentale est la théorie classique des plaques (CPT) qui suppose que la section plane et perpendiculaire à l'axe neutre avant déformation reste plane et perpendiculaire après la déformation.

La théorie classique des plaques (CPT), basée sur l'hypothèse de Kirchhoff-Love, ne convient qu'aux plaques minces car elle néglige les effets de la déformation de cisaillement transversal. Pour les plaques modérément épaisses, les résultats numériques calculés à l'aide de CPT donnent une déflexion plus faible, une fréquence propre et une charge de flambement

plus élevées par rapport aux résultats expérimentaux. Feldman et Aboudi (1997), Javaheri et Islami (2002) et Chi et Chung (2006), ont obtenu une réponse statique des FGP en utilisant la CPT. L'inconvénient du CPT a été surmonté par la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT) proposée par Reissner (1945) et Mindlin (1951) qui considère l'effet de la déformation de cisaillement transverse. Bien que la FSDT décrit plus réellement le comportement des plaques minces à moyennement épaisses, la distribution parabolique de la contrainte de cisaillement transversale à travers l'épaisseur de la plaque n'est pas correctement reflétée car les déformations transversales sont constantes sur toute l'épaisseur de la plaque et nécessite un facteur de correction de cisaillement pour annuler les déformations de cisaillement transversales sur le haut et le bas de la plaque. . La détermination de ce facteur n'est pas simple car il dépend du chargement, des conditions aux limites, des matériaux etc... (Praveen et Reddy 1998, Chinosi et Croce 2007, Singha et al 2011, Alieldin et al 2011, Wen et Aliabadi 2012 et Castellazzi et al 2013), ont adopté la FSDT pour l'analyse statique des FGP. Nguyen et al (2008), a également utilisé la FSDT mais avec un facteur de correction de cisaillement modifié, ils ont montré que le facteur de correction de cisaillement pour les FGP dépend du indice de puissance.

La théorie de la déformation de cisaillement d'ordre élevée (HSDT) de Reddy (2000), qui est libre de tout facteur de correction de cisaillement et satisfait la condition de déformation de cisaillement transversale nulle au haut et le bas de la plaque. La formulation tient compte du couplage thermomécanique, de la dépendance temporelle et de la non-linéarité géométrique de type Von – Kármán. Bodagi et al. (2010) ont utilisé la théorie de déformation de cisaillement du troisième ordre de Reddy et la solution de type Levy pour l'analyse du flambement de plaques rectangulaires épaisses fonctionnellement graduée. Toujours avec cinq inconnues de déplacement, Zenkour (2006) a utilisé sa théorie généralisée de déformation de cisaillement pour étudier les comportements statiques d'une plaque rectangulaire fonctionnellement graduée simplement supportée soumise à une charge transversale uniforme. Utilisant la méthode des éléments finis basée sur la théorie de déformation de cisaillement d'ordre supérieur à neuf inconnues, Pandya et Kant (1988) ont étudié les déflexions, les contraintes dans le plan et inter laminaires de plaques composites stratifiées épaisses. En utilisant le champ de déplacement à onze inconnus et la méthode des éléments finis, Talha et Singh (2010) ont analysé la réponse statique et la fréquence naturelle des plaques fonctionnellement graduées. Les termes d'ordre supérieur du champ de déplacement sont déterminés en faisant disparaître les contraintes de cisaillement transversales sur les surfaces

supérieure et inférieure de la plaque. Kim et Reddy (2013) ont également utilisé quelques théories du troisième ordre basées sur les contraintes avec onze inconnues pour analyser la flexion, la vibration et comportement au flambement des plaques FG par une méthode analytique. Sur la base des théories raffinées d'ordre supérieur, Jha et al. (2012) ont présenté des solutions analytiques pour l'analyse des vibrations libres de plaques rectangulaires fonctionnellement graduées simplement supportées. La théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevée (HDST) a fourni de meilleurs résultats par rapport au CPT et au FSDT, mais les chercheurs ont obtenu des résultats plus précis en adoptant diverses théories de déformation de cisaillement non polynomiales. En théories de déformation de cisaillement, les déplacements dans le plan sont fonction de la coordonnée de l'épaisseur. La fonction peut être trigonométrique, exponentielle ou hyperbolique.

Touretier (1991) a recommandé la fonction sinusoidale, Zenkour (2013) a suggéré la théorie des quatre variables avec la même fonction. Thai et Vo (2013) ont également recommandé une fonction sinusoidale, mais ils ont considéré le déplacement transversal dû à la flexion ainsi qu'au cisaillement. La fonction tangentielle était suggérée par Mantari et al (2012). Soldatos (1992), Akvasi (2014) et Mahi et al (2015), ont suggéré une fonction de déformation de cisaillement hyperbolique pour l'analyse. Soldatos (1992) a utilisé fonction sinus hyperbolique; tandis que Akvasi (2014) et Mahi et al (2015), suggérée une fonction tangentielle de déformation de cisaillement hyperbolique. La fonction trigonométrique inverse est suggérée par Thai et al (2014). La forme exponentielle de champ de déplacement a été utilisée par Karma (2003) et Mantari et al (2011). Alors que, Aydogdu (2009) a utilisé la forme logarithmique du champ de déplacement. Mantari et al (2012/2014.), ont adopté la combinaison de la fonction trigonométrique et exponentielle pour l'analyse. Grover et al (2013) et Nguyen et al (2014), ont proposé une théorie avec une fonction hyperbolique inverse. La fonction hyperbolique inverse sinusoidale proposée par Grover et al. (2013) a été adopté récemment par Nguyen (2014) pour l'analyse de différents FGP montrant que la fonction donne des résultats précis.

Dans ce travail, on s'intéresse sur l'analyse de stabilité des structures 2D non-homogènes en utilisant une nouvelle théorie de déformation d'ordre élevée.

Ce travail, s'articule autour de cinq chapitres.

Le premier chapitre présente les matériaux composites et à fonctionnellement graduées, leurs propriétés, leurs principales méthodes de fabrication et leurs domaines d'application.

Introduction générale

Le deuxième chapitre se focalise sur la stabilité et le flambement en génie civil et le flambement en général.

Le troisième chapitre présente une revue différentes théories des plaques.

Le quatrième chapitre est consacré sur le développement de la nouvelle théorie utilise dans cette travail.

Dans le cinquième chapitre, nous présenterons les résultats obtenus par l'exécution des différents codes de calculs développés dans le cadre de cette recherche.

En fin, une conclusion générale sur l'ensemble de ces travaux permet de revenir sur les résultats importants mis en avant.

CHAPITRE I:
Généralités sur les
FGM.

I.1 Introduction.

Pour bien comprendre tout l'idéal des matériaux et de la construction, l'histoire joue un rôle majeur car il n'y a rien de nouveau sous le soleil. Vers 7000 avant notre ère, les hommes ont commencé à utiliser le "wattle and daub", un treillis composé de broussailles renforcées par un "daub" collant de terre, d'argile, de bouse ou de fibres, ainsi que la brique séchée à l'air, un composite de boue et d'argile ou de paille. Pour créer les premiers bâtiments en papier mâché, les Chinois ont combiné de la pâte à papier avec de la colle pendant la période Han. On attribue aux Mésopotamiens la première utilisation de matériaux composites. L'ingénieur romain Vitruve a décrit pour la première fois le béton, qui est encore aujourd'hui le matériau composite le plus utilisé, aux alentours de 25 avant notre ère. Il a utilisé du sable et du ciment de chaux pour fabriquer de nombreuses itérations du composite.

Dans le choix des matériaux de construction, il y a de nombreuses propriétés à considérer, en particulier la société d'aujourd'hui qui est sensible au changement climatique, préconisant ainsi des matériaux respectueux de l'environnement. Les propriétés sont regroupées dans Propriétés physiques, mécaniques, chimique, électriques, magnétiques et thermiques.

Généralement, les matériaux économiques en matière de durabilité et de haute résistance (stable) sont des matériaux idéaux.

Les matériaux composites apportent la rigidité, légèreté et robustesse. Mais leur problème est le problème d'interface. En réponse à cet échec, des matériaux intelligents ou matériaux composites avancés ou matériaux fonctionnellement gradué ou AFMG ont été inventés dans les années 1980. L'innovation des matériaux fonctionnellement gradué (FGM) a également fortement réduit le risque de délimitation qui est le premier signe de rupture. Imaginez à quel point ces matériaux sont intelligents qu'il élimine même les premiers symptômes.

Dans ce chapitre, nous allons essayer de comprendre ce que sont les matériaux composites, leurs propriétés et quelques notions de base à connaître à leur sujet.

I.2 Matériaux composites.**I.2.1 Définition.**

Par définition, c'est un matériau composé de deux matériaux ou plus non miscible et qui ont des caractéristiques différents. Mercier et al. (1999) ont défini que un matériau composite est constitué de deux ou de plusieurs matériaux différents qui combinent de manière

synergique leurs propriétés spécifiques. Pour leurs résistance, légèreté et une rigidité élevée, les composites sont largement acceptés aujourd'hui.

Les composites naturels existent également dans les plantes, les animaux et d'autres parties de la nature. Quelques exemples de ceux-ci sont : Bois, Os, Granit et Bambou. Si on regarde le bois par exemple, il est composé de fibres de cellulose et de lignine qui est plus faible. Deux matériaux faibles indépendamment mais lorsqu'ils sont combinés, le bois est le résultat. Les matériaux composites sont également conçus comme le béton, le contreplaqué, la fibre de verre, les cermets, etc.

En générale, les matériaux sont classés en trois classes (voir **FigI.1**), « Les matériaux composites ne forment pas une classe de matériaux à part, Ils sont obtenus par mélange de matériaux provenant chacun de l'une des trois classes précédentes ».

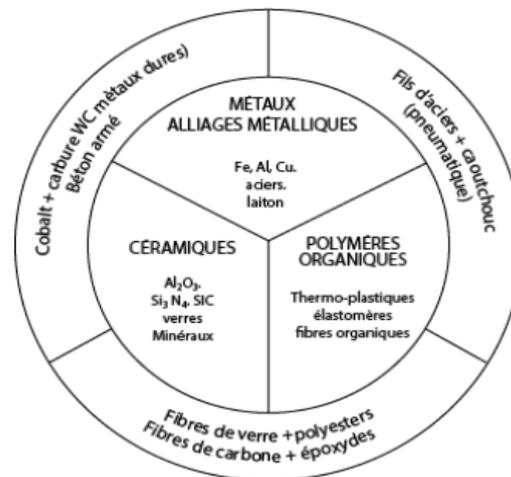


Figure I.1 Classes des matériaux.

I.2.2 Compositions des matériaux composites.

Généralement, les composites sont constitués des renforts et matrice, l'ossature et protection respectivement. Les renforts sont des phases discontinues qui sont réparties dans une phase continue – matrice. Pour obtenir des bonnes caractéristiques mécaniques élastiques d'un composite non endommagé, les renforts et la matrice doit être parfaitement liés et n'y pas avoir ni glissement ni séparation entre les différentes phases. La zone de transition entre les fibres et la matrice s'appelle interface. Les matériaux composites contiennent aussi des charges et aditifs.

Matériau Composite = Matrice (phase continue) + Renfort (phase discontinue).

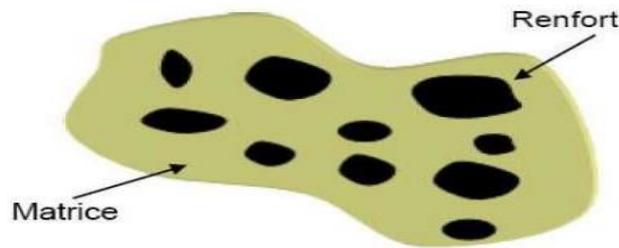


Figure I.2 Illustration schématique d'un matériau composite.

I.2.2.1 Matrices.

Une matrice est en générale une résine polymère (matière de plastique, Thermodurcissable ou Thermoplastique) qui assure :

- ✓ Cohésion entre les renforts de manière à repartir la sollicitation mécanique. (Ait Hamou et Draouche 2020) ;
- ✓ La forme finale au matériau ;
- ✓ Transmission des efforts vers le renfort ;
- ✓ Protège les renforts aux milieux agressifs.

La classification des types de matrices couramment rencontrés est donnée sur la **Figure I.3** :

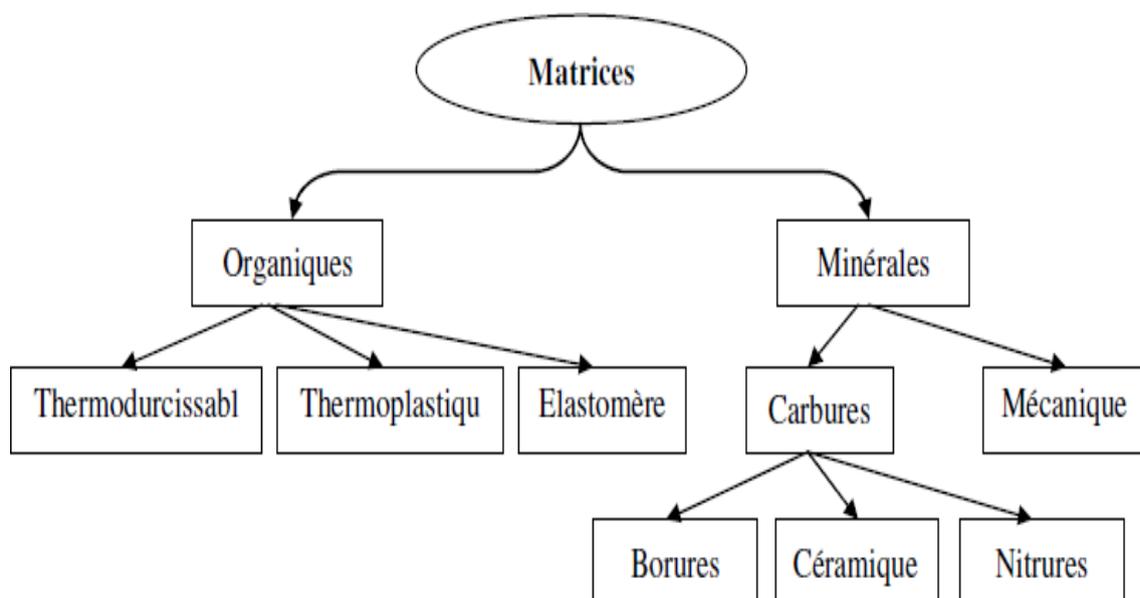


Figure I.3 Types de matrices.

Il existe un grand nombre de matériaux composites que l'on classe généralement en trois familles en fonction de la nature de la matrice.

a). Matrices organiques (CMO).

Sont les plus utilisées aujourd'hui, peu coûteuses et sont faites de matières plastiques. On peut le diviser en deux, matrices thermoplastiques et matrices thermodurcissables.

Composite à matrice organique avec

1. Fibres minérales : verres, carbone, etc...
2. Fibres organiques : Kevlar, polyamides, etc...
3. Fibres métalliques : bore, aluminium, etc...

a.1) Résines Thermoplastiques.

« Les résines thermoplastiques se ramollissent lorsqu'elles sont chauffées et deviennent de plus en plus fluides à mesure que la chaleur appliquée augmente. Le processus est totalement réversible et aucune nouvelle liaison chimique ne se crée. Ce sont des polymères dont la structure moléculaire est linéaire ou ramifiée. Lorsqu'ils sont chauffés, ils se ramollissent progressivement et peuvent être transformés par déformation plastique. Lorsqu'ils refroidissent, ils redeviennent rigides et conservent la forme donnée. La transition de l'état rigide à l'état plastique est donc réversible et se produit chaque fois que le matériau subit un cycle de chauffage ». Exemples (résines de polystyrène, d'acétal, polyamide, polypropylène etc.)

a.2) Résines thermodurcissables.

« Elles ont une structure réticulée qui leur confère la propriété d'être rigides à toute température (c'est-à-dire qu'elles n'ont pas de température de transition vitreuse). Comme elles ne sont pas exploitables à l'état rigide, l'industrie ne les produit pas dans leur structure définitive : leur production se déroule en deux étapes. Dans la première phase de polymérisation partielle, ces résines prennent une structure linéaire et présentent des caractéristiques similaires aux résines thermoplastiques, car elles peuvent passer de l'état rigide à l'état plastique après chauffage. Elles peuvent ensuite être traitées, par exemple par moulage ».

b) Matrices minérales.

On peut distinguer deux types de matrice minérale :

b.1) Matrices métalliques (CMM).

Sont composées d'aluminium, zinc ou magnésium mais les plus employées sont les métaux légers et alliages. Les matrices métalliques ont un coût très élevé, excellentes propriétés mécaniques et résistances au feu et à la température, excellente conductivité électrique et thermiques. Ses applications sont orientées vers l'automobile, l'aéronautique, et l'espace.

Composite à matrice métallique (alliage léger d'aluminium, de magnésium ou de titane) avec : Fibres minérales, métalliques ou métallo-minérales (fibres de bore revêtues de carbure de silicium Bor Sic).

b.2) Matrices céramiques (CMC).

Souvent réservées aux applications de très haute technicité et travaillent à haute température comme le spatial, le militaire et le nucléaire. Composite à matrice minérale (Céramique) avec :

- ✓ Fibres métalliques : bore ;
- ✓ Particules métalliques : cermets ;
- ✓ Particules minérales : carbures, nitrures.

I.2.2.2 Les charges et additifs.

Des charges et des additifs peuvent être ajoutés au composite sous forme d'éléments fragmentaires, de poudres ou liquide, afin de modifier ou améliorer une propriété de la matière ou pour des raisons économiques, soit d'en faciliter la mise en œuvre. (Par exemple la tenue aux chocs, résistance aux UV, la résistance au feu, anti-UV, stabilisants thermiques, anti-oxygène, hydrofuges) Berthelot (2010) Gornet (2008).

I.2.2.3 Renforts.

Dans le but d'inhiber la fissuration, assurée la fonction de résistance mécanique aux efforts et contrôler le processus de rupture fragile un matériel composite est constitué d'une ossature appelée renfort. Le renfort permet aux matériaux composites d'avoir des propriétés isotropes, anisotropes ou orthotropes.

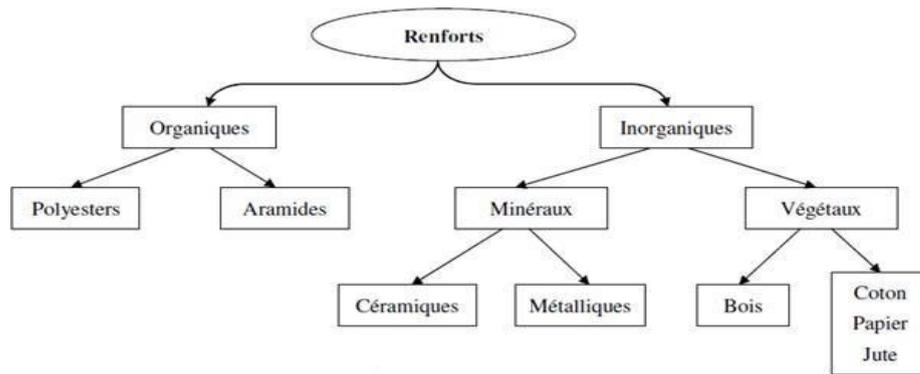


Figure I.4 Types des renforts.

Les composites artificiels sont souvent renforcés par des fibres, ou par des composants à base de fibres (toron, fibre tordues ensemble ; tissus ; mats ou nappes). Chacune d'entre elles a une application particulière spécifique à ses propriétés et son coût. Micelli et al (2020). Exemples de renfort utilisé sont :

- ✓ Fibres de verre ;
- ✓ Fibres de carbone ;
- ✓ Fibres polymères ;
- ✓ Renforts minéraux ;
- ✓ Fibres métalliques ;
- ✓ Fibres céramiques.

I.2.3 Comparaison des propriétés mécanique de différentes fibres de renfort

Leur résistance à la rupture en tractions se varie relativement entre 3000 et 5000 MPa. Les valeurs de module de Young de ces fibres sont très différentes. Elles varient dans une proportion de 1 à 7 entre la fibre de verre et la fibre de carbone haut module. Cette caractéristique a une conséquence directe sur l'élongation à la rupture des fibres.

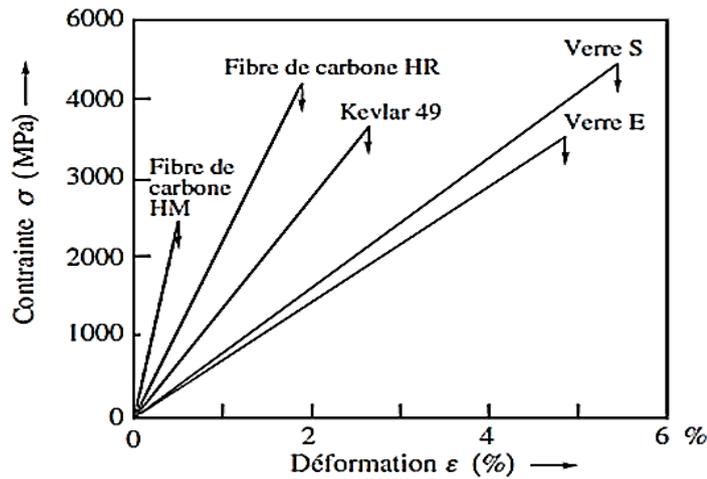


Figure I.5 Courbe de traction de différentes fibres de renfort (Mercier et al.1999).

I.2.4 La classification de matériaux composites suivant la nature des constituants.

I.2.4.1 Selon la nature de la matrice.

Les matériaux sont généralement classés en trois familles (voir I.2.2.1 matrice) :

CMP : les composites à matrice polymère (résines) ;

CMM : les composites à matrice métallique (alliages légers) ;

CMC : les composites à matrice minérale (céramique).

I.2.4.2 Selon la nature du renfort.

Les matériaux peuvent être classés en fonction du matériau de renforcement utilisé comme étant renforcé par des particules ou par des fibres.

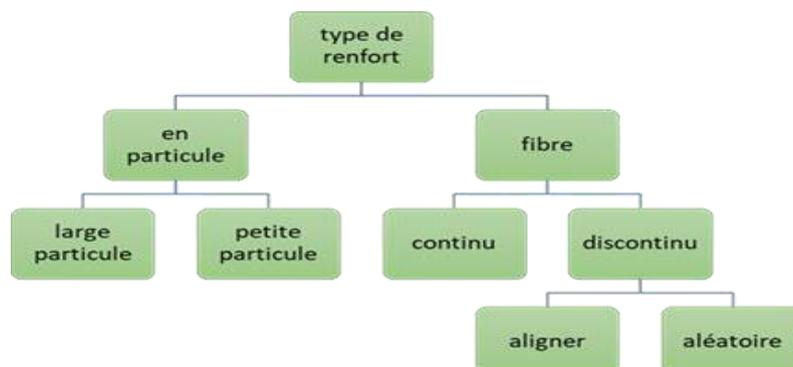
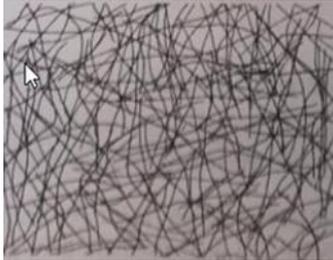


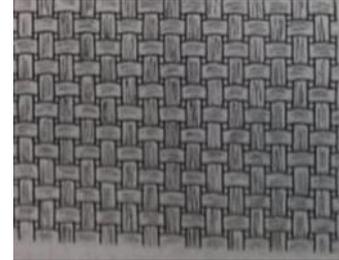
Figure I.6 Classification des matériaux composites selon la nature du renfort.

I.2.5 Disposition des fibres.

Les fibres peuvent prendre des différentes dispositions dans la matrices, quelques exemples ci-dessous : Fibres unidirectionnelles, Non tissé, Tissé, Tissage tridimensionnelle



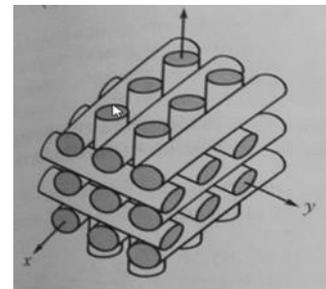
1. Non tissé



2. Tissé



3. Fibres unidirectionnelle(Fil)



4. Tissage tridimensionnel orthogonal

Figure I.7 Disposition des fibres Bailon et Darlot(2000).

I.2.6 Avantages et inconvénients des matériaux composites.

I.2.6.1 Les Avantages.

- ✓ Liberté de forme ;
- ✓ Légèreté ;
- ✓ Faible sensibilité à la fatigue ;
- ✓ Réduction du poids et du coût des jonctions ;
- ✓ Bonne isolation électrique ;
- ✓ Résistance à la corrosion ;
- ✓ Finition des surfaces sur mesure ;
- ✓ Possibilité d'intégration des fonctions ;
- ✓ Résistance élevée combinée une faible densité ;
- ✓ Préfabrication de hautes gammes en usines.

I.2.6.2 Les inconvénients.

- ✓ Cout élevée ;
- ✓ La mise en œuvre des réparations est beaucoup plus élevée ;
- ✓ Faible rigidité ;
- ✓ Absence totale de la normalisation et de certification et d'assurance ;
- ✓ Ils sont beaucoup plus sensibles à tous les impacts.

I.2.7 Comment le choisir ?

Les professionnels du composite sont les plus à même à analyser les besoins de l'entreprise et choisir le composite adéquat. En fonction de secteur d'activité et du produit souhaité fabriquer, des matériaux en composite sont prédestinés et aussi les renforts et matrices utilisés dépendront de plusieurs critères souhaités : la forme, résistance, aux chocs et à la chaleur, l'imperméabilité/isolation, les couleurs et la matière, et l'aération.

I.2.8 Architecture des matériaux composites

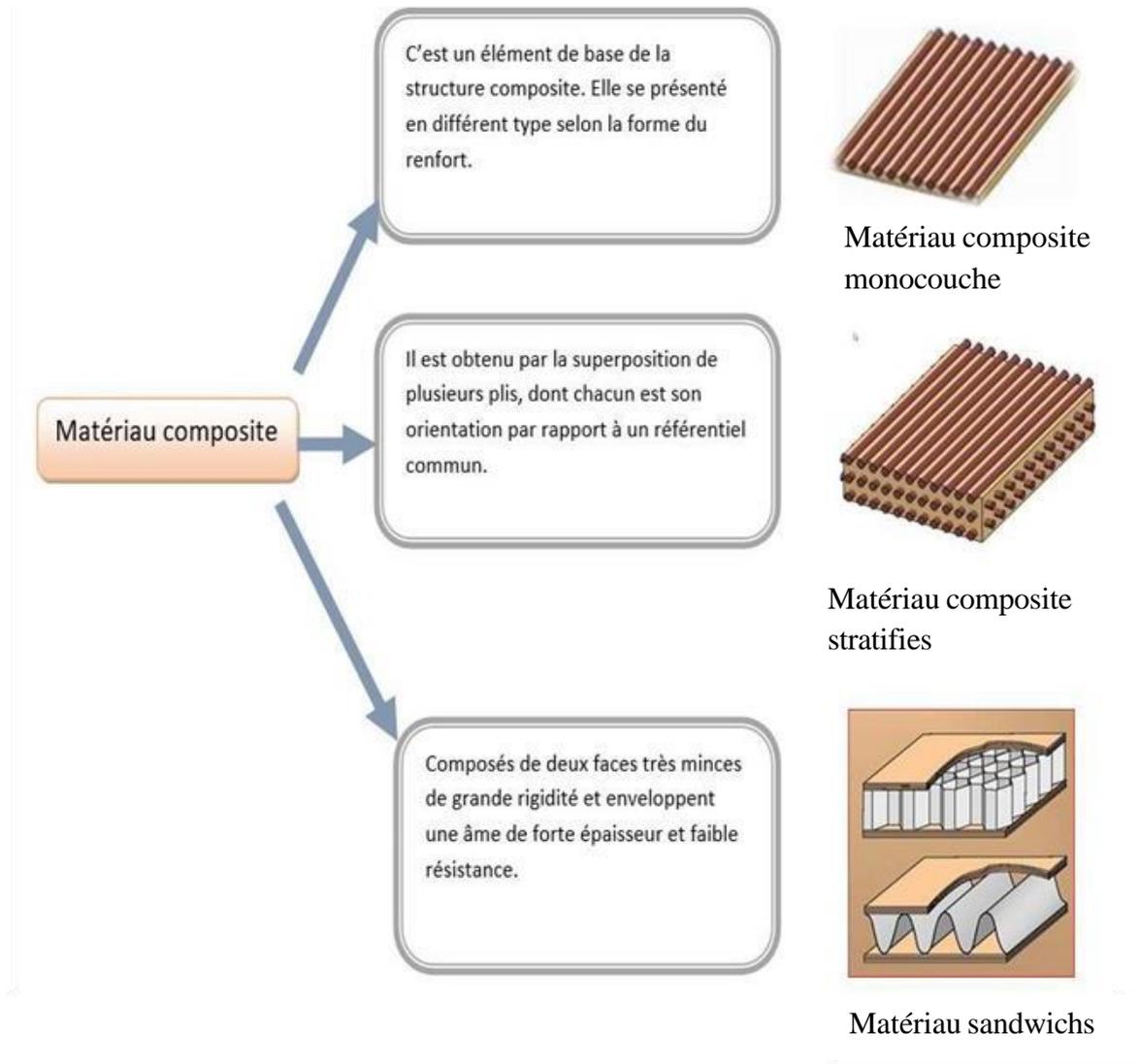


Figure I.8 Structures de matériau composite (Khemache et Ayad 2022).

I.3 Matériaux fonctionnellement gradés (FGM).

Même si les matériaux composites sont meilleurs que les matériaux ordinaires, ils ont aussi une limite. Le problème d'interface provoque un délaminage (le premier signe de rupture) sous l'effet des contraintes inter-laminaires et les matériaux fonctionnellement gradés répondent à cette limitation.

I.3.1 Définition.

Par référence à leur nomenclature anglaise (Functionally Graded Materials) appelés aussi FGM, les matériaux fonctionnellement gradés composites représentent des matériaux

composites plus développés que les composites classiques, ayant une variation graduelle et continue des fractions volumiques de chaque constituant, générant des changements en conséquence des propriétés des matériaux, Contrairement aux composites stratifiés à matrice-fibres, les FGM n'ont pas de problèmes de décollement ou de délaminage qui résultent de la grande concentration des contraintes inter-lamellaires. Ils peuvent donc allier entre les propriétés des deux constituants totalement différents sans changer leur nature.

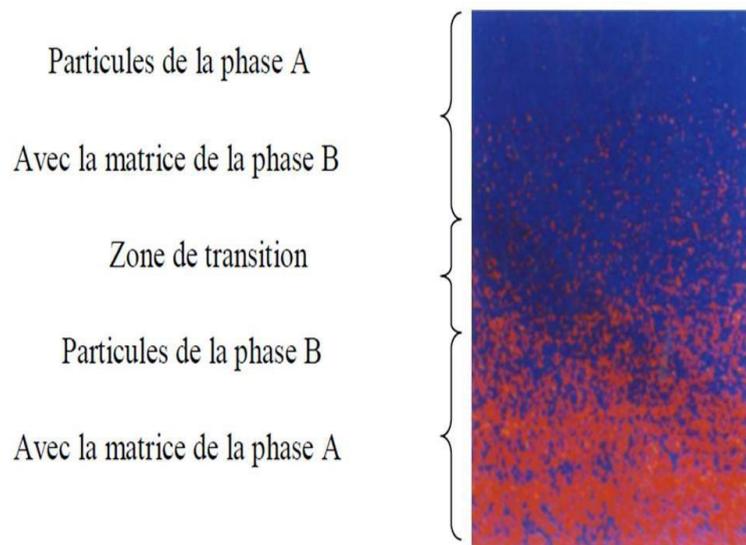


Figure I.9 Fraction volumiques phases constitutives gradues dans un seul sens d'un FGM.

I.3.2 Histoire de développement des matériaux fonctionnellement gradués.

Dans les années (1987-1989), les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales (1-10mm d'épaisseur et 30mm de diamètre) pouvant résister à des températures maximales de 1727 C° (Températures de surface) et a une gradient de températures de 727C°. En (1990-1991) le but était de réaliser des pièces de tailles plus grandes et de forme plus complexe par rapport à celle réalisées dans la première étape Abdizadeh, (1997). Pendant les années 90, non seulement les champs d'application des FGM se sont développés pour les matériaux de structures fonctionnant à haute températures, mais se sont aussi élargis a d'autres applications : biomécaniques, technologie de capteur, optique, etc... Okamura(1991).

Kaddouri (2014) a trouvé une littérature très importante sur l'utilisation de ce matériau. Cependant, utilisation des structures en FGM dans les environnements avec de grands changements de température exige la connaissance de déformation.

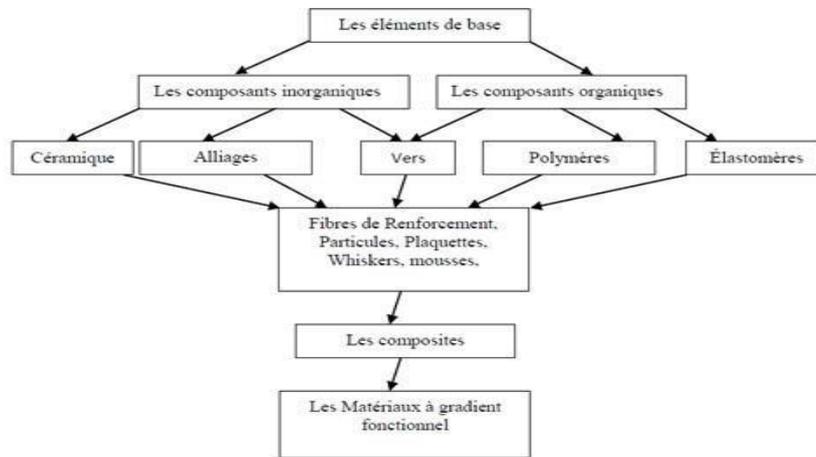


Figure I.10 Schéma de la hiérarchie de FGM.

Dans un laboratoire national d'aérospatial à Sendai du Japon en 1984, Mr Niino et ses collègues ont développé pour la première fois le concept de matériaux fonctionnellement gradus. Pour les barrières thermiques ou propriétés de blindage de chaleur. Koizumi(1997).

En 1985 un grand nombre de chercheurs de l'industrie et des institutions publiques ont uni leurs efforts pour créer un nouveau type de matériau. L'objectif principal était de construire l'enveloppe extérieure d'une navette intercontinentale commerciale. Le problème principal à résoudre était à flux de la chaleur important frappent la majorité des surfaces qui sont exposées à la friction par l'air lors de la période de rentrée d'une navette spatiale dans l'atmosphère terrestre et en même temps protéger l'intérieure contre les surchauffes.

Le gouvernement de Japon a lancé un projet national en 1987 intitulé « Recherche sur la technologie de base pour le développement des matériaux à gradient fonctionnel pour la relaxation des contraintes thermiques » avec l'intérêt de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes aérospatiaux. Dans ce projet, des scientifiques de 17 instituts de recherche gouvernementaux, d'universités et d'entreprises ont participé. Les matériaux constituant les parois des engins spatiaux sont appelés à travailler à des températures de surface de 2100K mais aucun matériau industriel à cette époque ne peut résister à une telle charge thermomécanique 1600K Koizumi (1997).

En février 1988, le « Functionally gradient materials forum » a été formé afin de diffuser les activités des projets nationaux auprès du public et de mener une enquête sur les applications possibles des FGM dans la création d'autres matériaux structurels et fonctionnels. Au Japon a été donnée la première conférence puis ça a été suivi un peu partout dans le monde, ce nouveau concept était si intéressant, que le résultat des travaux de recherche ont été présentés dans les 50 des 70 communications données au « Première Symposium Internationale sur les FGM » organisé à Sendai en octobre 1990 Ilschner (1993).

Dans la seconde étape (1990 -1991), le but était de réaliser des pièces de tailles plus grande et de forme plus complexes par rapport à celles réalisées à la première étape.

Suivi par un 2ème symposium international à San Francisco, en 1992.

En 1993, un nouveau projet national intitulé "Research on Energy Conversion Materials with Functionally Gradient Structure", communément appelé "(FGM) Part II", a été lancé. Il convient de noter aussi que, même dans le colloque "EUROMAT 93" sur les matériaux avancés et leurs procédés, organisé à Paris en juin 1993, certaines contributions se sont expressément portées sur les matériaux fonctionnellement gradués. Koizumi (1997).

Puis en 1994, "le troisième Symposium International sur les (FGM) " a été organisé à Lausanne (Suisse). Le 4ème a eu lieu à Tsukuba Science City au nord de Tokyo en 1996.

Dans la même année, le Japon a lancé son deuxième programme national de recherches en 1995, l'association allemande de recherche DFG a lancé un programme de recherche. En 1996 projets de recherche physico- chimique sur les (F.G.M.) été en cours au Japon. Ainsi en 1997, une centaine de laboratoires partout dans le monde ont travaillé sur les Matériaux fonctionnellement gradués, EL-hassar (2016).

I.3.3 Le concept de matériaux fonctionnellement gradués.

L'idée originale des FGM a été proposée pour préparer un nouveau composite profitant à la fois des propriétés des céramiques (cotes haute températures) et des métaux (cotes basse température) avec une variation graduelle de la composition de la céramique au métal. Les changements constitués de la composition dans la microstructure (voir Figure I.11) et même dans la porosité de ces matériaux a comme conséquence des gradients des propriétés matérielles telles que la résistance mécanique et la conductivité thermique, Koizumi (1997).

Pour la conception de tels matériaux, trois caractéristiques sont considérées :

- ✓ Relaxation effective des contraintes thermiques le long du matériau ;
- ✓ Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haut température de la couche superficielle du matériau ;
- ✓ Ténacité du matériau cote basse température.

Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitués d'un même matériau mais de microstructure différente, Boch (1986), (Attia 2015).

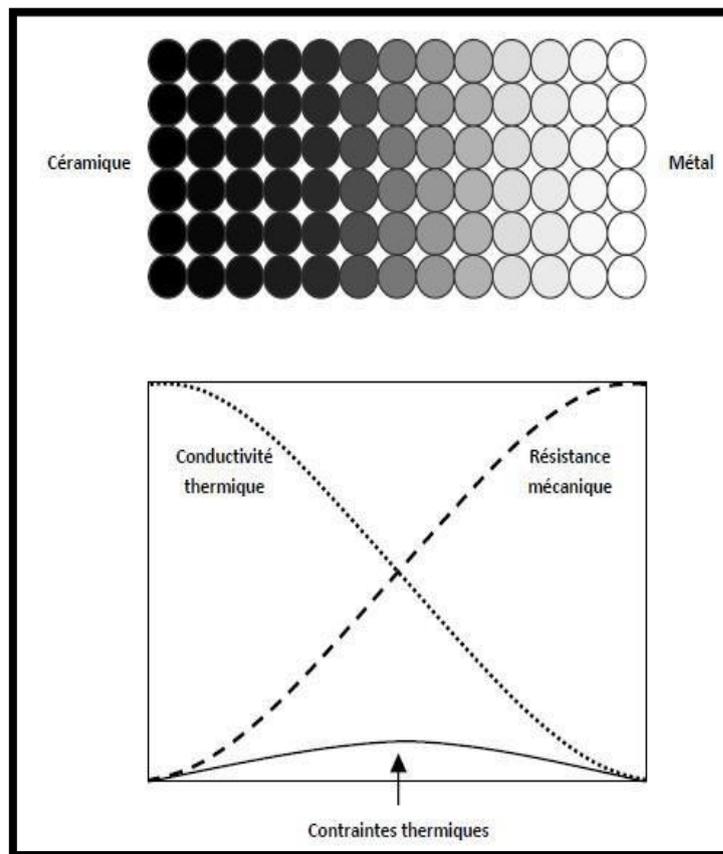


Figure I.11 Les concentrations de contraintes dans les panneaux de protection thermiques (Ait Hamou et Draouche 2020).

Conventionnels au niveau des interfaces (changement brutal de composition). Il montre également comment un FGM peut alléger. Ces concentrations de contraintes en changeant graduellement les propriétés matérielles et assurer toujours la protection thermique trouvée dans les barrières thermiques conventionnelles (Attai 2015).

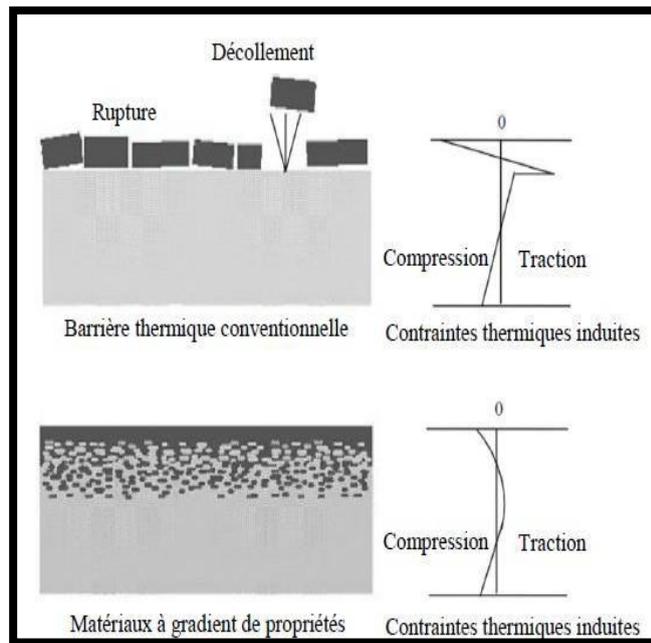


Figure I.12 Protection thermique.

Lorsque la face supérieure est exposée à une haute température alors que la face inférieure est exposée à une basse température, la variation continue des propriétés trouve son application. Dans ce cas, la face supérieure est 100 percent céramique et la face inférieure est à 100 percent métal avec une transition graduelle entre les deux.

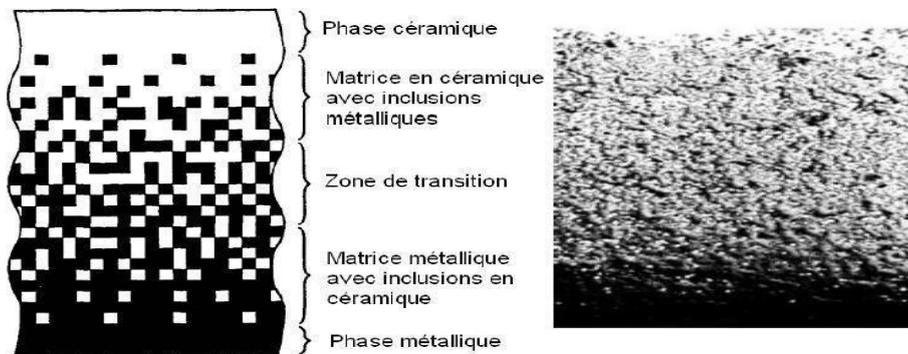


Figure I.13 Variation continue de la microstructure (schématisé et photo) Yin (2001).

Grace à leurs caractéristiques exceptionnelles on choisit les céramiques et métal. Voir le tableau ci-dessous :

Tableau I.1 Caractéristiques des céramiques et métaux.

Céramique	Métal
Conservation des propriétés à haute température	Bonne résistance mécanique

Excellent résistance à la corrosion	Conductivité thermique élevée
Dureté élevée	Très bonne ténacité
Haut module d'élasticité et faible expansion thermique	Conductivité électrique
Faible conductivité thermique	La limite d'élasticité
Bonne résistance à l'usure (bas coefficient de frottement).	Résistance aux chocs

Note : Les céramiques sont réputées d'être fragile et très vulnérable aux défauts de petite taille.

I.3.4 Utilisation prévisionnelle des matériaux (FGM) dans le domaine du génie civil.

Il y a beaucoup d'intérêt pour la mise sur pied des structures ainsi les conditions fonctionnelles peuvent varier avec l'endroit. Récemment, les concepts de (FGM) sont devenus d'intérêt scientifique pour améliorer l'exécution des systèmes géométriquement complexes des structures Meradjah (2011).

I.3.4.1 Les chaussées rigides (Functionally graded concrete Materials for Rigid Pavements).

Elles sont présentes dans les autoroutes, les routes, les aéroports, les dallages industriels dont le trafic est très fort, en générale lorsqu' elle est soumise à des contraintes très élevées, afin de lui offrir une bonne résistance et une durabilité bien élevée, le but est d'optimiser l'épaisseur de la chaussée afin d'avoir un matériau rigide sur la surface de roulement et un matériau moins rigide sur la couche de fondation.

Le principe d'utilisation les (FGM) dans les chaussées rigides donne une gradation des propriétés par la variation de la fraction volumique de leurs constituants.

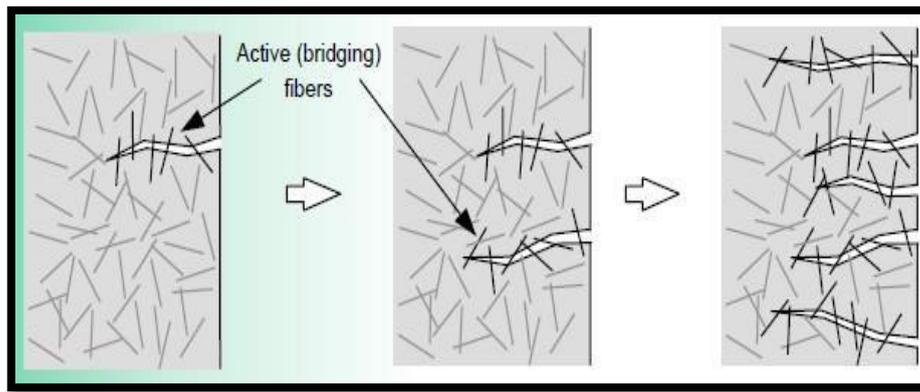


Figure I.14 La variation de la fraction volumique des fibres dans la chaussée rigides.

I.3.4.2 Les chaussées souples.

Les chaussées souples sont constituées en plusieurs couches, cela peut introduire un glissement entre la couche du gravier bitumeux et la couche de roulement en béton bitumineux, par conséquent l'utilisation des (FGM) élimine cette couche d'accrochage, optimise son comportement, augmente la capacité portante de la chaussée pour qu'elle devienne durable.

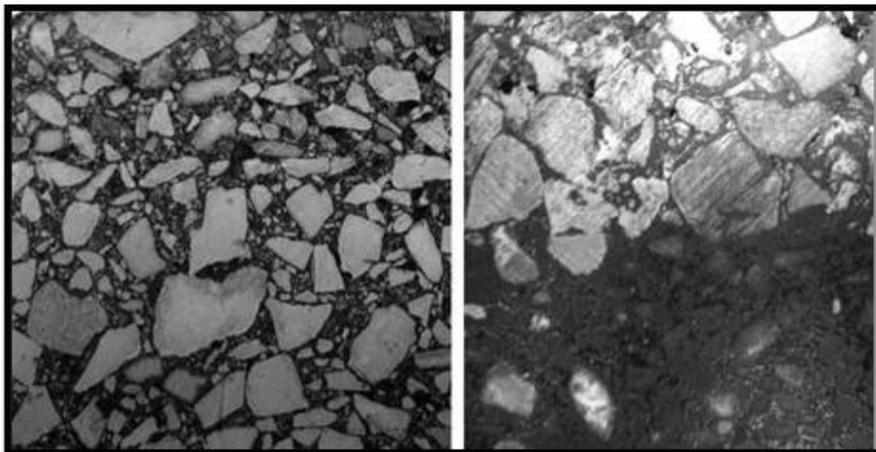


Figure I.15 La variation de la fraction volumique des constituants entre la couche : la couche de la Grave Bitume et la couche de roulement.

I.3.4.3 Les grands vitrages dans les zones chaudes.

L'utilisation des (FGM) dans les grands vitrages qui sont exposés à des températures élevés a pour but d'éviter les vitrages multiples.

I.3.4.4 Les tunnels.

Les matériaux qui doivent être utilisés pour construire les parois des tunnels exigent une gradation des propriétés particulières tout en long de leur épaisseur, car au niveau de la face extérieure de la paroi, le matériau doit être rigide et réfractaire, par ailleurs ce dernier doit être imperméable dans la seconde face. Pour atteindre ces conditions, les (FGMs) sont la solution la plus efficace SAID (2015).

I.3.4.5 Les joints dans la charpente métallique.

Dans certains cas de la charpente métallique, lors de l'assemblage des éléments, on est obligé de réaliser des soudures entre les éléments de nature différente : l'un lourd et l'autre souple (acier/aluminium). Dans ce cas on utilise des joints ordinaires en acier. L'inconvénient de ce type de joint est la rupture et la durabilité. L'utilisation des joints en FGM est une solution optimale.

I.3.5 Les matériaux composite traditionnels et matériaux FGM.

En général, le FGM est un matériau multicouche contenant divers composants tels que la céramique et les métaux. Ce sont donc des composites aux propriétés macroscopiquement hétérogènes. Comme la montre le tableau (I-2) de Koizumi (1996), ce qui distingue les FGM des composites conventionnels est le changement continu de composition, c'est-à-dire la microstructure du matériau. Cela crée un gradient qui détermine les propriétés matérielles du FGM. Dans certains cas, il est possible de créer des FGM avec différentes microstructures dans le même matériau Boch (1986), Said (2016).

Tableau I.2 Propriétés des composites FGM par rapport aux composites conventionnels Koizumi (1996).

Propriétés	<p>1 Résistance mécanique</p> <p>2 Conductivité thermique</p>		
Structure	<p>Eléments constitutifs:</p> <p>Céramique ○</p> <p>Métal ●</p> <p>Microporosité ◊</p> <p>Fibre ✱</p>		
Matériaux	Exemple	FGM	NON-FGM

Le modèle le plus simple montrant la différence entre les matériaux à gradient de propriétés (FGM) et les matériaux conventionnels est présenté dans la figure (I.17) de Yoshihisa (2004). Un matériau plat apparaît (I.17.a).

Acheminez l'élément planaire et le matériau associé (Figure I.17.b) jusqu'à l'interface des deux matériaux. Le FGM possède d'excellentes propriétés qui le distinguent des composites et des matériaux plans collés. Par conséquent, FGM se distingue pour les applications industrielles en raison de la double caractéristique que les deux matières premières sont mélangées et que la distribution des composants est graduée sans interruption.

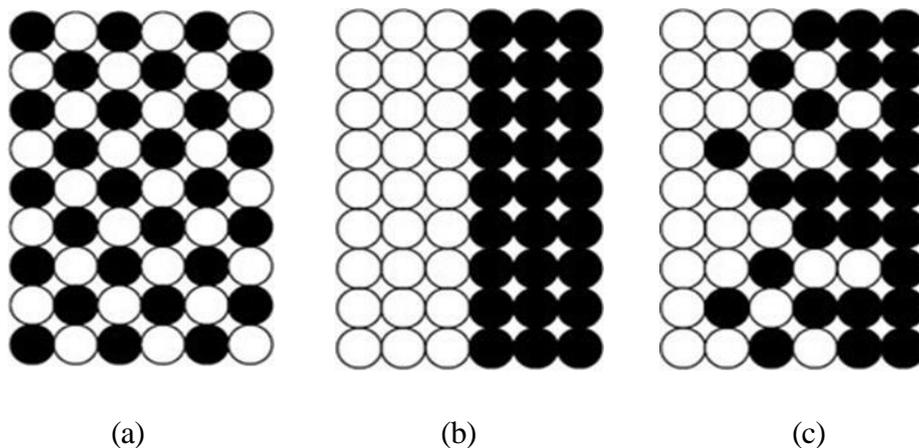


Figure I.16 Répartition des composants des matériaux Yoshihisa (2004).

Matériel Plan composé (a), Matériel relié (b) et Matériel FGM (c) respectivement.

Les matériaux à gradient de propriété offrent des propriétés de performance pour de nombreuses applications industrielles et d'ingénierie nécessitant une conception optimale des structures. Les matériaux FGM présentent également une excellente résistance aux phénomènes de dégradation des matériaux tels que l'usure, la fatigue et la corrosion. Gradients de température potentiellement plus élevés lorsqu'un entretien est requis par rapport aux matériaux traditionnels, l'utilisation qui nécessitent un entretien et une surveillance réguliers.

I.3.5 Quelques utilisation générale des (FGM).

Nous avons examiné l'application des FGM dans la construction et la différence entre les FGM et les composites. Mais en général, les FGM ont un large éventail d'utilisations. L'utilisation de matériaux FGM (Céramique-Métal), d'une part, élimine les concentrations de contraintes thermiques, et d'autre part, pour des raisons fonctionnelles telles que les propriétés isolantes et d'absorption de chaleur du matériau, est certainement une solution appropriée.

- ✓ Divers : matériaux de construction ; articles de sport ; verres de fenêtre ;
- ✓ Projets Spatiaux : composantes des fusées ; corps des avions spatiaux ;
- ✓ Chimique : l'échangeur de chaleur ; tube de chaleur ;
- ✓ Aérospatial : composants de moteur fusée corps des avions spatiaux ;
- ✓ Ingénierie : outils de coupe ; éléments de moteur ;
- ✓ Domaine médical : Os artificiels, peaux, médecine dentaire ;
- ✓ Secteur énergétique : cellules solaires, capteurs de fusion, générateurs thermoélectriques ;
- ✓ La défense : Plaques de blindage et gilets pare-balles ;
- ✓ Fabrication : Machines-outils ; outils de formage et outils de coupe, procédés de moulage et de forgeage des métaux.

I.3.6 Le Béton à gradient des propriétés.

Werner Sobek a été le premier à formuler le concept de béton avec des gradients caractéristiques. Les travaux de développement sont menés à l'Institute for Lightweight Structural Design (ILEK) de l'Université de Stuttgart, en Allemagne, dans le cadre des projets de recherche "Materials Graduation in Structural and Civil Engineering" et "Characteristic Gradient Prefabricated Floors". 2011) L'automatisation de la fabrication, l'optimisation et la technologie du béton sont actuellement mises en œuvre à l'Université de Stuttgart.

L'optimisation des structures en béton selon le concept FGM est actuellement étudiée et développée dans plusieurs projets de recherche. L'objectif principal est d'ajuster en continu les propriétés du béton telles que la densité, la porosité, la conductivité thermique et la résistance à l'intérieur de l'élément en fonction des spécifications et du profil de contrainte déterminés pour l'élément (Figure I.18).

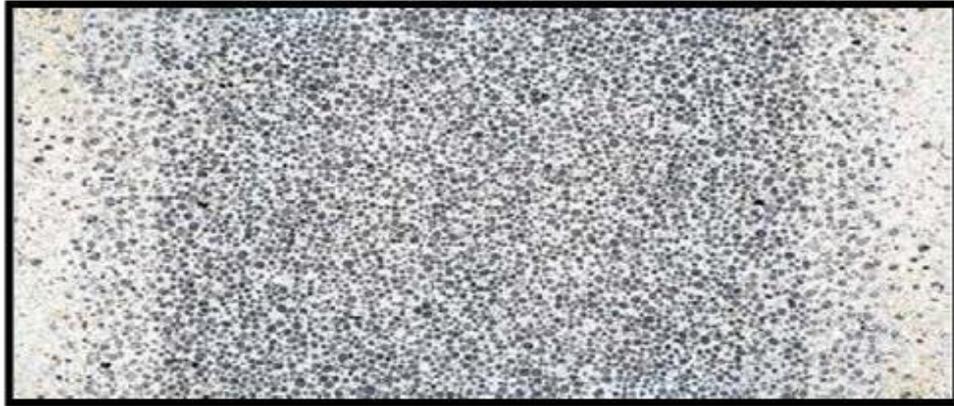


Figure I.17 Structure de mur de chantier en pente, source : ILEK.

Notez que l'idée du béton gradué a une conductivité thermique nettement inférieure à celle de la mousse de polystyrène et peut produire des murs extérieurs plus minces par rapport aux systèmes d'isolation composites comparables. La présente invention conduit à une recyclable améliorée et à une économie de ressources économiques. Les tests et les calculs des revêtements de sol classés ont démontré une réduction de poids de plus de 60 % et une réduction de plus de 35 % des émissions de carbone par rapport aux sols minces traditionnels sans perte de résistance Eyerer et al. (2000), Said (2016).

I.3.6.1 Autres matériaux à gradient de propriétés.

Les textiles à propriétés variables en couches superposées permettent aux matériaux d'être perméables et gradués en raideur (Fig. I.19), ce qui peut augmenter l'efficacité des systèmes d'isolation contre les effets de la chaleur et de l'humidité. De plus, le changement progressif des propriétés de rigidité permet de surmonter les transitions abruptes entre les composants rigides et flexibles des éléments, ce qui peut parfaitement servir de base à de nouvelles solutions architecturales à l'avenir.



Figure I.18 Construction en fibre de verre avec éléments gradués en silicone perméable.
sous: Test d'étanchéité, source :ILEK.

Un processus étape par étape nous a permis de produire des éléments en mousse à cellules ouvertes avec différents modèles de porosité. Ces mousses peuvent être transformées en composants avec différentes distributions de rigidité pour répondre aux exigences de cas spécifiques (Fig. I.20).

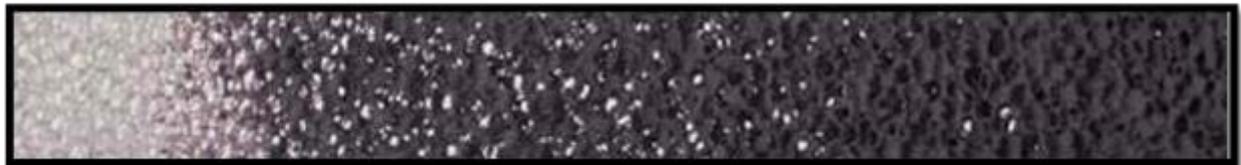


Figure .I.19 Infiltration graduelle de mousse de polyuréthane réticulée avec la colle de ciment en vue de la variation de rigidité, source: ILEK.

Un autre aspect de cette approche utilisant des matériaux à gradient de propriétés est la transition progressive et continue de différents matériaux (Figure I.21). Bien que cela représente une nouvelle approche dans la technologie d'assemblage de pointe, il n'est plus possible de définir localement avec précision le processus de dilatation thermique en raison de transitions continues ou d'une transmission de force évitée. Dans le cadre du projet, des recherches préliminaires sur les classes de matériaux pertinentes, les domaines d'application potentiels et les procédés de fabrication appropriés seront menées dans le cadre de Construction Said (2016).



Figure I.20 Transition continue des matériaux (du bois à l'aluminium), photomontage, source :ILEK.

I.3.7 Ingénierie de fabrication FGM.

Le processus de fabrication des matériaux à gradient de propriétés physiques peuvent être divisés en construisant la structure dans un espace hétérogène "mélange graduel" et transformation de cette structure en matériau en bloc "solidification". Pour plus d'informations, Kieback (2003) fournit un aperçu détaillé des techniques et des méthodes de traitement des matériaux à gradient de propriétés.

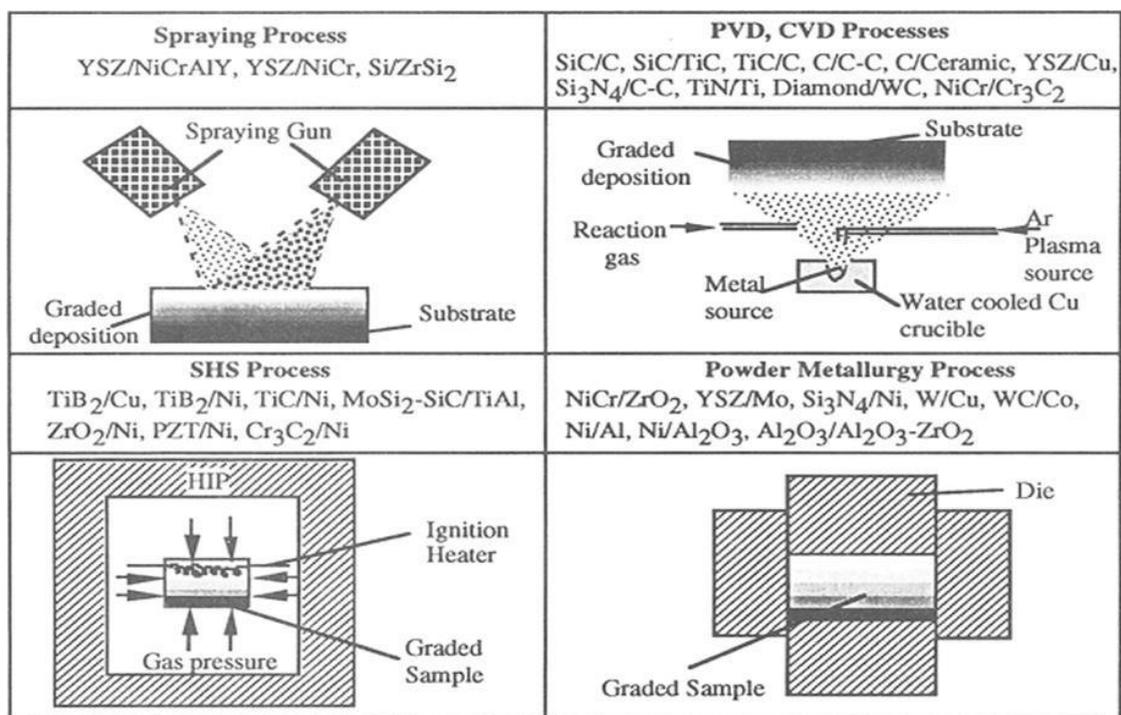


Figure I.21 Technologie pour développé des matériaux avec des gradients de propriétés physiques (Ait Hamou et Draouche 2020).

I.3.7.1 Coulage en bande (Tape Casting).

Le coulage en bande est une technique de moulage liquide qui consiste à étaler un coulis de poudres fines en suspension sur une surface plane en couche mince et régulièrement.

L'élargissement de la bande est obtenu par le mouvement relatif des réservoirs ou sabot. La suspension est ainsi laminée par son passage entre la lame du réservoir et le support ce qui confère à la bande déposée une épaisseur uniforme sur toute sa longueur. La hauteur du couteau du réservoir par rapport au support détermine l'épaisseur de la bande Lostec (1997).

Les produits obtenus sont des feuillets avec des épaisseurs contrôlées (25-1000 μm). Après un raffermissement de la pâte, les feuillets sont démoulés et ensuite découpés Benammar (2017), Groves (1997).

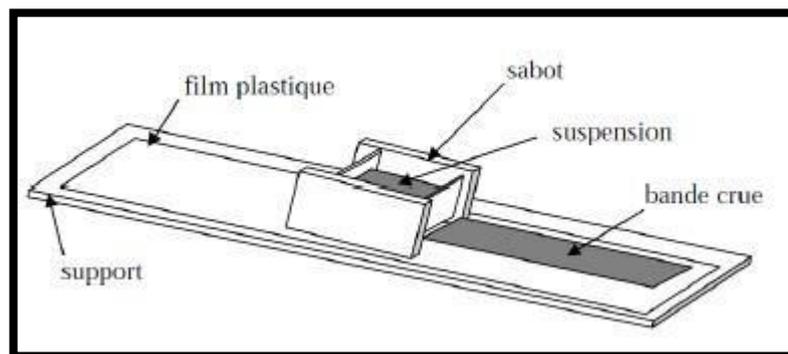


Figure I.22 Principe de la méthode coulage en bande Lostec(1997).

I.3.7.2 Compactions sèche des poudres.

Dans cette technique les poudres sont successivement versées dans un moule en acier. Chaque fois qu'une poudre est versée, une faible compression est exercée. Ensuite, la compaction de l'ensemble des couches sera effectuée. Ce procédé est suivi généralement, par une pression isostatique et un délainage. La densification sera enfin l'étape finale Bishop (1993). Ce procédé peut être envisagé pour la fabrication de pièces de formes complexes. En effet il s'applique aussi avec la technique du pressage isostatique, et de façon industrielle (Benammar 2017).

I.3.7.3 Coulages séquentiels en barbotine (slip casting).

Le coulage en barbotine (slip casting) consiste à couler une suspension dans un moule poreux qui va drainer le liquide grâce aux forces capillaires, laissant un tessou (couche de poudre compacte) sur la surface du moule. Après séchage, on obtient le corps en cru. Donc le coulage se décompose en deux étapes essentielles :

- ✓ formation du tessou ou "prise" ;
- ✓ consolidation du tessou ou "raffermissement".

La filtration, ou la formation de calcin pendant la coulée, peut être considérée comme le processus par lequel une partie de l'eau est retirée de la barbotine. Cette eau se déplace à

travers des couches de débris déjà formées sous l'influence de :

- ✓ du pouvoir de succion du plâtre (coulage classique) Moya (1992) ;
- ✓ ou d'une pression appliquée sur la barbotine (coulage sous pression).

Dans la fabrication multicouche, après la formation du premier objet, une seconde couche est déposée de sorte que la barbotine ne pénètre pas dans l'objet formé. Ce processus est reproduit séquentiellement pour les autres couches (Attia 2015).

I.3.7.4 Projection plasma.

La projection plasma consiste à introduire des particules solides (d'une taille inférieure à environ 100 μm) dans un jet de gaz, dont les températures atteignent typiquement 11 000 °C et des vitesses de 1 000 à 1 500 m/s. Ainsi, le sédiment est formé d'un empilement de lamelles solidifiées obtenues par bombardement de particules sur un substrat préalablement préparé par Watremetz (2006).

Ce procédé est notamment utilisé pour déposer des matériaux à haut point de fusion tels que les alliages à haute température et les céramiques. Les revêtements produits par projection plasma se caractérisent par une résistance à l'usure et à la corrosion ainsi qu'une isolation thermique et électrique.

Une étude détaillée a été réalisée sur la microstructure et le contrôle des propriétés des particules pulvérisées par plasma. La pulvérisation au plasma est un processus à grande vitesse et fournit des revêtements de grande surface, mais souffre généralement de sa microstructure grossière Omori et al.(1998). Ichikawa (2000) a utilisé des poudres de matériaux thermoélectriques alliés mécaniquement et a contrôlé avec succès la teneur en dépôt de SiC pour former des substrats thermoélectriques avec des concentrations graduées et des microstructures uniformes. Le schéma de pulvérisation est illustré schématiquement dans Said (2016) (Fig. I.24).

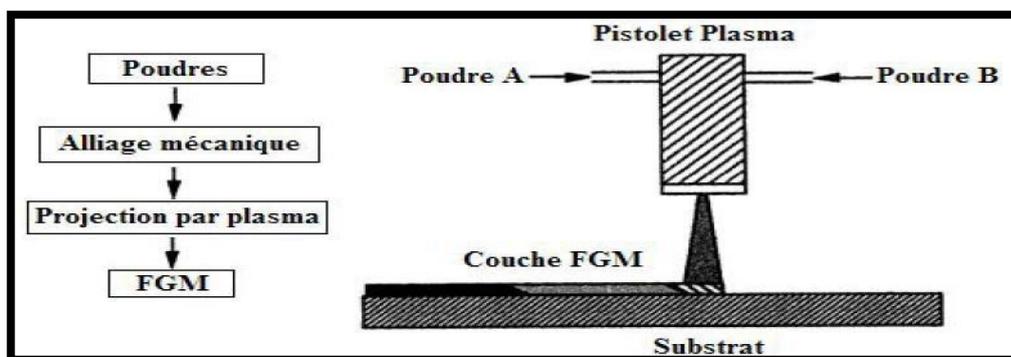


Figure I.23 Projection par plasma pour former un matériau thermoélectrique Ichikawa (2000).

I.3.7.5 Dépôts d'électro sphères.

Le dépôt d'électro sphère est un processus dans lequel une suspension colloïdale stable est placée dans une cellule à deux électrodes. Le dépôt se produit par la migration de particules modifiées en solution vers la cathode ou l'anode, selon le signe de la charge sur les particules due à un champ électrique Sark (1996).

I.3.7.6 Processus d'évaporation.

La technologie de dépôt en phase vapeur décrit divers processus de dépôt sous vide qui peuvent être utilisés pour produire des films minces sur des substrats. Toutes ces techniques peuvent être utilisées pour créer des FGM minces uniquement.

Différents types de techniques de dépôt en phase vapeur comprennent le dépôt physique en phase vapeur (PVD) et le dépôt chimique en phase vapeur (CVD). Ils consomment beaucoup d'énergie et produisent des jauges toxiques comme sous-produit Groves (1997).

D'autres techniques basées sur le dépôt qui peuvent déposer des revêtements minces fonctionnellement dégradés sont le dépôt par faisceau d'électrons (EBD), le dépôt par faisceau d'ions (IBD) et la synthèse à haute température auto-propagée de Knoppers (SHS). Toutes les méthodes ci-dessus ne sont pas économiques pour produire des FGM de type vrac.

I.3.7.7 Frittage et infiltration.

Cette technique se compose de deux étapes et convient à la fabrication de composites à gradient fonctionnel constitués de deux matériaux avec des températures de fusion très différentes. La première étape consiste à préparer une matrice frittée de matériau réfractaire avec un gradient de porosité. La seconde étape consiste à remplir ces pores par infiltration avec un second matériau fondu. Ce résultat est excellent pour réduire le stress thermique Takahashi (1990). Cette technique est généralement applicable à de multiples combinaisons de matériaux chimiquement inertes et ayant des points de fusion très différents les uns des autres (Attia 2015).

I.3.7.8 Implantations ioniques (Sputtering).

Il s'agit d'une technique avancée de fabrication de F.G.M, qui n'autorise que de faibles épaisseurs ($< 1 \mu\text{m}$) sur divers substrats (plastique, céramique, métal). Le traitement est assuré par un faisceau d'énergie provenant d'ions ou d'un gaz réactif. Les couches fabriquées

présentent des gradients de composition très fins et contrôlables Said (2016), Abdizadeh (1997).

I.3.7.9 Frittage laser différentiel.

Le rayonnement thermique du laser permet de contrôler la température et de focaliser les points à chauffer. Des différences d'intensité d'irradiation en différents points du matériau conduisent à des frittages différents le long de la pièce et à des microstructures différentes selon la position du point d'irradiation Yuki et al. (2016). Yuki (1991) a utilisé cette technique pour créer PSZ/Mo FGM.

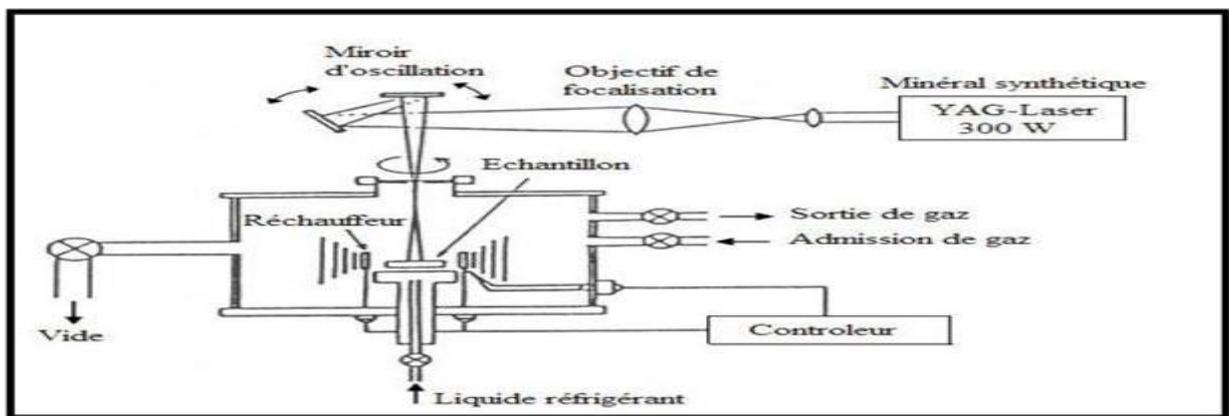


Figure I.24 Disposition du processus de frittage laser différentiel Yuki (1991).

I.3.7.10 Dépôts de centrifugation.

Cette technique consiste à verser une suspension colloïdale relativement diluée dans un flacon cylindrique et à centrifuger l'ensemble. La décantation se produit et le liquide est éliminé. Ce processus est répété pour obtenir plusieurs couches (Fig. I.26) Said (2016), Abdizadeh (1997).

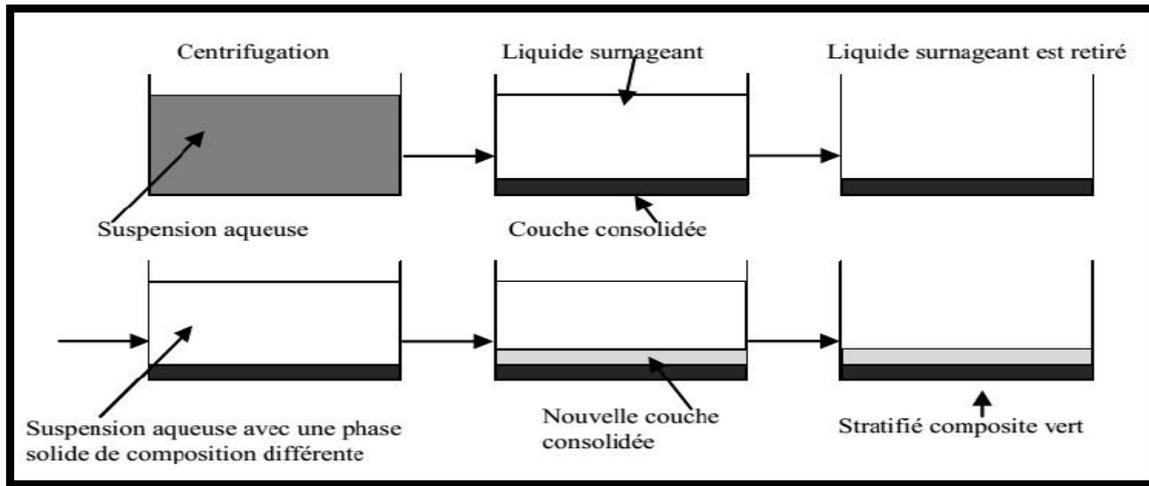


Figure I.25 Illustration du processus de dépôt de spin par Abdizadeh (1997).

I.3.8 Lois de mélanges.

Les propriétés globales d'un composite sont souvent la moyenne des propriétés des composants pondérée par la fraction volumique de chaque composant. L'un des facteurs les plus importants qui déterminent les propriétés mécaniques des composites est la proportion relative de matrice et de renfort. Cette proportion peut être exprimée en fraction volumique (ou fraction volumique).

Les fractions volumiques de deux matériaux ou plus varient en continu selon la position le long de dimensions spécifiques de la structure pour remplir les fonctions requises pour une application particulière.

La dépendance de position des propriétés est un résultat du modèle de Voigt prenant en compte la loi de mélange :

$$P = \sum_{i=0}^n p_i V_i \quad (\text{I.1})$$

Avec p_i et V_i sont respectivement la propriété mécanique et la fraction volumique du constituant i , avec :

$$\sum_{i=0}^n V_i = 1 \quad (\text{I.2})$$

Pratiquement, souvent des structures FGM contient deux matériel ; céramique et métal inoxydable. La loi de Voigt s'écrit comme suit :

$$P(z) = P_1V_1 + P_2V_2 \quad (\text{I.3})$$

$$V_1 + V_2 = 1 \quad (\text{I.4})$$

Propriété le long de l'axe z ;

$(P_m) P_1 = P_m$: La propriété mécanique du métal ;

$P_2 = P_c$: La propriété mécanique du métal ;

$V_1 = V_m$: Fraction volumique du métal ;

$V_2 = V_c$: Fraction volumique de la céramique.

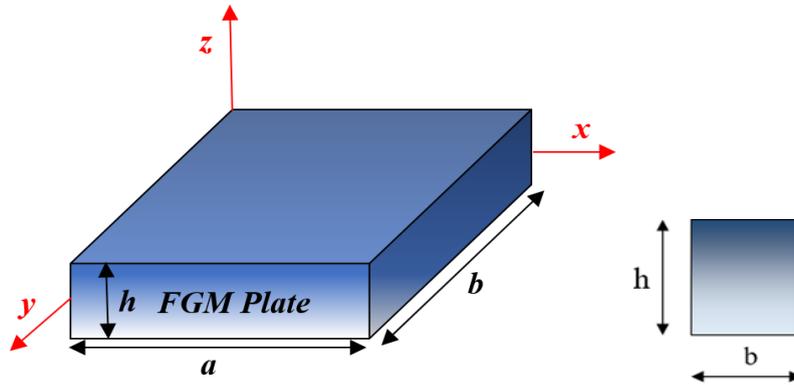


Figure I.26 Géométrie de la plaque en FGM.

Dans la figure ci-dessus, les coordonnées x et y définissent le plan de la plaque, tandis que l'axe z perpendiculaire à la surface moyenne de la plaque et dans la direction de l'épaisseur, et L est la longueur suivant l'axe (x).

Cependant, le module de Young, la densité et le coefficient de Poisson des plaques changent sans interruption seulement dans la direction d'épaisseur (l'axe z) ;

$$E(x) = E_2 e^{B(z+h/2)} \quad (\text{I.5})$$

Le FGM peut être produit en faisant varier progressivement et en continu les constituants des matériaux multi phases selon un profil prédéterminé. La plupart des chercheurs utilisent la fonction de loi de puissance (P-FGM), la fonction sigmoïde (S-FGM) ou la fonction exponentielle (E-FGM) pour décrire les propriétés effectives des matériaux.

I.3.9 Propriétés matérielles de la plaque P-FGM.

La fraction volumique de (P- FGM) est assurée par la loi de puissance :

$$V(z) = \left(\frac{z + h/2}{h} \right)^p \quad (\text{I.6})$$

Avec ;

p : l'indice matériel.

h : épaisseur de la plaque.

z : la coordonnée suivant l'épaisseur.

Le Module de Young de la plaque est exprimé par :

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m) V(z) \quad (\text{I.7})$$

Où E_m et E_c sont les modules de Young respectivement de la surface inférieure $z = \frac{-h}{2}$ et supérieure $z = \frac{+h}{2}$ de la plaque FGM.

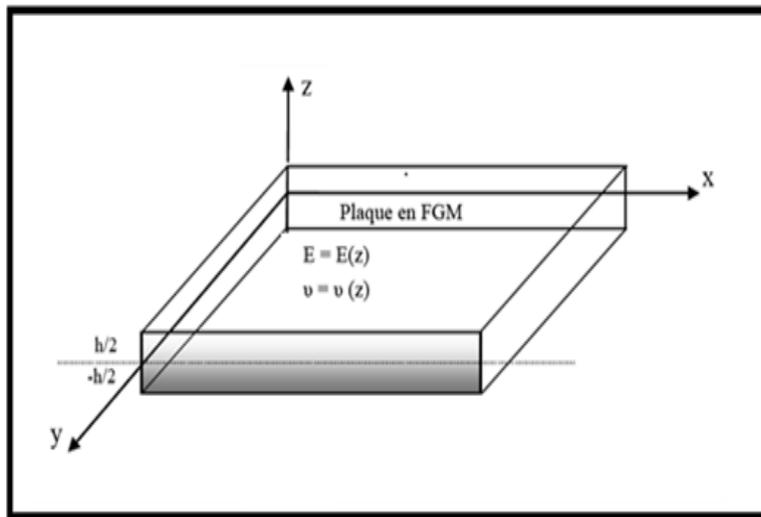


Figure I.27 La variation de la fraction volumique dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM.

La figure I.29 ci-dessous illustre la variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de la plaque (P-FGM) :

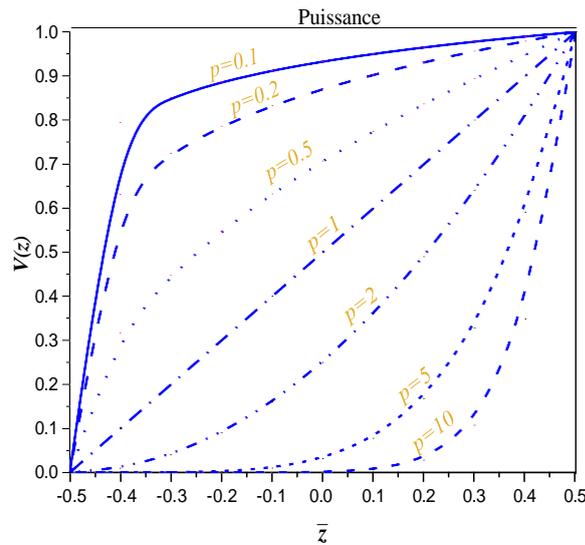


Figure I.28 La variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.

Lorsque $p=1$, la variation du module d'Young devient linéaire.

On remarque que la plaque devient plus résistante en raison de l'augmentation de la valeur de son module de résistance, si on augmente bien sûr le pourcentage de la céramique dans la plaque. Et l'inverse est vrai, la plaque devient de faible résistance si son module d'Young est faible c'est le résultat de la diminution de la quantité de la céramique et l'augmentation de celle du métal (Attia 2015).

I.3.9.1 Propriétés matérielles des plaques (S - FGM).

Une fonction singulière simple aux composites multicouches, les concentrations de contraintes apparaissent sur l'une des interfaces où la matière est continue mais change rapidement Bao (1995), Benammar (2017).

Pour assurer une bonne distribution de toute les interfaces de la plaques en (F.G.M.), Il y'a deux fonction qui définissent la fraction volumique de puissance :

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{z+h/2}{h/2} \right)^p \text{ Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.8a})$$

$$V_1(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{z+h/2}{h/2} \right)^p \text{ Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.8b})$$

Par la loi de mélange, le module de Young de la plaque (S-FGM) peut être calculé par :

$$E(z) = E_1 V_1 + (1 - V_1(z)) E_2 \quad \text{Pour } +h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.9})$$

$$E(z) = E_1 V_2(z) + (1 - V_2(z)) E_2 \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.10})$$

La variation de la fraction volumique selon les équations (I.9) et (I.10) représente une distribution sigmoïde :

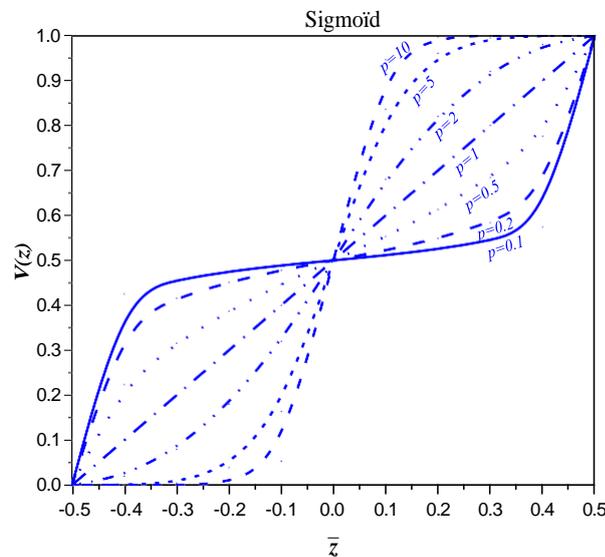


Figure I.29 La variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.

I.3.9.2 Propriétés matérielles de la plaque (E-FGM).

La fonction exponentielle est souvent utilisée pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM et se donne par :

$$E(x) = E_2 e^{B(z+h/2)} \quad (\text{I.11})$$

$$B = \frac{1}{h} \ln \left(\frac{E_1}{E_2} \right)$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque (E-FGM) est montrée ci-dessous :

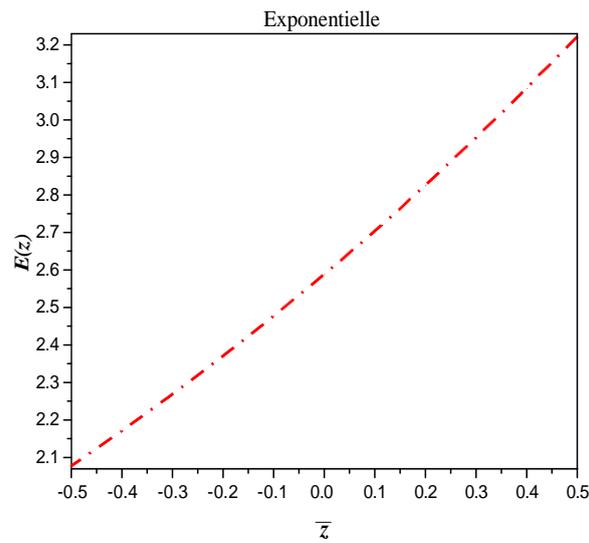


Figure I.30 La variation du module de Young dans la plaque E-FGM.

I.4 Conclusion.

Ce chapitre définit les matériaux composites et les matériaux fonctionnellement gradés (FGM) comme des matériaux modernes, l'historique de leur développement, leurs propriétés et utilisations dans différents domaines, ainsi que leurs avantages et inconvénients. Les changements spatiaux et progressifs des propriétés des matériaux avec des gradients de propriétés permettent la création de structures innovantes qui peuvent être utilisées dans de nombreux domaines d'application. Nous avons également présenté diverses lois possibles pour aider à expliquer la variation des propriétés des matériaux (FGM), le module de Young, la densité et le coefficient de Poisson en fonction de l'épaisseur de la plaque.

CHAPITRE II :

Stabilité et flambement.

II.1 Introduction

Pour développer les domaines modernes de l'ingénierie structurelle, civile, mécanique et autres, il est nécessaire d'élaborer des méthodes de calcul très précises pour la stabilité des systèmes de tiges. Les chercheurs s'intéressent toujours beaucoup à la défaillance des éléments structurels due à la perte de stabilité.

L'objectif de ce chapitre est de faire en sorte que la stabilité et le flambage soient compris même par une personne extérieure au domaine de l'ingénierie et, par conséquent, les termes utilisés ci-dessus peuvent être compliqués à comprendre facilement. La plupart des gens ont au moins vu ou regardé une image similaire à celle de l'homme de la figure II.1.



Figure II.1 *Charlie Chaplin and his stick.*

Connu pour son humour et ses sages paroles, Charlie Chaplin peut nous aider à comprendre ces mots apparemment grands : flambement et stabilité. En termes simples, le flambement est une flexion verticale. Lorsque Chaplin s'appuie sur son bâton, celui-ci semble plié, mais dès qu'il se redresse sur ses pieds, le bâton reprend sa forme droite. Cette phénomène de perte de stabilité sous l'effort de compression (le poids de Chaplin, par exemple) est appelée flambement.

Tous les éléments de structure longs et minces ont un comportement similaire en compression. Le flambement peut être observé sur toute une série d'exemples, le cas le plus simple est la perte de stabilité d'une tige comprimée de manière axiale.

Lorsque la charge de compression augmente lentement, l'élément atteint un seuil de compression indiquant un déséquilibre et une instabilité structurelle ultérieure. Ce seuil critique est appelé facteur critique d'Euler. La détermination d'un état d'équilibre stable en compression simple est un élément fondamental du phénomène de flambage.

Une étape préparatoire importante pour comprendre le comportement de flambement des plaques et le développement des instabilités structurelles est l'analyse du flambement des plaques simplement appuyées.

II.2 Définition de la stabilité.

Lorsqu'une charge donnée est appliquée à une structure, la structure répond. Cette réponse à la charge appliquée est appelée Stabilité. Si une structure peut résister à l'effet de la charge, on l'appelle une structure stable et si elle se déforme lors de l'application de la charge, on l'appelle une structure instable. Une structure stable a des réactions suffisantes lorsqu'elle est soumise à une charge externe, flambement est la perte de stabilité des structures soumises à une charge de compression. D'une manière générale, on peut définir la stabilité comme la capacité d'un système physique à revenir à l'équilibre lorsqu'il est perturbé légèrement.

II.2.1 Analyse de la stabilité.

L'analyse de stabilité désigne le processus d'examen de la stabilité d'un système, qui peut être physique ou virtuel. Elle consiste à étudier le comportement du système dans le temps et à déterminer s'il restera en équilibre ou s'il évoluera vers l'instabilité dans certaines conditions ou sous l'effet de certaines perturbations. En ingénierie, l'analyse de la stabilité est particulièrement importante pour évaluer la stabilité des structures ou des systèmes afin de s'assurer qu'ils peuvent résister aux forces auxquelles ils sont soumis et éviter les défaillances ou l'effondrement.

L'analyse de la stabilité est importante pour les structures car elle permet de s'assurer que la structure est capable de résister aux forces et aux charges sans s'effondrer ou tomber en panne. Elle permet d'identifier les faiblesses potentielles et les domaines de préoccupation au sein d'une structure, qui peuvent être traités avant qu'une défaillance catastrophique ne se produise. Cette analyse aide également les ingénieurs et les architectes à concevoir des structures sûres et fiables qui répondent aux exigences et aux normes de sécurité nécessaires. En fin de compte, l'analyse de la stabilité joue un rôle crucial en garantissant la sécurité et le bien-être des personnes qui occupent ou utilisent les structures.

II.3 Définition du flambement.

En ingénierie, le flambement est un changement soudain de forme d'un composant sous charge. Lorsqu'une structure est soumise à une contrainte qui augmente progressivement et que la contrainte atteint un niveau critique, les éléments peuvent soudainement changer de forme et provoquer le flambage de la structure et des composants. Le phénomène d'instabilité transversale sous un effort de compression porte le nom de flambement.

Ci-dessous, le phénomène de flambement peut être défini comme le phénomène de perte de stabilité et est généralement associé à des efforts de compression axiale élevés (dans le cas le plus simple) conduisant à des boucles dans les éléments structuraux.



Figure II.2 *Flambement avec charges de compression.*

Un élément élancé, c'est à dire ayant une grande dimension par rapport à au moins une des deux autres, soumis à un effort de compression axial, peut se déplacer transversalement de façon importante sous de faibles charges. Tous les éléments de structure longs et minces ont un comportement similaire en compression. Lorsque la charge de compression augmente lentement, on atteint une valeur pour laquelle l'élément mince, au lieu de simplement se raccourcir, s'infléchit, et d'ordinaire se rompt. Cette valeur critique est appelée : charge de flambement.



Figure II.3 *Flambement associée à deux forces de compression.*

Ensuite le problème de flambement est de trouver le seuil de compression. Une ramification d'équilibre et une instabilité structurelle se produisent alors. Ce seuil est appelé force critique par Euler A.U. (2012/2013). Les contraintes de flambement sont dérivées initialement du concept de bifurcation de la structure complète.

Le flambement des colonnes est un sujet très particulier qui mérite plus d'attention. Le flambement des colonnes est le seul domaine de la mécanique où les résultats sont différents. Euler, mathématicien et physicien du XVIII^e siècle, a élaboré une formule mathématique décrivant la charge critique à laquelle une structure élancée se déforme. La ligne directrice d'Euler sur le flambement des sections est utilisée pour évaluer la charge de flambement de base d'une section alors que la contrainte dans la section reste variable. La pensée d'Euler est fondamentalement fondée sur certaines suppositions relatives à l'application de la charge axiale, à la section transversale, au facteur de rupture de la colonne, au matériau de la colonne et à la limite de contrainte. La rupture par flambement se produit lorsque la taille du segment est supérieure à sa surface transversale. La ligne directrice d'Euler indique que la contrainte dans la section due à une charge directe est plus modeste que les contraintes dues à la rupture par flambement.

II.3.1 Flambement en génie civil.

L'étude du flambement en génie civil remonte au 18^e siècle, lorsque le mathématicien suisse Jakob Bernoulli a étudié le flambement des poteaux. Cependant, ce n'est qu'au 19^e siècle que le concept de flambement a été largement reconnu et étudié par les ingénieurs structurels et les concepteurs. Au milieu des années 1800, l'ingénieur Augustus Welby Pugin a utilisé des colonnes en fer pour la structure du toit des Chambres du Parlement à Londres, qui s'est ensuite effondré en raison du flambement des colonnes. Cet événement a fait prendre conscience de l'importance de comprendre le comportement du flambement dans la conception des structures et a conduit à de nouvelles recherches dans ce domaine. Au début du 20^e siècle, le développement de la théorie de l'élasticité et les progrès des méthodes de calcul ont permis des prévisions plus précises du comportement de flambement des structures. Cela a conduit à l'élaboration de codes et de normes de conception intégrant des considérations relatives au flambement.

Aujourd'hui, le flambement est un facteur critique dans la conception de diverses structures de génie civil, y compris les bâtiments, les ponts et d'autres infrastructures. Des outils de calcul et des logiciels avancés sont disponibles pour prédire et prévenir les ruptures par flambement, garantissant ainsi la sécurité et la fiabilité des structures de génie civil.

Le flambement est un concept important en génie civil qui se produit lorsqu'un élément structurel élancé, tel qu'une colonne ou une poutre, est soumis à une contrainte de compression. Au 19^e siècle, un certain nombre de colonnes étaient utilisées pour soutenir les quais des nouvelles gares ferroviaires. Lorsque les trains entraient et sortaient, les vibrations dans les colonnes commençaient à poser des problèmes. Les ingénieurs ont rapidement découvert que si une colonne est soumise à des forces de compression, elle commence à se déformer et que, si ce processus se poursuit, elle finira par se déformer sur toute sa longueur.

Le problème du flambement latéral des poutres, a été repris plus en détail par plusieurs auteurs (Mandel, 1936 ; Timoshenko, 1936 ; Hetenyi, 1946 Courbon, 1964, ...). Ainsi, Mandel (1936) définit le flambement comme un phénomène commun à tous les corps minces à deux dimensions. Les corps cylindriques à parois minces, par exemple, peuvent être instables et flamber pour des tensions relativement faibles si l'épaisseur des parois est très faible par rapport au diamètre (Benaïssa et Khadraoui 2017).

En génie civil, le flambement est une préoccupation majeure dans la conception de structures telles que les bâtiments, les ponts et autres infrastructures. Il est important de prendre en compte les effets du flambage dès le début du processus de conception afin de s'assurer que la structure est sûre et stable dans différentes conditions de charge. Voici quelques exemples de structures déformées par flambement :



Figure II.4 Le pont du canyon de Pfeiffer sur l'autoroute 1 à Big Sur, en Californie.

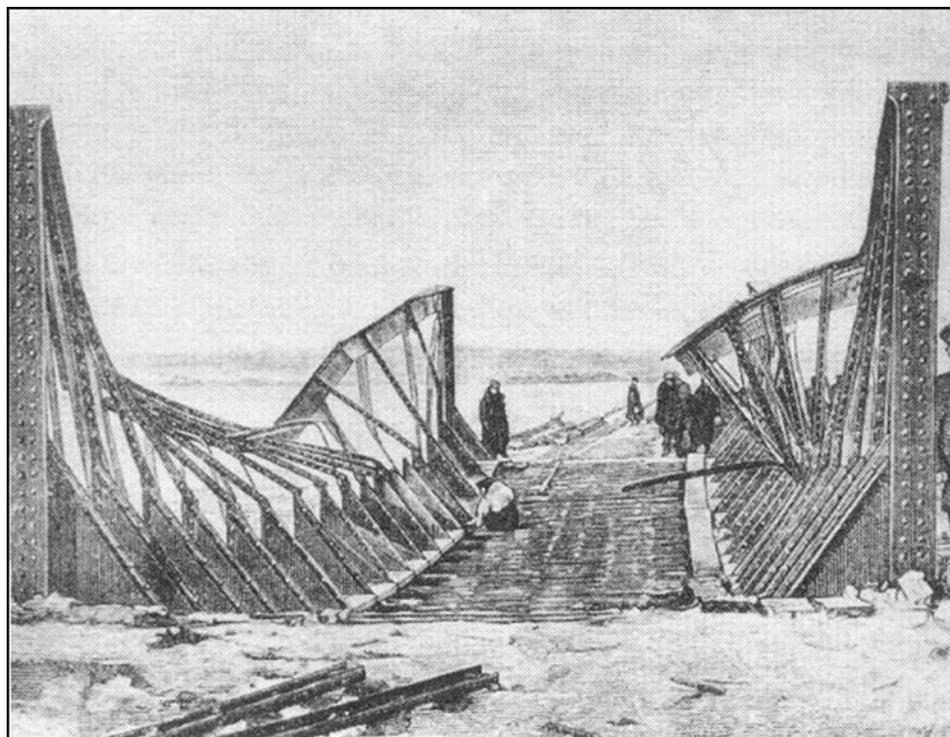


Figure II.5 Flambement total du fil supérieur d'une poutre grillagée d'un pont de chemin de fer (Russie, vers 1890).

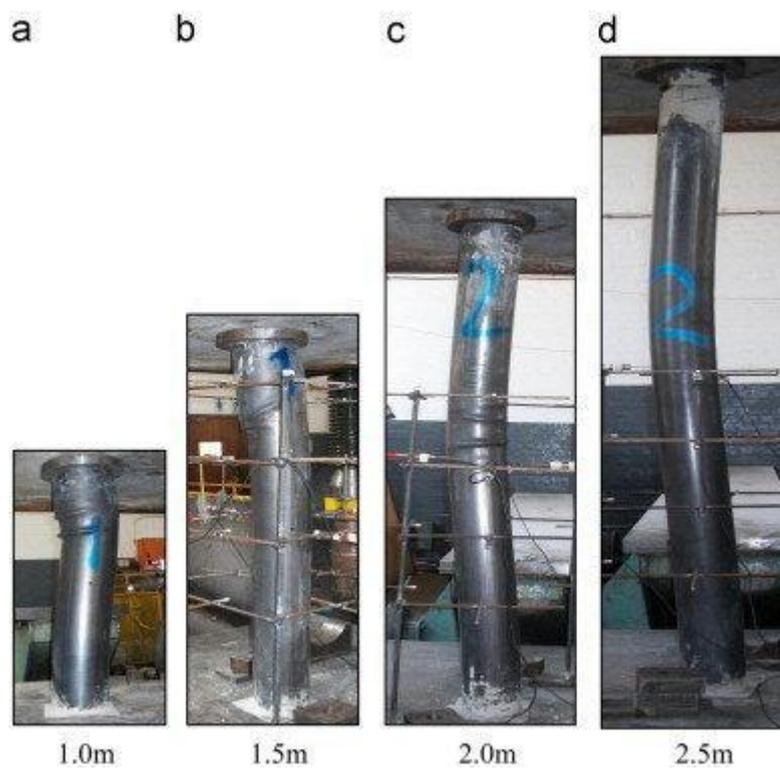


Figure II.6 Flambement des éléments en charpente métalliques de la différente hauteur.



Figure II.7a Flambement des éléments poteaux en béton armé.



Figure II.7b *Flambement des éléments poteaux en béton armé.*

II.3.2 Types de Flambement

Il existe plusieurs types de flambement, notamment le flambement d'Euler, le flambement local, le flambement global et le flambement latéral de torsion. Chacun de ces types de flambement peut se produire dans différents types de structures et peut être causé par divers facteurs tels que les charges appliquées, les propriétés des matériaux et la géométrie de la structure. Nous en examinerons quelques-unes dans les lignes qui suivent :

a). Flambement en flexion.

Le flambement est un phénomène qui se produit lorsqu'une colonne est soumise à une force de compression axiale. Si la charge critique est atteinte, la colonne flambe, ce qui entraîne sa rupture. Le flambement se produit généralement dans les colonnes élancées ou présentant un rapport d'aspect élevé (rapport entre la longueur et la surface de la section transversale). Pour éviter le flambement, les ingénieurs utilisent souvent un contreventement ou un renforcement supplémentaire, comme l'ajout de plaques ou de sections d'acier à la colonne. Euler a dérivé la formule, la formule d'Euler, qui donne la charge axiale maximale qu'une colonne idéale, longue et mince, peut supporter sans flamber. Une colonne idéale est une colonne parfaitement droite, constituée d'un matériau homogène et exempte de contraintes initiales. Lorsque la charge appliquée atteint la charge d'Euler, parfois appelée charge critique, la colonne se trouve dans un état d'équilibre instable. La charge de flambement d'une colonne peut être augmentée en changeant de matériau pour un matériau

ayant un module d'élasticité (E) plus élevé, ou en modifiant la conception de la section transversale de la colonne de manière à augmenter son moment d'inertie.

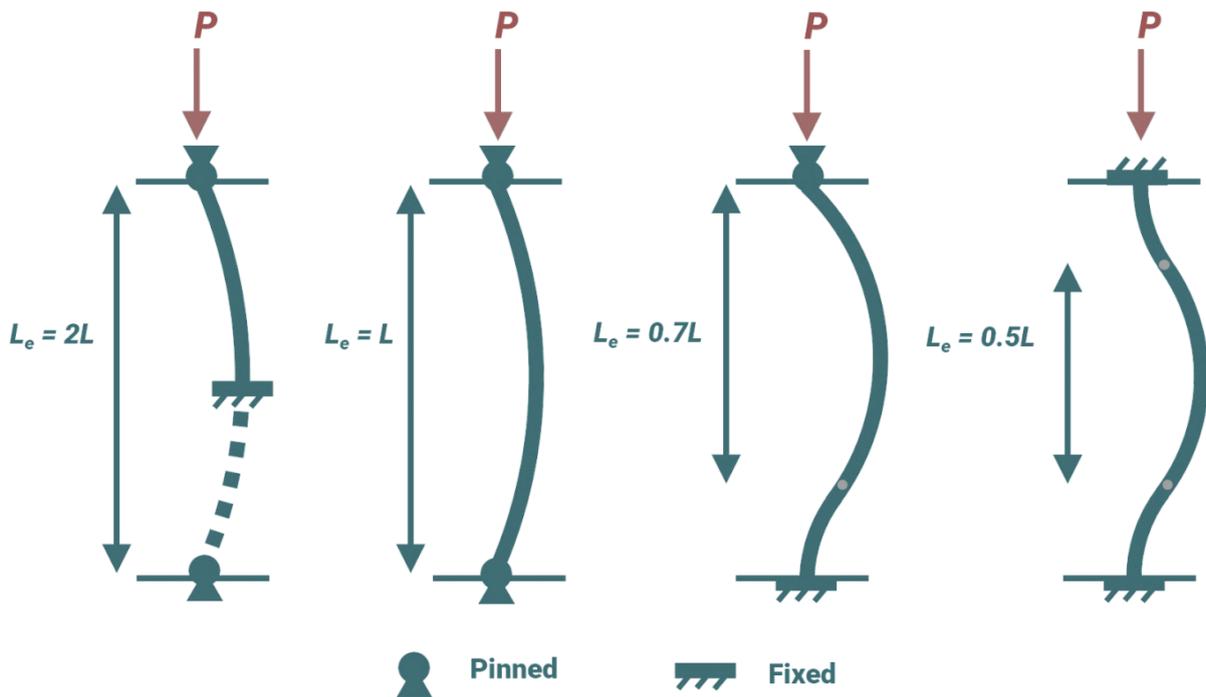


Figure II.8 Formes de flambement des poteaux.

b). Le flambement par divergence.

Il est caractérisé par le fait essentiel que la poutre se dérobe à l'effort normal de compression en fléchissant transversalement. Il se déclenche à cause de la flexion initiale (courbure initiale, charge excentrée, charge transversale), l'effort normal de compression accentue, comme on s'en rend compte en se plaçant en configuration déformée (Benaissa et Khadraoui 2017).

c). Flambement de flexion-torsion.

La torsion-flexion peut être décrite comme la combinaison des réactions de flexion et de torsion d'un membre lors de la compression. Un tel mode de déviation doit être pris en compte dans la conception. Il se produit principalement dans les poteaux à section "ouverte" et donc à faible rigidité en torsion, tels que les caniveaux, les tés structuraux, les angles égaux à double angle et à un appui. Les sections circulaires ne subissent pas ce mode d'instabilité. Le mode torsion-flexion ne doit être considéré que si le centre de cisaillement ne coïncide pas avec le centre de gravité.

d). Flambement latéral-torsionnel.

Le flambement latéral-torsionnel est un phénomène d'ingénierie structurelle où une poutre ou un poteau soumis à la flexion peut se rompre sous l'effet combiné de la flexion latérale et de la torsion. Ce phénomène peut se produire lorsque la charge exercée sur la poutre ou le poteau dépasse un certain seuil, entraînant une rupture par flambement soudaine. Il est crucial de prendre en compte le flambement latéral-torsionnel lors de la conception des structures afin de garantir leur sécurité et leur stabilité.

II.3.3 Charge critique du flambement.

La charge critique de flambement est la force de compression qui doit être appliquée à une colonne ou à une poutre élancée avant qu'elle ne se rompe soudainement par flambage, une défaillance soudaine et catastrophique causée par la flexion et le flambage de la colonne ou de la poutre sous l'effet de la charge. Cette charge critique dépend de divers facteurs tels que le matériau de la colonne ou de la poutre, la forme de la section transversale, la longueur et les conditions d'extrémité.

La charge critique de flambage d'une plaque FGM dépend de plusieurs facteurs, tels que la géométrie de la plaque, les conditions aux limites et les propriétés du matériau. La charge critique est la charge maximale que la plaque peut supporter avant de se déformer, ce qui signifie qu'elle se rompt en raison d'une contrainte de compression excessive. Pour déterminer la charge critique de flambage, les ingénieurs utilisent des modèles mathématiques et des simulations pour analyser le comportement de la plaque dans différentes conditions de chargement. Sur la base de ces simulations, les concepteurs choisissent la bonne épaisseur et la bonne composition du matériau pour la plaque FGM afin de s'assurer qu'elle peut supporter les charges prévues sans se déformer.

La charge critique de flambement N_{cr} ou la force critique d'Euler est le seuil de flambement, Et l'effort de compression est N , définit par l'équation suivante :

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (\text{II.1})$$

Cette formule a été dérivée en 1757 par le mathématicien suisse Leonhard Euler.

Avec :

E est le module de Young du matériau ;

I est le moment quadratique de la poutre ;

l est la longueur de flambement de la poutre.

Si :

- ✓ $N \ll N_{cr}$ La plaque est droite, en compression simple et en équilibre stable
- ✓ $N \gg N_{cr}$ Le seul état possible est instable, la plaque étant droite.
- ✓ $N = N_{cr}$ La plaque est en équilibre instable, possibilité de bifurcation d'équilibre dans le but de toucher un état d'équilibre stable en flexion composée.

II.3.4 Contrainte critique du flambement.

La contrainte critique est définie par le rapport entre la charge critique N_{cr} et l'aire de la section A , donne par :

$$\sigma_{cr} = \frac{N_{cr}}{A} \quad (\text{II.2})$$

La contrainte critique du flambement est alors formulée comme suit :

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (\text{II.3})$$

L'élanement λ (sans unité) est donné selon l'expression :

$$\lambda = \frac{l}{\rho} \quad (\text{II.4})$$

Le rayon de giration ρ est le suivant :

$$\rho = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad (\text{II.5})$$

II.3.5 Flambement des plaques FGM.

Ces dernières années, de nouveaux matériaux appelés matériaux à gradient fonctionnel (FGM) ont suscité beaucoup d'intérêt dans le domaine de l'ingénierie et, par conséquent, ont également fait l'objet d'une analyse du flambement.

II.3.6 Qu'est-ce que le flambement des plaques FGM ?

Les plaques FGM (Functionally Graded Material) peuvent également être soumises au flambage. Le flambement est un phénomène qui se produit lorsqu'une structure élancée, telle qu'une plaque, est soumise à des charges de compression qui dépassent sa charge critique de flambage. Dans les plaques FGM, la distribution des propriétés des matériaux varie continuellement dans l'épaisseur de la plaque, ce qui peut affecter le comportement de flambage. Le comportement de flambage des plaques FGM est un phénomène complexe dont l'analyse nécessite des modèles mathématiques et de simulation avancés.

II.4 Analyse de la stabilité de structures 2D non homogènes.

L'analyse de stabilité des structures 2D non homogènes consiste à déterminer si la structure est stable sous différents types de charges, telles que les charges permanentes, les charges dynamiques et les charges de vent. L'analyse est réalisée à l'aide de méthodes mathématiques pour calculer les contraintes et les déformations internes de la structure, qui sont ensuite comparées à divers facteurs de sécurité pour s'assurer que la structure peut supporter les charges appliquées sans défaillance.

Différentes méthodes sont utilisées pour effectuer l'analyse de stabilité, comme l'analyse par éléments finis (FEM), une méthode numérique qui divise la structure en petits éléments, puis analyse chaque élément pour déterminer le comportement global de la structure. Une autre méthode est l'analyse structurelle matricielle, qui implique la résolution d'un système d'équations représentant le comportement de la structure. Pour effectuer une analyse de stabilité, il est important de bien comprendre les propriétés matérielles de la structure, telles que le module d'élasticité, le coefficient de Poisson et la limite d'élasticité. Ces informations sont utilisées pour calculer les contraintes et les déformations internes de la structure. En conclusion, l'analyse de la stabilité des structures 2D non homogènes est un processus important qui implique des calculs mathématiques et des simulations pour s'assurer que la structure est stable et peut résister à différents types de charges.

II.5 Analyse de stabilité et flambement.

L'analyse de stabilité est un outil essentiel pour prévenir le flambage des plaques FGM (Functionally Graded Material). En analysant la géométrie de la plaque, les propriétés des matériaux et les conditions de chargement, l'analyse de stabilité peut déterminer la charge critique de flambage de la plaque. Cette information aide les concepteurs à choisir l'épaisseur

et la composition du matériau appropriées pour que la plaque FGM résiste au flambage dans diverses conditions de chargement. Grâce à l'analyse de stabilité, les plaques FGM peuvent être optimisées pour éviter le flambage, ce qui garantit leur durabilité et leur longévité.

II.6 Pourquoi est-il important de déterminer la charge critique de flambage d'une structure ?

La détermination de la charge critique de flambage d'une structure est importante car elle permet de garantir la stabilité structurelle et la sécurité de la conception. Lorsqu'une structure est soumise à des charges de compression, elle risque de se déformer ou de s'effondrer à certains endroits, ce qui peut causer de graves dommages, voire entraîner la défaillance de l'ensemble de la structure. En calculant la charge critique de flambement, les ingénieurs et les concepteurs peuvent identifier la charge de compression maximale que la structure peut supporter avant que le flambement ne se produise, ce qui leur permet d'assurer la sécurité et la stabilité de la conception.

II.7 Analyse de la stabilité de structures 2D non homogènes.

L'analyse de stabilité des structures 2D non homogènes consiste à déterminer si la structure est stable sous différents types de charges, telles que les charges permanentes, les charges dynamiques et les charges de vent. L'analyse est réalisée à l'aide de méthodes mathématiques pour calculer les contraintes et les déformations internes de la structure, qui sont ensuite comparées à divers facteurs de sécurité pour s'assurer que la structure peut supporter les charges appliquées sans défaillance.

Différentes méthodes sont utilisées pour effectuer l'analyse de stabilité, comme l'analyse par éléments finis (FEM), une méthode numérique qui divise la structure en petits éléments, puis analyse chaque élément pour déterminer le comportement global de la structure. Une autre méthode est l'analyse structurelle matricielle, qui implique la résolution d'un système d'équations représentant le comportement de la structure. Pour effectuer une analyse de stabilité, il est important de bien comprendre les propriétés matérielles de la structure, telles que le module d'élasticité, le coefficient de Poisson et la limite d'élasticité. Ces informations sont utilisées pour calculer les contraintes et les déformations internes de la structure. En conclusion, l'analyse de la stabilité des structures 2D non homogènes est un processus important qui implique des calculs mathématiques et des simulations pour s'assurer que la structure est stable et peut résister à différents types de charges.

II.8 Conclusion.

Dans ce chapitre, on a vu une revue sur la stabilité en générale, l'instabilité s'exprime dans des systèmes ou des éléments chargés de pression sous le phénomène de perte de stabilité, flambement en génie civil, la possibilité de flambement à provoquer des changements de forme dus à de grandes déformations dues à la non-linéarité géométrique, entraînant une modification des chemins de force dans la structure et la déstabilisation d'autres éléments. Pour contrôler le flambement et limiter le risque de cette instabilité, le seuil de flambement, l'effort d'Euler critique, doit être déterminé à partir d'une théorie adaptée.

CHAPITRE III :

Théories des plaques.

III.1 Les théories des plaques.

Les plaques sont des éléments structurels très courants dans le domaine de la construction mécanique, utilisés dans la construction de bâtiments, de navires et d'autres véhicules, ainsi que dans la fabrication de machines, de châssis, de réservoirs, de ponts courbes et de couvertures. Il est important de choisir la bonne théorie qui décrit correctement le comportement statique et dynamique de la structure et la méthode de résolution à utiliser.

Cependant, les modèles de poutre peuvent être utilisés pour une grande variété de pièces tant qu'ils répondent à certains critères. En mécanique des structures, la théorie des poutres permet de simplifier les problèmes qui se posent en assimilant l'objet étudié à une poutre, une structure allongée dont une dimension est supérieure aux deux autres. Cela s'applique aux champs de force dans lesquels des matériaux isotropes homogènes peuvent rester linéaires et élastiques. Cela signifie, entre autres, que le solide reprendra sa forme d'origine après avoir été déformé.

En 1888, Love utilise l'hypothèse de Gustav Kirchhoff, elle-même inspirée de l'hypothèse d'Euler-Bernoulli, pour découvrir une théorie des plaques minces appelée théorie classique ou théorie de Love-Kirchhoff. En effet, la résistance de ces structures nécessite généralement une épaisseur de panneau relativement importante et donc une stabilité accrue. Le comportement des planches est fortement influencé par l'action des forces de cisaillement. Par conséquent, la théorie de Love-Kirchhoff n'est souvent pas adaptée à l'étude de ces types de structures.

Raymond Mindlin (1951) a consolidée la théorie de plaques épaisses à partir des travaux de Rayleigh (1877), Reissner (1945) et Uflyand (1948), la théorie des déformations du premier ordre a été consolidée par Timoshenko (1921) qui prend en compte l'effet du cisaillement, utilise le facteur de correction. La théorie de Mindlin-Reissner prend en considération de manière approchées la déformation traversant l'épaisseur d'une plaque due à l'effort tranchant qui est l'extension de la théorie de la plaque de Kirchhoff-Love. Ensuite, des théories d'ordre supérieur sont venues améliorer les hypothèses des théories classiques et du premier ordre lorsque l'épaisseur de la plaque devient importante. Des théories d'ordre supérieur ont alors émergé pour améliorer les hypothèses des théories classiques et du premier ordre qui tiennent compte des effets de cisaillement. Il existe également une théorie basée sur l'élasticité tridimensionnelle (théorie 3D).

Dans ce chapitre, nous présentons plusieurs modèles liés à la théorie des poutres qui ont été

développés dans la littérature pour améliorer l'évolution de la variation du champ de déplacement avec l'épaisseur de la poutre.

III.1.1 Développement des théories des plaques ;(Méthode de Navier)

Pour résoudre un problème de flambement, il existe plusieurs méthodes. Dans ce travail on utilise la méthode de Navier. D'après Reddy, les solutions Navier peuvent être développées pour une plaque rectangulaire lorsque les quatre bords sont simplement pris en charge. Il existe d'autres méthodes aussi fréquemment utilisées pour résoudre les problèmes de flambage des plaques sont celles de Levy et Rayleigh-Ritz.

Dans la méthode de Navier (1823), les déplacements généralisés sont développés dans une double série trigonométrique en termes de paramètres inconnus. Le choix des fonctions de la série se limite à celles qui satisfont aux conditions aux limites du problème. La substitution des expansions de déplacement dans les équations gouvernantes devrait se traduire par un ensemble unique et inversible d'équations algébriques parmi les paramètres de l'expansion. Sinon, la solution Navier ne peut pas être développée pour le problème.

III.1.2 Définition de la plaque

Une plaque FG est simplement une forme rectangulaire appuyée dans laquelle une dimension appelée "épaisseur" est petite par rapport aux autres dimensions caractéristiques (longueur a et largeur b) et est soumise à des contraintes supplémentaires qui provoquent une déformation de flexion.

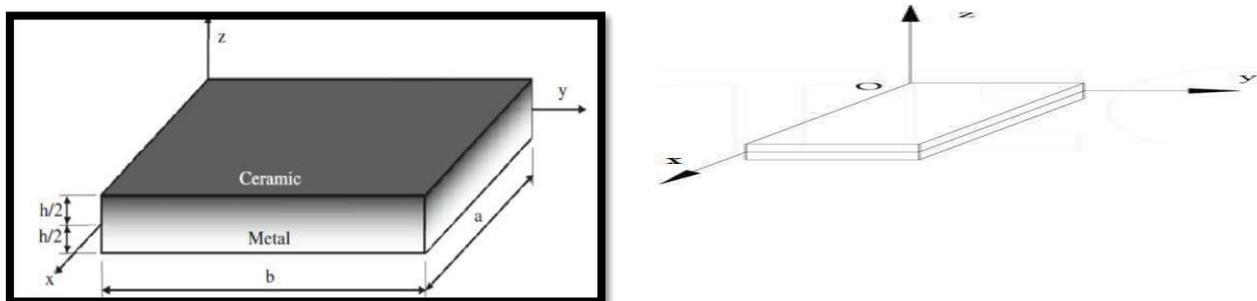


Figure .III.1 Schéma d'une plaque.

On appelle h l'épaisseur de la plaque ; le plan inférieur est donc le plan $z = - h/2$ et le plan supérieur est le plan $z = h/2$.

Les plaques peuvent être classées en trois groupes : les plaques minces à petites déformations, les plaques minces à grandes déformations et les plaques épaisses.

III.1.3 Domaines d'application des plaques.

Le domaine d'utilisation des panneaux est très répandu dans tous les domaines, en particulier dans la construction, où ils sont utilisés dans des structures simples (appartements) où des œuvres d'art existent sous diverses formes, notamment des formes rondes, rectangulaires et autres. Selon la qualité du travail.

- ✓ Ouvrage d'arts pont ;
- ✓ Ouvrage d'arts pont (Tabliers) ;
- ✓ Ouvrage (plaque circulaire) ;
- ✓ Ouvrage souterrains ;
- ✓ Construction civiles.

III.1.4 Catégorie de théorie des plaques.

La théorie des contraintes de cisaillement peut être divisée en deux catégories principales en fonction des domaines considérés : (a) théories basées sur la contrainte et (b) théories basées sur le déplacement.

a). Théories basées sur le déplacement:

- ✓ Théorie classique des plaques (CPT) ;
- ✓ Théorie de déformation de cisaillement de premier ordre (FSDT) ;
- ✓ Théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSDT) ;
- ✓ Théorie raffinée des plaques (RPT).

b). Théories basées sur la contrainte.

Une théorie basée sur les contraintes est déterminée à partir d'un champ de contrainte supposé de contrainte axiale, qui est supposé varier linéairement à travers l'épaisseur de la plaque. Les contraintes transversales normales et de cisaillement sont obtenus à partir des équations d'équilibre de la théorie tridimensionnelle de l'élasticité. L'équation d'équilibre théorique est déterminée à l'aide du théorème de stationnarité variationnelle.

III.2. Les différents modèles des structures composites dans l'élasticité bidimensionnelle.

III.2.1 La théorie des plaques minces ou le classique des plaques (CPT).

En 1850, Kirchhoff a développé la théorie des plaques la plus célèbre, la "théorie classique des plaques". Les structures planes qui sont minces et minces par rapport aux autres

dimensions du plan sont correctement modélisées par cette théorie de Love-Kirchhoff. Représentation précise des champs de contraintes et de déformations dans les plaques minces. La théorie CPT classique des plaques (Classical Plate Theory) se présente comme la plus simple des approches et basée essentiellement sur les hypothèses suivantes:

- ✓ La section plane et perpendiculaire à l'axe neutre avant déformation reste plane et perpendiculaire à l'axe neutre après déformation (Ce qui néglige l'effet de la déformation de cisaillement transverse) ;
- ✓ Les normales ne changent pas de longueur ($\epsilon_z=0$) ;
- ✓ La contrainte normale dans la direction transversale est petite, donc négligeable comparativement aux contraintes appartenant au plan de la plaque ;
- ✓ La plaque est d'épaisseur petite devant les autres dimensions (rapport d'élancement h/a ou $h/b < 0.05$). Elle possède un plan moyen, également appelé plan ;
- ✓ Les termes non linéaires du déplacement sont négligés. L'effet de l'inertie de rotation est négligeable.

Le champ de déplacement de Love-Kirchhoff est donnée par :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned}$$

(III.1)

Ou u_0, v_0, w_0 : sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque, $\frac{\partial w_0}{\partial y}$ et $\frac{\partial w_0}{\partial x}$ sont les rotations dues à la flexion (sans cisaillement).

La principale limitation de la théorie classique de Kirchhoff et que l'on néglige les effets du aux efforts tranchants et à l'inertie de rotation, or dans la pratique les plaques ont des épaisseurs significatives et il devient nécessaire de tenir compte de ces effets pour décrire leur comportement dynamique Kaddouri (2014).

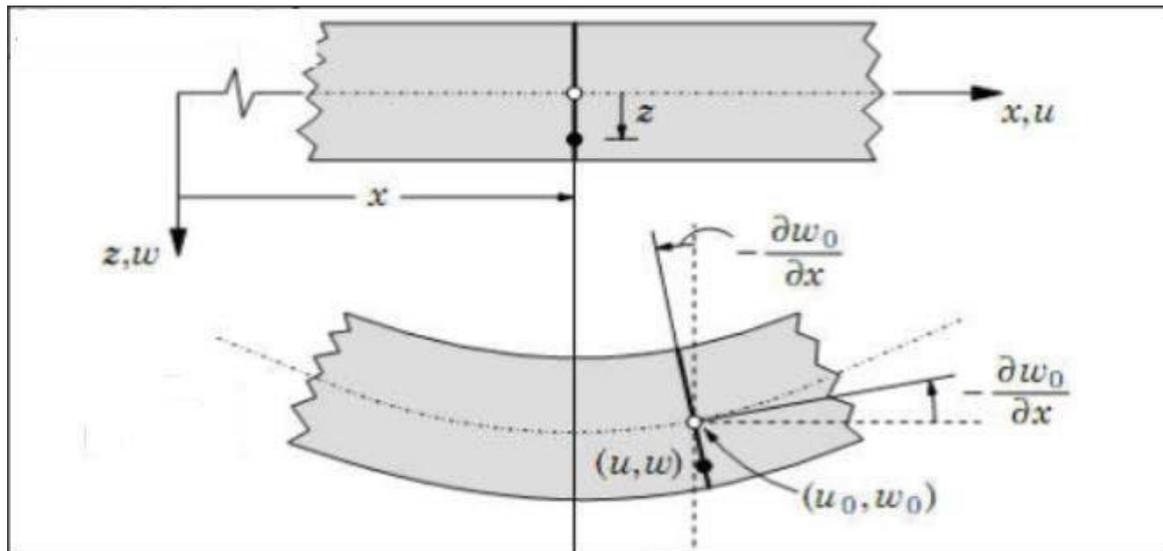


Figure III.2 Schématisation des déformations dans le cas de la théorie classique des plaques.

Dans la théorie classique, dite théorie des plaques minces, l'épaisseur de la plaque est si petite que la contrainte normale transversale est négligeable. Cette hypothèse n'est pas valide ou correcte pour les dalles moyennes ou épaisses.

Pour l'étude du comportement en flambement des plaques à gradient de propriété sous quatre types de charges thermiques et de charges de compression et Javaheri et Eslami (2002) ont utilisé la CPT et aussi la charge de flambement a été calculée en utilisant la méthode de la bande finie à la place de la solution de Navier dans le travail Javaheri et Eslami (2002). Par Zhang et Zhou (2008) la vibration libre, le flambement et l'analyse de déflexion des plaques minces fonctionnellement graduée FG a été présentée sur la base de la neutralité physique surface sur la base de la neutralité physique surface. Le flambement des plaques fonctionnellement gradué soumises à la compression non uniforme a été examiné par Mahdavian (2009) en utilisant la CPT et les solutions de Fourier. Mohammadi et al. (2010) ont dérivé les solutions analytiques pour la charge de flambement des plaques FG avec deux bords opposés simplement appuyés et les deux autres bords ayant des conditions aux limites arbitraires

III.2.2 La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (First Shear Deformation Theory) FSDT.

Reissner (1945) et Mindlin (1951) ont proposé une nouvelle étude appelée la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) qui a mené au modèle de plaque de Reissner-Mindlin. Dans cette théorie, l'hypothèse cinématique est de sorte que, pour introduire l'effet du cisaillement transverse, la normale reste droite mais non perpendiculaire à

la surface moyenne dans la configuration déformée. L'épaisseur de la plaque ne change pas lors d'une déformation. Donc le déplacement est constant dans la direction de l'épaisseur z de cette façon, les déformations transversales de cisaillement sont incluses dans la théorie. Le champ de déplacement s'écrit :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + z \phi_x \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y, z) - \frac{\partial w_0}{\partial x} + z \phi_y \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (\text{III.2})$$

Avec : (u_0, v_0, w_0) et (ϕ_x, ϕ_y) sont les déplacements en membrane, les rotations autour de l'axe x et y respectivement.

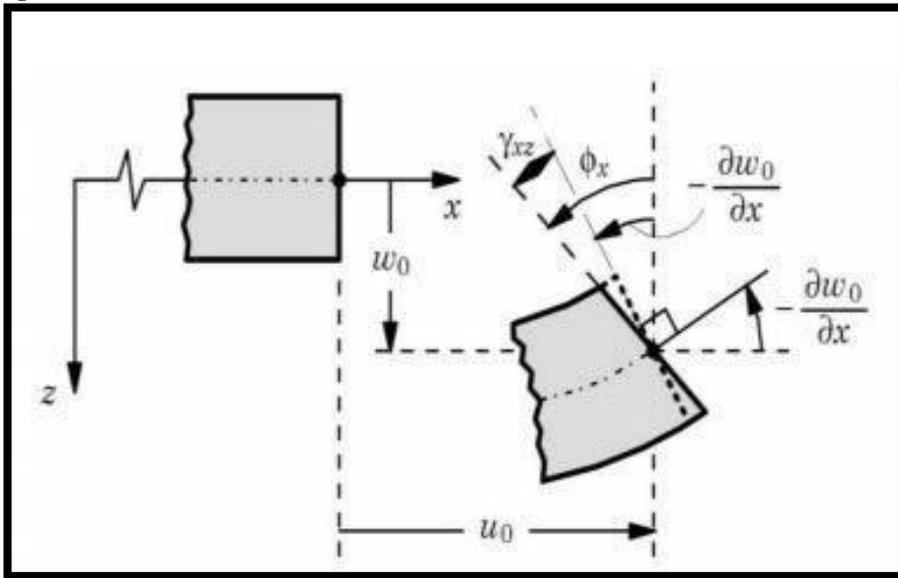


Figure III.3 Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin Reddy(1997).

Ce choix de la forme des champs de déplacements, les déformations transversales sont constantes en z . Les contraintes de cisaillement sont donc uniformes à n'importe quel point suivant l'épaisseur et ça évite la discontinuité entre les couches dans les composites conventionnels. Cette mauvaise description d'uniformité de distribution des contraintes oblige à introduire des coefficients correcteurs pour mieux prendre en compte, dans l'écriture de l'énergie, les effets du cisaillement transversal Whitney (1973). Les résultats obtenus dépendent essentiellement du choix empirique dans des situations complexes des coefficients correcteurs et l'étude des plaques épaisses reste aléatoire par ce type d'approche cinématique (Attia 2015).

III.2.2.1 Facteur de correction.

Dans ce cas (FSDT), le cisaillement est constante a traversé l'épaisseur. Car Cisaillement existe au niveau des surface libres de la structure c'est une contradiction avec la réalité ce qui nécessite de corrections. Un facteur de correction en cisaillement à travers l'épaisseur est introduit par Mindlin (1951). La valeur de facteur correction dépend de la géométrie de la plaque, de la variation du coefficient de Poisson à travers l'épaisseur, du chargement appliqué et des conditions aux limites imposées.

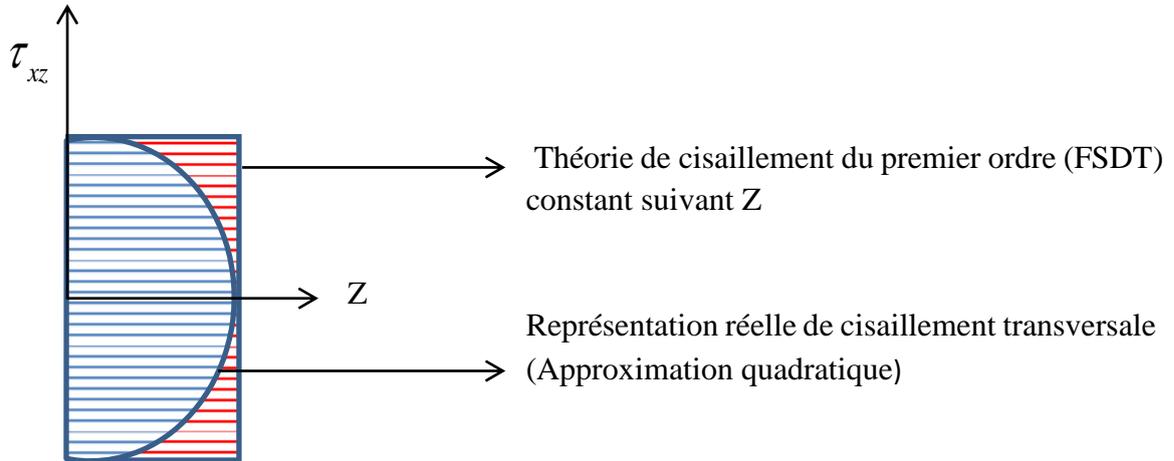


Figure .III.4 *Approximations de la contrainte.*

K_s est un facteur corrigeant l'hypothèse de contraintes de cisaillement constantes sur l'épaisseur de la plaque dans la théorie de Mindlin.

Tableau III.1 *Différentes valeurs de K_s*

Si K_s	1	sans correction
	2/3	géométrie circulaire
	5/6	géométrie rectangulaire

En contradiction avec la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les surfaces libres, qui est le rapport entre l'énergie de déformation de cisaillement de la distribution parabolique et celle uniforme :

(III.3)

$$K_s = \int \frac{\tau_{xz}}{\tau_{xz}} \approx \frac{5}{6}$$

Pour éviter l'utilisation du facteur de correction de cisaillement dans la FSDT, Yang et al. (2005) ont utilisé une technique de perturbation pour étudier l'influence du caractère aléatoire des propriétés des matériaux et des paramètres de rigidité de la fondation sur la charge de flambement des plaques FG reposant sur une fondation élastique.

Lanhe (2004) et Bouazza et al. (2010) ont dérivé les solutions analytiques pour la température de flambement des plaques FG simplement appuyées sous deux types de charges thermiques par la FSDT et la solution de Navier. Mohammadi et al. (2010) ont découplé cinq équations régissant la FSDT en deux équations indépendantes. Les équations obtenues ont ensuite été résolues pour la charge de flambement des plaques fonctionnellement graduée sous chargement plan en utilisant l'approche de la solution type Levy. Nguyen et al. (2008) ont adopté les équations d'équilibre dans le calcul des contraintes de cisaillement transversal et des forces de cisaillement. Singha et al. (2011) ont étudié le comportement non linéaire de la flexion des plaques FG sous charges transversale en utilisant la FSDT basée sur la surface neutre et la méthode des éléments finis. Les équations d'équilibre ont été utilisées pour calculer les contraintes de cisaillement transversal, tandis que la méthode de l'énergie a été adoptée pour obtenir les expressions du facteur de correction de cisaillement. Yaghoobi et Torabi (2013) ont également suivi une approche similaire pour dériver la solution type Levy pour la charge de flambement des plaques FG reposant sur une fondation élastique et soumises à un chargement thermique par FSDT.

III.2.3 Théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevée (HSDT).

Théories de déformation par cisaillement d'ordre supérieur (HSDT) Ces théories sont des développements ultérieurs de la théorie classique des plaques (CPT) et de la théorie du premier ordre (FSDT). Ils sont basés sur l'évolution de déplacements d'épaisseur de plus de deux ordres de grandeur. Contrairement aux théories précédentes, la HSDT est basée sur une distribution de champ électrique non linéaire dans le sens de l'épaisseur. A la différence de la CPT et la théorie de déformation de cisaillement de 1er ordre FSDT ; la théorie d'ordre élevée (HSDT) tient compte de l'effet de la déformation d'une façon parabolique à traversé l'épaisseur sans utilisation de K_s .

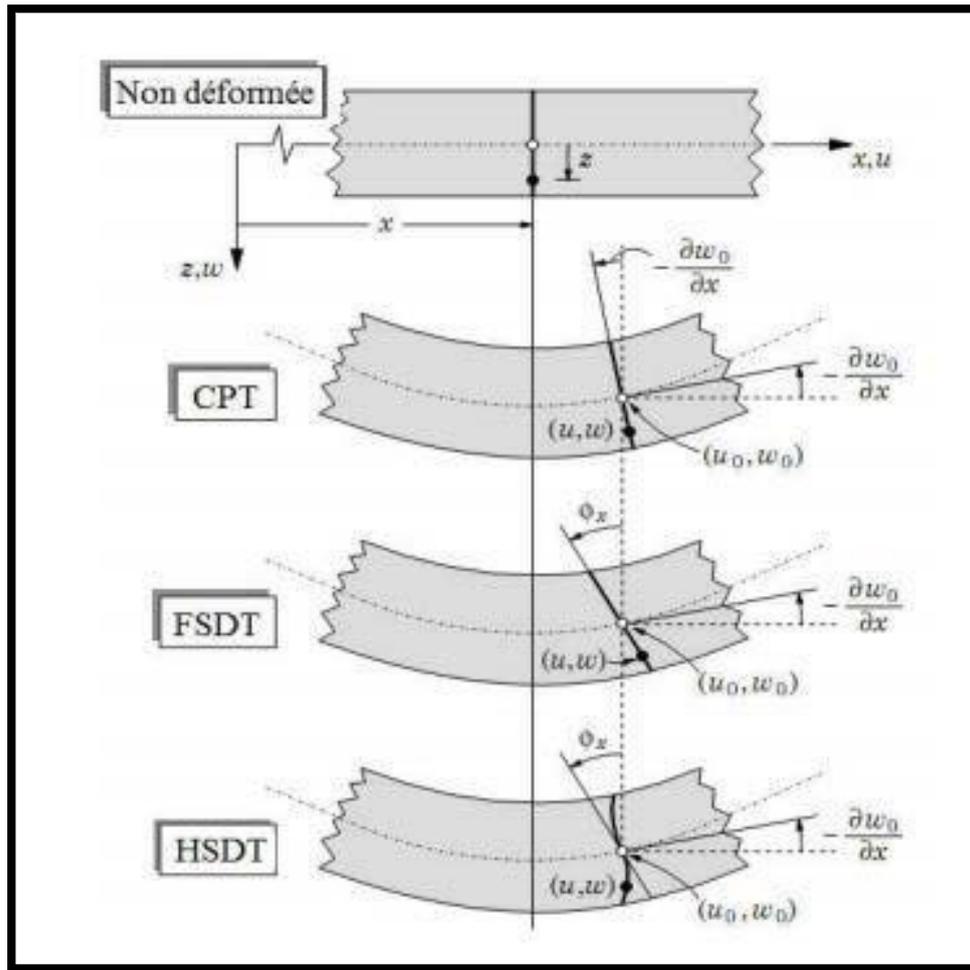


Figure III.5 Comparaison de la théorie d'ordre élevé (HSDT) avec (CPT) et (FSDT).

Les hypothèses qui sont à la base du développement de cette théorie sont :

- ✓ La section plane et perpendiculaire à l'axe neutre avant déformation perd sa perpendicularité et sa planéité après déformation ;
- ✓ Les normales ne changent pas de longueur ($\epsilon_z=0$).

Ont utilisé des théories d'ordre élevé pour étudier le comportement des structures (poutres et plaques) en matériaux composites et en matériaux à gradients de propriétés FGM. Pour les théories d'ordre élevé, le champ de déplacement est généralement écrit comme suit :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z)\varphi_x \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z)\varphi_y \\
 w(x, y, z) &= w_0
 \end{aligned}
 \tag{III.4}$$

Avec : $f(z)$ est la fonction de gauchissement.

La fonction de gauchissement a été proposée par de nombreux auteurs ces dernières années pour les modèles d'ordre élevé qui sont basés sur une distribution non linéaire des champs de déplacement dans l'épaisseur. La distribution des contraintes de cisaillement transversales dans l'épaisseur peut prendre une forme parabolique, sinusoidale comme le modèle de Touratier, sous la forme hyperbolique comme proposée par Ait Atmane et al. Ou exponentielle comme proposée par Karama et al (2003). . Tounsi et al. (2016) ont développé une nouvelle HSDT avec 03 inconnues pour l'analyse du flambement et la vibration des plaques sandwich fonctionnellement graduée. . Une nouvelle simple hyperbolique HSDT est développée par Saidi et al. (2016) pour l'étude de la vibration des plaques rectangulaires fonctionnellement graduées resté sur une fondation élastique

Yang et al. (2004) ont étudié le flambement, la vibration libre et la stabilité dynamique des plaques sandwich FG sous une action combinée de changement de température uniforme et de compression périodique dans le plan en utilisant la TSDT et une méthode semi-analytique. Les solutions analytiques pour la température critique de flambement des plaques FG simplement appuyées sous quatre types de charges thermiques ont été dérivées par Javaheri et Eslami (2002) en utilisant la TSDT et la solution de Navier.

La SSDT a été largement utilisée pour étudier la flexion thermique des plaques composites (2004,2005), le flambement des plaques composites (2004), la flexion des plaques sandwich fonctionnellement gradué (2005,2010), le flambement et la vibration des plaques sandwich FG (2004,2005), la vibration des plaques FG. Une théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé quasi-3D a été développée par Zenkour (2007) pour l'analyse du flambement thermique des plaques à gradient de propriété en utilisant une fonction sinusoidale.

Table III.2 Exemple de différentes fonctions connues.

Auteur	F(z)	Theorie
Reddy (1984)	$f(z) = z \left(1 - \frac{4}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right)$	T.S.D.T
Touratier(1991)	$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right)$	S.S.D.T
Reissner (1945)	$f(z) = \frac{5}{4} z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$	F.S.D.T
Timoshenko	$f(z) = z$	T.B.T

III.2.4 Théories raffinées d'ordre élevé à quatre variables.

Une nouvelle théorie des plaques raffinée (RPT) a été développée par Shimpi (2002) pour les plaques isotropes, cette théorie ne contient que deux inconnues comparée avec trois inconnues dans le cas de la FSDT et de la TSDT, en divisant le déplacement en composants de flexion et de cisaillement. La théorie des plaques raffinée est suffisamment précise pour prédire les réponses globales des plaques isotropes et orthotropes. La caractéristique la plus intéressante de cette théorie est qu'elle ne nécessite pas de facteur de correction de cisaillement, La théorie des plaques raffinée est suffisamment précise pour prédire les réponses globales des plaques isotropes et orthotropes.

La formulation est limitée au comportement élastique linéaire. Le champ de déplacement des théories de déformation de cisaillement est choisi en se basant sur les hypothèses suivantes :

- ✓ Le déplacement transversal est décomposé en une composante de flexion et une composante de cisaillement ;
- ✓ Les déplacements axiaux sont décomposés en trois termes : à savoir : extension, flexion et cisaillement ;
- ✓ Les déplacements axiaux dus à la flexion sont similaires aux ceux donnés par la théorie classique des plaques (CPT) ;
- ✓ Le déplacement axial dû au cisaillement engendre une variation non linéaire de la déformation et la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur de la plaque de telle sorte que cette dernière s'annule au niveau des surfaces supérieure et inférieure.

Le champ de déplacement est donné sous la forme générale suivante :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} + f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} + f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\
 w(x, y, z) &= w_b(x, y) + w_s(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{III.5}$$

Ou u_0 et v_0 sont les déplacements suivant les directions x et y d'un point sur le plan moyen de la plaque, w_b et w_s sont les déplacements transversaux dus à la flexion et au cisaillement, $f(z)$ est une fonction de forme qui détermine la distribution des déformations et des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur. Afin de rendre la contrainte de cisaillement transversale aux surfaces supérieures et inférieures de la plaque nulle, la fonction $f(z)$ choisie doit respecter cette condition, et par conséquent, le facteur de correction de cisaillement n'est pas nécessaire.

Les théories HSDTs et quasi-3D développées sont reconnues coûteuses car en élargissant les déplacements en série de puissances des coordonnées de l'épaisseur, le calcul de puissance supplémentaire de ces coordonnées va induire une inconnue supplémentaire à la théorie. Ainsi il est plus commode de simplifier les HSDTs existantes et les théories quasi-3D ou de développer des théories simples avec moins d'inconnues. Thai et Choi (2013) ont simplifié la FSDT pour les plaques FG (2013) et les plaques composites laminées, Thai et al. (2014) ont également développé une autre FSDT simplifiée pour les plaques sandwich FG en utilisant les hypothèses de Shimpi et al. (2007). Tounsi et al. (2013), Ameer et al. (2011) et Thai et Vo (2013) ont développé une théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevée à quatre inconnues pour les plaques sandwich FG et les plaques FG en utilisant la fonction sinusoidale. Plusieurs HSDTs à quatre inconnues ont été proposées par Thai et Choi (2013) pour les plaques fonctionnellement graduées en utilisant des différentes fonctions de forme cubiques (1984), sinusoidales (1991), hyperboliques (1992) et exponentielles (2003), la théorie de déformation de cisaillement d'ordre (n) développée par Xiang et al. (2011, 2014). Thai et Choi (2014) ont amélioré la RPT en tenant compte de l'effet de l'étirement de l'épaisseur dans les plaques FG.

III.3 Conclusion.

Dans ce chapitre, on a vu une revue sur les différentes théories des plaques et les modèles analytiques des plaques à savoir, la théorie classique des plaques (CPT), la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) et la théorie de déformation en

cisaillement d'ordre élevée (HSDT) et la théorie raffine des plaques (RPT). Nous avons utilisé une nouvelle théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé raffine avec un nouveau champ de déplacement qui présente des intégrales variables. On a vu leur limitation et amélioration pour l'efficacité et facilite le calcul.

Chapitre IV :
Formulations
théoriques.

IV.1. Introduction.

Dans ce travail, nous étudions l'analyse de flambement de structures hétérogènes (2D) en utilisant une nouvelle théorie de déformation de cisaillement à quatre variables. La densité et le module de Young de la plaque à gradient fonctionnel (FGM) sont calculés à l'aide des fonctions de loi de puissance. La distribution des contraintes de cisaillement transversales dans le modèle développé est parabolique et les conditions aux limites sont satisfaites sans traction sur les surfaces supérieures et inférieures de la plaque. Les équations d'équilibre pour l'analyse statique du flambage sont déterminées en utilisant le principe des travaux virtuels. Ces équations sont résolues à l'aide de la méthode de Navier. La précision de la théorie développée est démontrée en comparant les résultats calculés avec les différentes solutions connues dans la littérature comme la méthode des éléments finis.

IV.2. Les Formulations théoriques.

IV.2.1. Plaques P-FGM.

Pour la forme de loi de puissance, les propriétés matérielles effectives, considérées variant selon l'épaisseur des plaques FG sont exprimées par Reddy (2000) :

$$P(z) = (P_c - P_m) V_c(z) + P_m \quad (\text{IV.1})$$

Où P_c et P_m sont les modules d'Young (E), le coefficient de Poisson (ν) et la densité de masse (ρ) des matériaux céramiques et métalliques situés respectivement sur les surfaces supérieure et inférieure.

La fraction volumique du matériau céramique V_c est donnée comme suit:

$$V_c(z) = \left(\frac{2z + h}{2h} \right)^p \quad V_m + V_c = 1 \quad (\text{IV.2})$$

Avec p est l'indice de loi de puissance, qui est positif et $z \in \left(-\frac{h}{2}, \frac{h}{2} \right)$.

Où E_0 est le module de Young du matériau homogène pour l'analyse des vibrations, la densité de masse à l'emplacement z varie par rapport à la forme de la loi de puissance.

IV.2.2. Le champ de déplacement.

Dans cette étude, des hypothèses simplificatrices sont considérées aux théories HSDT conventionnelle afin de diminuer le nombre des variables inconnues. La cinématique des HSDTs conventionnelle est exprimé par:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z) \theta_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z) \theta_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (\text{IV.3})$$

Où $u_0, v_0, w_0, \theta_x, \theta_y$ sont les cinq déplacements inconnues de la surface moyenne de la plaque, $f(z)$ présente la fonction de forme définissant la distribution des contraintes et des déformations de cisaillement transverse à travers l'épaisseur. En supposant, $\theta_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y)$ et $\theta_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y)$. Le champ de déplacement du présent modèle peut être écrit sous la forme plus simple comme suit :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} - z \left(\cosh\left(\frac{z}{h}\right) - 1.388 \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} - z \left(\cosh\left(\frac{z}{h}\right) - 1.388 \right) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (\text{IV.4})$$

Ce champ de déplacement satisfait les conditions aux limites de traction nulle sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque, et la variation des déformations transversales de cisaillement est parabolique à travers l'épaisseur sans l'introduction des facteurs de correction de cisaillement. Le champ de déformation est obtenu par l'utilisation des relations déformation-déplacement comme suit :

$$\varepsilon = \varepsilon^0 + z \kappa^b + f \kappa^s \quad (\text{IV.5a})$$

$$\gamma = g \gamma^0 \quad (\text{IV.5b})$$

Avec :

$$g = -df / dz,$$

$$\varepsilon^0 = \{\varepsilon_{xx}^0, \varepsilon_{yy}^0, \gamma_{xy}^0\} = \left\{ \frac{\partial u_0}{\partial x}, \frac{\partial v_0}{\partial y}, \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right\}; \quad (\text{IV.5c})$$

$$\kappa^b = \{\kappa_{xx}^b, \kappa_{yy}^b, \kappa_{xy}^b\} = \left\{ -\frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x \partial y} \right\} \quad (\text{IV.5d})$$

$$\kappa^s = \{\kappa_{xx}^s, \kappa_{yy}^s, \kappa_{xy}^s\} = \left\{ -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right\}; \quad (\text{IV.5e})$$

$$y^0 = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{yz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.5f})$$

Avec:

$$f(z) = z \left(\cosh\left(\frac{z}{h}\right) - 1.388 \right) \quad (\text{IV.6a})$$

$$g(z) = -df(z)/dz \quad (\text{IV.6b})$$

IV.2.3. Les équations constitutives des plaques.

Les équations constitutives d'une plaque peuvent être écrites comme :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.7})$$

Où C_{ij} sont les coefficients de rigidité (coefficients élastiques) réduites des contraintes planes dans les axes du matériau de la plaque, et sont définies comme :

$$C_{11}(z) = C_{22}(z) = \frac{E(z)}{1-\nu(z)^2}, \quad C_{12}(z) = \nu(z)C_{11}(z), \quad (\text{IV.8})$$

$$C_{44}(z) = C_{55}(z) = C_{66}(z) = \frac{E(z)}{2(1+\nu(z))}$$

Où $E(z)$ est le module de Young, et $\nu(z)$ est le coefficient de Poisson.

IV.2.4. Les équations d'équilibre.

Le principe des travaux virtuels est utilisé ici pour dériver les équations d'équilibre appropriées au champ de déplacement et l'équation constitutive. Il peut être énoncé sous la forme analytique suivante:

$$\int_V (\delta U + \delta V) dV = 0 \quad (IV.9)$$

Où δU est la variation de l'énergie de déformation; et δV est la variation du travail virtuel engendré par les charges extérieur appliqué à la plaque.

La variation de l'énergie de déformation de la plaque est donnée par :

$$\delta U = \int_A \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \int (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + \sigma_{xy} \delta \gamma_{xy} + \sigma_{yz} \delta \gamma_{yz} + \sigma_{xz} \delta \gamma_{xz}) dV \quad (IV.10)$$

Substituant les Eqs. (III.5) dans l'Eq. (III.10) et intégrant par rapport à l'épaisseur de la plaque, l'énergie de déformation de la plaque peut être réécrite comme :

$$\int_A \left[\begin{array}{l} N_{xx} \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} - M_{xx}^b \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2} - M_{xx}^s \frac{\partial^2 \delta \varphi}{\partial x^2} + N_{yy} \frac{\partial \delta v_0}{\partial y} - M_{yy}^b \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial y^2} - M_{yy}^s \frac{\partial^2 \delta \varphi}{\partial y^2} \\ + N_{xy} \left(\frac{\partial \delta u_0}{\partial y} + \frac{\partial \delta v_0}{\partial x} \right) - 2M_{xy}^b \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x \partial y} - 2M_{xy}^s \frac{\partial^2 \delta \varphi}{\partial x \partial y} + P_x \frac{\partial \delta \varphi}{\partial x} + P_y \frac{\partial \delta \varphi}{\partial y} \end{array} \right] dA \quad (IV.11)$$

Où les résultantes des contraintes N, M et Q sont définies par :

$$(N_{xx}, N_{yy}, N_{xy}) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}) dz \quad (IV.12a)$$

$$(M_{xx}^b, M_{yy}^b, M_{xy}^b) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}) z dz \quad (IV.12b)$$

$$(M_{xx}^s, M_{yy}^s, M_{xy}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}) f dz \quad (IV.12c)$$

$$(P_{yz}, P_{xz}) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xz}, \sigma_{yz}) g dz \quad (IV.12d)$$

La variation du travail extérieur peut être exprimé par :

$$\delta V = - \int_A \left(N_{xx}^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + N_{yy}^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) dA \quad (IV.13)$$

Où $(N_{xx}^0, N_{yy}^0, N_{xy}^0)$ sont les charges axiaux appliqué à la plaque.

Substituant les Eqs. (IV.11) et (IV.13) dans l'Eq. (IV.9) et en intégrant l'équation par parties, en collectant les coefficients de $\delta\varphi$ et δw_0 , les équations d'équilibre pour la plaque sont obtenues comme suit:

$$\begin{aligned} \delta u_0 : \quad \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \delta v_0 : \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} &= 0 \\ \delta w_0 = \frac{\partial^2 M_{xx}^b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yy}^b}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \bar{N} &= 0 \\ \delta\varphi = \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 M_{xx}^s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yy}^s}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (IV.14)$$

Les résultantes de contraintes sont liées aux déplacements généralisés (u_0, v_0) par les relations suivantes :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ B & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa^b \\ \kappa^s \end{Bmatrix} \quad (IV.15a)$$

Où (A, B, D, B^s, D^s, H^s) sont les rigidités de la plaques FG donne par :

$$(A, B, D, B^s, D^s, H^s) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2, f, zf, f^2) C(z) dz \quad (IV.15b)$$

$$\begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{55}^s & 0 \\ 0 & A_{44}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{yz}^0 \end{Bmatrix} \quad (IV.15c)$$

$$P = A^s \gamma^0 \quad (IV.15d)$$

Où A^s sont les termes de rigidité et sont définis par :

$$A_{44}^s = A_{55}^s = \int_{-h/2}^{h/2} g^2(z) C_{44}(z) dz = \int_{-h/2}^{h/2} g^2(z) C_{55}(z) dz \quad (\text{IV.16})$$

Substituant les Eqs. (IV.15a) et (IV.15d) dans l'Eq. (IV.14), les équations d'équilibre en fonction des termes de déplacement ($u_0, v_0, w_0, \partial\varphi$) sont obtenues comme suit :

$$\begin{aligned} & A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - B_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \\ & - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} - B_{11}^s \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y^2} = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.17a})$$

$$\begin{aligned} & A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} - B_{22} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \\ & - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} - B_{22}^s \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^3} - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y} = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.17b})$$

$$\begin{aligned} & B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + B_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} \\ & - D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} - D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} - 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{11}^s \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} - D_{22}^s \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} \\ & - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \bar{N} = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.17c})$$

$$\begin{aligned} & B_{11}^s \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + B_{22}^s \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} \\ & - D_{11}^s \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} - D_{22}^s \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + A_{55}^s \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + A_{44}^s \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \\ & - H_{11}^s \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} - 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} - H_{22}^s \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.17d})$$

IV.2.5. Solutions analytiques et conditions aux limites.

On considère une plaque est soumise à des forces de compression axial et quand les forces sont suffisamment petites, l'équilibre de la plaque est stable et la plaque reste plane jusqu'à ce qu'une certaine charge soit atteinte. À cette charge, appelée force critique de flambement, l'état stable de la plaque est perturbé et la plaque cherche une configuration d'équilibre alternative accompagnée d'un changement dans le comportement de déflexion de la charge. La force critique de flambement d'une plaque rectangulaire simplement appuyée est déterminée dans ce travail en utilisant la solution Navier.

Les fonctions de déplacement sont exprimées comme produits de coefficients indéterminé et fonction trigonométrique pour satisfaire automatiquement les conditions aux limites et les équations de gouvernement. Les solutions sont données comme suit:

$$u_0(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn}^0 \cos(\lambda x) \sin(\mu y) \quad (\text{IV.18a})$$

$$v_0(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{mn}^0 \sin(\lambda x) \cos(\mu y) \quad (\text{IV.18b})$$

$$w_0(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} x_{mn}^0 \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \quad (\text{IV.18c})$$

$$\varphi(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} y_{mn}^0 \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \quad (\text{IV.18d})$$

Où $\lambda = m\pi/a$, $\mu = n\pi/b$ et φ_{mn} , w_{0mn} sont des coefficients.

Remplaçant l'Eq. (IV.18a-18d) dans l'Eq. (IV.17a-17d), on obtient le système suivant:

$$\begin{pmatrix} k_{11} & k_{21} & k_{13} & k_{14} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} + \alpha & k_{34} \\ k_{14} & k_{24} & k_{34} & k_{44} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_{mn}^0 \\ v_{mn}^0 \\ x_{mn}^0 \\ y_{mn}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.19})$$

Où

$$\begin{aligned}
k_{11} &= A_{11}\lambda^2 + A_{66}\mu^2, k_{12} = (A_{12} + A_{66})\lambda\mu \\
k_{13} &= -B_{11}\lambda^3 - (B_{12} + 2B_{66})\lambda\mu^2 \\
k_{14} &= -B_{11}^s\lambda^3 - (B_{12}^s + 2B_{66}^s)\lambda\mu^2 \\
k_{22} &= A_{66}\lambda^2 + A_{22}\mu^2 \\
k_{23} &= -B_{22}\mu^3 - (B_{12} + 2B_{66})\lambda^2\mu \\
k_{24} &= B_{22}^s\mu^3 - (B_{12}^s + 2B_{66}^s)\lambda^2\mu \\
k_{33} &= [D_{11}\lambda^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\lambda^2\mu^2 + D_{22}\mu^4] \\
k_{34} &= D_{11}^s\lambda^4 + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)\lambda^2\mu^2 + D_{22}^s\mu^4 \\
k_{44} &= H_{11}^s\lambda^4 + 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s)\lambda^2\mu^2 + H_{22}^s\mu^4 + A_{55}^s\lambda^2 + A_{44}^s\mu^2 \\
\alpha &= -N_0(\xi^2 + \gamma\xi^2)
\end{aligned}$$

Pour une solution non triviale, le déterminant de la matrice de rigidités de l'Eq. (IV.19) doit être nul.

IV.3. Conclusion.

L'étude de la stabilité des structures 2D FG est proposée dans ce travail en utilisant une nouvelle théorie de déformation de cisaillement hyperbolique d'ordre supérieur. Seules quatre variables pour le déplacement des inconnues sont présentes dans le modèle 2D existant. Sans utiliser de variables de correction du cisaillement, le modèle actuel assure les conditions limites des surfaces libres tout en prenant en compte le cisaillement transversal. Grâce à l'utilisation du concept de travail virtuel et de la technique de Navier, les équations différentielles de stabilité sont générées et résolues. Enfin, nous pouvons conclure que le présent modèle est plus simple et présente une excellente concordance avec d'autres solutions de déformation par cisaillement déjà connues dans la littérature ouverte. En raison de leur impact important sur la stabilité des structures épaisses à gradation fonctionnelle, l'effet de la déformation transversale par cisaillement doit également être pris en compte dans la formulation.

Chapitre V :
Présentation et
discussions
des résultats.

V.1 Introduction.

Dans ce chapitre nous allons étudier la stabilité des structures 2D non-homogène simplement appuyée soumis au différent types de chargement (uni-axial, bi-axial de compression, bi-axial avec une compression suivant X et une traction suivant Y). Plusieurs exemples numériques sont étudiés afin de vérifier l'exactitude et l'efficacité du présent model.

Les propriétés des structures 2D sont variées à travers l'épaisseur en appliquant une loi de puissance simple. L'effet de paramètre d'hétérogénéité et les différents rapports de géométrie et de dimension et les types de chargement sont évaluée. Pour l'analyse de flambement la charge critique adimensionnelle est évalué et discuté en détaillé.

V.2 Résultat et discussion.

Pour de raison de prouver l'efficacité et la précision de la théorie proposée, les illustrations numériques sont réalisées et discutées. Les entités adimensionnelles ont été calculées par les formules suivantes :

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \hat{N}_{cr} = \frac{N_{cr}b^2}{\pi^2 D}, \bar{N}_{cr} = \frac{Na^2}{E_m h^3} \quad (\text{V.1})$$

V.2.1 Les conditions de chargements.

La structure est soumis aux différent type de chargement illustré dans la figure ci-dessous :

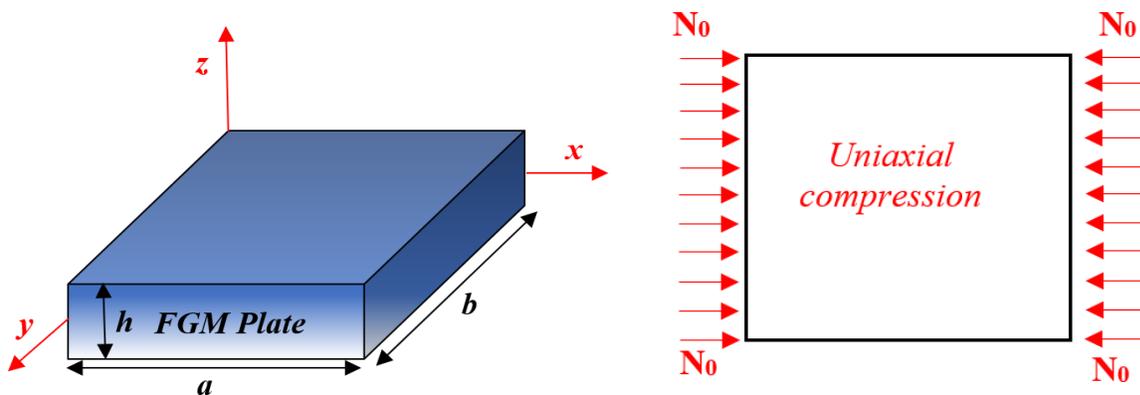


Figure. V.1 Géométrie et conditions de chargement d'une plaque FG.

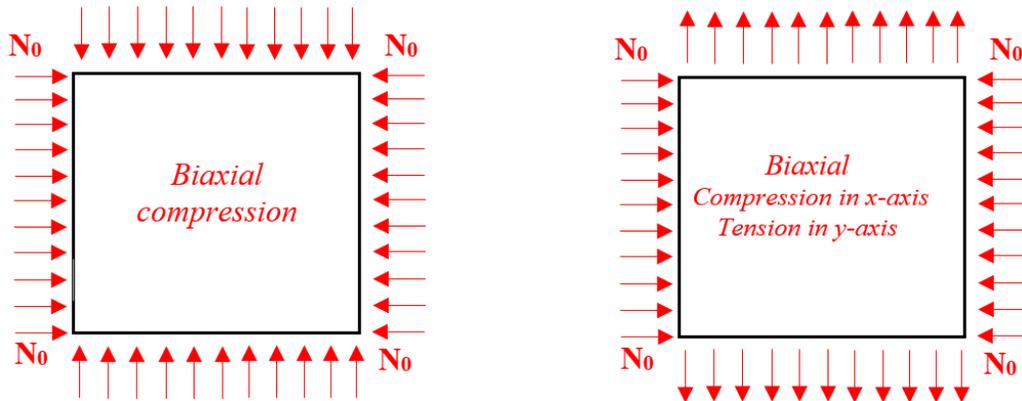


Figure. V.1 Continuité

Les propriétés des matériaux utilisés sont résumées dans le tableau V.1 :

Tableau V.1 Les propriétés des matériaux céramiques et métal.

Matériaux	Young Modulus (GPa)	Coefficient de Poisson
Aluminum (Al)	70	0.3
Alumina (Al ₂ O ₃)	380	0.3
Silicon carbide (SiC)	420	0.3

V.2.2 Validation.

Cet exemple de l'étude de la validation est réservé pour les plaques minces sur un chargement uni-axial uniforme (voir le tableau V.2). Les résultats actuels sont comparés avec ceux obtenus par Watts et al. (2021) basé sur la formulation de maillage libre associée avec la méthode de Galerkin, Jana et Bhaskar (2006) en utilisant une solution de contrainte plane rigoureuse et approximative, Mijušković et al. (2015) à l'aide d'une procédure analytique et la méthode des éléments finis par logiciel commercial ANSYS, Ramachandra et Panda (2012) en se basant sur la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevée à partir de résultats de tabulée et en se basant sur la comparaison, il est clair que le présent modèle donne des résultats très proches d'autres résultats présentés dans la littérature (Jana et Bhaskar 2006, Mijušković et al. 2015, Ramachandra et Panda, 2012 et Watts et al. 2021).

Tableau V.2 Convergence de la charge critique adimensionnelle du flambement \bar{N}_{cr} d'une plaque rectangulaire isotrope avec ($a/h=100$) sous un chargement uniaxial de compression.

Typé	Modeles	Plaque rectangulaire ($b = 2a$)	Plaque carré
Plaque	15×15 (Watts et al. 2021)	6.2763	4.0449
	19×19 (Watts et al. 2021)	6.2542	4.0147
	23×23 (Watts et al. 2021)	6.2477	4.0057
	27×27 (Watts et al. 2021)	6.2451	4.0022
	31×31 (Watts et al. 2021)	6.2439	4.0006
	41×41 (Watts et al.2021)	6.2414	3.9948
	Jana and Bhaskar (2006)	–	4.000
	Mijušković et al. (2015)	–	4.000
	FEM (taken from Mijušković et al. 2015)	–	3.966
	Ramachandra and Panda (2012)	6.25	3.99
	Mahmoud et al., (2023)	6.2478	3.9977
	Présent	6.2412	4.0000

Tableau V.3 présent les valeurs de la charge critique adimensionnelle du flambement (\bar{N}_{cr}) de plaques en FGM simplement appuyée soumise à un chargement hyperbolique en fonction du rapport de géométrie et de l'indice d'hétérogénéité des matériaux. Les résultats sont comparé avec ceux du modelé développé par Thai (2012) en utilisant la théorie d'ordre élevée et ceux de Thinh et al.(2016) en utilisent la théorie de cisaillement d'ordre élevée a huit variables.il est remarquables que les résultat calcule par la présent théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevée à quatre variables est en bon accord avec les autres modes d'ordres élevée trouve dans la littératures (Thai, 2012 et Thinh et al. 2016) on peut constante aussi que la charge critique adimensionnelle du flambement (\bar{N}_{cr}) est en relation de corrélation directe avec le rapport de géométrie (a/h) et en relation inverse avec l'indice de puissance (p).

Tableau V.3. Les valeurs de la charge critique adimensionnelle du flambement (\hat{N}_{cr}) de plaques en FGM simplement appuyée soumise à un chargement hyperbolique en fonction du rapport de géométrie et de l'indice d'hétérogénéité des matériaux.

b/a	a/h	Théorie	p							
			0	0.5	1	2	5	10	20	100
1	5	Thai (2012)	8.0105	5.3127	4.1122	3.1716	2.5265	2.2403	2.0035	1.6293
		Thinh et al. (2016)	8.0826	5.3716	4.1643	3.2132	2.5549	2.2621	2.0205	1.6426
		Présent	8.0104	5.3126	4.1122	3.1718	2.5273	2.2407	2.0033	1.6328
	10	Thai (2012)	9.2893	6.0615	4.6696	3.6315	3.0177	2.7264	2.4173	1.9099
		Thinh et al. (2016)	9.3139	6.0810	4.6867	3.6455	3.0280	2.7346	2.4236	1.9146
		Présent	9.28923	6.0615	4.6696	3.6316	3.0179	2.7266	2.4173	1.9110
	20	Thai (2012)	9.6764	6.2834	4.8337	3.7686	3.1724	2.8834	2.5494	1.9961
		Thinh et al. (2016)	9.6831	6.2887	4.8384	3.7723	3.1753	2.8857	2.5512	1.9974
		Présent	9.6764	6.2834	4.8337	3.7686	3.1725	2.8834	2.5494	1.9964
	50	Thai (2012)	9.7907	6.3485	4.8818	3.8088	3.2186	2.9307	2.5891	2.0217
		Thinh et al. (2016)	9.7918	6.3494	4.8826	3.8095	3.2191	2.9311	2.5894	2.0219
		Présent	9.7907	6.3485	4.8818	3.8088	3.2187	2.9307	2.5891	2.0218
	100	Thai (2012)	9.8073	6.3579	4.8888	3.8147	3.2254	2.9376	2.5948	2.0254
		Thinh et al. (2016)	9.8075	6.3581	4.8890	3.8148	3.2255	2.9377	2.5949	2.0255
		Présent	9.8073	6.3579	4.8888	3.8147	3.2254	2.9376	2.5948	2.0254

Pour vérifier la validité et l'efficacité de la présente théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevée a seulement quatre variables, les résultat de la charge critique du flambement sont comparé avec ceux trouver par la théorie classique des plaques(Love-Kirchhoff), la théorie de déformation de cisaillement première d'ordre(Reissner Mindlin), et la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevée (Reddy). Dans le tableau V.4, Les comparaisons sont effectuées pour les différents types du chargement axial et le rapport largeur/épaisseur. Un excellent accord est confirmé entre le résultat actuel et ceux de la théorie d'ordre élevée pour tous les types de chargement. Il est remarquable que la théorie classique des plaques surestimée le résultat de la

charge critique du flambement dans le cas des plaques épaisse à cause de l'omissions de l'effet de la déformation du cisaillement par contres dans les cas des plaques mince le résultat sont très proche.

Tableau V.4 Vérification de la validité et l'efficacité de la présente théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevée à seulement quatre variables avec CPT et FSDT.

γ		b/h=10	b/h=20	b/h=40	b/h=60	b/h=80	b/h=100
0	CPT (Javaheri et Eslami 2002)	267.48	33.435	4.1794	1.2383	0.5224	0.2675
	FSDT (Shariat et Eslami 2007)	243.41	32.628	4.1537	1.2349	0.5216	0.2672
	HSDT (Kulkarni et al. 2015)	239.15	32.472	4.1486	1.2343	0.5215	0.2672
	Présent	239.14	32.472	4.1486	1.2342	0.5214	0.2672
1	CPT (Javaheri et Eslami 2002)	213.99	26.748	3.4353	0.9907	0.4179	0.2140
	FSDT (Shariat et Eslami 2007)	194.73	26.103	3.3230	0.9880	0.4173	0.2137
	HSDT (Kulkarni et al.2015)	191.32	25.978	3.3189	0.9879	0.4172	0.2137
	Présent	191.32	25.9777	3.3189	0.9874	0.4172	0.2137
- 1	CPT (Javaheri et Eslami 2002)	356.64	44.580	5.5725	1.6511	0.6966	0.3566
	FSDT (Shariat et Eslami 2007)	324.54	43.505	5.5383	1.6466	0.6955	0.3563
	HSDT (Kulkarni et al. 2015)	318.86	43.296	5.5315	1.6457	0.6953	0.3562
	Présent	318.86	43.296	5.5315	1.6457	0.6953	0.3562

Ce tableau V.5 présent la comparaison de la charge critique de flambement \hat{N}_{cr} des plaques 2D hétérogènes simplement appuyé en matériel FGM Al/SiC donc les charge critique adimensionnelle calculé par le modèle actuel (la théorie de déformation de cisaillement hyperbolique a quatre variable) sont en excellent accord avec ces obtenu par la théorie de déformation de première ordre FSDT présent par Mohammadi et al. (2010) et la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevée développé par Bodaghi et Saidi (2010), Nguyen (2014) et Bekkaye et al, (2020). On peut remarquer sur ce tableau que la charge critique adimensionnelle de flambement est une relation avec les paramètres d'hétérogénéité (p) parce que la plaque FG devient flexible quand cette indice augment. Cette dernière conclusion est valide pour les diffèrent type de chargement.

Tableau V.5 Comparaison de charge de flambement critique (\hat{N}_{cr}) des plaque carre *Al/SiC* en ($a/h=10$).

γ	Théorie	p					
		0	0.5	1	2	5	10
0	FSDT Mohammadi et al. (2010)	37.3708	-	37.7132	37.7089	-	-
	HSDT Bodaghi and Saidi (2010)	37.3714	-	37.7172	37.5765	-	-
	HSDT Thai and Choi (2012)	37.3721	-	37.7143	37.6042	-	-
	HSDT Nguyen (2014)	37.4215	37.6650	37.7560	37.6327	36.8862	36.5934
	Bekkaye et al.(2020)	37.3831	37.6400	37.7236	37.6056	36.8843	36.5506
	Présent	37.3721	37.6302	37.7143	37.6049	36.9221	36.5638
1	FSDT Mohammadi et al. (2010)	18.6854	-	18.8566	18.8545	-	-
	HSDT Bodaghi and Saidi (2010)	18.6860	-	18.8571	18.8020	-	-
	HSDT Thai and Choi (2012)	18.6861	-	18.8572	18.8021	-	-
	HSDT Nguyen (2014)	18.7107	18.8325	18.8780	18.8163	18.4431	18.2967
	Bekkaye et al.(2020)	18.6915	18.8200	18.8618	18.8028	18.4422	18.2753
	Présent	18.6861	18.8151	18.8572	18.8025	18.4611	18.2819
-1	FSDT Mohammadi et al. (2010)	72.0834 ^a	-	73.6307 ^a	73.6112 ^a	-	-
	HSDT Bodaghi and Saidi (2010)	72.2275 ^a	-	73.6645	73.1587 ^a	-	-
	HSDT Thai and Choi (2012)	72.0983 ^a	-	73.6437 ^a	73.1436 ^a	-	-
	HSDT Nguyen (2014)	72.3281 ^a	73.4526 ^a	73.8426 ^a	73.2827 ^a	69.9876 ^a	68.7244 ^a
	Bekkaye et al.(2020)	72.1513 ^a	73.3078 ^a	73.6896 ^a	73.1544 ^a	69.9707 ^a	68.5492 ^a
	Présent	72.0981 ^a	73.2594 ^a	73.6435 ^a	73.1466 ^a	70.1263 ^a	68.5967 ^a

Ce tableau ci-dessous présent l'influence de type de chargement sur la charge critique adimensionnelle de flambement (\hat{N}_{cr}) des plaques carre en *Al/SiC* fonctionnement graduée ($p=5$) simplement appuyée. Il est clair qu'une plaque sous une charge bi-axiale de compression donne de plus faible valeurs de la charge critique adimensionnelle du flambement car c'est le cas la plus défavorable.

Par contre un plaqué avec un chargement bi-axial compression suivant X et traction suivant Y donne la valeur la plus grande de la charge critique de flambement car la traction stabilise la structure.

Tableau V.6 La charge critique adimensionnelle du flambement (\hat{N}_{cr}) d'un plaqué Al / SiC P-FG simplement appuyée ($p=5, a/b=1$ and $a/h=10$).

Théorie	$\gamma=0$	$\gamma=1$	$\gamma=-1$
Bekkaye et al. (2020)	52.4780	41.9824	69.9707
Présent	52.5947	42.0758	70.1263

Le tableau V.7 donne les valeurs de la charge critique adimensionnelle du flambement des plaques en FGM pour un chargement axial en fonction du paramètre d'hétérogénéité et le rapport de géométrie a/h .

Le présent résultat sont calculé à l'aide de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé quatre variable développé dans le chapitre précédent et compare avec ceux des déformations de cisaillement d'ordre supérieur de (Thai et Choi 2012, Younsi et al. 2023, Zenkour et Aljadani 2018, Reddy et al.2013) et avec ceux calcule par la théorie HSDT-Quasi-3D de (Zenkour et Younsi).

A partir des comparaison effectue, il est clairement remarquable que le présent modelé de théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevée (HSDT) a quatre variables donne presque les même valeurs de la charge critique adimensionnelle du flambement que ceux des théorie HSDT (Thai et Choi 2012, Younsi et al.,2023, Zenkour et Aljadani 2018 ,Reddy et al.,2013).

Il est a noté que les plaques simplement appuyée épaisses avec un indice d'hétérogénéité élevée donné et les plus faibles faible valeurs de la charge critique adimensionnelle du flambement. Ce qui montre que la considération de l'effet de la déformation de cisaillement dans les plaques épaisse a un rôle important pour dimensionnement de ce type de structures.

Table V.7 Charge critique adimensionnelle du flambement \bar{N}_{cr} de plaque FG soumis sous chargement uni-axial compression suivant X (a/b)=1.

a/h	Source	ε_z	p						
			0	0.5	1	2	5	10	20
5	Thai and Choi (2012)	=0	16.0200	10.6200	8.2200	6.3400	5.0500	4.4800	4.0000
	Reddy et al. (2013)	=0	16.0000	10.5700	8.1460	6.2300	4.9700	4.4400	3.9800
	Zenkour and Aljadani (2018)	=0	16.0210	10.6253	8.2244	6.3431	5.0530	4.4806	4.0069
	Zenkour and Aljadani (2018)	≠ 0	16.8660	11.2880	8.8230	6.8550	5.4180	4.7550	4.2250
	Younsi et al.(2023)	=0	16.0226	10.6264	8.2252	6.3425	5.0490	4.4790	4.0084
	Younsi et al.(2023)	≠ 0	16.8855	11.2972	8.8323	6.8643	5.4215	4.7589	4.2327
	Présent			16.0209	10.6252	8.22442	6.3435	5.0546	4.4814
10	Farrokh et al.2019 (FEM)	-	-	-	9.21	-	-	5.38	-
	Thai and Choi (2012)	=0	18.5700	12.1200	9.3300	7.2600	6.0300	5.4500	4.8300
	Reddy et al. (2013)	=0	18.5400	12.0800	9.2990	7.2100	5.9900	5.4200	4.8200
	Zenkour and Aljadani (2018)	=0	18.5785	12.1229	9.3391	7.2630	6.0353	5.4528	4.8346
	Zenkour and Aljadani (2018)	≠ 0	18.8730	12.4590	9.7380	7.6730	6.3410	5.6500	4.9540
	Younsi et al.(2023)	=0	18.5788	12.1232	9.3392	7.2628	6.0338	5.4521	4.8350
	Younsi et al.(2023)	≠ 0	18.8888	12.4658	9.7453	7.6816	6.3445	5.6509	4.9568
	Présent			18.5785	12.1229	9.3391	7.2632	6.0359	5.4531
20	Farrokh et al. (2019) (FEM)	-	-	-	9.64	-	-	5.75	-
	Thai and Choi (2012)	=0	19.3500	12.5600	9.6600	7.5300	6.3400	5.7600	5.0900
	Reddy et al. (2013)	=0	19.3100	12.5300	9.6490	7.5100	6.3200	5.7500	5.0800
	Zenkour and Aljadani (2018)	=0	19.3527	12.5667	9.6674	7.5371	6.3447	5.7668	5.0988
	Zenkour and Aljadani (2018)	≠ 0	18.8730	12.7780	9.9890	7.9030	6.6180	5.9250	5.1730
	Younsi et al.(2023)	=0	19.3528	12.5668	9.6675	7.5371	6.3443	5.7666	5.0990
	Younsi et al.(2023)	≠ 0	19.4467	12.7844	9.9952	7.9114	6.6221	5.9246	5.1741
	Présent			19.3528	12.5668	9.6675	7.5372	6.3449	5.7669

Table V.7 Continuité

a/h	Source	ε_z	p						
			0	0.5	1	2	5	10	20
50	Farrokh et al. (2019) (FEM)	-	-	-	9.79	-	-	5.87	-
	Thai and Choi (2012)	=0	19.5800	12.6900	9.7630	7.6100	6.4300	5.8000	5.1700
	Reddy et al. (2013)	=0	19.5400	12.6700	9.7430	7.6010	6.4200	5.8400	5.1600
	Zenkour and Aljadani (2018)	=0	19.5814	12.6970	9.7636	7.6176	6.4372	5.8613	5.1781
	Zenkour and Aljadani (2018)	$\neq 0$	19.5940	12.8700	10.0610	7.9690	6.7000	6.0060	5.2380
	Younsi et al.(2023)	=0	19.5814	12.6970	9.7637	7.6177	6.4372	5.8614	5.1782
	Younsi et al.(2023)	$\neq 0$	19.6075	12.8757	10.0668	7.9778	6.7039	6.0057	5.2380
	Présent		19.5814	12.6970	9.7636	7.6177	6.4373	5.8614	5.1781
100	Farrokh et al. (2019) (FEM)	-	-	-	9.82	-	-	5.90	-
	Thai and Choi (2012)	=0	19.6100	12.7100	9.7700	7.6200	6.4500	5.8700	5.1800
	Reddy et al. (2013)	=0	19.5700	12.6900	9.7500	7.6100	6.4300	5.8600	5.1700
	Zenkour and Aljadani (2018)	=0	19.6145	12.7158	9.7775	7.6293	6.4507	5.8752	5.1896
	Zenkour and Aljadani (2018)	$\neq 0$	19.6170	12.8830	10.0710	7.9790	6.7120	6.0180	5.2470
	Younsi et al.(2023)	=0	19.6145	12.7158	9.7775	7.6293	6.4507	5.8751	5.1897
	Younsi et al.(2023)	$\neq 0$	19.6306	12.8888	10.0771	7.9874	6.7158	6.0174	5.2473
	Présent		19.6145	12.7158	9.7775	7.6293	6.4507	5.8752	5.1897

Le tableau V.8 présent la comparaison de la charge critique adimensionnelle du flambement des plaques simplement appuyée soumis sur un chargement mécanique uni-axiale dans la direction abscisse (x). La comparaison est effectuée entre les résultats actuels et ceux de la théorie classique des plaques CPT présentée par Saha and Maiti (2012), la théorie de déformation de cisaillement de première ordre de Saha and Maiti (2012), la théorie de déformation d'ordre élevé de Reddy et al.(2013) et la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevée raffinée de Hanifi et al.(2023). On peut confirmer encore une fois que les résultats fournis par le présent modèle sont exacts et comparables aux d'autres théories de déformation de cisaillement existantes dans la littérature. On peut conclure à partir des résultats tabulés que la théorie classique des plaques donne les mêmes valeurs de la charge critique du flambement pour les plaques minces et

épaisses ce qui montre que cette dernière néglige l'effet de la déformation de cisaillement transverse dans les cas des rapports de géométrie faibles.

Table V.8 La comparaison de la charge critique adimensionnelle du flambement.

a/h	Saha and Maiti (2012) CPT	Saha and Maiti (2012) FSDT	Reddy et al. (2013) HSDT	Hanifi et al.(2023) RPT	Présent
10	9.78	9.33	9.29	9.3392	9.3391
20	9.78	9.66	9.64	9.6675	9.6675
40	9.78	9.75	9.73	9.7533	9.7532
50	9.78	9.76	9.74	9.7637	9.7636
100	9.78	9.77	9.75	9.7775	9.7775

Le tableau ci-dessous présente les valeurs de la charge critique adimensionnelle du flambement (\hat{N}_{cr}) des plaques fonctionnellement graduées simplement appuyées sous différents chargements axiaux (compression uni-axiale suivant X, compression uni-axiale suivant Y, compression bi-axiale suivant X et Y et chargement bi-axiale compression suivant X et traction suivant Y).

Les résultats obtenus sont calculés avec la théorie de déformation de cisaillement de premier ordre FSDT à cinq variables de Thinh et al. (2016), la théorie de déformation et de cisaillement d'ordre élevé, HSDT, à une seule variable de Bekkaye et al. (2020), la théorie de Quasi 3D à cinq variables de Thinh et al. (2016) et la théorie Quasi 3D de la théorie de déformation et de cisaillement d'ordre élevé, HSDT, à neuf variables de Thinh et al. (2016), la théorie Quasi 3D de la théorie de déformation et de cisaillement d'ordre élevé HSDT, à douze variables de Thinh et al. (2016).

On constate que le présent modèle développé dans les chapitres précédents est en bon accord avec les théories de déformation d'ordre élevé HSDTs ce qui montre l'efficacité du présent modèle qui utilise seulement quatre variables, ce qui réduit aussi le temps et le coût de calcul et donne des résultats plus précis.

Tables V.9 La comparaison de la charge critique adimensionnelle du flambement \hat{N}_{cr} des plaques simplement appuyée.

a/h	Théories	Nombres de variables	Chargement Uni-axial		Chargement Bi-axial	
			Compression suivant l'axe x	Compression suivant l'axe y	Compression suivant l'axe x et y	Compression suivant l'axe x et Traction suivant l'axe y
5	Hanifi et al.(2023) HSDT	4	0.4382	1.7528	0.3506	0.5843
	Thinh et al. (2016) HSDT	5	0.4379	1.7515	0.3503	-
	Thinh et al. (2016) FSDT	5	0.4489	1.7956	0.3591	-
	Hanifi et al.(2023) Quasi-3D	5	0.4654	1.8615	0.3723	0.6205
	Thinh et al. (2016)Quasi-3D	12	0.4405	1.7620	0.3524	-
	Thinh et al. (2016)Quasi-3D	9	0.4413	1.7650	0.3530	-
	Présent	4	0.4380	1.7519	0.3504	0.5840
10	Hanifi et al.(2023) HSDT	4	0.4926	1.9705	0.3941	0.6568
	Thinh et al. (2016) HSDT	5	0.4925	1.9700	0.3940	-
	Thinh et al. (2016) FSDT	5	0.4960	1.9839	0.3968	-
	Hanifi et al.(2023) Quasi-3D	5	0.5159	2.0637	0.4127	0.6879
	Thinh et al. (2016) Quasi-3D	12	0.4933	1.9733	0.3947	-
	Thinh et al. (2016) Quasi-3D	9	0.4936	1.9744	0.3949	-
	Présent	4	0.4925	1.9702	0.3940	0.6567
20	Hanifi et al.(2023) HSDT	4	0.5084	2.0337	0.4067	0.6779
	Thinh et al. (2016) HSDT	5	0.5084	2.0336	0.4067	-
	Thinh et al. (2016) FSDT	5	0.5093	2.0373	0.4075	-
	Hanifi et al.(2023) Quasi-3D	5	0.5301	2.1205	0.4241	0.7068
	Thinh et al. (2016) Quasi-3D	12	0.5086	2.0345	0.4069	-
	Thinh et al. (2016) Quasi-3D	9	0.5087	2.0348	0.4070	-
	Présent	4	0.5084	2.0336	0.4067	0.6779

Tables V.9 Continuité.

a/h	Théories	Nombres de variables	Chargement Uni-axial		Chargement Bi-axial	
			Compression suivant l'axe x	Compression suivant l'axe y	Compression suivant l'axe x et y	Compression suivant l'axe x et Traction suivant l'axe y
30	Hanifi et al.(2023) HSDT	4	0.5115	2.0459	0.4092	0.6820
	Thinh et al. (2016) HSDT	5	0.5115	2.0458	0.4092	-
	Thinh et al. (2016) FSDT	5	0.5119	2.0475	0.4095	-
	Hanifi et al.(2023) Quasi-3D	5	0.5328	2.1314	0.4263	0.7105
	Thinh et al. (2016) Quasi-3D	12	0.5116	2.0462	0.4092	-
	Thinh et al. (2016) Quasi-3D	9	0.5116	2.0464	0.4093	-
	Présent	4	0.5115	2.0459	0.4092	0.6820
50	Hanifi et al.(2023) HSDT	4	0.5130	2.0522	0.4104	0.6841
	Thinh et al. (2016) HSDT	5	0.5130	2.0522	0.4104	-
	Thinh et al. (2016) FSDT	5	0.5132	2.0528	0.4106	-
	Hanifi et al.(2023) Quasi-3D	5	0.5342	2.1369	0.4274	0.7123
	Thinh et al. (2016) Quasi-3D	12	0.5131	2.0523	0.4105	-
	Thinh et al. (2016) Quasi-3D	9	0.5131	2.0524	0.4105	-
	Présent	4	0.5130	2.0522	0.4104	0.6841
100	Hanifi et al.(2023) HSDT	4	0.5137	2.0548	0.4110	0.6849
	Thinh et al. (2016)HSDT	5	0.5137	2.0548	0.4110	-
	Thinh et al. (2016)FSDT	5	0.5137	2.0550	0.4110	-
	Hanifi et al.(2023) Quasi-3D	5	0.5348	2.1393	0.4279	0.7131
	Thinh et al. (2016) Quasi-3D	12	0.5137	2.0549	0.4110	-
	Thinh et al. (2016) Quasi-3D	9	0.5137	2.0549	0.4110	-
	Présent	4	0.5137	2.0548	0.4110	0.6849

V.3 Etudes paramétriques.

La figure V.2 montre la variation de la charge critique adimensionnelle du flambement en fonction du rapport E_c/E_m d'une plaque P-FGM simplement appuyée. La plaque est soumise à un chargement bi-axial de compression suivant X, uni axial de compression et bi-axiale avec une compression suivant X et une traction suivant Y. on constate que un plaque soumise à une charge bi-axial de compression donne la plus faible valeur de la charge critique du flambement car c'est le cas le plus défavorable par contre la charge bi-axiale avec compression suivant X et traction suivant Y donne la plus grande valeur de la charge critique qui montre que la plaque est plus stable parce que la traction stabilise la structure.

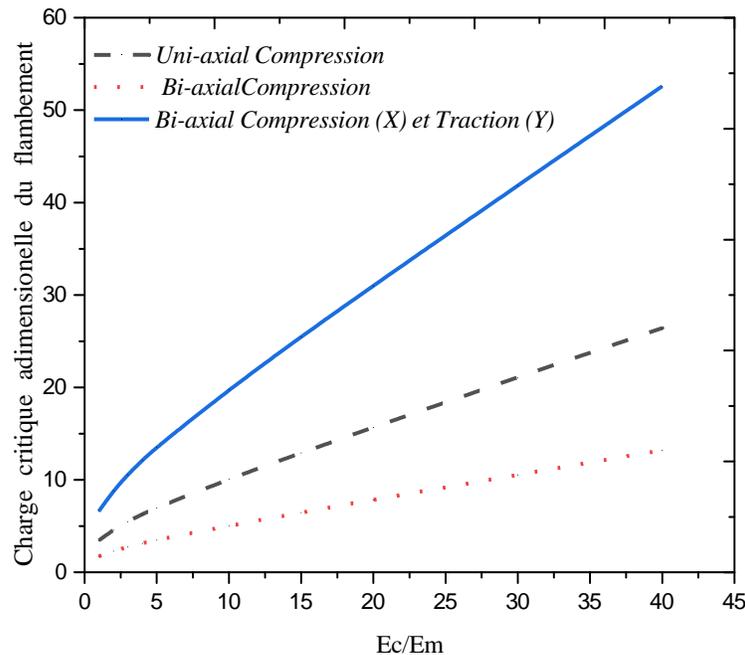


Figure V.2 La variation de la charge critique adimensionnelle du flambement en fonction des rapports d'hétérogénéité E_c/E_m .

Cette figure V.3-5 présente la variation de charge critique adimensionnelle du flambement des plaques P-FGM simplement appuyée en fonction des rapports des modules (E_c/E_m). La plaque est soumise à un chargement compression de bi-axiale, bi-axiale (compression/traction) avec $\gamma_1=1$ et $\gamma_2=-1$ et bi-axiale (compression/traction) avec $\gamma_1=1$ et $\gamma_2=-2$, respectivement.

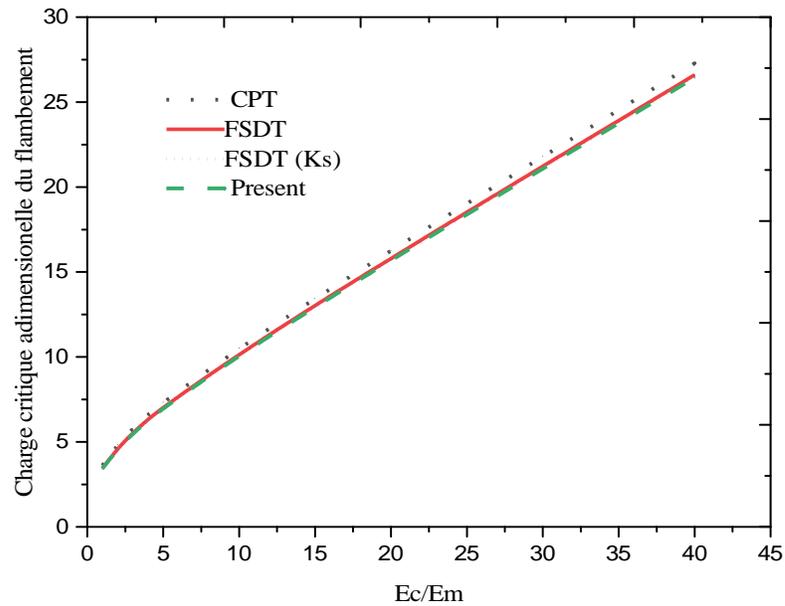


Figure V.3 La variation de la charge critique adimensionnelle du flambement en fonctions des rapports d'hétérogénéité E_c/E_m .

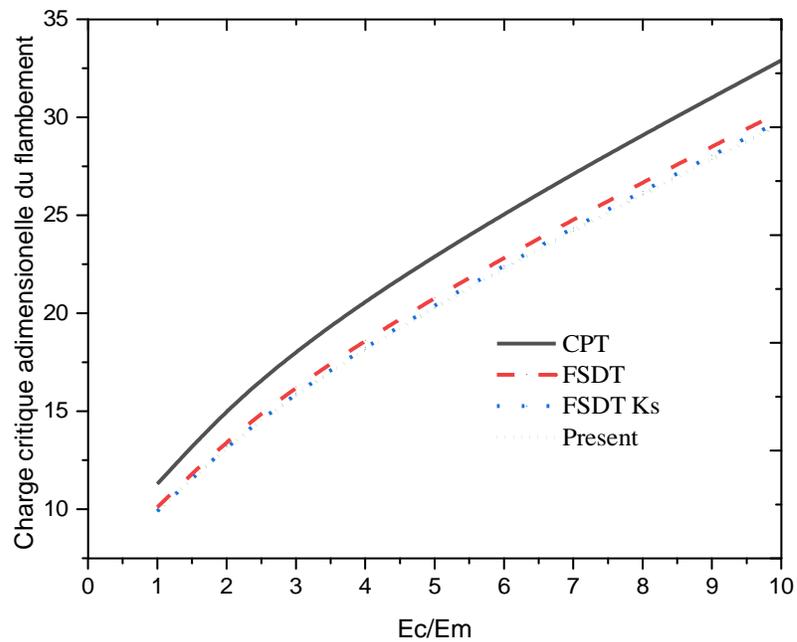


Figure V.4 La variation de la charge critique adimensionnelle du flambement en fonctions des rapports d'hétérogénéité E_c/E_m .

Les résultats actuels sont comparés avec ceux de la théorie classique des plaques CPT, la théorie de déformation de premier ordre FSDT. Pour les différents cas de chargement, on remarque que la charge adimensionnelle de flambement est en relation de corrélation directe avec le rapport des modules. Il est remarquable que le type de chargement influe sur les la différence entre les résultats de la CPT et les théories de déformation de cisaillement. On peut noter que la théorie classique CPT donne des résultats surestimé dans le cas d'un rapport de module élevé. Par contre, dans le cas d'un rapport $E_c/E_m = 1$ toute les résultats sont presque confondues.

La figure V.6 montres l'effet du type de chargement (Uni-axiale de compression, bi-axiale compression et bi-axial avec compression suivant X et traction suivant Y) sur la variation de la charge critique adimensionnelle du flambement en fonction du rapport de dimension a/b . On remarque que les plaques FGM simplement appuyée soumise à un chargement bi-axiale (compressions suivant X et Traction suivant Y) sont les plus favorable car la traction stabilise la structure. On constate aussi que la charge critique adimensionnelle de flambement augmente avec l'augmentation du rapport de dimension car la structures devient mince.

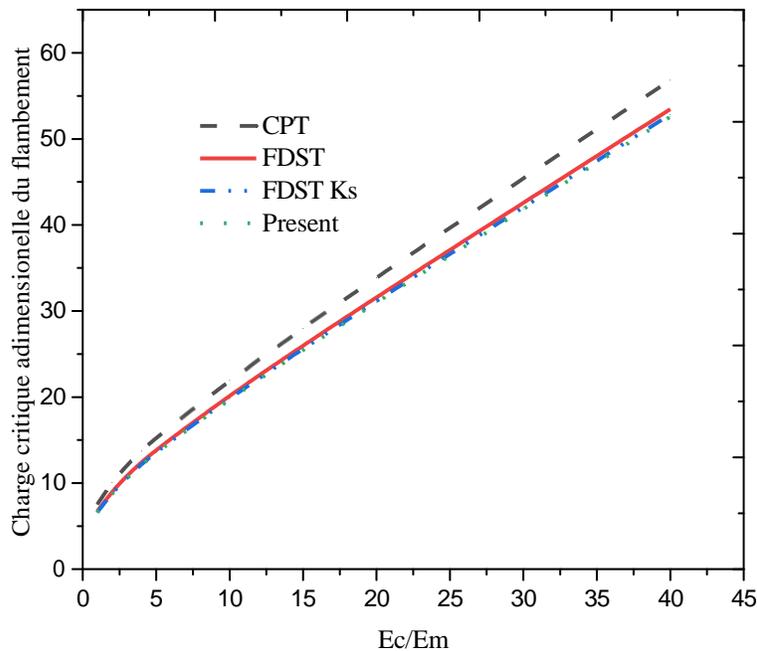


Figure V.5 La variation de la charge critique adimensionnelle du flambement en fonctions des rapports d'hétérogénéité E_c/E_m .

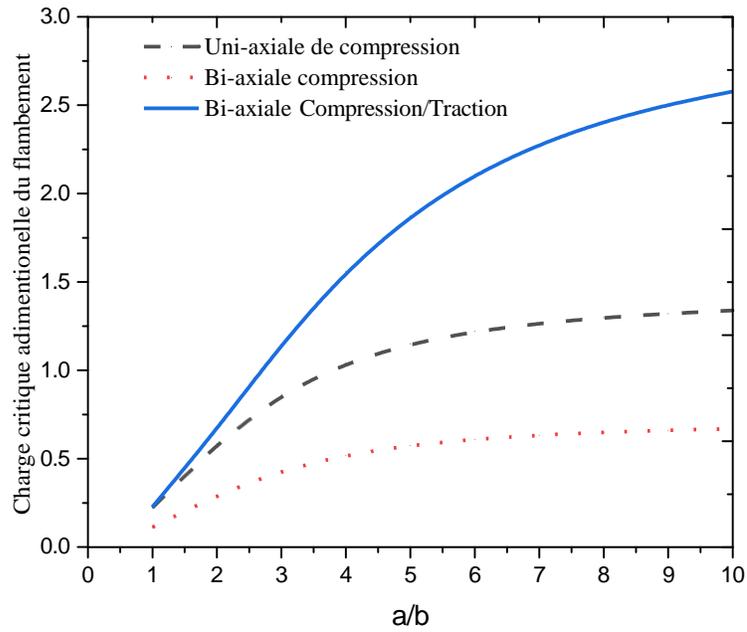


Figure V.6 La charge critique adimensionnelle du flambement en fonction du rapport a/b .

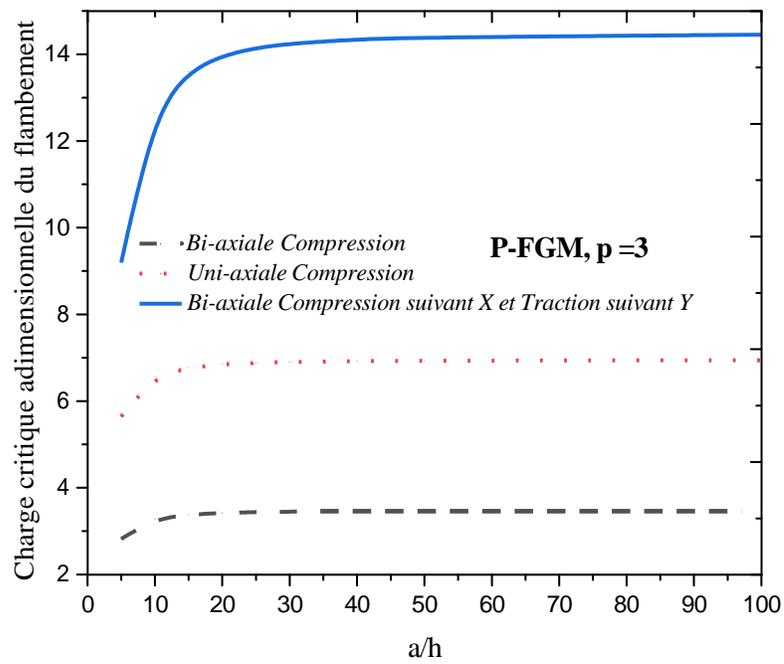


Figure V.7 La charge critique adimensionnelle du flambement en fonction du rapport a/h .

La figure V.7 montre l'effet de la type de chargement (Uni-axiale de compression, bi-axiale compression et bi-axial compression suivant X et Traction suivant Y, sur la variation de la charge critique adimensionnelle du flambement en fonction de a/h . On remarque que les plaques FGM simplement appuyée avec $p=3$ sur chargement bi-axiale (compressions suivant X et Traction suivant Y) sont plus stable par-rapport aux plaques bi-axiale de compression et uni-axiale de compression.

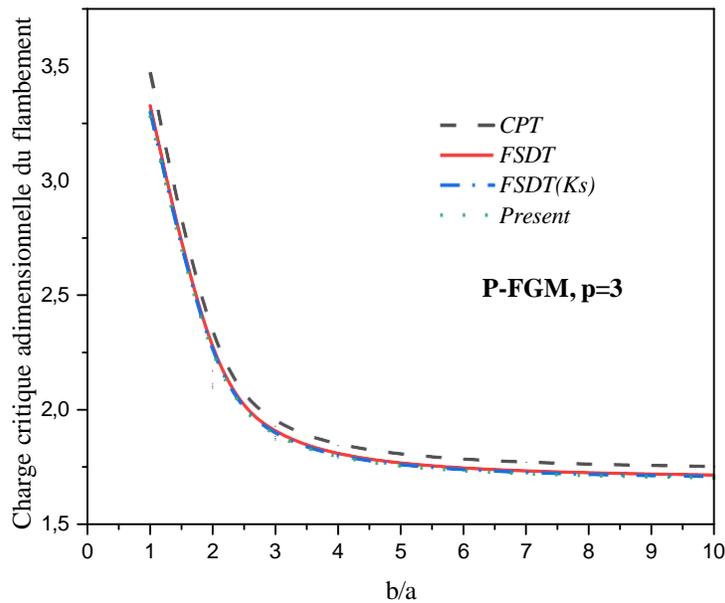


Figure V.8 L'effet du rapport de dimension et la déformation du cisaillement transverse sur la charge critique adimensionnelle.

L'influence du rapport de dimension et l'effet de la déformation de cisaillement sur la charge critique de flambement adimensionnelle des plaques en FGM simplement appuyée avec $p=3$ et illustre dans la figure V.8. A partir de la courbe tracée en constante que la théorie classique de plaques CPT surestime les résultats de la charge critique, par contre la présente théorie et la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevée HSDT sont presque identiques. Il est à observer que la charge critique adimensionnelle du flambement est en inverse avec le rapport de dimension car pour les plus grandes valeurs de ce rapport la structure devient mince et élancée.

La figure V.9 illustre l'effet des nombres de mode de flambement sur la variation de la charge critique adimensionnelle de flambement des plaques FGM ($p=3$) simplement appuyée sous

différent type de chargement (uni-axiale de compression, bi-axial suivant X et Y et bi-axial compression suivant X et traction suivant Y). On constate que la charge critique adimensionnelle de flambement est une relation de corrélation direction avec la valeur de nombres de modes car pour la plus grande valeur de ces dernier le mode est difficile à obtenir et cela est confirmé pour les plaques.

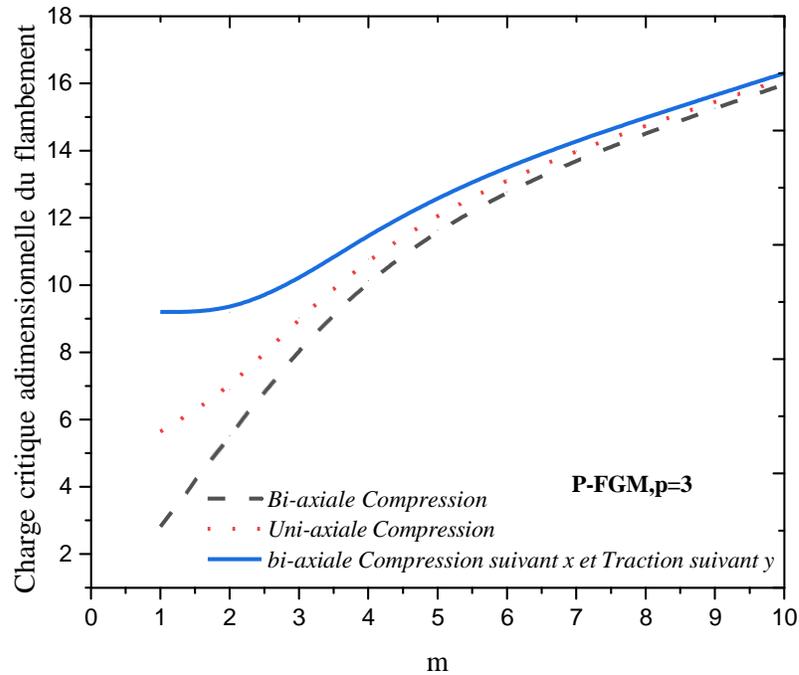


Figure V.9 La variation de la charge critique adimensionnelle de plaques FGM, $p=3$, simplement appuyée sur différent type de chargement en fonction de mode.

Cette figure V.10 présente la variation de charge critique adimensionnelle de flambement des plaques P-FGM simplement appuyée en fonction de rapport de géométrie a/h . La plaques est soumis à un chargement uni-axiale de compression suivant la direction X. Les résultats du présent modelé sont comparés avec ceux de la théorie classique des plaques (CPT), la théorie de déformation de cisaillement de premier ordre (FSDT). Il est claire dans les graphes que le résultat de présent modelé et la théorie de déformation de cisaillement de premier ordre corrigé, avec le facteur de correction $K_s=5/6$, sont presque confondu. Il est note que la FSDT non-corriger donne de résultat plus grands par rapport à la FSDT corrige. On constant aussi que tous les résultats sont converge pour un rapport a/h .

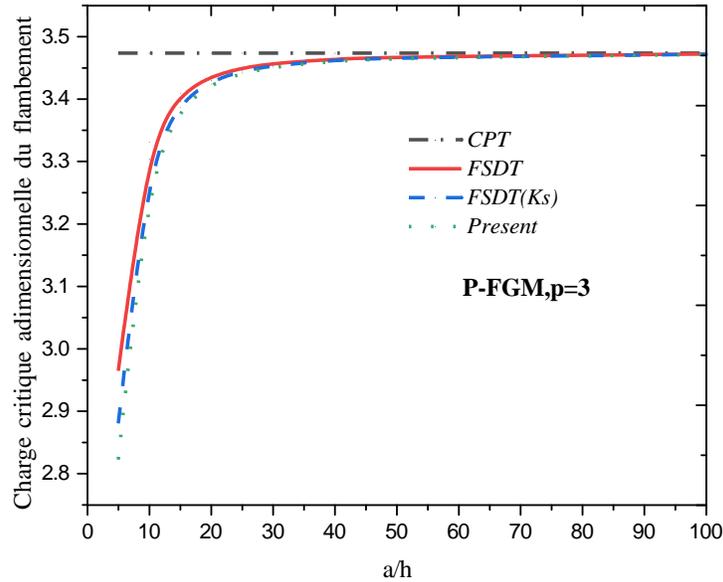


Figure V.10 La charge critique adimensionnelle du flambement en fonction du rapport a/h .

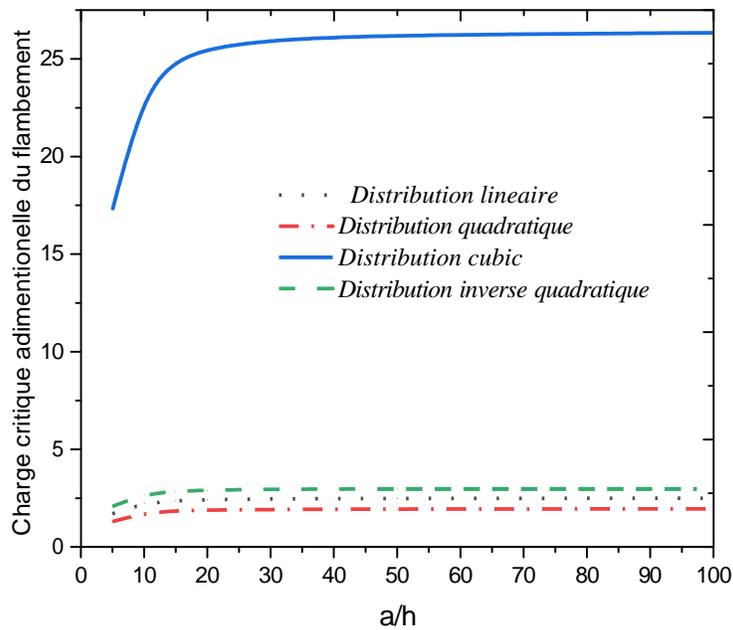


Figure V.11 L'effet de la distribution de matériel a traversé l'épaisseur sur la charge critique adimensionnelle du flambement de plaque carre homogène.

Cette figure V.11 présent l'impact de la distribution du matériel et de rapport épaisseur et longueur sur la variation de la charge critique du flambement des plaques carre simplement appuyée à partir de courbe obtenu en constante que la distribution cubique du matériel à travers l'épaisseur donne la plus grande valeur de la charge critique par contre le plus faibles valeur de la charge critique sont obtenu par un distribution quadratique. La charge critique adimensionnelle augment avec de rapport de géométrie jusqu'à valeur de 20 elle devient constante car l'effet de la déformation de cisaillement est négligeables pour les plaques mince.

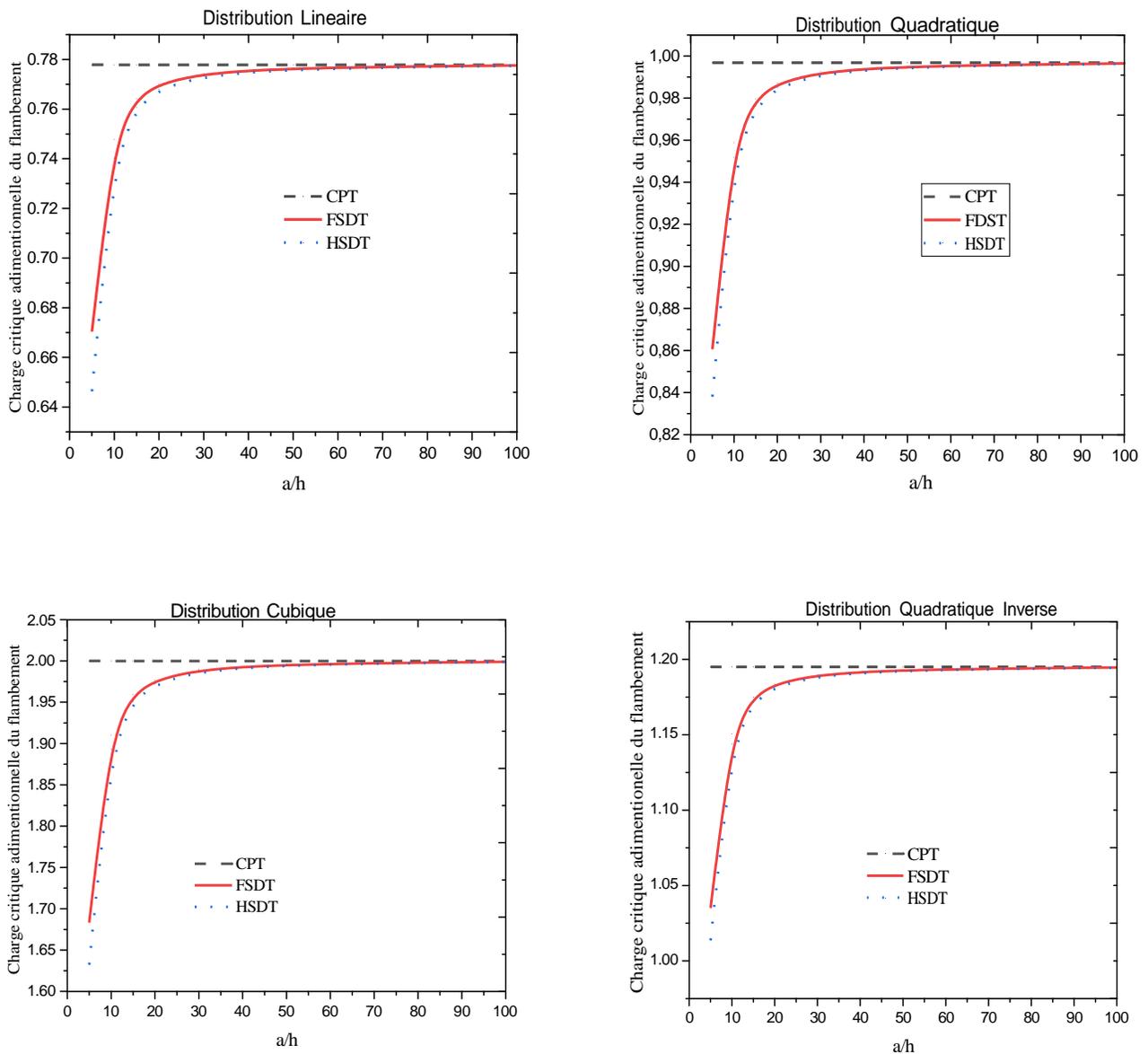


Figure V.12 L'effet de la distribution quadratique a traversé l'épaisseur sur la charge critique adimensionnelle du flambement de plaque carre homogène.

La figure ci-dessus présente la variation de la charge critique du flambement en fonction de rapport longueur/ épaisseur pour les différents théories. Les matériaux ont une distribution linéaire, quadratique, cubique et quadratique inverse respectivement. On constate que de la théorie de déformation de cisaillement de première ordre (FSDT) et la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevée (HSDT) se converge vers la CPT dans le cas des plaques avec un rapport de géométrie élevée. On peut conclure aussi que la FSDT corrigé et la présente théorie sont en bon accord.

V.4 Conclusion.

L'étude de la stabilité des plaques 2D hétérogène c'est fait en utilisant la théorie de déformation de cisaillement hyperbolique raffinée a quatre variable développe dans la chapitre précédent. Donc les propriétés mécaniques des structures 2D hétérogène en été prises comme variante a traversé la direction d'épaisseur selon une simple loi de puissance.

La précisions et l'efficacité de présent model son vérifier en le comparons avec d'autres solutions disponibles dans les littératures a savoirs la théorie classique des plaque (CPT), la théorie de cisaillement du premier ordre (FSDT) et la théorie de cisaillement d'ordre élevée (HSDT), et un excellent accord a été observé dans toutes l'exemple avec les model d'ordre élevée. Nous pouvons en fin conclure que la distribution du matériel à travers l'épaisseur, l'effet de déformation de cisaillement transverse, le type de chargement et les dimensions ont un rôle très important qui influe sur les valeurs de charge critique de flambement.

Conclusion générale

Conclusion générale

Dans ce travail, l'analyse de la stabilité des structures (2D) non-homogènes simplement appuyées a été présentée en utilisant une nouvelle théorie de déformation de cisaillement hyperbolique à quatre variables inconnues. Différents type de chargement axiale ont été utilisées. Le modèle développée prend en considération l'effet de la déformation de cisaillement transverse et donne une distribution parabolique des contraintes sans l'exigence d'un facteur. Les équations gouvernantes de stabilité du présent problème sont obtenues à l'aide du principe des travaux virtuels et résolues par l'approche de Navier. Plusieurs exemples de validation ont été présentés. Une bonne concordance a été confirmée entre les présents résultats et ceux d'autres solutions trouvées dans la littérature.

Les changements spatiaux et progressifs des propriétés des matériaux avec des gradients de propriétés permettent la création de structures innovantes qui peuvent être utilisées dans de nombreux domaines d'application. Nous avons également présenté diverses lois possibles pour aider à expliquer la variation des propriétés des matériaux (FGM), le module de Young, la densité et le coefficient de Poisson en fonction de l'épaisseur de la plaque.

On a vu une revue sur la stabilité en générale, l'instabilité s'exprime dans des systèmes ou des éléments chargés de pression sous le phénomène de perte de stabilité, flambement en génie civil, la possibilité de flambement à provoquer des changements de forme dus à de grandes déformations dues à la non-linéarité géométrique, entraînant une modification des chemins de force dans la structure et la déstabilisation d'autres éléments.

On a vu une revue sur les différentes théories des plaques et les modèles analytiques des plaques à savoir, la théorie classique des plaques (CPT), la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) et la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevée (HSDT) et la théorie raffinée des plaques (RPT). La charge critique non dimensionnelle du flambement augmente avec l'augmentation de la couche du cœur de la plaque.

On a proposé une nouvelle théorie de déformation de cisaillement hyperbolique d'ordre supérieur à quatre variables pour le déplacement des inconnues sont présentes. Sans utiliser de variables de correction du cisaillement. Aussi, on a conclure que le présent modèle est plus simple et présente une excellente concordance avec d'autres solutions de déformation par cisaillement déjà connues dans la littérature ouverte.

Conclusion générale

La précision et l'efficacité de présent model son vérifier en le comparons avec d'autres solutions disponibles dans les littératures a savoirs la théorie classique des plaque (CPT), la théorie de cisaillement du premier ordre (FSDT) et la théorie de cisaillement d'ordre élevée (HSDT), et un excellent accord a été observé dans toutes l'exemple avec les model d'ordre élevée. Nous pouvons en fin conclure que la distribution du matériel à travers l'épaisseur, l'effet de déformation de cisaillement transverse, le type de chargement et les dimensions ont un rôle très important qui influe sur les valeurs de charge critique de flambement.

- ✓ A travers ce travail on peut conclure :
- ✓ La présente théorie et la théorie FSDT (avec $k_s=5/6$) sont presque identiques
- ✓ Les plaques soumise à un chargement chargement bi-axiale (compressions suivant X et Traction suivant Y- sont plus stable par-rapport aux plaques bi-axiale de compression et uni-axiale de compression
- ✓ La charge critique adimensionnelle augment avec de rapport de puis cette dernière devient constante car l'effet de la déformation de cisaillement est négligeable pour les plaques minces
- ✓ La charge critique adimensionnelle du flambement est une relation de corrélation direction avec la valeur de nombres de modes.

Finalement, nous pouvons dire que la présente théorie est simple et efficace pour résoudre les problèmes de la stabilité des structures (2D) hétérogènes sous chargement mécanique axiales.

Le travail présenté dans le cadre de ce mémoire de master peut être développé et enrichi. Nous envisageons, par exemple, en perspective, d'appliquer le présent modèle pour l'étude statique et vibratoire des différentes formes de structures épaisses et modérément épaisses en matériaux fonctionnellement gradué sous un chargement thermique et hygrothermique.

References

bibliographiques

Références bibliographiques

- Ait Atmane H, Tounsi A., I. Mechab, E.A. Adda Bedia, (2010), — Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory. *Int. J. Mech. Mat.*
- Ait Hamou, N., Draouche, K. (2020), –Analyse statique des plaques FG simplement appuyées, mémoire de master, Université de Tissemsilt, Tissemsilt. Algérie.
- Akvasi S S. An efficient shear deformation theory for free vibration of functionally graded thick rectangular plates on elastic foundation. *Composite Structures* 2014; 108: 667–676.
- Alieldin S.S, Alshorbagy A.E, Shaat M. A first-order shear deformation finite element model for elastostatic analysis of laminated composite plates and the equivalent functionally graded plates. *Ain Shams Engineering Journal* 2011; 2: 53–62.
- Asemi K., Shariyat M., Salehi M., Ashrafi H.: A full compatible three-dimensional elasticity element for buckling analysis of FGM rectangular plates subjected to various combinations of biaxial normal and shear loads. *Finite Elements in Analysis and Design* 2013; 74: 9–21.
- Attia (2015) « Contribution à l'étude de la vibration libre des plaques FGM dans un champ thermique » mémoire de master université de DJILLALI LIABES SIDI BEL ABBES, Algérie.
- Aydogdu M. A new shear deformation theory for laminated composite plates. *Compos Struct* 2009; 89(1): 94–101.
- Bacha, C. (2020) –Etude de la stabilité des dalles isotropes et orthotropes, thèse de doctorat, Université de Tissemsilt, Tissemsilt. Algérie.
- Bekkaye, T. H. L., Fahsi, B., Bousahla, A. A., Bourada, F., Tounsi, A., Benrahou, K. H., Al-Zahrani, M. M. (2020), –Porosity-dependent mechanical behaviors of FG plate using refined trigonometric shear deformation theory, *Computers and Concrete*, 26(5), 439–450. <https://doi.org/10.12989/CAC.2020.26.5.439>.
- Benaissa .A et Khadraoui .M (2017) « Flambement des barres comprimées et comprimées fléchies-effet de déformation initial et l'excentricité du chargement » mémoire de master, Université de Tlemcen.
- Benammar (2017) « Etude de la vibration des plaques F G M » thèses de doctorat université de Belhadj bouchaibe AIN TEMOUCHENT, Algérie.

- Berthelot, J.-M., (2010). –Mécanique des matériaux et structures composites. Institut Supérieur des Matériaux et Mécaniques Avancés 667l.
- Boch, P., et al., (1986), "Tape casting of Al₂O₃/ZrO₂ laminated Composites, J. Am. Ceram. Soc; 69 (8):191 -192.
- Bodaghi, M., & Saidi, A. R. (2010). –Levy-type solution for buckling analysis of thick functionally graded rectangular plates based on the higher-order shear deformation plate theory, *Applied Mathematical Modelling.*, **34**(11), 3659–3673. [doi:10.1016/j.apm.2010.03.016](https://doi.org/10.1016/j.apm.2010.03.016).
- Bouazza, M., Tounsi, A., Adda-Bedia, EA., Megueni, A. (2010), –Thermoelastic stability analysis of functionally graded plates: An analytical approach. *Comput Mater Sci*, 49(4), 865–870.
- Castellazzi G, Gentilini C, Krysl P, Elishakoff I. Static analysis of functionally graded plates using a nodal integrated finite element approach. *Composite Structures* 2013; 103: 197–200.
- Chakraborty, A., Gopalakrishnan, S., Reddy, J.N., (2003). –A new beam finite element for the analysis of functionally graded materials. *International Journal of Mechanical Sciences* 45, 519–539. [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(03\)00058-4](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(03)00058-4).
- Chi S H, Chung Y L. Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load—Part I: Analysis. *International Journal of Solids and Structures* 2006; 43: 3657–3674
- Chinosia C, Croce L D. Approximation of functionally graded plates with nonconforming finite elements. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 2007; 210: 106 – 115.
- Chung et Chi (2003), –Cracking in coating- substrate composites of multi-layered and sigmoid FGM coatings. *Engineering Fracture Mechanics*; 70 (10), 1227–1243.
- Chung et Chi (2006), –Cracking in coating substrate composites of multi-layered and sigmoid FGM coatings. *Engineering Fracture Mechanics*; 70 (10), 1227–1243, 2003.
- Chung et Chi, (2006a) , «Mechanical Behavior of Functionally Graded Material Plates under Transverse Load», *International Journal of Solids and Structures*, Volume 43, Issue 13, Pages: 3657-3674, Part I: Analysis, June 2006.
- Chung et Chi, (2006b), –Mechanical behaviour of functionally graded materials plates under transverse.

- EL-hassar, S.M., (2016). Contribution à l'étude du comportement mécanique des plaques composites –étude comparative entre les différentes théories d'ordre élevé– (PhD Thesis).
- Farrokh, M., Afzali, M., and Carrera, E., Mechanical and Thermal Buckling Loads of Rectangular FG Plates by Using Higher-Order Unified Formulation, *Mech. Adv. Mater. Struct.*, 2019, pp. 1–10. <https://doi.org/10.1080/15376494.2019.1578014>.
- Feldman E. and Aboudi J., "Buckling Analysis of Functionally Graded Plates Subjected to Uniaxial Loading", *Composite Structures* 1997; 38: 29-36.
- Gornet, L., (2008). –Généralités sur les matériaux composites 52
- Grover N, Maiti D K, Singh B N. A new inverse hyperbolic shear deformation theory for static and buckling analysis of laminated composite and sandwich plates. *Composite Structures* 2013;95: 667–675.
- Groves, J. F. et Wadley H. N. G. (1997), –Functionally graded materials synthesis via low vacuum directed vapor deposition
- Composites Parts B*
- 28B, (1997), 5769.
- Gururaja U, Shrikantha S, Gangadharan K.V, –Functionally graded Composite materials: An overview
- Selection and peer-review under responsibility of Organizing Committee of AMME 2014*
- , doi: 10.1016/j.mspro.2014.07.442.
- Hanifi Hachemi Amar, L., Bourada, F., Bousahla, A.A., Tounsi, A., Benrahou, K.H., Albalawi, H., and Tounsi, A. (2023), –Buckling analysis of FG plates via 2D and quasi-3D refined shear deformation theories
- Structural Engineering and Mechanics*
- , 85(6), 765-780.
- <https://doi.org/10.12989/sem.2023.85.6.765>
- .
- Ilschner, B., (1993). –Structural and compositional gradients: basic idea, preparation, applications
- Journal de Physique IV Proceedings*
- 03, C7 763-C7-772.
- <https://doi.org/10.1051/jp4:19937121>
- .
- Itterbeek R., Résistance des Matériaux – Flambement, Version du 27 septembre 2022 (10h21).
- Jana, P. and Bhaskar, K. (2006), –Stability analysis of simply-supported rectangular plates under non-uniform uniaxial compression using rigorous and approximate plane stress solutions
- Thin-Walled Structures*
- , 44(5), 507–516.
- [doi:10.1016/j.tws.2006.04.009](https://doi.org/10.1016/j.tws.2006.04.009)
- .
- Javaheri R., Eslami M. R., Buckling of functionally graded plates under in-plane compressive loading, *ZAMM* 2002 82: 277–283.

- Jha, D.K., Kant, T., Singh, R.K. (2012). Higher order shear and normal deformation theory for natural frequency of functionally graded rectangular plates. *Nuclear Engineering and Design*. 250, 8–13.
- Kaddouri (2014) «Analyse des effets de l'amplitude et température sur le comportement non linéaire d'une plaque annulaire sectorielle à gradient fonctionnel» mémoire de master universite de Université Aboubekr Belkaid– Tlemcen, Algérie.
- Kashtalyan M. Three-dimensional elasticity solution for bending of functionally graded rectangular plates. *European Journal of Mechanics A/Solids* 2004; 23: 853– 864.
- Khemache, H., Ayad Abdelali, M. (2022), –Analyse dynamique des poutres reposant sur des fondations élastiques type Winkler-Pasternak ||, mémoire de master, universite de Tissemsilt, Tissemsilt. Algerie.
- Kheroubi, B., (2017). –L'étude de l'effet multi-échelle de nouveaux matériaux et application technologiques|| mémoire de master , Sidi bel Abbes.
- Koizumi, M. (1997), –FGM activities in Japan||. *Composites*; 28(1-2): 1– 4. (1997).
- Koizumi, M. (1997). FGM activities in Japan. *Composites Part B* 1–2, 1–4.
- Koizumi, M. (1992) –Recent Progress of functionally graded materials in Japan||. *Ceram. Eng. Sci. Proc*; 13 (7-8): 333-347, (1992).
- Koizumi, M. (1996), –FGM activities in Japan||, department of materials chemistry||. Ryukoku University, Ohtsu, 520-21 Japan.
- Kulkarni, K., Singh, B.N., Maiti, D.K., Analytical solution for bending and buckling analysis of functionally graded plates using inverse trigonometric shear deformation theory, *Composite Structures* (2015), doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.08.060> .
- Lanhe, W (2004), — Thermal buckling of a simply supported moderately thick rectangular FGM Plate||, *Compos Struct.*,64(2),211–218.
- Mahi A, Bedia E, Tounsi A. A new hyperbolic shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic, functionally graded, sandwich and laminated composite plates. *Applied Mathematical Modelling* 2015; 39: 2489–2508.
- Mahmoud, S.R., Ghandourah, E.I., Algarni, A.H., Balubaid, M.A., Tounsi, A., Tounsi, A. and Bourada, F. (2023), –Stability investigation of symmetrically porous advanced composites plates via a novel hyperbolic RPT||, *Steel and Composite Structures*, 46(4), 471-483. <https://doi.org/10.12989/scs.2023.46.4.471>.

- Manish B. and Kamlesh P. –Response of Functionally Graded Material Plate under Thermomechanical Load Subjected to Various Boundary Conditions| Hindawi Publishing Corporation International Journal of Metals Volume 2015, Article ID 416824, 16 pages <http://dx.doi.org/10.1155/2015/416824>.
- Mantari J L, Bonilla E M, Soares C G. A new tangential-exponential higher order shear deformation theory for advanced composite plates. *Composites: Part B* 2014; 60: 319–328.
- Mantari J L, Oktem A S, Soares C G. A new higher order shear deformation theory for sandwich and composite laminated plates. *Composites: Part B* 2012; 43: 1489– 1499.
- Mantari J L, Oktem A S, Soares C G. A new trigonometric shear deformation theory for isotropic, laminated composite and sandwich plates. *International Journal of Solids and Structures*. 2012; 49: 43–53.
- Mantari J L, Oktem A S, Soares C G. Static and dynamic analysis of laminated composite and sandwich plates and shells by using a new higher-order shear deformation theory. *Composite Structures* 2011; 94: 37–49.
- Mantari JL, Oktem, AS, Guedes Soares C. Bending analysis of thick exponentially graded plates using a new trigonometric higher order shear deformation theory. *Compos Struct* 2012; 94(6): 1991–2000.
- Mantari, J.L., Oktem, A.S., Soares, O.G.: Bending response of functionally graded plates by using a new higher order shear deformation theory. *Compos. Struct.* 2012; 94: 714–723.
- Mercier, J.-P., Zambelli, G., Kurz, W., 1999. *Traité des matériaux*, 3. rev. et augm. ed. Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne.
- Micelli, F., Renni, A., Kandalaf, A.G., Moro, S., 2020. Fiber-reinforced concrete and ultrahigh-performance fiberreinforced concrete materials, in: *New Materials in Civil Engineering*. Elsevier, Waltham.
- Mijušković, O., Čorić, B. and Šćepanović, B., (2015), –Accurate buckling Loads of Plates with different boundary Conditions under arbitrary edge compression|, *International Journal of Mechanical Sciences*, 101, 309-323. [doi:10.1016/j.ijmecsci.2015.07.017](https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2015.07.017).
- Mindlin, R.D. (1951), –Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates|, *J Appl Mech-T ASME*, 18(1), 31–38.
- Mohammadi, M., Saidi, A. R., & Jomehzadeh, E. (2010). –A novel analytical approach for the buckling analysis of moderately thick functionally graded rectangular plates with two simply-

- supported opposite edges, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science.*, **224**(9), 1831–1841. [doi:10.1243/09544062jmes1804](https://doi.org/10.1243/09544062jmes1804).
- Nguyen (2007) T. K., K. Sab., G. Bonnet, –Shear correction factors of functionally graded plates. *Mech. Advanced Mater. Struct*; 14 (8): 567-575, (2007).
- Nguyen, T.-K. (2014). –A higher-order hyperbolic shear deformation plate model for analysis of functionally graded materials, *International Journal of Mechanics and Materials in Design.*, **11**(2), 203–219. [doi:10.1007/s10999-014-9260-3](https://doi.org/10.1007/s10999-014-9260-3).
- Okamura H. (1991), –State of the arte of material design projects for severe service applications, *Mater. Sci. Eng :A*; 143 (1-2): 3-9, (1991).
- Oktem A.S., Mantari J.L., Soares C. G., –Static response of functionally graded plates and doubly-curved shells based on a higher order shear deformation theory, *European Journal of Mechanics* 2012; A/Solids. 36: 163-172.
- Pandya, B.N., Kant, T. (1988). Finite element stress analysis of laminated composites using higher order displacement model. *Composites Science and Technology*. 32, 137-155.
- Praveen GN, Reddy JN. Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic–metal plates. *Int J Solids Struct* 1998; 35: 4457–71.
- Ramachandra, L.S., Panda, S.K. (2012), –Dynamic instability of composite plates subjected to non-uniform in-plane loads. *Journal of Sound and Vibration*, **331**(1), 53–65. [doi:10.1016/j.jsv.2011.08.010](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2011.08.010).
- Reddy J N. Analysis of functionally graded plates. *Int. J. Numer. Meth. Engng*. 2000; 47: 663-684.
- Reddy JN. A simple higher order shear deformation theory for laminated composite plates. *Journal of Applied Mechanics* 1984; 51: 754-752
- Reddy, B.S., Kumar, J.S., Reddy, C.E., and Reddy, K.V.K., Buckling Analysis of Functionally Graded Material Plates Using Higher Order Shear Deformation Theory, *J. Composites*, 2013, vol. 2013, pp. 1–12. <https://doi.org/10.1155/2013/808764>.
- Reissner, E. (1945), –The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates, *J Appl Mech-T ASME.*, 12(2), 69–77.
- Reissner, E. (1947), –On bending of elastic plates, *Q Appl Math.*, 5(1),55–68.

- Reissner, E. (1975), –On Transverse Bending of Plates, Including the Effects of Transverse Shear Deformation, *International Journal of Solids and Structures*, 11, 569–573.
- Reissner, E., Stavsky, Y. (1961), –Bending and stretching of certain types of hetero-geneous anisotropic elastic plate, *J. Appl. Mech.*, 28, 402,408.
- Rohit, Saha., P., R., Maiti. (2012), –Buckling of simply supported FGM plates under uniaxial load, *International Journal of Civil and Structural Engineering*, 2(4):1035-1050.
- SAID, A., 2015. Etude et analyse des plaques FGM en Génie Civil 107.
- Shariat, M. R. Eslami, Buckling of thick functionally graded plates under mechanical and thermal loads, *Compos. Struct.* 2007; 78: 433–439.
- Shimpi, R.P., Patel, H.G., Arya, H.(2007), –New first-order shear deformation plate theories, *J Appl Mech.*, 74(3),523–533.
- Singha M K, Prakash T, Ganapathi M. Finite element analysis of functionally graded plates under transverse load. *Finite Elements in Analysis and Design* 2011; 47: 453– 460
- Soldatos K P. A transverse shear deformation theory for homogeneous mono- clinic plates. *Acta Mech* 1992; 94: 195–220.
- Talha, M., Singh, B.N. (2010). Static response and free vibration analysis of FGM plates using higher order shear deformation theory. *Applied Mathematical Modelling*. 34, 3991–4011.
- Thai, H.T. and Choi, D.H., An Efficient and Simple Refined Theory for Buckling Analysis of Functionally Graded Plates, *Appl. Math. Modell.*, 2012, vol. 36, no. 3, pp. 1008–1022. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2011.07.062>
- Thai, H.-T., & Choi, D.-H. (2012). –An efficient and simple refined theory for buckling analysis of functionally graded plates, *Applied Mathematical Modelling*, 36(3), 1008–1022. [doi:10.1016/j.apm.2011.07.062](https://doi.org/10.1016/j.apm.2011.07.062).
- Thai, H.-T., Vo, T.P., (2012). –Bending and free vibration of functionally graded beams using various higher- order shear deformation beam theories— *International journal of mechanical sciences* 62, 57–66.
- Thinh, T.I., Tu, T.M., Quoc, T.H., and Long, N.V., Vibration and Buckling Analysis of Functionally Graded Plates Using New Eight-Unknown Higher Order Shear Deformation Theory, *Lat. Am. J. Solids Struct.*, 2016, vol. 13, no. 3, pp. 456–477. <https://doi.org/10.1590/1679-78252522>.
- Timoshenko, S.P., Gere, J.M. (1961), –Theory of elastic stability, New York: McGraw-Hill.

- Timoshenko, SP., Woinowsky-Krieger, S. (1959), –Theory of plates and shells, New York: McGraw Hill.
- Tounsi, A., Houari, M.S.A., Bessaim, A. (2016), — A new 3-unknowns non-polynomial plate theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate, *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, 60(4), 547-565.
- Touratier M. An efficient standard plate theory. *Int J Eng Sci* 1991; 29 (8): 901–16.
- Vannucci P. –Introduction aux Cours Matériaux Composites Partie: Anisotropie et mécanique des stratifiés, Université de Versailles Saint-Quentin-En Yvelines.
- Watts, G., Kumar, R., Patel, S.N. and Singh, S., (2021), –Dynamic instability of trapezoidal composite plates under non-uniform compression using moving kriging based meshfree method, *Thin-Walled Structures*, **164**, 107766. doi:10.1016/j.tws.2021.107766.
- Wen P.H, Aliabadi M.H. Analysis of functionally graded plates by meshless method: A purely analytical formulation. *Engineering Analysis with Boundary Elements* 2012; 36: 639–6.
- Whitney, JM. (1973), –Shear correction factors for orthotropic laminates under static load, *Journal of Applied Mechanics.*, 40,302–304.
- Yaghoobi, H., Torabi, M. (2013), –Exact solution for thermal buckling of functionally graded plates resting on elastic foundations with various boundary conditions, *J Therm Stresses.*, 36(9),869–894.
- Yang, J., Liew, K.M. and Kitipornchai, S. (2005), –Second-order statistics of the elastic buckling of functionally graded rectangular plates, *Compos. Sci. Tech.*, 65, 1165-1175.
- Younsi, A. Bourada F. Bousahla A. A, A. Kaci, A. Tounsi, K. H. Benrahou, and M. H. Ghazwani, (2023), « Simple Quasi-3D and 2D Integral Shear Deformation Theories for Buckling Investigation of Advanced Composite Plates », *Physical Mesomechanics*, 2023, Vol. 26, No. 3, pp. 346–366. DOI: 10.1134/S1029959923030086.
- Zenkour, A. M. (2006). Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates. *Applied Mathematical Modelling*. 30, 67–84.
- Zenkour, A.M. and Aljadani, M.H., (2018), –Mechanical Buckling of Functionally Graded Plates Using a Refined Higher-Order Shear and Normal Deformation Plate Theory, *Adv. Aircraft Spacecraft Sci.*, vol. 5, no. 6, pp. 615–632. <https://doi.org/10.12989/aas.2018.5.6.615>.
- Zenkour, AM.(2007), –Benchmark trigonometric and 3-D elasticity solutions for an exponentially graded thick rectangular plate, *Arch Appl Mech.*, 77(4),197–214.

Zhang, DG., Zhou, YH. (2008), –A theoretical analysis of FGM thin plates based on physical neutral surface| Computational Materials Science., 44, 716-720.

Sites Web.

<https://www.sciencedirect.com/topics/engineering/first-order-shear-deformation-theory#:~:text=In%20the%20Reissner%2DMindlin%20theory,are%20included%20in%20the%20theory.>

<https://magazine.zhermack.com/fr/laboratoire-fr/comparaison-des-resines-thermoplastiques-et-thermodurcissables-avantages-et-inconvenients/#:~:text=La%20cat%C3%A9gorie%20des%20r%C3%A9sines%20thermoplastiques,R%C3%A9sines%20de%20polystyr%C3%A8ne>

Annexe

Pendant la période de cette recherche, j'ai participé à deux conférences internationales au cours desquelles j'ai reçu des certificats. Lors de ces deux conférences, j'ai présenté le travail qui fait l'objet de ce mémoire. Vous trouverez ci-dessous les deux certificats :



IUL
Islamic University Of Lebanon
Université Islamique Du Liban
الجامعة الإسلامية في لبنان



Digital Transformation & Governance Network
شبكة التحول الرقمي والحوكمة
2017-2023



جمعية المكتبيين اللبنانيين
LEBANESE LIBRARIANS ASSOCIATION
2017-2023



Association Libranaiso abs:
Constitufanaisos



EdTechS
EdTech Symposium
2022-2023

CERTIFICATE OF PARTICIPATION

This Certificate is Proudly Presented To

Sibeso Kalaluka

attended the Middle East International Conference on Contemporary Scientific Studies-VIII
held on January 7-8, 2023 / Adana, Türkiye, organised by IKSAD Institute
with an oral presentation entitled

Stability Analysis of nonhomogeneous (2D) structure: A literature review



Dr. Mohamad Rammal
Head of the Scientific Committee





isarc

INTERNATIONAL SCIENCE AND ART RESEARCH CENTER

CERTIFICATE
of participant

This is to certify that

Sibeso kalaluka

In oral and technical presentation, recognition and appreciation of research contributions to

5. INTERNATIONAL SCIENTIFIC RESEARCH AND INNOVATION CONGRESS

20-21 MAY 2023 ANKARA/ TURKEY

with the paper entitled

‘ BUCKLING ANALYSIS OF NONHOMOGENOUS 2D STRUCTURES ‘

Uzm. Yasemin AGAOĞLU
Head Of Congress Group



Seta Salih BILDİRİCİ
HEAD OF ISARC