



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique
Université de Tissemsilt
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département des Sciences et de la Technologie



Mémoire de fin d'études pour l'obtention du diplôme
de Master académique en

Filière : **Génie Civil**

Spécialité : **Structures**

Présenté par : **MEKID Riheb**

Thème

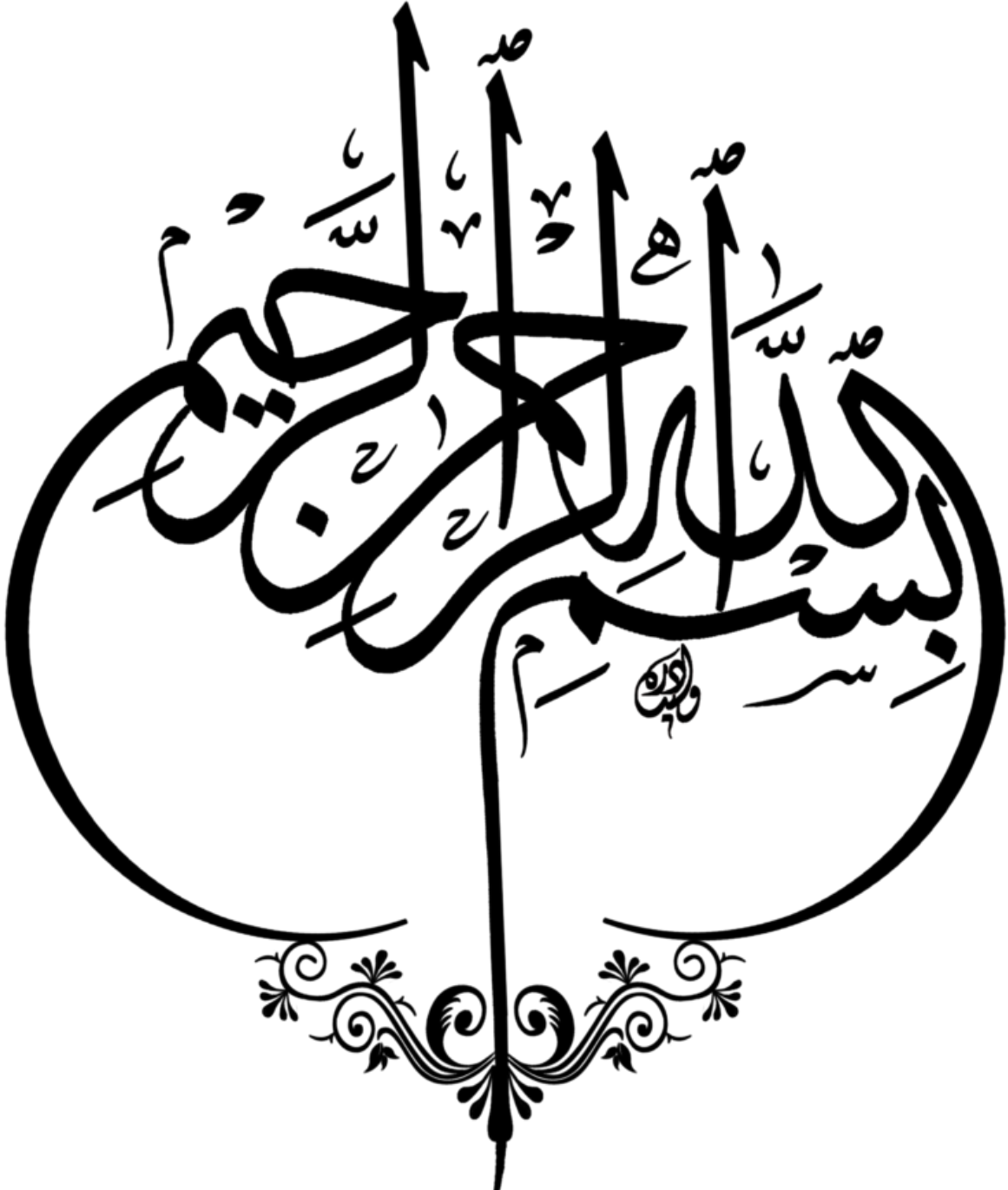
**Comportement des plaques
fonctionnellement graduées sous différentes
conditions aux limites**

Soutenu le,

Devant le Jury :

Dr. Djefal Houcine	Président	M.C.B.	Univ-Tissemsilt
Dr. Adim Belkacem	Encadreur	M.C.A.	Univ-Tissemsilt
Dr. Bourada Fouad	Examineur	M.C.A.	Univ-Tissemsilt

Année universitaire : 2022-2023



Remerciement

La réalisation de ce mémoire a été possible grâce à le BON DIEU à qui je voudrais remercier de m'avoir donné la force et le courage.

Je voudrais tout d'abord adresser toute ma reconnaissance à mon encadrant Docteur Adim Belkacem, pour sa patience, sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter ma réflexion.

Je désire aussi remercier mes deux professeurs Docteur Bourada Fouad et Docteur Bouzid Haytham, qui m'ont fourni les outils nécessaires à la réussite de mes études universitaires.

Merci à mes parents de faire tout ce qui est imaginable pour me rendre toujours heureuse pour vous. Je suis tellement chanceuse d'avoir un héros papa et une jolie mama comme vous dans ma vie.

Je remercie mes sœur Radjaa et Rahaf, et mon frère Abdelkarim pour leur encouragement.

Un grand merci à la famille AZZAZ RAHMANI et la famille MEKID, spécialement à ma tante Mansoura et mon oncle Mohamed, Mustapha, Asma, Echava, Meriem, Fatiha et Sohier. Et aussi je remercie mes amis Litissia, Boo et Amina.

Résumé

Cette recherche présente une étude du comportement mécanique des plaques en matériaux à gradient de propriétés FGM sous différentes conditions aux limites en utilisant la théorie raffinée de déformation et de cisaillement d'ordre élevé à quatre variables. Nous utilisons la théorie proposée et la solution exacte pour étudier l'influence des différents paramètres tel que les propriétés mécaniques sur le comportement en flexion des plaques fonctionnellement graduées.

Les résultats de la flexion des plaques FGM obtenus par la présente théorie raffinée ont été comparé par celles issues de la littérature, d'où, il est clairement constaté qu'ils sont en très bon accord.

Alors, on peut dire que la présente théorie raffinée est plus exacte et simple pour la résolution du comportement en flexion des plaques en FGM soumises aux diverses conditions aux limites.

Mots clés : Plaque FGM, Flexion, théorie raffinée d'ordre élevé, Conditions aux limites.

Abstract

This research presents a study of the mechanical behavior of functionally graded plates FGM under different boundary conditions using the present high-order refined shear and deformation theory of four-variables. We use the proposed theory and the exact solution to study the influence of different parameters such as mechanical properties on the bending behavior of functionally graded plates.

The results of the bending of the FGM plates obtained by the present refined theory were compared with those from the literature, from where it is clearly found that they are in very good agreement.

So, it can be said that the present refined theory is more exact and simpler for the resolution of the bending behavior of the FGM plates subjected to the various boundary conditions.

Keywords: FGM Plate, Bending, High Order Refined Theory, Boundary Conditions

ملخص

يقدم هذا البحث دراسة لسلوك الميكانيكي للصفائح المصنوعة من المواد المتدرجة وظيفيا الخاضعة لمختلف المساند باستخدام النظرية المكررة ذات الترتيب العالي للتشوه والقص العرضي باستخدام أربع متغيرات. نستخدم النظرية المقترحة والحل الدقيق لدراسة تأثير العوامل المختلفة مثل الخواص الميكانيكية على سلوك الانحناء للصفائح المتدرجة وظيفيا.

تمت مقارنة نتائج انحناء الصفائح المتدرجة وظيفيا التي تم الحصول عليها بواسطة النظرية الحالية المكررة مع تلك الموجودة في المراجع، حيث تبين بوضوح أنها في توافق جيد جدًا.

منه، يمكن القول إن النظرية الحالية المكررة أبسط وأكثر دقة لحل سلوك انحناء الصفائح المتدرجة وظيفيا الخاضعة لمختلف المساند.

الكلمات المفتاحية: صفيحة متدرجة وظيفيا، الانحناء، النظرية المكررة ذات الترتيب العالي، مساند مختلفة.

Table des matières

Remerciement.....	I
Résumé.....	II
Abstract	III
ملخص.....	IV
Table des matières.....	V
Liste des figures	VIII
Liste des tableaux.....	X
Liste des abréviations (annotations).....	XI
Introduction générale.....	1
Chapitre I : Généralités sur les matériaux FGM	
I.1.Introduction.....	3
I.2. Les matériaux composites.....	4
I.3.Applications des matériaux composites.....	5
I.4.Définition et concept du FGM.....	7
I.5.Historique.....	11
I.6.Propriétés effectives des FGM.....	13
I.7. Méthodes d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés.....	14
I 7.1. Coulage séquentiel en barbotine (Slip casting).....	15
I.7.2. Coulage en bande (tape casting).....	16
I.7.3. Compactage des couches (poudre d'empilement).....	16
I.7.4. Coulée par centrifugation.....	17
I.7.5. Projection plasma.....	17
I.7.6. Dépôt physique en phase vapeur (PVD).....	18
I.7.7. Dépôt chimique en phase vapeur (CVD).....	18
I.7.8. Frittage et infiltration.....	19
I.7.9. Frittage laser différentiel.....	19
I.7.10. Dépôt par électrophorèse.....	20

I.8. Domaines d'applications des matériaux FGM.....	20
I.8.1 l'industrie aérospatiale.....	21
I.8.2. L'industrie automobile.....	21
I.8.3. Biomédical.....	22
I.8.4. La défense.....	22
I.8.5. Energie.....	22
I.8.6. Marin.....	23
I.8.7. Génie civil.....	23
I.8.8. D'autre application.....	23
I.9. Avantages et inconvénients des FGM.....	23
I.9.1. Avantages.....	24
I.9.2. Inconvénients.....	24
I.10. Différence entre FGM et matériaux composites traditionnels.....	25
I.11. Conclusion.....	28

Chapitre II : Revue sur les différentes théories des plaques

II.1. Introduction.....	29
II.2. Définition d'une plaque.....	29
II.3. Différents types des plaques.....	29
II.4. Différents types de comportements des plaques.....	30
II.5. Domaine d'utilisation des plaques.....	30
II.6. Les hypothèses fondamentales de la théorie des poutres et plaques.....	32
II.6.1. Principes de Saint Venant.....	32
II.6.2. Principe de Navier Bernoulli généralisé.....	32
II.6.3. Le modèle classique de la plaque de Kirchhoff-Love.....	32
II.6.4. La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (First Order Shear Deformation Theory FSDT).....	33
II.6.5. La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (Higher Order Shear Deformation Theory HSDT).....	34
II.6.6. La théorie de déformation en cisaillement d'ordre zéro (Zeroth Order Shear Deformation Theory ZSDT).....	36
II.6.7. Théories Zig-zag.....	37

II.6.8. La théorie raffinée de déformation des plaques (Refined Plate Theory «RPT »).....	38
II.7. Conclusion.....	38

Chapitre III : Etude du comportement en flexion des plaques FGM

III.1. Introduction	40
III.2. Formulation du problème	40
III.2.1. Relations constitutives des plaques fonctionnellement graduées (métal/céramique).....	40
III.2.2. Formulation théorique	40
III. 2.2.1. Hypothèses de base	40
III.3. Conclusion.....	48

Chapitre IV : Résultats et discussion

IV.1. Introduction	50
IV.2. Les propriétés matérielles de la plaque étudiée.....	50
IV.3. Conclusion	62
Conclusion générale et perspectives.....	63
Références bibliographiques	63

Liste des figures

Figure I.1 : Représentation de la hiérarchie des matériaux modernes.	4
Figure I.2 : Formes structurales en fibre de verre et résine fabriquées par pultrusion[7].....	5
Figure I.3 : Tuyau à filament enroulé destiné à l'irrigation en Équateur.[7].....	6
Figure I.4 : Utilisation des matériaux composites dans l'avion Boeing 787.	6
Figure I.5 : Colonne enveloppée d'une enveloppe en fibre de carbone / époxy[8].....	7
Figure I.6 : Graduation de la microstructure FGM avec des constituant céramique-métal.....	9
Figure I.7 : Concept des matériaux gradient de propriétés [20]	10
Figure I.8 : Protection thermique des FGM.[20]	11
Figure I.9 : Représentation schématique d'une couche d'un matériau FGM.[28].....	14
Figure I.10 : Principe de la méthode coulage en bande[33].	16
Figure I.11 : Schéma du procédé dépôt par centrifugation[37]	17
Figure I.12 : Illustration conceptuelle d'une méthode de projection par plasma pour former un matériau thermoélectrique gradué. (La composition est graduée dans la direction plane) [36]	18
Figure I.13 : Disposition du procédé frittage laser différentiel [36]	20
Figure I.14 : Le rôle de l'interface sur la ténacité des composites	26
Figure I.15 : La distribution composante des matériaux.....	27
Figure II.1 : Ouvrage d'art (plaque circulaire)	31
Figure II.2 : Ouvrage d'art (pont).....	31
Figure II.3 : Ouvrage d'art (pont triller)	31
Figure II.4 : Géométries déformée et non déformée d'une plaque sous l'hypothèse de Love-Kirchhoff [49]	33
Figure II.5 : Géométries déformées et non déformées d'une plaque sous l'hypothèse de la théorie (FSDT)[49].....	34
Figure II.6 : Schématisation des déformations des plaques par la théorie « HSDT ».	35
Figure II.7 : Champ de déplacements des modèles zig-zag du premier ordre[55]......	37

Figure III. 1 : Géométrie d'une plaque rectangulaire composée de FGM 41

Figure IV.1 : **Variation** de la flèche maximale w^* en fonction du degré d'homogénéité (k) des plaques encastrees (CCCC) en FGM. 54

Figure IV.2 : Variation de la flèche maximale w^* en fonction du rapport coté sur épaisseur (a/h) des plaques encastrees (CCCC) en FGM..... 54

Figure IV.3 : Variation de la flèche suivant l'épaisseur (a/h) d'une plaque en FGM carrée (k=1) en fonction des conditions aux limites (SSSS, CSCS, CCSS, CCCC). 55

Figure IV.4 : Influence du rapport d'épaisseur a/h sur la variation de la flèche adimensionnelle d'une plaque carrée (a/b=1) en FGM. 56

Figure IV.5 : Influence du rapport d'aspect a/b sur la variation de la flèche d'une plaque en FGM (a/h=10). 58

Figure IV.6 : Variation de la flèche suivant la longueur (x/a) d'une plaque carrée en FGM (a/h=10). 59

Figure IV.7 : Variation des contraintes normales σ_x suivant l'épaisseur (z/h) d'une plaque en FGM 60

Figure IV.8 : Variation des contraintes normales σ_y suivant l'épaisseur (z/h) d'une plaque en FGM 61

Liste des tableaux

Tableau I.1 : Les différentes propriétés de la céramique et du métal [20]	9
Tableau I.2 : Progrès de la recherche sur les matériaux FGM au Japon.	13
Tableau I.3 : Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels [25]	27
Tableau III.1. Fonctions admissibles $X_m(x)$ et $Y_n(y)$ pour les différentes conditions aux limites	47
Tableau IV.1 : Les propriétés mécaniques des matériaux constituant la plaque FGM.	50
Tableau IV.2 : Effet de coté sur épaisseur (a/h) sur la flèches maximales w^* des plaques isotropes carrées et rectangulaires simplement appuyées (SSSS) sous charges uniformes	51
Tableau IV. 3 : Effet du rapport coté sur épaisseur (a/h) sur les flèches adimensionnelle \bar{w} des plaques carrées simplement appuyées (SSSS) en FGM sous charges sinusoïdales.....	51
Tableau IV.4 : Effet du degré d'homogénéité k sur la flèche adimensionnelle \bar{w} et les contraintes des plaques carrées en FGM sous charges sinusoïdales ($a=10h$)	52
Tableau IV.5 : Influence du degré d'homogénéité k sur la flèche maximale w^* des plaques carrées encastées (CCCC) en FGM.	53
Tableau IV.6 : Variation de la flèche \bar{w} d'une plaque carrée en FGM soumise à une charge sinusoïdale en fonction des différentes conditions aux limites.	55
Tableau IV.7 : Variation de la flèche \bar{w} d'une plaque en FGM soumise à une charge sinusoïdale en fonction des différentes conditions aux limites ($a/h=10$).	57

Liste des abréviations (annotations)

a	Longueur de la plaque.
b	Largeur de la plaque
h	Epaisseur de la plaque
E	Module de Young
ν	Coefficient de Poisson
V(z)	Fraction volumique
k	Indice de la loi de puissance
U	Energie de déformation
V	Energie due aux charges extérieures
u, v, w	Les déplacements dans les directions x, y, z
u_0, v_0	Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque
ϕ_x, ϕ_y, ϕ_z	Les rotations autour des axes x, y et z
f(z)	Fonction de cisaillement
g(z)	Dérivée de la fonction de cisaillement
σ	Contrainte normale
τ	Contrainte de cisaillement
$\varepsilon_x, \varepsilon_y$	Déformations dans les directions x, y
$\gamma_{xy}, \gamma_{zx}, \gamma_{zy}$	Déformations de distorsion
$\delta u_0, \delta v_0, \delta w_b, \delta w_s$	Champ virtuel de déplacement
w_b	Composante de la flèche due à la flexion
w_s	Composante de la flèche due au cisaillement
$\delta \varepsilon_x, \delta \varepsilon_y, \delta \varepsilon_z$	Champ de déformation longitudinal virtuel

$\delta\gamma_{zx}, \delta\gamma_{zy}$	Champ de déformation transversal virtuel
N_x, N_y, N_{xy}	Efforts normaux de membrane
M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b	Moment de flexion pure
M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s	Moment de flexion supplémentaire due au cisaillement transverse
Q_{zx}^s, Q_{zy}^s	Effort de cisaillement pur
k_x^b, k_y^b	Courbure de flexion suivant x et y
k_x^s, k_y^s	Courbure de cisaillement suivant x, y
n, m	Nombre de modes
A_{ij}	Termes de rigidité en membrane de la plaque
B_{ij}	Termes de rigidité de couplage de la plaque
D_{ij}	Termes de rigidité de flexion de la plaque
A_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
B_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
D_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
H_{ij}^s	Termes de rigidité en de la plaque cisaillement
Ω	Surface supérieure de la plaque
Q_{ij}	Les coefficients de rigidité
S_{ij}	Valeurs propres

Introduction Générale

Introduction générale

Le développement de la technologie influence sur tous les domaines en particulier le monde industriel, qui nécessite l'utilisation de matériaux innovants. Les matériaux sont donc considérés comme un axe de recherche très prometteur.

Les matériaux composites les plus légers avec des rapports résistance/poids et rigidité/poids élevés ont été utilisés avec succès dans l'industrie aérospatiale et d'autres applications d'ingénierie. Cependant, les matériaux composites traditionnels ne peuvent pas être utilisés dans des environnements à haute température. En général, les métaux sont utilisés en ingénierie depuis de nombreuses années en raison de leur excellente résistance et ténacité. Dans des conditions de haute température, la résistance des métaux diminue de la même manière que les matériaux composites traditionnels. Les matériaux céramiques ont d'excellentes propriétés de résistance à la chaleur. Cependant, en raison de la faible ténacité des céramiques, leurs applications sont généralement limitées.[1]

Récemment, une nouvelle classe de matériaux composites appelée matériau à gradient fonctionnel (FGM) a attiré une attention considérable. Un matériau à gradient fonctionnel est un matériau conçu pour présenter des changements graduels de composition, de microstructure et/ou de propriétés dans un volume, plutôt que des propriétés uniformes dans l'ensemble. Ce changement progressif des propriétés des matériaux est généralement obtenu grâce à des combinaisons contrôlées de différents constituants.

La composition et la microstructure des FGM peuvent être adaptées pour fournir des propriétés et des fonctions spécifiques telles que la résistance, la ténacité, la résistance à l'usure, la stabilité thermique et la résistance à la corrosion. Le FGM peut être utilisé dans diverses applications telles que les industries aérospatiale, biomédicale, énergétique et automobile, génie civil.

L'un des principaux avantages d'un FGM est sa capacité à réduire les concentrations de contraintes et les gradients de température aux interfaces entre différents matériaux. Cela améliore les performances mécaniques et thermiques et réduit les taux de défaillance. De plus, le FGM peut être utilisé pour concevoir des structures avec une conductivité thermique graduée.

Les FGM peuvent être fabriqués à l'aide de diverses techniques telles que la métallurgie des poudres, la coulée et la fabrication additive. Cependant, la conception et la fabrication des FGM restent difficiles, nécessitant un examen attentif des propriétés des matériaux, des conditions de traitement et des exigences de performance.[2]

Le but de ce travail est d'étudier l'analyse du comportement mécanique en flexion des plaques FGM soumises à diverses conditions aux limites en utilisant la théorie raffinée d'ordre élevé à quatre variables.

Pour cela, le mémoire est organisé en quatre chapitres :

Le premier chapitre nous donne un aperçu des matériaux composites et fait une rapide revue sur les matériaux à gradient de propriétés, leur historique, les techniques de production et les domaines d'application.

Dans le deuxième chapitre nous présentons les théories des plaques, permettant de mettre leur champ de déplacement, de déformation et leur comportement, ensuite nous décrivons des différentes théories des plaques correspondantes, soit la théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT), la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT), la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT), la théorie d'ordre zéro (ZSDT), la théorie de Zig-Zag et enfin la théorie raffinée de déformation des plaques (RPT).

Quant au troisième chapitre, nous avons construit un modèle analytique pour prédire le comportement en flexion des plaques FGM soumises à diverses conditions aux limites. Ce modèle est basé sur une étude à quatre variables de la théorie améliorée de la déformation et de cisaillement d'ordre élevé.

Le quatrième chapitre, se concentrera sur la validation du modèle suggéré que nous avons développé dans le chapitre précédent, ainsi que sur la présentation et la comparaison des résultats obtenus avec celles d'autres théories d'ordre élevé issues de la littérature. Par la suite, une analyse paramétrique sera effectuée pour établir les divers facteurs qui influent sur le comportement mécanique en flexion des plaques fonctionnellement graduées.

Enfin, ce travail se termine par une conclusion générale sur l'étude menée et incluant des perspectives pour des travaux futurs.

Chapitre I :
Généralités sur les
matériaux FGM

I.1.Introduction

Les matériaux, l'énergie et la science moderne sont les trois piliers de la technologie moderne. Le développement et la recherche de nouveaux matériaux ont conduit à l'invention de matériaux, et l'exploitation scientifique des matériaux de base (tableau périodique) disponibles dans divers composés inorganiques et organiques pour développer des polymères avancés, des alliages, des céramiques, etc. a été ouverte. Ingénierie structurelle, etc. La structure du développement des matériaux modernes est illustrée à la figure I.1. Les composites sont une classe de matériaux avancés composés d'un ou plusieurs matériaux aux propriétés physiques et chimiques différentes assemblés à l'état solide. Les matériaux composites offrent une meilleure combinaison de différentes propriétés par rapport au matériau d'origine et sont également plus légers. Les composites se dégradent dans des conditions de travail extrêmes par un processus appelé délaminage (séparation des fibres de la matrice). La transition brute des propriétés du matériau à travers l'interface entre des matériaux distincts peut provoquer de fortes contraintes inter-laminaires et entraîner une déformation plastique ou une fissuration.[3]

Le collage direct des métaux et des céramiques peut générer des contraintes thermiques dans les applications pratiques à haute température qui sont principalement dues à des décalages CTE (le coefficient de dilatation thermique). La contrainte thermique provoque la formation de fissures décollant les hétéros interfaces et se traduit souvent par un délaminage de la surcouche céramique.

Le concept d'intercalaires gradués pour assembler les métaux et les céramiques a été proposé pour la première fois par Kawasaki et Watanabe.[4] Dans ce concept, la contrainte thermique est efficacement soulagée par une couche intermédiaire à composition graduée. Ces matériaux techniques possèdent simultanément des propriétés de résistance à la chaleur extrême et de ténacité suffisantes pour inhiber la propagation des fissures. Ce concept s'appelait en anglais "functionally graded material".

Les matériaux à gradient fonctionnel (FGM) étaient à l'origine utilisés pour fabriquer des matériaux pour les revêtements de fuselage et les moteurs d'avions spatiaux, qui sont soumis à un chauffage par friction intense par le flux d'air. Une exigence clé dans la conception des FGM est la réponse optimale des propriétés des matériaux aux conditions environnementales réelles. Pour répondre à cette exigence, la composition et la microstructure varient dans toute la structure, ce qui entraîne des gradients de propriétés[5]

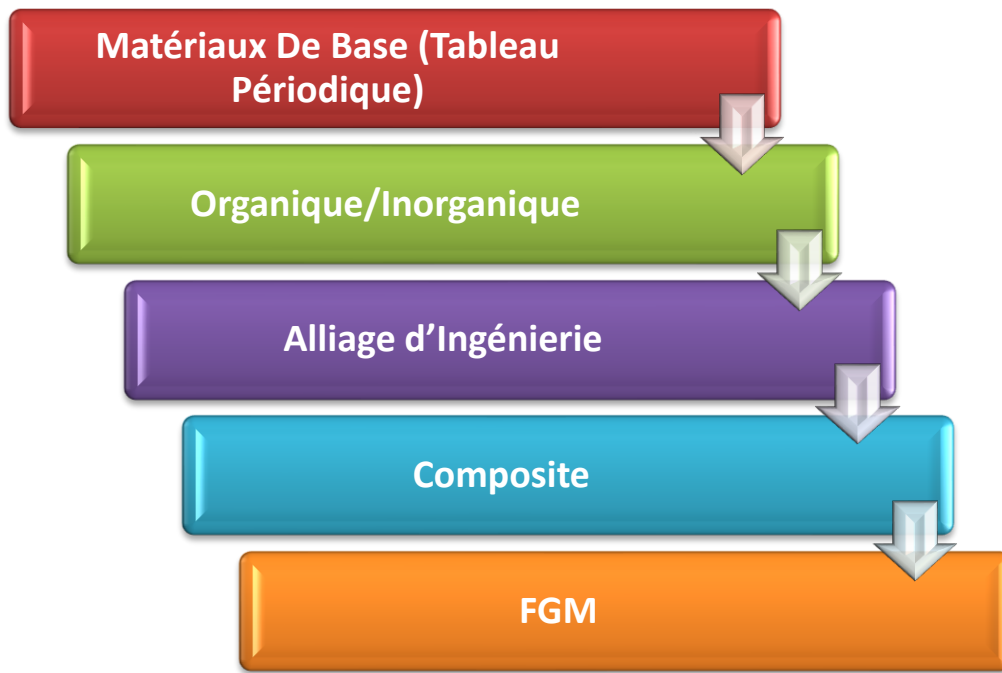


Figure I.1 : Représentation de la hiérarchie des matériaux modernes.

I.2. Les matériaux composites

Les matériaux composites sont vieux comme le monde. Il y a plusieurs millénaires, les artisans de l'Égypte ancienne augmentaient déjà les propriétés mécaniques des briques par une adjonction de paille courte à l'argile fraîche. Certains matériaux naturels comme le bois (fibre de cellulose dans une matrice de lignine) et l'os (mélange complexe de collagène et de phosphate de calcium) sont des matériaux composites.

Il n'existe pas de définition simple d'un matériau composite. En effet, un grand nombre de matériaux modernes sont des alliages. Ils sont constitués d'un mélange à l'échelle microscopique de plusieurs phases, de structure et de composition chimique distinctes, concourant de manière synergique aux propriétés physiques, chimiques ou mécaniques des matériaux. D'une manière stricte, certains alliages (ex. polystyrène choc, ABS) peuvent être classifiés comme matériaux composite. Les polymères chargés par des substances minérales divisées ($\text{TiO}_2\text{-CaCO}_3$) constituent également des matériaux composites ou des céramiques comme la porcelaine.

On réserve de plus en plus la dénomination matériaux composites aux matériaux constitués d'une matrice continue renforcée par des fibres. Ces fibres résistantes sont noyées dans une matrice qui les maintient en place et assure la cohésion de l'ensemble. Les propriétés

mécaniques des composites fibreux dépendent de la quantité de la dimension et surtout de l'orientation des fibres[6]

I.3.Applications des matériaux composites

Les polymères renforcés de fibres de verre sont utilisés dans une grande variété d'industries : en passant par les articles de sport, construction civile jusqu'au domaine aérospatial. Les citernes et les navires (sous pression et non-pression) dans l'industrie des procédés chimiques, ainsi que les pipelines sont généralement fabriqués de résine de polyester renforcée par des fibres de verre. La figure I.2 montre une variété de formes structurelles de matrice en fibre de verre et de résine fabriquées par la technique de pultrusion. Les fibres de verre S-2 et les fibres aramides sont utilisées pour le revêtement des sols d'aéronefs civils. La fibre d'aramide est également utilisée dans les composants légers dans les hélicoptères et les petits avions. Les patchs destinés pour courses et les bateaux privés sont des exemples de fibres d'aramide où la performance est plus importante que le coût. Les applications militaires varient du simple casque au boîtier de moteur de fusée. Dans l'industrie des énergies renouvelables, les longues hélices des éoliennes (60 m) peuvent être fabriquées par un mélange judicieux de fibres de verre et de carbone pour réduire la masse de l'hélice.[7]

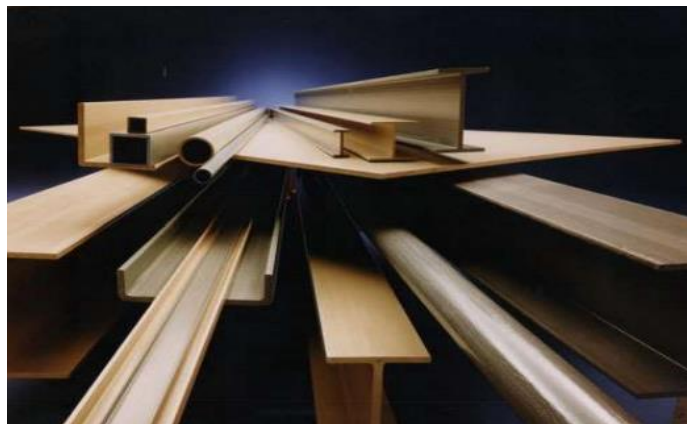


Figure I.2 : Formes structurelles en fibre de verre et résine fabriquées par pultrusion[7]



Figure 1.3 : Tuyau à filament enroulé destiné à l'irrigation en Équateur.[7]

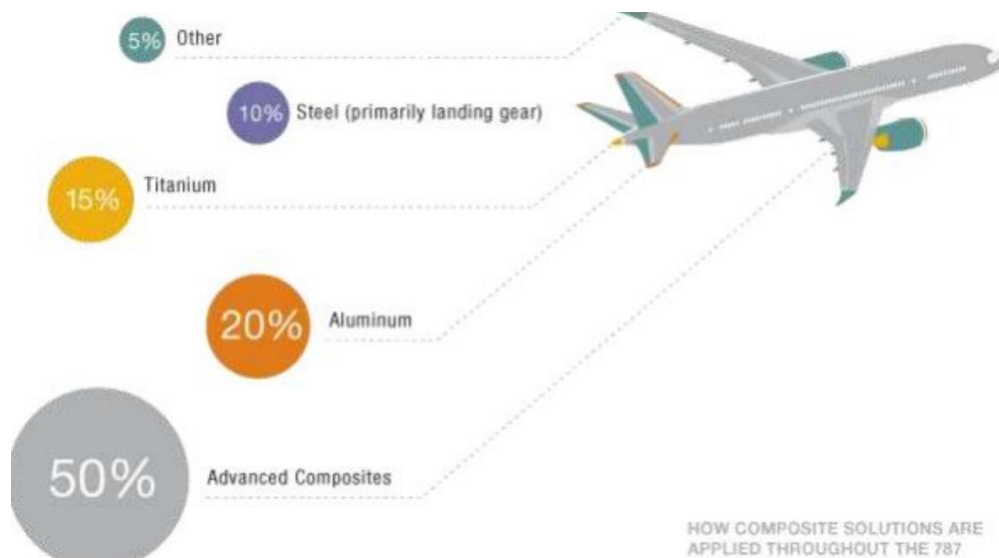


Figure I.4 : Utilisation des matériaux composites dans l'avion Boeing 787.

L'utilisation de composites renforcés de fibres dans les infrastructures civiles a été un développement majeur dans les années 1990. Les facteurs clés à cet égard comprennent : un coût réduit, une résistance à la corrosion, une durée de vie prolongée et une maintenance réduite, et éventuellement moins de problèmes sismiques.

Des efforts importants ont été faits dans le domaine des ponts, ainsi que des travaux de réparation et de modernisation. Par exemple, les structures en béton et en maçonnerie peuvent être renforcées avec des matériaux composites au lieu de plaques d'acier. Ce processus implique la préparation de la surface et l'application d'un apprêt approprié sur les structures en béton et les structures métalliques, l'application d'une couche de résine suivie d'une feuille de composite et d'une deuxième couche de résine. Des composites renforcés de fibres de verre et

de carbone sont utilisés, bien que les composites polymères renforcés de fibres de carbone donnent des résultats supérieurs. La figure 1.5a représente une colonne en béton entourée d'une enveloppe en composite de fibre carbone et d'époxy, tandis que la figure 1.5b présente les résultats après l'application d'une charge compressive. Dans la partie de la colonne en béton sans l'enveloppe composite, on peut voir l'écaillage du béton et le flambement des barres de renforcement en acier.



Figure I.5 : Colonne enveloppée d'une enveloppe en fibre de carbone / époxy[8]

Dans la partie de la colonne protégée par une enveloppe en composite, il n'y a pas d'effets visibles. Potentiellement, l'enveloppement en composite des colonnes structurales pour le renforcement sismique semblerait constituer un marché énorme. Cependant, cette technique est loin d'être parfaite, elle présente de nombreux problèmes, tels que la durabilité, l'absorption de l'humidité par la matrice et d'autres effets environnementaux. Une autre application des matériaux composites en fibre de carbone dans les infrastructures mécaniques et civiles sont analogue à la capacité des ponts et autres structures à résister aux séismes. La protection antisismique des colonnes de ponts est réalisée par enroulement des colonnes avec des composites renforcés par fibres de carbone.[8]

I.4.Définition et concept du FGM

Un matériau FGM (les matériaux fonctionnellement gradués), est une composite non homogène effectué à partir de différentes phases des constituants matériels et habituellement en céramique et métal[9]

Les matériaux à gradient fonctionnel (FGM) sont des matériaux multifonctionnels qui contiennent une variation spatiale de composition et/ou de microstructure dans le but spécifique de contrôler les variations de propriétés thermiques, structurelles ou fonctionnelles. La composition du gradient dans les FGM entraîne non seulement une variation spatiale des propriétés, mais génère également des contraintes résiduelles, qui affectent les propriétés mécaniques [10]. "Matériau à gradient fonctionnel" a été inventé par des scientifiques japonais qui travaillaient sur des matériaux capables de résister à des températures élevées pour des applications spatiales. Le concept est maintenant repris dans le monde entier, reconnaissant l'importance de cette nouvelle famille de matériaux. Les scientifiques ont depuis développé des conceptions pour les industries militaire, automobile, biomédicale et des semi-conducteurs, ainsi que pour une utilisation en tant que caractéristique structurelle générale dans des environnements à haute température.

Le FGM est un matériau à haute température qui peut résister à des températures extrêmes dans des conditions de température élevée. Au niveau microscopique, les matériaux à propriétés graduées (FGM) sont inhomogènes, avec des propriétés mécaniques qui varient progressivement et de manière continue d'une surface à l'autre. Ceci est réalisé en faisant varier progressivement la densité du composant, qui est constitué d'un mélange de céramique et de métal, ou d'un mélange de différents matériaux.

En raison de sa faible conductivité thermique, la partie du matériau céramique offre une résistance à haute température et protège le métal de l'oxydation. La partie en métal ductile, par contre, prévient la rupture induite par les contraintes dans un court laps de temps en raison du gradient de haute température. En outre, un mélange d'une céramique et d'un métal avec une fraction de volume variant de façon continue peuvent être facilement fabriqués [11][12]

Un certain nombre de revues traitant de divers aspects des FGM ont été publiés au cours des dernières années [11][13][14][15][16][17][18]. Ils démontrent que la majorité des premières recherches sur les FGM étaient axées sur l'analyse des contraintes thermiques et le comportement mécanique. Généralement, les FGM sont des matériaux multicouches qui comprennent une variété de matériaux comme les céramiques et les métaux. Les vides sont également considérés comme une composante des matériaux FGM [19]. Ce sont donc des composites aux propriétés macroscopiques hétérogènes. La figure I.6 illustre une microstructure graduée continue avec des constituants métalliques/céramique. En effet, les composants céramiques des FGM peuvent résister à des températures élevées en raison de leurs propriétés de résistance thermique supérieures, tandis que les composants métalliques ont une meilleure efficacité mécanique et réduisent le risque de fracture catastrophique.

Récemment, Briman et Byrd ont présenté une revue des principaux développements des FGM, notamment les problèmes de transfert de chaleur, le stress, la stabilité dynamiques, les essais, la fabrication et la conception, les applications et les fractures.

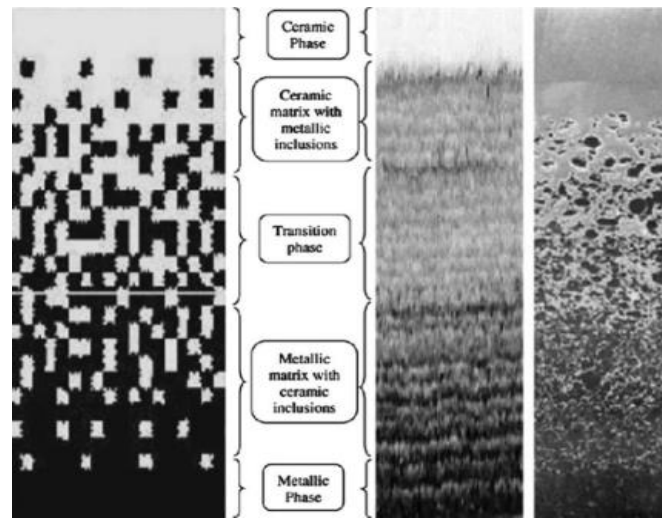


Figure I.6 : Graduation de la microstructure FGM avec des constituants céramique-métal

La plupart des FGM sont constitués de céramiques et de métaux, dont les propriétés mécaniques sont comparées dans le tableau I.1. [20]

Tableau I.1 : Les différentes propriétés de la céramique et du métal [20]

La face à haute température	Céramique	-Bonne résistance thermique -Bonne résistance à l'oxydation -Faible conductivité thermique.
Continuité du matériau d'un point à l'autre {couches intermédiaires}	Céramique-métal	-Élimination des problèmes d'interface -Relaxer les contraintes thermiques.
La face à basse température	Métal	-Bonne résistance thermique -Conductivité thermique élevée -Très bonne ténacité à la rupture.

Le changement est continu dans la composition et donc dans la microstructure d'un matériau « FGM ». Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés des « FGM ». Un exemple d'un tel matériau est montré dans la figure I.7[21] où des particules sphériques ou presque sphériques sont incorporées dans une matrice isotrope. Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente[22].

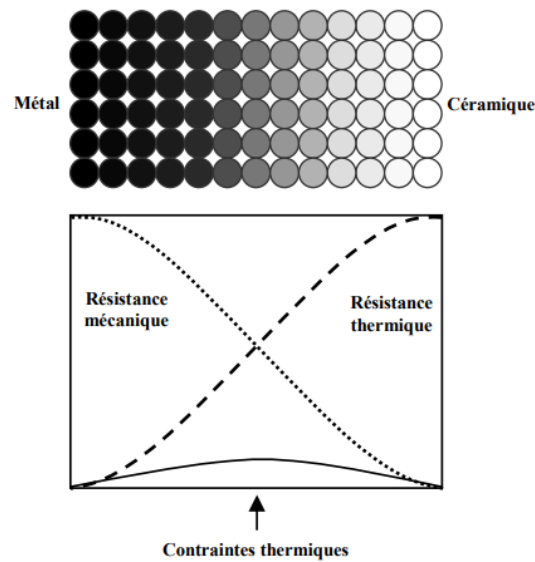


Figure I.7 : Concept des matériaux gradient de propriétés [20]

Le concept de FGM a été appliqué avec succès dans des revêtements de barrière thermique où les exigences visent à améliorer la résistance thermique, à l'oxydation et à la corrosion. Deux matériaux importants dans la technologie de fabrication des FGM sont : les couches céramiques protectrices extérieures Alumina ' Al_2O_3 ' et Zircane ' ZrO_2 ' sur les substrats Nisuper alloy ' NiCrAlY '.

Figure I.8 montre les concentrations de contraintes dans les panneaux de protection thermiques conventionnels au niveau des interfaces (changement brutale de composition). Il montre également comment un FGM peut alléger ces concentrations de contraintes en changeant graduellement les propriétés matérielles et assure toujours la protection thermique trouvée dans les barrières thermiques conventionnelles.[20]

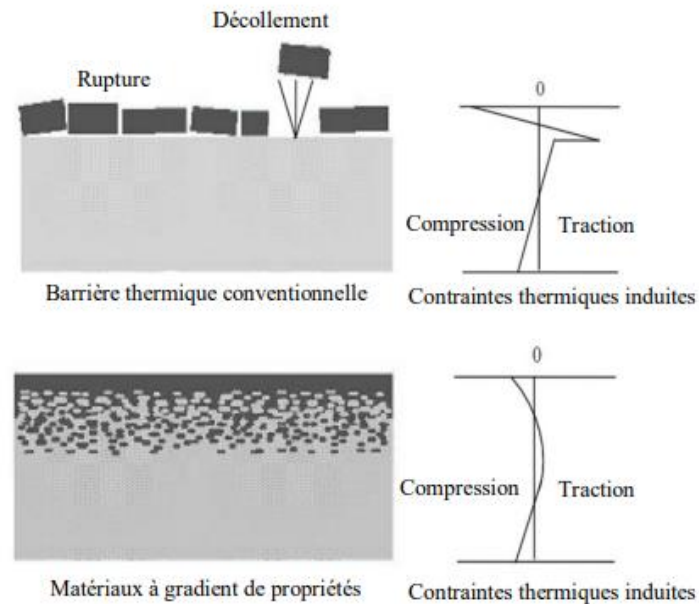


Figure I.8 : Protection thermique des FGM.[20]

I.5.Historique

Au milieu des années 1980, une agence de la science et la technologie du Japon a proposé un projet d'avions spatiaux qui est lié à la naissance des FGM. Le plan était que le Japon prenne une part importante dans l'exploitation spatiale mondiale en les débuts du 21^{ème} siècle. [23].

Ce concept fut suivi par d'autres pays : l'Allemagne, la Suisse, Les Etats-Unis, La Chine et la Russie. En 1984 M. Niino et ses collègues à Sendai ont eu l'idée de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion[24]. Les changements continus dans la composition, dans la microstructure, et même dans la porosité de ces matériaux a comme conséquences des gradients des propriétés matérielles telles que les propriétés (résistance) mécaniques et la conductivité thermique[25]. Cette nouvelle classe de matériaux composites peuvent être utilisés pour différentes applications, telles que les enduits des barrières thermiques pour les moteurs en céramique, turbines à gaz, couches minces optiques[26].

En 1987, un vaste programme pour les développements des FGM sur la relaxation des contraintes thermiques c'est-à-dire des matériaux constituant les parois des engins spatiaux et les murs thermiques spéciaux pouvant travailler à des températures de surfaces de 1800°C et à un gradient de température de l'ordre de 1300°C. A cette année-là, aucun matériau industriel n'était connu pour supporter de telles sollicitations thermomécaniques[25]

Trois caractéristiques sont à considérer pour la conception de tels matériaux :

- Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la couche superficielle du matériau ;
- Ténacité du matériau côté basse température ;
- Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau.

Pour répondre à un tel cahier des charges, l'idée originale des FGM a été proposée pour élaborer un nouveau composite profitant à la fois des propriétés des céramiques (côté haute température) et des métaux (côté basse température).

A la fin de la première étape (1987-1989), les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales (1-10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) pouvant résister à des températures maximales de 2000K(1727°C) (température de surface) et à un gradient de température de 1000K (727°C).

Quatre techniques ont été utilisées pour fabriquer les matériaux présentant un gradient de composition et de structure ; les techniques utilisées dans la fabrication de tels matériaux sont les suivants : le système SiC /C par C.V.D, le système PSZ /Mo par la technique de la compaction sèche des poudres, le système TiB₂/Cu par synthèse par auto-propagation à haute température, et enfin le système (Ni-Cr-Al-Y) / (ZrO₂-Y₂O₃) par projection plasma à double torches[27].

Dans la seconde étape (1990-1991), le but était de réaliser des pièces de tailles plus grande et forme plus complexes par rapport à celles réalisées dans la première étape.

Pendant les années 90, non seulement le champ d'applications des FGM s'est développé pour les matériaux de structure fonctionnant à haute température, mais s'est aussi élargi à d'autres applications : biomécanique, technologie de capteur, optique, [27]

Le concept des matériaux à gradient de propriétés est de l'intérêt non seulement dans la conception des matériaux réfractaires performants pour des utilisations pour les futures navettes spatiales mais également dans le développement de divers matériaux fonctionnels, tels que les matériaux optiques et électroniques. A cet effet, un deuxième projet a été lancé pour la recherche et développement des matériaux FGM en tant que matériaux fonctionnels (Recherche sur les matériaux de conversion d'énergie avec la structure à gradient de propriétés). Ce programme vise à appliquer la technologie des FGM dans le but d'améliorer l'efficacité de la conservation de l'énergie comme l'énergie solaire, nucléaire, photovoltaïque, thermoélectrique.

Les progrès de la recherche sur les matériaux FGM au Japon sont résumés dans le tableau I.2 : [28]

Tableau I.2 : Progrès de la recherche sur les matériaux FGM au Japon.

Année	Progrès des recherches des FGM
1984	Conception initial par Dr Niino et d'autres scientifiques dans la région de Sendai, (Japon)
1986	Etude de faisabilité sur la technologie de base pour le développement des FGM sur la relaxation des contraintes thermiques sous l'auspice de la science et de l'agence de technologie (STA).
1987 - 1989	Recherche nationale de projet sur la technologie de base pour le développement des FGM sur la relaxation des contraintes thermique. FGM partie 1 – phase (1).
1988	Fonctionnellement gradient matériaux forum (FGMF) 1 ^{er} Colloque sur FGM organisé par FGMF.
1989	Conférence d'Allemagne – Japon (FGM) a Köln, (Allemagne).
1990	1 ^{er} Colloque international sur FGM à Sendai, (Japon). Comité consultatif international de FGM (IACFGM).
1990 - 1991	FGM partie 1 – phase (2)
1992	Etude de faisabilité sur la recherche et développement de FGM en tant que matériaux fonctionnels sous l'auspice du STA 2 ^{ème} Colloque international sur FGM et atelier international Japon - Allemagne – USA à San Francisco, (USA)
1993	Projet de recherche national sur les matériaux de conversion d'énergie avec une structure FGM. FGM partie II – phase (1).
1994	3 ^{ème} Colloque international sur FGM à Lausanne, (Suisse).
1995	Atelier : Japon – Russie – Ukraine sur des matériaux de conversion d'énergie (ENECOM – 95), (Sendai).
1996	4 ^{ème} colloque international sur FGM dans la ville de la science de Tsukuba, (Japon).

I.6. Propriétés effectives des FGM

Les matériaux à gradient de propriétés sont généralement fabriqués par deux phases matérielles avec des propriétés différentes. Une description détaillée des microstructures graduées réelles n'est pas disponible, excepté peut-être pour l'information sur la distribution de fraction volumique. Puisque la fraction de volume de chaque phase varie graduellement dans la direction de la graduation, les propriétés effectives des FGM changent le long de cette direction.

Pour les modèles FGM nous avons deux approches :

- Une variation par morceaux de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumée et le FGM est pris pour être posé avec la même fraction volumique dans

chaque région, c'est-à-dire une couche quasi-homogène de céramique-métal (figure I.8-a).

- Une variation continue de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumée (figure I.9-b), et la fraction volumique du métal peut être représentée comme une fonction de coordonnée suivant l'épaisseur (z).[28]

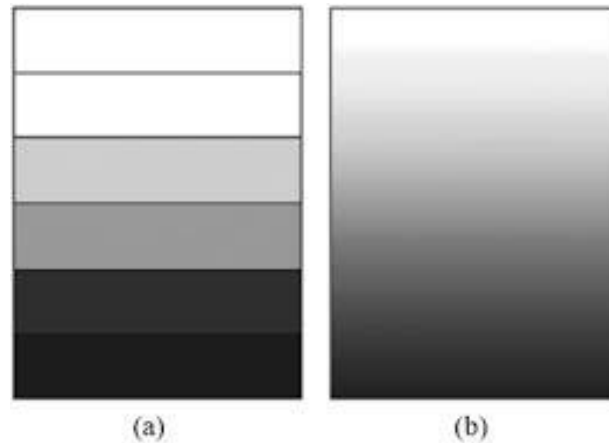


Figure I.9 : Représentation schématisée d'une couche d'un matériau FGM.[28]

La variation continue de propriétés trouve son application lorsque, par exemple, la face supérieure est exposée à une haute température alors que la face inférieure est exposée à une basse température. Dans ce cas, la face supérieure est à 100% céramique et la face inférieure est à 100% métal, avec une transition graduelle entre les deux.

La majorité des chercheurs emploient la fonction de loi de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume. Donc, on considère dans notre travail des plaques FGM avec des variations de la fraction de volume qui suit des fonctions de loi de puissance. [28]

I.7. Méthodes d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés

L'utilité des composites à gradient de propriétés avec une structure à gradient a été identifiée dans les articles théoriques par Bever [29]. Leur travail, cependant, a un impact minimal, en raison d'un manque de méthodes de fabrication appropriées pour les FGM à l'époque. Il a fallu encore 15 ans pour que des études approfondies sur les processus de production de matériaux de gradient soient menées dans le cadre d'un programme national de recherche sur les FGM au Japon. Depuis lors, une partie de la recherche sur FGM a été consacrée au traitement de ces matériaux et une grande variété de méthodes de production a

été développée [30]. L'établissement de la structure dans l'espace non homogène de 'gradation' et la transformation de cette structure en un matériau de bloc de 'consolidation' séparent normalement la phase de fabrication d'une FGM. Les processus constitutifs dépendent du revêtement de la structure graduée avec des matériaux précurseurs ou des poudres, étape par étape. Les pages suivants montrent les procédés les plus populaires pour produire des matériaux FGM aujourd'hui : coulée de barbotine séquentielle (coulée par glissement), coulée de bande (coulée par bande), projection thermique (plasma), dépôt chimique et physique de vapeur (CVD et PVD), et frittage laser différentiel.

I 7.1. Coulage séquentiel en barbotine (Slip casting)

Morinaga a également réussi à fabriquer un Al_2O_3/W FGM en utilisant une méthode de coulée en barbotine. Il a obtenu un matériau de gradient avec une composition sans interruption changeante en contrôlant le taux d'arrangement de fines particules, qui dépend de la densité et de la taille du grain. La couche Al_2O_3 et la couche W ont été séparées lorsqu'une faible densité de barbotine (5% ou 10%) a été utilisée, confirmant des couches inclinées continues et transparents. Le dépôt de vapeur, l'implantation d'ions et la diffusion ont tous été utilisés pour fabriquer des matériaux de gradient dans le passé, mais cette méthode a piqué l'intérêt et peut permettre la production d'une série des FGM utilisant des densités minces dans la barbotine et des particules fines comme matière première avec des densités particulières variables.

L'addition d'une pression pendant la coulée en barbotine augmente le taux de dépôt du matériau et à permet de fabrication des pièces à plus grandes dimensions ; ceci a été trouvé dans une étude réalisée par Grazzini et Wilkinson[31]. Leurs recherches ont porté sur le traitement des composés monolithiques Al_2O_3 et Al_2O_3-Si avec des formulations de coulée de barbotine à base de boues émoussées dispersées et coagulées. Ils ont constaté que l'utilisation de boues émoussées coagulées produisait d'excellents résultats sans craquage après séchage. La pression a eu pour effet d'augmenter la densité, ce qui a entraîné une augmentation de l'intensité du feu. De plus, compte tenu de la variation significative de la taille des particules utilisées, des microstructures homogènes ont été obtenues dans la méthode composite.

Donc ce coulage s'effectué en deux étapes essentielles [32]:

- Formation du tesson ou (prise).
- Consolidation du tesson (raffermissement).

I.7.2. Coulage en bande (tape casting)

Le processus de coulage en bande connu sous la dénomination anglaise (Tape Casting) consiste à couler une barbotine de poudres fines en suspension aqueuse ou non-aqueuse (la majorité des travaux commerciaux utilisent le procédé non-aqueux) sur un support plan en couches minces et régulières. Selon les cas, c'est soit la lame (Doctor-Blade) qui est animée d'un mouvement de translation, soit le support qui se déplace sous la lame (figure I.10).

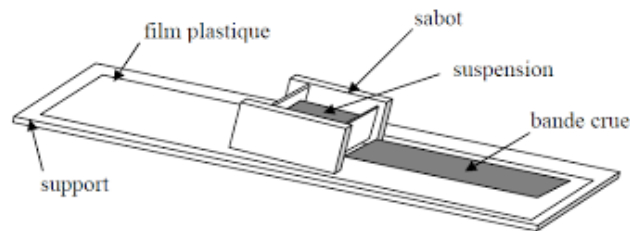


Figure I.10 : Principe de la méthode coulage en bande[33].

Les produits obtenus sont des feuillets avec des épaisseurs contrôlées (25-1000 μ m).

Après un raffermissement de la pâte, les feuillets sont démoulés et ensuite découpés. Cette technique est économique pour la production des substrats céramiques de type Al_2O_3 et surtout pour les condensateurs à base de $BaTiO_3$.

Le procédé de coulage en bande est largement utilisé pour réaliser des matériaux composites laminaires suivant deux méthodes : soit par réalisation directe de bandes multicouches grâce à un système de lames multiples, c'est le cas des tri-couches élaborés par Mistler[34], soit par empilage de couches élaborées séparément, dont la cohésion est ensuite assurée par une étape de thermocompression[35][28][22].

I.7.3. Compactage des couches (poudre d'empilement)

Dans cette méthode simple et bien établie un gradient est constitué par le dépôt des couches de poudre avec les compositions changeantes dans la matrice de compactage. Les inconvénients de cette méthode sont évidents : nombre limité de couches (jusqu'à dix en laboratoire, mais pas plus de deux ou trois en production possible), faible épaisseur des différentes couches (normalement pas moins d'un mm), taille limitée des composants (100cm²) en raison des limites de force de compactage, fabrication discontinue avec une faible productivité. Néanmoins cette méthode permet des études de laboratoire efficaces des systèmes à gradient de propriétés. [36]

I.7.4. Coulée par centrifugation

La technique consiste à verser une suspension colloïdale relativement diluée dans des flacons cylindriques, le tout est soumis à une centrifugation. La sédimentation s'opère et le liquide surnageant est retiré. Ce procédé est répété pour obtenir des multicouches (figure.I.11).

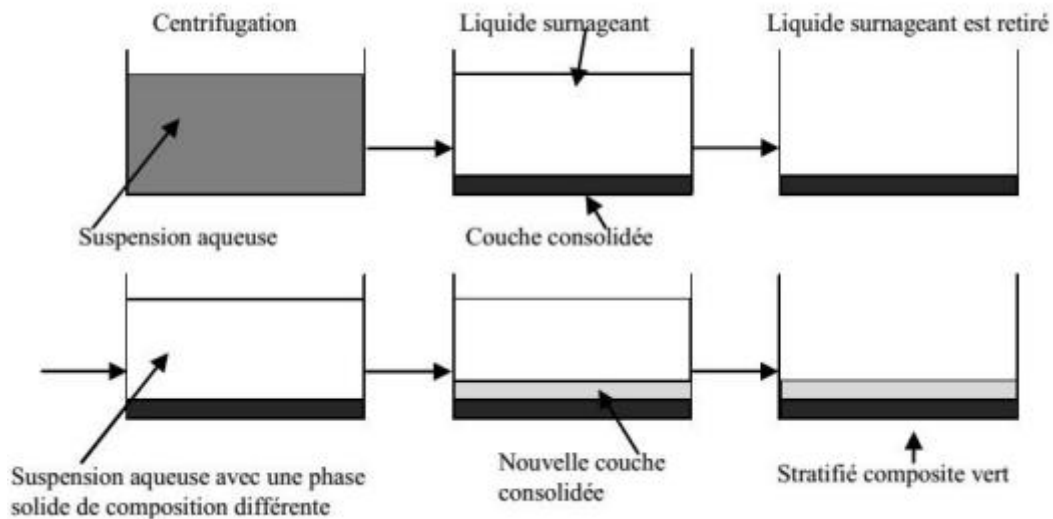


Figure I.11 : Schéma du procédé dépôt par centrifugation[37]

I.7.5. Projection plasma

L'injection de particules solides dans un jet de gaz à une température de 11000 °C et à une vitesse de 1000 à 1500 m/s est connue sous le nom de projection de plasma. Le dépôt est ainsi formé par l'empilement des lamelles solidifiées obtenues par l'impact des particules sur le substrat préalablement préparé. Cette méthode est particulièrement utile pour le dépôt de matériaux de fusion à haute température comme les alliages réfractaires et les céramiques. La résistance à l'usure et à la corrosion, ainsi que l'isolation thermique et électrique, sont toutes des propriétés des dépôts de pulvérisation de plasma.

La microstructure et la régulation des propriétés des particules fines pulvérisées par plasma sont étudiées en profondeur. La projection par plasma est un processus rapide et fournit la formation de film sur une large zone, mais a habituellement un inconvénient avec sa microstructure approximative. Fukumoto a employé les poudres mécaniquement alliées des matériaux thermoélectriques, et a réussi à bien contrôler la teneur dépôt dans le SiC pour former un matériau homogène. Sa configuration de pulvérisation est schématiquement montrée sur la figure I.12.[36]

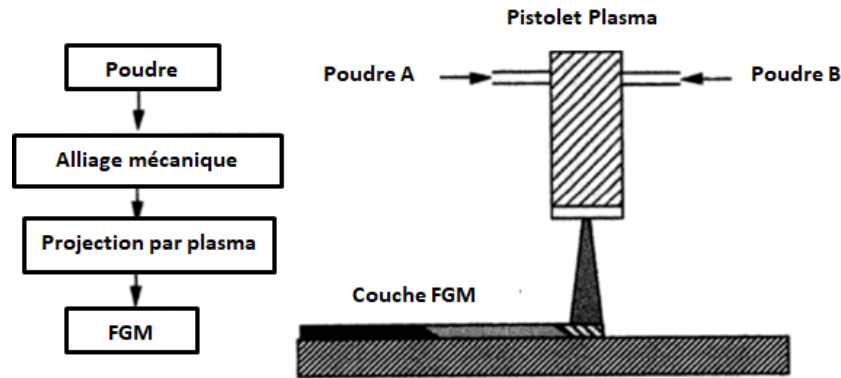


Figure I.12 : Illustration conceptuelle d'une méthode de projection par plasma pour former un matériau thermoélectrique gradué. (La composition est graduée dans la direction plane)
[36]

I.7.6. Dépôt physique en phase vapeur (PVD)

Pour la fabrication de revêtements de barrière thermique, le dépôt physique de vapeur est une technologie cruciale (prometteuse). Les surfaces lisses sont l'un des avantages des revêtements PVD qui sont traités, et il n'est pas nécessaire de fermer les trous de refroidissement à la fin du processus. Le plus grand avantage, cependant, est leur excellente sensibilité aux chocs thermiques, ainsi que leur durée de vie significativement plus longue. L'équipement utilisé pour déposer les revêtements d'isolation thermique par l'intermédiaire de PVD, se compose de plusieurs récipients pour le changement, le préchauffage, et le dépôt plus un dispositif de rotation et la manipulation des échantillons...etc. [36]

Une autre façon de faire une structure de gradient est d'utiliser une combinaison chimiquement réglée d'aluminium, d'alumine et de zircone, qui peut être commodément faite en pulvérisant à partir de plusieurs sources avec un ou plusieurs bras électroniques. En ajustant les paramètres de faisceau d'électrons, différents taux de dépôt peuvent être obtenus pour chaque source. Le FGM est obtenu lorsque les taux d'évaporation de deux éléments, tels que l'alumine et la zircone, sont modifiés sans interférence, ce qui donne un gradient de composition donné.[36].

I.7.7. Dépôt chimique en phase vapeur (CVD)

Dans la technique de dépôt chimique en phase vapeur (Chemical Vapor Deposition), un dépôt est formé sur un substrat en soumettant la source des gaz (par exemple, des hydrures, bromures ou chlorures) qui occupent la chambre de réaction, à différents types d'énergie

comme la chaleur, la lumière et le plasma. La pulvérisation thermique n'est pas utilisée pour les instruments à barrière thermique qui sont plus sensibles à l'atmosphère oxydante, comme les pales mobiles dans les turbines aéronautiques ou terrestres ; toutefois, un mécanisme différent est utilisé dans le cas du ZrO_2 . Le développement d'un revêtement gradué de carbure de silicium SiC sur graphite, avec une transition continue du SiC au C, est un exemple typique d'application de FGM par CVD.

A des températures de dépôt allant de 1400°C à 1500°C et à des pressions allant de 1,3 à 6,5 KPa, on utilise des formulations qui régissent la source des mélanges de gaz (CH_4 -SiC₁₄-H₂)[36]

I.7.8. Frittage et infiltration

Le frittage, en revanche, est la méthode de fabrication de pièces en chauffant une poudre sans la faire fondre. Les grains sont soudés ensemble sous l'influence du feu, ce qui assure la cohésion de la pièce. Cette méthode se compose de deux phases qui peuvent être utilisées pour faire un composite de gradient de travail de deux matériaux qui fondent à des températures très différentes. La première étape consiste à créer une matrice frittée de la substance avec un gradient de porosité à un point de fusion élevé. La deuxième étape consiste à remplir ces porosités de matière la contrainte thermique. Cette méthode peut être utilisée pour une variété de matériaux chimiquement inertes avec des points de fusion très disparates fondue provenant du processus ou le résultat est excellent pour la diminution de d'infiltration.

I.7.9. Frittage laser différentiel

Le rayonnement thermique du laser permet la modulation de la température et le chauffage de la concentration du point. Le frittage différentiel le long du composant est causé par des différences dans la résistance de l'irradiation à différents points de la substance, résultant en des microstructures différentes en fonction de l'emplacement de l'étape irradiée. Yuki et al ont utilisé cette technique pour élaborer un FGM de PSZ/Mo. La figure I.13 montre schématiquement la disposition du procédé utilisé par ces auteurs.

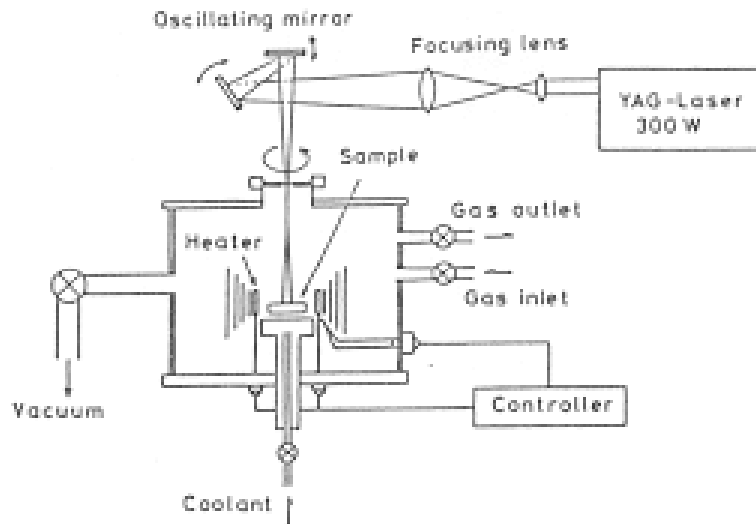


Figure I.13 : Disposition du procédé frittage laser différentiel [36]

I.7.10. Dépôt par électrophorèse

L'électrophorèse par dépôt (EPD), une méthode relativement rapide et peu coûteuse capable de produire des matériaux de gradient avec des propriétés en constante évolution et une géométrie complexe, elle a été appliquée aux différentes techniques de production de FGM. EPD se compose de deux processus, c'est-à-dire le mouvement des particules chargées en suspension dans un champ électrique entre deux électrodes (électrophorèse) et le dépôt de particules sur l'un des électrodes[36]. En déposant une suspension en poudre sur laquelle une seconde suspension est appliquée en continu pendant le processus, EPD permet de concevoir des propriétés de matériaux de gradient sous la forme d'une couche binaire. Le dépôt d'une poudre comprimée nécessite une agglomération pour obtenir des composants de matériaux totalement denses.

Depuis lors, de nombreuses applications EPD pour la fabrication de céramiques ont été produites, y compris l'application de matériaux à gradient continu tels que la céramique-céramique ZrO_2/Al_2O_3 et la céramique-métal, WC/Co , car la composition des couches de dépôt est déterminée par la composition de la suspension au moment du dépôt.

I.8. Domaines d'applications des matériaux FGM

Dès la création des matériaux FGM, ils ont suscité un intérêt particulier grâce à leurs caractéristiques spécifiques telles que la résistance, la rigidité, la conductivité et le poids léger...etc, qui les ont favorisées dans presque tous les domaines d'activité humaine. Les

matériaux à gradient fonctionnel sont également idéaux pour réduire le désaccord entre les propriétés thermomécaniques de la liaison métal-céramique qui aide à prévenir le délaminage. Les demandes futures pour des matériaux fonctionnalisés sont dans de telles applications, où des propriétés mécaniques, thermiques et chimiques importantes sont requises, et qui doivent être capables de supporter des environnements de travail sévères. L'utilisation de matériaux fonctionnels est maintenant considérée comme l'un des matériaux les plus importants, efficaces et efficients pour promouvoir le développement durable dans les industries.

I.8.1 l'industrie aérospatiale

L'application initiale où des matériaux fonctionnellement gradués ont été développés était pour les corps d'avions spatiaux. L'application de ce nouveau matériau s'est accrue au fil des ans dans l'industrie aérospatiale. La plupart des équipements et structures aérospatiaux sont désormais constitués de matériaux à gradation fonctionnelle. Ceux-ci incluent les composants du moteur-fusée, la structure en treillis de l'engin spatial, les panneaux d'échange de chaleur et certaines structures, telles que les réflecteurs, les panneaux solaires, le boîtier de la caméra, les roues de turbine, les revêtements des pales de turbine, les capuchons de nez, le bord d'attaque missiles et navettes spatiales. Des matériaux fonctionnellement classés sont également utilisés pour les murs structurels qui combinent des propriétés d'isolation thermique et acoustique.

I.8.2. L'industrie automobile

L'utilisation de matériaux fonctionnellement gradués dans l'industrie automobile est encore limitée à l'heure actuelle, en raison du coût élevé de production des matériaux fonctionnellement gradués. Cependant, le matériau est utilisé dans des parties très importantes de l'automobile, où le coût élevé actuel justifie son utilisation. La présente demande comprend les chemises de cylindre de moteur pour les pistons de moteur diesel, pour les ressorts à lames, pour les bougies d'allumage, les chambres de combustion, les arbres de transmission, les amortisseurs, les volants d'inertie, certaines pièces de carrosserie, les vitres et freins des voitures de course. Des matériaux à gradation fonctionnelle sont également utilisés dans les revêtements de carrosserie améliorés pour les voitures, et cela inclut les revêtements à gradation avec des particules, telles que le dioxyde/mica.

I.8.3. Biomédical

Le corps humain est composé d'un certain nombre de matériaux fonctionnellement classés, qui comprennent les os et les dents. Ce sont les parties du corps les plus remplacées, en raison de l'endommagement de ces parties ou du processus de vieillissement naturel. Les matériaux d'ingénierie biocompatibles sont utilisés pour leur remplacement. Les parts naturels que ces matériaux remplacent les matériaux classés fonctionnellement dans la nature. C'est pourquoi la majorité des matériaux fonctionnellement gradués utilisés dans l'industrie biomédicale sont utilisés pour les implants. Les matériaux à gradient de porosité fonctionnellement gradués sont les plus couramment utilisés dans cette industrie, car leurs propriétés sont très proches de celles des pièces qu'ils ont l'intention de remplacer. Exemple d'utilisation du gradient de porosité FGM dans le matériel de l'industrie biomédicale : dans les implants dentaires en titane poreux à gradient contribuent également à améliorer les propriétés d'ostéo-intégration de l'implant[18] l'hydroxyapatite poreuse graduée (HA) imite la structure bimodale de l'os humain (cortical et spongieux) qui aide à favoriser la croissance de nouveaux tissus, et aussi avec les propriétés mécaniques désirées[20]-[22]

I.8.4. La défense

La capacité du FGM à offrir des propriétés de résistance à la pénétration en inhibant la propagation des fissures est une propriété attrayante qui rend le matériau privilégié dans l'industrie de la défense. Les matériaux à gradation fonctionnelle sont utilisés dans l'industrie de la défense dans des applications telles que les gilets pare-balles, l'épée japonaise traditionnelle et les plaques de blindage. Un autre domaine clé d'application des matériaux à gradation fonctionnelle est la carrosserie des véhicules pare-balles.

I.8.5. Energie

Les industries de l'énergie ont constamment besoin de différents types de matériaux fonctionnellement gradués, afin d'améliorer l'efficacité de certains de leurs équipements. Certaines des applications des matériaux fonctionnellement gradués dans l'industrie de l'énergie comprennent la paroi interne des réacteurs nucléaires, le convertisseur thermoélectrique pour la conversion d'énergie, le panneau solaire, les cellules solaires, les tubes et les récipients sous pression, l'électrode graduée pour la production de combustible à oxyde solide, les matériaux piézoélectriques fonctionnellement gradués pour le transducteur à

ultrasons, le diélectrique, la pile à combustible, les revêtements des aubes de turbine et les revêtements de barrière thermique.

I.8.6. Marin

Les matériaux à gradient fonctionnel trouvent également leur application dans l'industrie maritime. L'application de matériaux fonctionnellement classés dans l'industrie marine et sous-marine comprend les arbres d'hélice, les cylindres de plongée, les dômes de sonar, le système de tuyauterie composite et la coque à pression cylindrique.

I.8.7. Génie civil

Grâce à la gradation mécanique des éléments en béton, la structure interne des éléments de structure peut être adaptée aux critères de base de la structure et de l'efficacité thermique. Cet alignement est rendu possible en changeant les propriétés du matériau au fil du temps, telles que la porosité, la pression et la rigidité. La modification progressive des propriétés du béton dans toutes les dimensions spatiales est possible par l'ajustement progressif des composants du béton. Minimiser la porosité améliore les caractéristiques structurelles du composant, tandis que la maximisation de la porosité optimise ses propriétés d'isolation thermique et son propre poids [20]

I.8.8. D'autre application

Téléphone cellulaire est l'un des moyens d'outils de communication pratique. Il devient de plus mince et plus petit. FGM technologie est applicable dans ce domaine aussi. Pour la minimisation de la taille et efficace de transmission, une permittivité-technologie de classification peut être appliquée lors de la production des substrats. De même, dans d'autres domaines tels que le champ de l'électronique et domaine de la chimie, FGM sont également applicables. Les fibres optiques entièrement faite de polymères fluorés ont été développés. En outre, de nouvelles recherches développer de nouveaux matériaux avec de nouvelles fonctions à l'aide de nanotechnologie de classification niveau.

I.9. Avantages et inconvénients des FGM

Les matériaux fonctionnellement gradués présentent des avantages et des inconvénients on peut citer par exemple :

I.9.1. Avantages

Outre l'atteinte de son objectif principal, qui est d'avoir les diverses propriétés nécessaires à divers points et surfaces du produit potentiel, ce qui pourrait être accompli avec un simple revêtement, le projet a également un objectif secondaire. Suresh et une foule d'autres[38] soulignent une variété d'avantages supplémentaires des FGM. Ils énumèrent certains avantages qui en résultent principalement de la non-existence d'une interface forte, tels que :

- Diminuer les contraintes thermiques causées par les différences de coefficients de dilation thermique des matériaux utilisés ;
- Absence d'une interface nette devrait conduire à un contrôle d'ensemble mieux des contraintes ;
- Meilleure cohésion entre différents matériaux, par exemple un métal et une céramique ;
- Extension de la région fonctionnelle avant d'atteindre la valeur limite de la déformation plastique ;
- Suppression de délaminages ;
- Augmentation de la ténacité à la rupture ;
- Elimination des singularités des contraintes à divers endroits, tels que les surfaces libres, des coins, des racines des fissures, etc.

I.9.2. Inconvénients

L'insuffisance de diverses propriétés, comme la température de fusion, les différentes affinités pour divers autres matériaux, la taille des particules, la morphologie, etc., est le principal obstacle à une mise en œuvre plus large des FGM. Un exemple courant est un mélange d'un métal avec température de fusion (T_1) et une céramique avec une température de fusion (T_2). Dans la plupart des cas, un tel couple est habituellement ($T_1 \ll T_2$). Puis, si la température de fabrication est d'environ (T_1). Les céramiques n'ont pas encore été fondues, mais la structure finale est composée de fragments de céramique non lavés dans une matrice métallique. Dans certains cas, un tel système présente une porosité élevée et une faible adhérence entre les différents composants, ce qui limite son utilisation. Cependant, l'inclusion de particules très dures (carbures) dans une matrice solide peut être idéale pour des applications spécifiques. Travailler autour (T_2), d'autre part, entraînerait presque inévitablement une oxydation accélérée l'évaporation de nombreux métaux. Formation d'étapes défavorables, et ainsi de suite. Les matériaux doivent être fabriqués dans une

atmosphère protectrice ou à une basse pression et ces deux technologies sont très coûteuses[36].

I.10. Différence entre FGM et matériaux composites traditionnels

Les laboratoires de recherche ont poursuivi leurs objectifs techniques pour répondre à la demande d'efficacité et de qualité résultant des progrès technologiques et de la concurrence économique. Les matériaux purs ne peuvent pas produire ces résultats nécessaires en raison de leurs propriétés, qui ne sont pas suffisamment flexibles pour certaines applications. Pour résoudre ce problème, un alliage est créé en combinant un métal avec d'autres métaux ou des matériaux non métalliques à l'état de fusion. Il en résulte des propriétés qui diffèrent celles des matériaux d'origine. L'utilisation de l'alliage est limitée par l'équilibre thermodynamique [39] car il y a une limite à laquelle un matériau peut être dissous dans une solution d'un autre. Par conséquent, l'utilisation de cette méthode pour combiner deux matériaux avec des températures de fusion différentes est prohibitive. La métallurgie des poudres (powdered metallurgy PM) est un moyen de fabriquer un composant qui ne peut pas être fabriqué avec un alliage traditionnel, dans lequel l'alliage est fabriqué sous forme de poudre et fritté. Malgré les excellentes caractéristiques de la métallurgie des poudres, il existe quelques limitations telles que des formes complexes qui ne peuvent être réalisées à l'aide des PM ; Les pièces sont poreuses et ont une faible résistance [39] alors que certaines applications (telles que les applications filtrantes et non structurelles) bénéficient de ces inconvénients, d'autres en souffrent. Une autre façon de faire des matériaux avec plusieurs propriétés est de les combiner à l'état solide, résultant en des matériaux composites.

Les matériaux composites sont constitués de deux ou trois matériaux distincts qui, une fois combinés, ont un rendement global plus élevé que les composants individuels. Ces tissus sont constitués d'une matrice et d'un isolant, qui est principalement sous forme de fibres, En conséquence, les propriétés mécaniques de la substance obtenue, telles que la légèreté, la rigidité, la résistance à l'usure, et bien d'autres, peuvent être améliorées. Les composites ont des interfaces, ou des surfaces d'interaction entre la matrice et le renfort, car ce sont des matériaux hétérogènes. Les deux éléments se conforment parfaitement l'un à l'autre tant que le composite est intact, de sorte que l'interface ne joue aucun rôle. Cependant, l'interface joue un rôle important lorsque le composite subit des dégradations mécaniques et commence à se fissurer suite à une surcharge, à la fatigue..., etc. [40] En effet, les interfaces ont la propriété de dévier les fissures : comme une fracture se propage à travers la matrice et rencontre

l'interface (figure I.14a), elle ne croise généralement pas cette dernière, n'entraînant aucun dommage aux armatures. La fissure inverse plutôt sa trajectoire et suit l'interface (figure I.14b). En d'autres termes, plutôt qu'une rupture soudaine, nous voyons un détachement constant entre les renforts et la matrice, que nous appelons la décohésion. En raison du déplacement soudain de la structure, les matériaux composites s'enroulent dans des conditions difficiles en raison de la phase de délamination (séparation des fibres de la matrice). Par exemple, dans une application à haute température impliquant deux matériaux avec des coefficients de dilatation thermique différents, cela peut se produire.

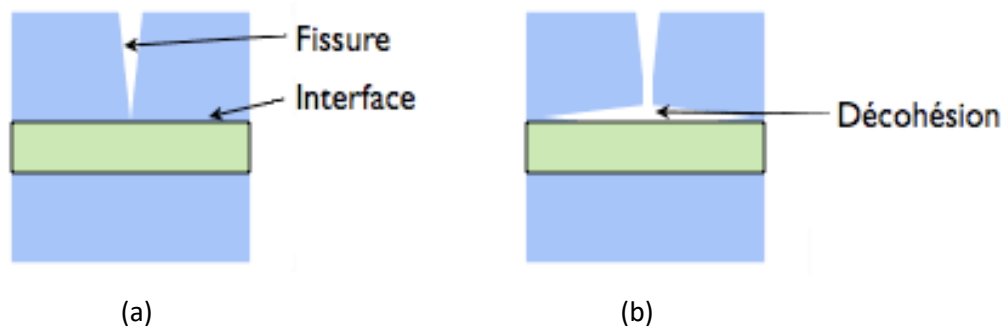
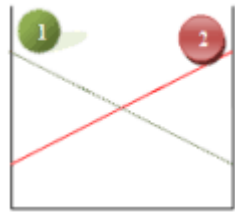
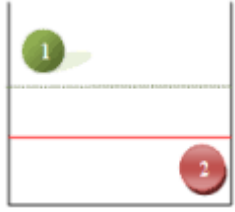
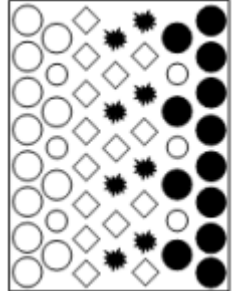
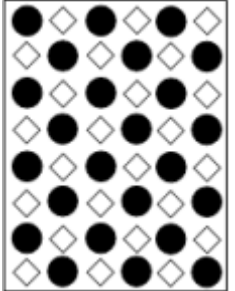


Figure I.14 : Le rôle de l'interface sur la ténacité des composites

Lorsqu'une fissure atteint l'interface (a), elle est déviée (b). Plutôt qu'une rupture soudaine, les constituants décodent régulièrement.

Les FGM sont des matériaux multicouches qui comprennent une variété de matériaux comme la céramique et les métaux. Ce sont donc des composites aux propriétés macroscopiques hétérogènes. Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure du matériau distingue les FGM des matériaux composites conventionnels comme illustré sur le tableau (I.3) [25]. En conséquence, les propriétés matérielles des FGM peuvent être déterminées par un gradient. Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente[22].

Tableau I.3 : Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels[25]

Propriétés	<p>1 Résistance mécanique</p> <p>2 Conductivité thermique</p>		
Structure	<p>Eléments constitutifs :</p> <p>Céramique ○</p> <p>Métal ●</p> <p>Microporosité ○*</p> <p>Fibre ◇*</p>		
Matériaux	Exemple	FGM	NON-FGM

La figure I.15 illustre le modèle le plus élémentaire pour démontrer les distinctions entre les matériaux de gradient (FGM) et les matériaux plus traditionnels. La substance associée (figure I.15b) a une limite sur l'interface entre deux composants, tandis que la matière plane (figure I.5a) a une caractéristique plane. Les FGM ont des propriétés exceptionnelles qui les distinguent des matériaux plats composites et liés. En conséquence, les FGM attirent l'intérêt en termes d'applications industrielles car ils ont la double propriété de combiner deux matières premières et de classer la livraison des composants sans interruption. Une FGM, par exemple, est constituée de métal et de céramique et présente une conductivité thermique et une force métallique du côté métallique et une résistivité à haute température du côté céramique.

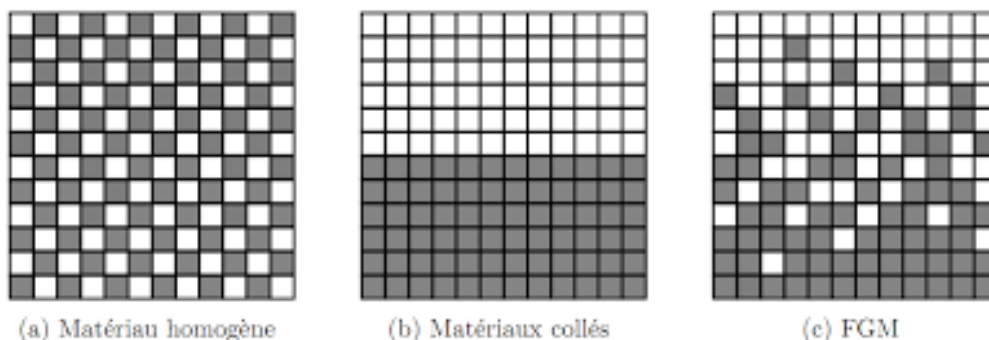


Figure I.15 : La distribution composante des matériaux.

I.11. Conclusion

Les matériaux à gradient de propriétés ou FGM (Functionally Graded Material) possèdent des compositions et microstructures qui évoluent en continue dans l'épaisseur, leur conférant des propriétés remarquables. Cette nouvelle famille de matériaux commence à sortir du domaine académique pour entrer dans le domaine industriel pour des applications à haute valeur ajoutée.

Les FGM (Functionally Graded Materials) sont une nouvelle classe de matériaux composites qui présentent l'avantage de présenter une variation continue de leurs propriétés mécaniques. Plusieurs procédés de fabrication permettent leur production (fabrication additive, fonderie, ...). A l'heure actuelle, les FGM sont encore peu utilisés industriellement et sont réservés à des applications à haute valeur ajoutée.

Chapitre II :
Revue sur les différentes
théories des plaques

II.1. Introduction

Dans la plupart des cas, les investigateurs considèrent un FGM comme étant un matériau composé particulier pour lequel sa fraction de volume varie sans interruption suivant l'épaisseur.

Les matériaux FGM sont des matériaux composites classés selon leur microstructure variable dans l'espace ; conçus pour optimiser l'exécution des éléments structuraux en attribuant des propriétés correspondantes. Les distributions de propriétés se trouvent dans une variété de produits courants qui doivent avoir des fonctions multiples (c'est-à-dire multifonctionnelles), telles que la liaison entre les particules ; doivent être suffisamment durs à l'intérieur pour résister à la fracture ; mais doivent également être suffisamment résistants à l'extérieur pour empêcher l'usure.

On utilise souvent la théorie des stratifiés pour les applications des plaques FGM. De même la prise en compte de l'effet de cisaillement exige une bonne description des champs de contrainte et de déformation. Là encore une approche 3D peut fournir des informations dans certains cas (bord libre droit, plaque simplement appuyée...) mais il est préférable d'envisager des démarches bidimensionnelles (2D) de type plaque. Dans la suite ce sont ces approches 2D qui seront mentionnées. [41]

II.2. Définition d'une plaque

Une plaque est une entité ayant une surface de référence lisse (plan x, y) et une épaisseur minimale notée h par rapport aux autres dimensions (longueur et largeur). Les plaques épaisses et minces reçoivent l'adjectif mince en fonction de la grandeur de h par rapport aux autres mesures. Cependant, le terme fait référence non seulement à des caractéristiques géométriques, mais également à une fonction spécifique de la déformation dite de cisaillement transversal. L'épaisseur h variant dans le sens inverse de l'effet CT, cet effet est d'autant plus important que la structure est plus petite. La plaque peut être constituée d'une seule substance homogène ou d'un empilement de matériaux orthotropes.

II.3. Différents types des plaques

D'après la qualité des matériaux qui composent les plaques et de la géométrie de leurs sections transversales on peut les diviser en trois groupes principaux :

- **Les plaques anisotropes** : Leurs propriétés élastiques varient dans tous les directions. Il suffit de neuf paramètres élastiques pour les construire. Ils sont également utilisés dans l'industrie de l'aviation maritime et sont faits de matériaux composites ou autres.
- **Les plaques isotropes** : Elles sont construites en matériaux isotropes (acier, béton, ...etc.) et ont une section homogène. Deux paramètres élastiques les définissent (E et ν sont respectivement le module d'élasticité et le coefficient de Poisson).
- **Les plaques orthotropes** : Dans deux directions perpendiculaires, leurs propriétés élastiques varient. L'orthotropie peut être normale (dans le cas du bois) ou technologique (dans le cas du métal). Le comportement de ces dalles est défini par quatre paramètres élastiques et on les retrouve dans les constructions navales, aéronavales, de réservoirs de l'industrie chimique, des bâtiments et d'ouvrage d'art [42]

II.4. Différents types de comportements des plaques

On peut diviser l'énergie de déformation d'une plaque en trois catégories : flexion, membrane et cisaillement. A mesure que l'épaisseur de la plaque est réduite à zéro, l'énergie de cisaillement disparaît et la plaque se déforme en l'un des trois groupes asymptotiques, en fonction de la géométrie, des conditions limites et des forces appliquées :

- La flexion dominante ;
- La membrane dominante ;
- Le cas mixte.

Dans les deux premières catégories, c'est la partie correspondante de l'énergie de déformation qui est dominante, tandis que dans les cas mixtes aucune partie n'est négligeable par rapport à l'autre. En considérant la même force, matériau et conditions aux limites, une plaque peut exhiber des comportements asymptotiques complètement différents en fonction de la nature géométrique de la surface moyenne.[43][44].

II.5. Domaine d'utilisation des plaques

Les plaques ont une utilisation très répandue dans tous les domaines, en particulier dans le domaine du génie civil où, on les utilise dans les constructions simple (habitation) où les ouvrages d'art et elle existe sous formes différentes, y compris les circulaires et rectangulaires et d'autre formes selon la qualité de l'ouvrage. Comme le montrent les figures ci-dessous :



Figure II.1 : Ouvrage d'art (plaque circulaire)



Figure II.2 : Ouvrage d'art (pont)



Figure II.3 : Ouvrage d'art (pont triller)

II.6. Les hypothèses fondamentales de la théorie des poutres et plaques

II.6.1. Principes de Saint Venant

Le principe de saint venant s'énonce : La contrainte en un point éloigné des points d'application d'un système de forces ne dépend que de la résultante générale et du moment résultant de ce système de force, même si la répartition des contraintes n'est pas la même, la solution trouvée sera valable, si on place suffisamment loin le point d'application des charges.[45]

II.6.2. Principe de Navier Bernoulli généralisé

L'hypothèse de Navier Bernoulli consiste à supposer que les sections normales à la fibre moyenne restent planes pendant la déformation de la poutre. Cette hypothèse qui permet de calculer les contraintes normales dues au moment fléchissant, est bien vérifiée dans le cas de flexion pure où l'effort tranchant est nul.

Le principe de Navier Bernoulli est fondé sur les observations suivantes :

- Le gauchissement d'une section est toujours très petit vis-à-vis des dimensions de la section.
- La variation du gauchissement, lorsqu'on passe d'une section à une section infiniment voisine, est toujours très petite, vis-à-vis la distance de deux sections infiniment voisines.
- Le principe de Navier Bernoulli revient à négliger le cisaillement et le gauchissement des sections transversales dans l'étude de déplacement et de déformation d'un élément de poutre[45]

II.6.3. Le modèle classique de la plaque de Kirchhoff-Love

Cette théorie est basée sur les hypothèses de Kirchhoff 1950, dans lesquelles les déformations dues aux cisaillements traverses sont négligées et La normale à la surface moyenne de la plaque reste perpendiculaire et droite à celle-ci après déformation ce qui revient à négliger les effets de déformation en cisaillement transverse. Donc dans ce cas-là une distribution des déplacements suivant l'épaisseur est linéaire. [46]

Elle ne convient qu'aux plaques minces où la flèche générée par les déformations de cisaillement reste négligeable devant la flèche générée par la courbure de la plaque. Dans le

cas d'une plaque homogène isotrope, la part de cisaillement dans la flèche est indirectement reliée à l'élanement (L/h).[47],[48]

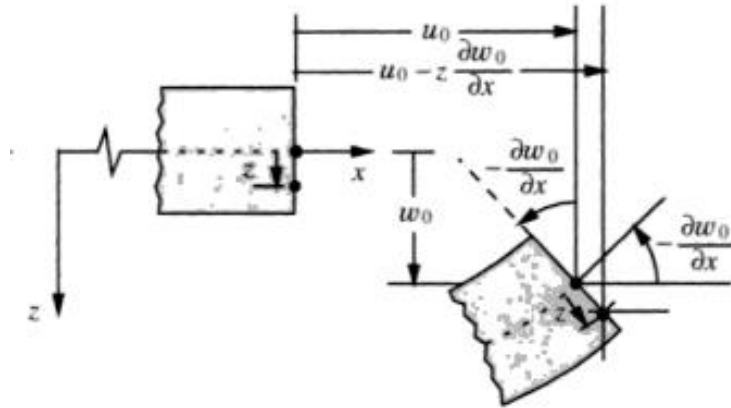


Figure II.4 : Géométries déformée et non déformée d'une plaque sous l'hypothèse de Love-Kirchhoff [49]

Le champ de déplacements de Love-Kirchhoff s'écrit alors :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (\text{II.1})$$

Avec :

u_0 et v_0 : Les déplacements de membrane dans les directions x et y , respectivement.

w_0 : la flèche de la plaque.

$\frac{\partial w_0}{\partial x}$ et $\frac{\partial w_0}{\partial y}$: Les rotations dues à la flexion (sans cisaillement).

Le plan principal de la plaque est le plan (o, x, y) et l'épaisseur est orienté selon l'axe $z \in \left[\frac{-h}{2}; \frac{h}{2} \right]$

Puisque ce modèle ne tient pas en compte l'effet de cisaillement transverse, il donne des résultats imprécis pour les plaques épaisses.

II.6.4. La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (First Order Shear Deformation Theory FSDT)

Cette théorie (également appelée théorie de Mindlin) est une extension des travaux de Timoshenko[47] et est considérée comme une amélioration de la théorie classique des plaques

minces (théorie de Kirchhoff). En tenant compte de l'effet de cisaillement transverse par l'introduction d'un facteur de correction de cisaillement. La conséquence de cette hypothèse est qu'une section droite reste droite mais non perpendiculaire à la surface moyenne à cause de l'effet du cisaillement transverse [50][51]

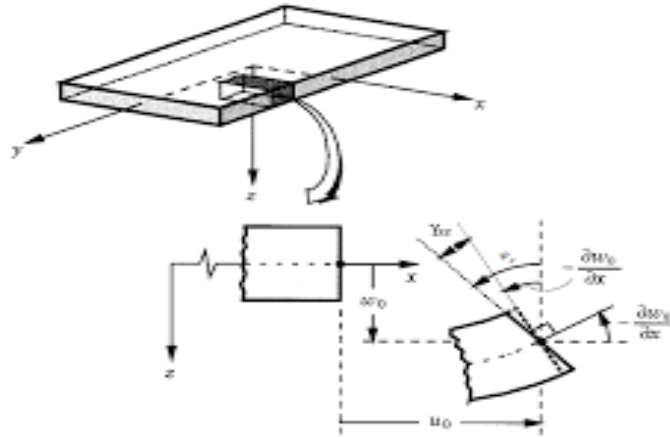


Figure II.5 : Géométries déformées et non déformées d'une plaque sous l'hypothèse de la théorie (FSDT)[49]

Le champ de déplacement doit être reformulé de la manière suivante :

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\varphi_x(x, y) \\ V(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\varphi_y(x, y) \\ W(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (\text{II.2})$$

Avec : φ_x et φ_y représentent les angles de rotation totale de la normale au plan moyen autour des axes x et y , respectivement, Dans lequel :

$$\varphi_x = \gamma_{xz}^0 + \frac{\partial w_0}{\partial x} \text{ et } \varphi_y = \gamma_{yz}^0 + \frac{\partial w_0}{\partial y}$$

Où γ_{xz}^0 et γ_{yz}^0 les déformations de cisaillement transverse mesurées sur le plan moyen.

II.6.5. La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (Higher Order Shear Deformation Theory HSDT)

Contrairement à la théorie CPT et la théorie FSDT avec les acceptations de la distribution linéaire du déplacement par l'épaisseur, la théorie d'ordre élevé est basée sur une distribution non linéaire des champs dans l'épaisseur. Par conséquent, on tient en compte des effets de la

déformation transversale de cisaillement et/ou de la déformation normale transversale. Ces modèles n'exigent pas des facteurs de correction de cisaillement[45]

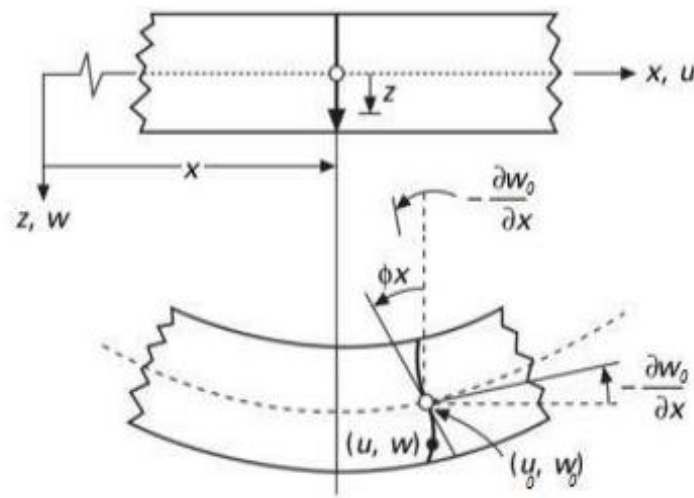


Figure II.6 : Schématisation des déformations des plaques par la théorie « HSDT ».

Généralement ces théories utilisent un développement en série de Taylor à travers l'épaisseur du champ de déplacement avec la forme suivante :

$$U(x, y, z) = u_0(x, y) + z\varphi_x(x, y) + z^2\varphi_x^2(x, y) + \dots + z^n\varphi_x^n(x, y) \quad (\text{II.3})$$

Où n détermine l'ordre utilisé dans le modèle. Dans la théorie de Kirchhoff-Love n=0. La théorie de Reissner-Mindlin est une théorie du premier ordre avec n=1 pour les déplacements dans le plan et n=0 pour le déplacement normal.

La plupart des théories d'ordre élevé (HSDT) sont basées sur les approches de Reissner et Mindlin. Et leur champ de déplacements s'écrit sous la forme suivante

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + f(z)\varphi_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + f(z)\varphi_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

Avec :

u_0, v_0 et w_0 sont les déplacements en membrane.

φ_x et φ_y les rotations autour des axes x et y.

$f(z)$ est une fonction de cisaillement transverse caractérisant les théories correspondantes.

Cependant, plusieurs fonctions de cisaillement ont été utilisées dans les modèles d'ordre supérieur :

- L'approche de Reissner exprimée par :

$$f(z) = \frac{5}{4} z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.5})$$

- L'approche d'Ambartsumyan donnée sous forme :

$$f(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \quad (\text{II.6})$$

- L'approche de Reddy, La fonction de cisaillement transverse est de la forme suivante :

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.7})$$

Avec : « h » est l'épaisseur de la plaque.

O. Polit et M. Touratier[52] proposent la forme "sinus" pour la fonction de cisaillement $f(z)$. Cette fonction est exprimée sous forme trigonométrique sinusoïdale. La fonction de cisaillement transverse s'écrit donc L'approche de Touratier avec :

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \quad (\text{II.8})$$

II.6.6. La théorie de déformation en cisaillement d'ordre zéro (Zeroth Order Shear Deformation Theory ZSDT)

Une nouvelle théorie de déformation de cisaillement est adoptée, cette théorie basée en supposant que la contrainte de cisaillement transversal varie de façon parabolique dans la profondeur de la poutre de telle façon qu'elle disparaît sur les surfaces de bas et de haut. La théorie d'ordre zéro tient en compte l'effet de cisaillement sans l'introduction de facteurs de correction de cisaillement en gardant un niveau minimum de complexité pour obtenir la solution[53]

Le champ de déplacement de la théorie ZSDT est donné par :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + \frac{1}{\lambda_x} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{z}{h} \right) - 2 \left(\frac{z}{h} \right)^3 \right] \mathcal{Q}_x \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + \frac{1}{\lambda_y} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{z}{h} \right) - 2 \left(\frac{z}{h} \right)^3 \right] \mathcal{Q}_y \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (\text{II.9})$$

Où :

Q_x et Q_y sont des résultantes des contraintes transversales de cisaillement.

λ_x et λ_y Sont des constantes qui peuvent être déterminés en considérant la définition des résultantes Q_x et Q_y .

II.6.7. Théories Zig-zag

La théorie de zig-zag du premier ordre a été développée la première fois par Di Sciuva [54], dans ce modèle, la superposition du champ de déplacement global d'une théorie du premier ordre (FSDT) et d'une fonction zig-zag, cette fonction de zig-zag donne une contribution des déplacements membranaires continue à travers l'épaisseur mais sa dérivée première est discontinue à l'interface (Les déformations transversales sont donc discontinues et la continuité des contraintes de cisaillement transverse aux interfaces est assurée).

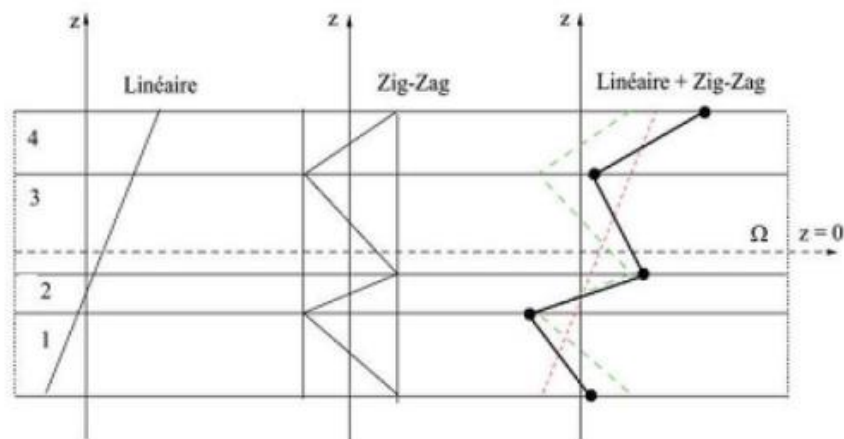


Figure II.7: Champ de déplacements des modèles zig-zag du premier ordre[55].

L'avantage principal du champ de déplacement des modèles zig-zag réside dans la bonne modélisation de la distorsion de la normale de la surface déformée, ainsi que dans la vérification des conditions de continuité, et ce sans augmenter pour autant le nombre et l'ordre des équations fondamentales de la théorie du premier ordre. Le recours à des coefficients de correction en se basant sur le concept de plusieurs auteurs a réalisé des améliorations significatives pour le modèle zig-zag[55]. Pour éviter l'introduction des coefficients de correction pour le cisaillement transverse. Plusieurs chercheurs ont réalisé des améliorations significatives pour le modèle zigzag. L'amélioration principale est l'introduction d'une distribution non linéaire des déplacements. On superpose le champ zig-zag (linéaire par morceau) à un champ de déplacement d'ordre élevé (souvent cubique) Les conditions de

compatibilité sont satisfaites sur les surfaces supérieures et inférieures des plaques pour réduire le nombre de paramètres[56].

II.6.8. La théorie raffinée de déformation des plaques (Refined Plate Theory «RPT »)

Dans le souci de réduire le nombre de variables utilisées dans les formulations existantes, Shimpi a développé un modèle raffiné pour les plaques isotropes (RPT). Les caractéristiques les plus intéressantes de cette méthode sont qu'elle ne nécessite pas de coefficient de correction en cisaillement et qu'elle présente beaucoup de similitudes avec la théorie classique des plaques quant aux équations du mouvement, les conditions aux limites et les expressions des moments. La présente théorie est variationnelle, elle n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description parabolique de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition des contraintes de cisaillement nulles sur les bords libres. Cette théorie propose le champ de déplacement suivant :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial y} \\ w(x, y, z) &= w_b(x, y) + w_s(x, y) \end{aligned} \quad (\text{II.10})$$

Avec :

u_0 et v_0 Sont les déplacements dans les directions x et y d'un point situé sur le plan médian de la plaque.

w_b et w_s Sont respectivement les composantes de flexion et de cisaillement du déplacement transversal et $f(z)$ est une fonction de cisaillement transverse.

II.7. Conclusion

En ce chapitre on a mentionné les différentes théories des plaques, la théorie classique, la théorie de cisaillement de premier ordre, la théorie d'ordre élevé, la théorie de zigzag, et la théorie raffinée de déformation des plaques.

D'après cette étude bibliographique des théories des plaques, on a conclu que la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé est la plus intéressante en termes de précision des résultats, mais elle reste caractérisée par la complexité des formules théorique.

On a mentionné juste les théories les plus utilisées, il y a des autres théories qui donne des résultats acceptables dans certain cas.

Chapitre III :
Etude du comportement en
flexion des plaques FGM

III.1. Introduction

Cette étude vise à établir une nouvelle théorie de la déformation de cisaillement pour analyser le comportement mécanique des plaques FGM. Cette théorie considère une distribution parabolique des contraintes de cisaillement et satisfait la condition que ces contraintes soient nulles en haut et en bas de la plaque. Le principe du travail virtuel est appliqué pour construire des équations d'équilibre, et des solutions exactes sont utilisées pour résoudre ces équilibres. L'exactitude et l'efficacité de la théorie proposée ont été démontrées par de multiples études de validation. Nous utilisons ensuite la théorie proposée pour étudier les effets des propriétés mécaniques sur le comportement en flexion des plaques FGM.

Dans ce chapitre, une nouvelle théorie raffinée d'ordre élevé est utilisée pour l'analyse de flexion des plaques FGM sous différentes conditions aux limites

III.2. Formulation du problème

III.2.1. Relations constitutives des plaques fonctionnellement graduées (métal/céramique)

Considérons une plaque en FGM avec la répartition des fractions volumiques des constituants suit une loi de mélange polynomiale P-FGM qui est donnée par la formule suivants : [57]

$$E(z) = (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + E_m \quad (\text{III.1})$$

On note que le nombre réel positif k ($0 \leq k < \infty$) est l'indice de puissance ou le degré d'homogénéité, et z est la distance depuis le plan médian de la plaque FGM. La plaque devient entièrement en céramique lorsque k est égal à zéro et entièrement métallique pour une valeur infinie du degré d'homogénéité ($k=\infty$).

III.2.2. Formulation théorique

III. 2.2.1. Hypothèses de base

Considérons une plaque d'épaisseur totale « h » et composée d'un matériau fonctionnellement gradué (figure III. 1). On suppose que le matériau est transversalement isotrope et la graduation est supposée être seulement à travers l'épaisseur :

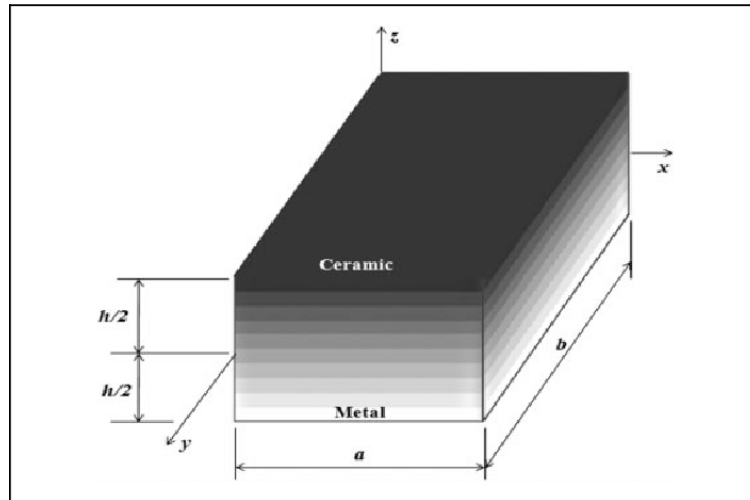


Figure III. 1 : Géométrie d'une plaque rectangulaire composée de FGM

- Le plan (xy) est considéré comme le plan médian non déformé de la plaque avec l'axe « z » positif vers le haut à partir du plan médian.
- Les déplacements sont faibles par rapport à l'épaisseur de la plaque et donc les déformations impliquées sont infinitésimales.
- Le déplacement transversal w comprend trois composantes de flexion w_b et de cisaillement w_s . Ces les composants sont des fonctions des coordonnées de x et y uniquement.

$$w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) \quad (\text{III.2})$$

- La contrainte normale transverse σ_z est négligeable devant les contraintes dans le plan σ_x et σ_y .
- Les déplacements U dans la direction x et V dans la direction y consistent en extension, flexion et cisaillement composants

$$U = u + u_b + u_s, \quad V = v + v_b + v_s \quad (\text{III.3})$$

- Les composantes de flexion u_b et v_b sont supposées similaires aux déplacements donnés par la théorie classique des plaques. Par conséquent, l'expression de u_b et v_b peut être donnée par :

$$u_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial x}, \quad v_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial y} \quad (\text{III.4})$$

- Les composantes de cisaillement u_s et v_s donnent lieu, conjointement avec w_s , aux variations paraboliques de contraintes de cisaillement γ_{xz} , γ_{yz} et donc de contraintes de cisaillement σ_{xz} , σ_{yz} à travers l'épaisseur de la plaque de telle sorte que les contraintes de cisaillement σ_{xz} , σ_{yz} soient nulles sur les faces supérieure et inférieure de la plaque. Par conséquent, l'expression de u_s et v_s peut être donnée par :

$$u_s = f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x}, \quad v_s = f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (\text{III.5})$$

III.2.2.2. Cinématique

Sur la base des hypothèses faites dans la section précédente, le champ de déplacement peut être obtenu en utilisant les équations. (III.2) - (III.5)

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ w(x, y, z) &= w_b(x, y) + w_s(x, y) \end{aligned} \quad (\text{III.6})$$

où u_0 et v_0 sont les déplacements du plan médian de la plaque dans les directions x et y , respectivement ; w_b et w_s sont respectivement les composantes de flexion et de cisaillement du déplacement transversal, tandis que $f(z)$ représente les fonctions de la forme ; cette théorie déterminant la distribution des déformations et des contraintes de cisaillement transverse le long épaisseur et est donnée par :

$$f(z) = z - z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{III.7})$$

Il convient de noter que contrairement à la théorie de la déformation par cisaillement du premier ordre, cette théorie ne nécessite pas de facteurs de correction de cisaillement. Les relations cinématiques peuvent être obtenues comme suit :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_x^0 + zk_x^b + f(z)k_x^s \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_y^0 + zk_y^b + f(z)k_y^s \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}^0 + zk_{xy}^b + f(z)k_{xy}^s \\ \gamma_{xz} &= g(z)\gamma_{xz}^s \end{aligned} \quad (\text{III.8a})$$

$$\gamma_{yz} = g(z) \gamma_{yz}^s$$

$$\varepsilon_z = 0 \quad (III.8b)$$

Où :

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad k_x^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}, \quad k_x^s = \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}$$

$$\varepsilon_y^0 = \frac{\partial v_0}{\partial y}, \quad k_y^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2}, \quad k_y^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}$$

$$\gamma_{xy}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}, \quad k_{xy}^b = -2 \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y}, \quad k_{xy}^s = -2 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \quad (III.9)$$

$$\gamma_{yz}^s = \frac{\partial w_s}{\partial y}, \quad \gamma_{xz}^s = \frac{\partial w_s}{\partial x}$$

$$f'(z) = \frac{df(z)}{dz}$$

$$g(z) = 1 - f'(z)$$

L'état de contrainte est donné par la loi de Hooke comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E(z)}{1-\nu^2} & \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2} & \frac{E(z)}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E(z)}{2(1+\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{E(z)}{2(1+\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (III.10a)$$

Avec :

$$Q_{11} = \frac{E(z)}{1-\nu^2} \quad Q_{22} = \frac{E(z)}{1-\nu^2} \quad Q_{55} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \quad (III.10b)$$

$$Q_{12} = \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2} \quad Q_{44} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \quad Q_{66} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)}$$

III.2.2.3 Équations gouvernantes

Les équations gouvernantes de l'équilibre peuvent être dérivées en utilisant le principe de déplacements. Le principe des travaux virtuels dans le cas présent donne

$$\int_{-h/2}^{h/2} \int_{\Omega} [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}] d\Omega dz - \int_{\Omega} q \delta w d\Omega = 0 \quad (\text{III.11})$$

Où Ω est la surface supérieure et « q » est la charge transversale appliquée. Substitution d'équations. (III.6) et (III.9) dans l'équation. (III.11) et s'intégrant dans l'épaisseur de la plaque, L'équation (III.5) peut être réécrite comme :

$$\int_{\Omega} [N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_{xy} \delta \varepsilon_{xy}^0 + M_x^b \delta \kappa_x^b + M_y^b \delta \kappa_y^b + M_{xy}^b \delta \kappa_{xy}^b + M_x^s \delta \kappa_x^s + M_y^s \delta \kappa_y^s + M_{xy}^s \delta \kappa_{xy}^s + S_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^s + S_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^s] d\Omega - \int_{\Omega} q \delta w d\Omega = 0 \quad (\text{III.12})$$

Où

$$\begin{Bmatrix} N_x & N_y & N_{xy} \\ M_x^b & M_y^b & M_{xy}^b \\ M_x^s & M_y^s & M_{xy}^s \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \end{Bmatrix} dz \quad (\text{III.13})$$

$$(S_{xz}^s, S_{yz}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) g(z) dz \quad (\text{III.14})$$

Les équations gouvernantes de l'équilibre peuvent être dérivées de l'Eq. (III.12) en intégrant les gradients de déplacement par parties et mettant les coefficients δu_0 , δv_0 , δw_b et δw_s zéro séparément. Ainsi, on peut obtenir les équations d'équilibre associées à la présente théorie de déformation par cisaillement.

$$\begin{aligned} \delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \delta v_0 : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= 0 \\ \delta w_b &= \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + q = 0 \\ \delta w_s &= \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} + q = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.15})$$

En utilisant l'équation (III.9) dans l'équation (III.13), les résultantes de contraintes d'une plaque composée de trois couches peuvent être liées aux déformations totales par

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ B & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix} \quad (\text{III.16a})$$

$$\begin{Bmatrix} S_{xz}^s \\ S_{yz}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.16b})$$

Où :

$$N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^t, M^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}^t, M^s = \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\}^t, \quad (\text{III.17a})$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0\}^t, k^b = \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\}^t, k^s = \{k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s\}^t \quad (\text{III.17b})$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{III.17c})$$

$$B^s = \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s \end{bmatrix}, D^s = \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^s \end{bmatrix}, H^s = \begin{bmatrix} H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ H_{12}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix} \quad (\text{III.17d})$$

Où A_{ij} , B_{ij} , etc., sont la rigidité de la plaque, définie par

$$\begin{Bmatrix} A_{11} & B_{11} & D_{11} & B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s \\ A_{12} & B_{12} & D_{12} & B_{12}^s & D_{12}^s & H_{12}^s \\ A_{66} & B_{66} & D_{66} & B_{66}^s & D_{66}^s & H_{66}^s \end{Bmatrix} = \int_{-h_{n-1}}^{h_n} Q_{11}(1, z, z^2, f(z), zf(z), f^2(z)) \begin{Bmatrix} 1 \\ \nu \\ \frac{1-\nu}{2} \end{Bmatrix} dz \quad (\text{III.18a})$$

Et

$$(A_{22}, B_{22}, D_{22}, B_{22}^s, D_{22}^s, H_{22}^s) = (A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s) \quad (\text{III.18b})$$

$$A_{44}^s = A_{55}^s + \int_{h_{n-1}}^{h_n} Q_{44}[g(z)]^2 dz \quad (\text{III.18c})$$

En remplaçant à partir de l'équation. (III.15) dans l'équation (III.16), on obtient l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
& A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - B_{11} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial y^2} \\
& - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x \partial y^2} - B_{11}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3} = 0
\end{aligned} \tag{III.19a}$$

$$\begin{aligned}
& A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} - B_{22} \frac{\partial^3 w_b}{\partial y^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^2 \partial y} \\
& - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^2 \partial y} - B_{22}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial y^3} = 0
\end{aligned} \tag{III.19b}$$

$$\begin{aligned}
& B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + B_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} \\
& - D_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22} \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} - D_{11} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} \\
& - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} = q
\end{aligned} \tag{III.19c}$$

$$\begin{aligned}
& B_{11}^s \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + B_{22}^s \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} \\
& - D_{11}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} - H_{11}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} \\
& - 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} - H_{22}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} + A_{55}^s \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{44}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} = q
\end{aligned} \tag{III.19d}$$

III.2.2.4 Solutions exactes pour les plaques FGM soumise à diverses conditions aux limites

La solution exacte de l'Equation (III.19) pour la plaque FGM sous diverses conditions aux limites peut être construite. Les conditions aux limites pour un appui simple et/ou encastree :

Encastree (C) :

$$u = v = w_b = w_s = \frac{\partial w_b}{\partial x} = \frac{\partial w_b}{\partial y} = \frac{\partial w_s}{\partial x} = \frac{\partial w_s}{\partial y} = 0 \text{ dans } x = 0, a \text{ et } y = 0, b \tag{III.20}$$

Simplement appuyée (S)

$$\left\{ \begin{array}{l} v = w_b = w_s = \frac{\partial w_b}{\partial y} = \frac{\partial w_s}{\partial y} = 0 \text{ dans } x = 0, a \\ u = w_b = w_s = \frac{\partial w_b}{\partial x} = \frac{\partial w_s}{\partial x} = 0 \text{ dans } y = 0, a \end{array} \right. \tag{III.21}$$

La représentation suivante pour les quantités de déplacement, qui satisfont les conditions aux limites ci-dessus, est approprié dans le cas de notre problème, alors les conditions aux limites dans l'équation. (III.20) et (III.21) sont satisfaits par les développements suivants :

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_b \\ w_s \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} X'_m(x) Y_n(y) \\ V_{mn} X_m(x) Y'_n(y) \\ W_{bmn} X_m(x) Y_n(y) \\ W_{smn} X_m(x) Y_n(y) \end{Bmatrix} \quad (\text{III.22})$$

Où U_{mn} , V_{mn} , W_{bmn} et W_{smn} paramètres inconnus à déterminer, Mode propre et $()'$ désigne la dérivée par rapport à la coordonnée correspondante. Les fonctions $X_m(x)$ et $Y_n(x)$ sont proposés pour satisfaire au moins les conditions aux limites géométriques données dans les équations. (III.20) et (III.21) et représentent les formes approximatives de la surface déviée de la plaque. Ces fonctions sont listées dans Tableau 1 pour les différents cas de conditions aux limites avec $\lambda = m\pi/a$ et $\mu = n\pi/b$.

Tableau III.1. Fonctions admissibles $X_m(x)$ et $Y_n(y)$ pour les différentes conditions aux limites

	Conditions aux limites		Les fonctions $X_m(x)$ et $Y_n(y)$	
	$x=0, a$	$y=0, b$	$X_m(x)$	$Y_n(y)$
SSSS	$X_m(0) = X_m''(0) = 0$ $X_m(a) = X_m''(a) = 0$	$Y_n(0) = Y_n''(0) = 0$ $Y_n(b) = Y_n''(b) = 0$	$\sin(\lambda x)$	$\sin(\mu y)$
CCSS	$X_m(0) = X'_m(0) = 0$ $X_m(a) = X'_m(a) = 0$	$Y_n(0) = Y_n''(0) = 0$ $Y_n(b) = Y_n''(b) = 0$	$\sin^2(\lambda x)$	$\sin(\mu y)$
CSCS	$X_m(0) = X'_m(0) = 0$ $X_m(a) = X'_m(a) = 0$	$Y_n(0) = Y_n''(0) = 0$ $Y_n(b) = Y_n''(b) = 0$	$\sin(\lambda x)[\cos(\lambda x) - 1]$	$\sin(\mu y)[\cos(\mu y) - 1]$
CCCC	$X_m(0) = X'_m(0) = 0$ $X_m(a) = X'_m(a) = 0$	$Y_n(0) = Y'_n(0) = 0$ $Y_n(b) = Y'_n(b) = 0$	$\sin^2(\lambda x)$	$\sin^2(\mu y)$

Substitution d'équation (III.22) et (III.18) dans l'équation. (III.17), la solution exacte de la plaque FGM peut être déterminée à partir des équations suivantes :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{bmn} \\ W_{smn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -q \\ -q \end{Bmatrix} \quad (\text{III.23})$$

Où :

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \int_0^a \int_0^b (A_{11} X_m''' Y_n + A_{66} X_m' Y_n'') X_m' Y_n' dx dy \\
a_{12} &= \int_0^a \int_0^b (A_{12} + A_{66}) X_m' Y_n'' X_m' Y_n' dx dy \\
a_{13} &= - \int_0^a \int_0^b (B_{11} X_m''' Y_n + (B_{12} + 2B_{66}) X_m' Y_n'') X_m' Y_n' dx dy \\
a_{14} &= - \int_0^a \int_0^b [B_{11}^s X_m''' Y_n + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) X_m' Y_n''] X_m' Y_n' dx dy \\
a_{21} &= \int_0^a \int_0^b (A_{12} + A_{66}) X_m'' Y_n' X_m' Y_n' dx dy \\
a_{22} &= \int_0^a \int_0^b (A_{22} X_m Y_n''' + A_{66} X_m'' Y_n') X_m Y_n' dx dy \\
a_{23} &= - \int_0^a \int_0^b [B_{22} X_m Y_n''' + (B_{12} + 2B_{66}) X_m'' Y_n'] X_m Y_n' dx dy \\
a_{24} &= - \int_0^a \int_0^b [B_{22}^s X_m Y_n''' + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) X_m'' Y_n'] X_m Y_n' dx dy \\
a_{31} &+ \int_0^a \int_0^b (B_{11} X_m'' Y_n + (B_{12} + 2B_{66}) X_m'' Y_n'') X_m Y_n dx dy \\
a_{32} &= \int_0^a \int_0^b [B_{22} X_m Y_n''' + (B_{12} + 2B_{66}) X_m'' Y_n'] X_m Y_n dx dy \\
a_{33} &= \int_0^a \int_0^b - [D_{11} X_m'' Y_n 2(D_{12} + 2D_{66}) X_m'' Y_n'' + D_{22} X_m Y_n'''] X_m Y_n dx dy \\
a_{34} &= \int_0^a \int_0^b - [D_{11}^s X_m'' Y_n 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) X_m'' Y_n'' + D_{22}^s X_m Y_n'''] X_m Y_n dx dy \\
a_{41} &= \int_0^a \int_0^b [B_{11}^s X_m'' Y_n + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) X_m'' Y_n''] X_m Y_n dx dy \tag{III.24} \\
a_{42} &= \int_0^a \int_0^b [B_{22}^s X_m Y_n''' + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) X_m'' Y_n'] X_m Y_n'''] X_m Y_n dx dy \\
a_{43} &= \int_0^a \int_0^b - [D_{11}^s X_m'' Y_n 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) X_m'' Y_n'' + D_{22}^s X_m Y_n'''] X_m Y_n dx dy \\
a_{44} &= \int_0^a \int_0^b - [H_{11}^s X_m''' Y_n 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s) X_m'' Y_n'' + H_{22}^s X_m Y_n'''' - A_{55}^s X_m'' Y_n - A_{44}^s X_m Y_n''] X_m Y_n dx dy
\end{aligned}$$

III.3. Conclusion

Pour conclure, une nouvelle théorie des plaques de déformation et de cisaillement a été développée avec succès. Cette présente théorie raffinée à de nombreux avantages tels que la simplicité, l'efficacité et la grande précision dans la prédiction du comportement mécanique en flexion des plaques FGM soumises à diverses conditions aux limites. La théorie proposée se compose de seulement quatre variables et prend en compte les effets de cisaillement lors du calcul des déplacements et des déformations.

Afin de valider la théorie actuelle et d'identifier les différents paramètres qui influent sur le comportement mécanique des plaques FGM, les résultats sont présentés dans le chapitre suivant sous forme de tableaux et de graphiques explicites.

Chapitre IV :
Résultats et discussion

IV.1. Introduction

Dans ce mémoire une étude de flexion des plaques fonctionnellement graduées sous différentes conditions aux limites est présentée en se basant sur la théorie raffinée de déformation et de cisaillement d'ordre élevé.

L'intérêt de ce chapitre est de présenter les résultats numériques de la flèche, des contraintes normales et tangentielles avec diverses conditions aux limites des plaques FGM sous forme explicite des tableaux et des figures. D'où une validation est présentée en premier lieu en comparant les résultats obtenus en utilisant la présente théorie raffinée avec celles issues des autres théories de déformation et de cisaillement comme : Zenkour[58], Kablia [59], Thai[60] et Tounsi[61].

Après, on va réaliser une étude paramétrique pour montrer les différents paramètres qui influent sur le comportement statique des plaques FGM.

IV.2. Les propriétés matérielles de la plaque étudiée

Les Propriétés mécaniques des matériaux (céramique et métal) qui constituent la plaque fonctionnellement graduée considérée dans cette étude sont données dans le tableau V.1. comme suit :

Tableau IV.1 : Les propriétés mécaniques des matériaux constituant la plaque FGM.

Propriétés mécaniques	Métal	Céramique
	Aluminium (Al)	Alumina (Al ₂ O ₃)
Module de Young E (GPa)	70	380
Coefficient de Poisson ν	0.3	0.3

Les solutions de référence sont données sous forme adimensionnelle. Il s'agit respectivement de la flèche et des contraintes normales et tangentielles :

$$\begin{aligned}
 w^* &= \frac{10^2 D}{q_0 a^4} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right), & \bar{w} &= \frac{10 h^3 E_{\text{céramique}}}{q_0 a^4} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right), & D &= \frac{h^3 E_{\text{céramique}}}{12(1-\nu^2)} \\
 \bar{\sigma}_x &= \frac{h}{q_0 a} \sigma_{xx}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{z}{h}\right), & \bar{\tau}_{xz} &= \frac{10}{q_0} \tau_{13}\left(0, \frac{b}{2}, \frac{z}{h}\right), & \bar{\tau}_{xy} &= \frac{h}{q_0 a} \tau_{12}\left(0, 0, \frac{z}{h}\right)
 \end{aligned} \tag{IV.1}$$

Tableau IV.2 : Effet de coté sur épaisseur (a/h) sur la flèches maximales w^* des plaques isotropes carrées et rectangulaires simplement appuyées (SSSS) sous charges uniformes

Théorie	Plaque carrée ($a=b$)			Plaque rectangulaire ($a=0.5b$)		
	$a/h=5$	$a/h=10$	$a/h=25$	$a/h=5$	$a/h=10$	$a/h=25$
Reddy [59]	0.490	0.427	0.410	1.043	1.045	1.018
Cooke [59]	0.490	0.427	0.410	1.043	1.045	1.018
Lee[59]	0.490	0.427	0.410	1.043	1.045	1.018
Zenkour [58]	0.490	0.427	0.40960	1.043	1.045	1.018
Kablia [59]	0.4901	0.4272	0.4096	1.1427	1.0453	1.0180
Présente	0.4902	0.4273	0.4096	1.1428	1.0454	1.0181

Le tableau IV.2 représente l'influence de la géométrie de la plaque (rapport coté sur épaisseur et rapport d'aspect) sur la flèche maximale w^* des plaques carrées et rectangulaires sous charges uniformes avec un degré d'homogénéité nul ($k=0$) pour le cas d'une plaque isotrope. Les résultats obtenus sont comparés avec celles de Reddy, Cooke, Lee, Zenkour et Kablia. A partir de ce tableau, on peut observer que les résultats présentés sont en excellent accord avec celles des autres théories d'ordre élevé. Ce tableau montre également que la flèche maximale diminue avec l'augmentation du rapport d'épaisseur (a/h) pour la plaque carrée ($a/b=1$) ou bien rectangulaire ($a/b=0.5$).

Tableau IV. 3 : Effet du rapport coté sur épaisseur (a/h) sur les flèches adimensionnelle \bar{w} des plaques carrées simplement appuyées (SSSS) en FGM sous charges sinusoïdales.

K	a/h	Méthode				
		Zenkour[58]	Carrera[59]	Thai[60]	Kablia [59]	Présente
1	4	0.7284	0.7171	0.7304	0.7282	0.7284
	10	0.5889	0.5875	0.5913	0.5889	0.5870
	100	0.5625	0.5625	0.5649	0.5625	0.5625
4	4	1.1573	1.1585	1.1644	1.1644	1.1599
	10	0.8810	0.8821	0.8844	0.8844	0.8815
	100	0.8287	0.8286	0.8312	0.8312	0.8287
10	4	1.3889	1.3745	1.3953	1.3953	1.3909
	10	1.0083	1.0072	1.0132	1.0132	1.0087
	100	0.9362	0.9361	0.9406	0.9406	0.9362

Le tableau IV.3 représente l'effet d'épaisseur (a/h) sur les flèches \bar{w} des plaques carrées en FGM simplement appuyées sous charges sinusoïdales pour différentes valeurs du degré

d'homogénéité k . Les résultats obtenus sont comparés avec les résultats de Zenkour, Carrera, Thai et Kablia. De même, les résultats obtenus s'accordent très bien avec les autres théories d'ordre élevé pour le cas des plaques fonctionnellement graduées ($k \in]0 ; \infty[$) simplement appuyées soumises à un chargement sinusoïdal. Ce tableau montre également que la flèche \bar{w} est maximale pour les plaques minces et minimales pour les plaques épaisses.

Tableau IV.4 : Effet du degré d'homogénéité k sur la flèche adimensionnelle \bar{w} et les contraintes des plaques carrées en FGM sous charges sinusoïdales ($a=10h$)

$(\bar{w}, \bar{\sigma}_i)$	Théorie	k					
		0	1	2	5	10	∞
\bar{w}	Thai[60]	0.2960	0.5889	0.7573	0.9118	1.0089	1.6070
	Zenkour[58]	0.2960	0.5889	0.7572	0.9108	1.0083	1.6071
	Présente	0.2961	0.5890	0.7573	0.9114	1.0087	1.6072
$\bar{\sigma}_x$	Thai [60]	1.9955	3.0870	3.6094	4.2488	5.0890	1.9955
	Zenkour[58]	1.9933	3.0833	3.6044	4.2412	5.0813	1.9933
	Présente	1.9943	3.0850	3.6067	4.2447	5.0849	1.9943
$\bar{\tau}_{xy}$	Thai [60]	0.7065	0.6110	0.5441	0.5755	0.5894	0.7065
	Zenkour[58]	0.7068	0.6112	0.5443	0.5759	0.5898	0.7068
	Présente	0.7067	0.6111	0.5442	0.5757	0.5896	0.7067
$\bar{\tau}_{xz}$	Thai [60]	0.2462	0.2462	0.2265	0.2017	0.2198	0.2462
	Zenkour[58]	0.2322	0.2322	0.2119	0.1858	0.2042	0.2322
	Présente	0.2386	0.2386	0.2186	0.1930	0.2114	0.2386

Le tableau IV.4 représente la variation de la flèche et les contraintes normale et de cisaillement des plaques isotropes et FGM soumises à un chargement sinusoïdal, d'où la précision de la présente théorie raffinée est évidente vue que les résultats se convergent très bien pour la flèche et les contraintes normale et de cisaillement, ce qui confirme la validité de la présente théorie qui donne une bonne description des déformations et par conséquent des contraintes de cisaillement.

On constate également que la flèche \bar{w} est maximale pour les plaques en métal ($k=\infty$ avec $E=70\text{GPa}$) et minimales pour les plaques en céramiques ($k=0$ avec $E=380\text{GPa}$) et varie entre les deux suivant la valeur du degré d'homogénéité.

Tableau IV.5 : Influence du degré d'homogénéité k sur la flèche maximale w^* des plaques carrées encastrées (CCCC) en FGM.

a/h	k	Zenkour[58]	Présente	Précision (%)
5	0	0.3505	0.3625	3.4440
	0.5	0.5157	0.5312	2.9938
	1	0.6613	0.6799	2.8064
	2	0.8677	0.8941	2.2967
	5	1.1539	1.2037	4.3122
	10	1.3365	1.3977	4.5830
10	0	0.2519	0.2512	-0.2779
	0.5	0.3823	0.3803	-0.5310
	1	0.4949	0.4919	-0.6082
	2	0.6393	0.6364	-0.4621
	5	0.7883	0.7904	0.2664
	10	0.8830	0.8873	0.4927
20	0	0.2271	0.2227	-1.9418
	0.5	0.3488	0.3417	-2.0242
	1	0.4530	0.4437	-2.0485
	2	0.5818	0.5702	-2.0006
	5	0.6961	0.6839	-1.7626
	10	0.7686	0.7557	-1.6809
50	0	0.2202	0.2147	-2.5071
	0.5	0.3394	0.3308	-2.5193
	1	0.4413	0.4302	-2.5244
	2	0.5657	0.5515	-2.5153
	5	0.6703	0.6537	-2.4722
	10	0.7366	0.7185	-2.4587
100	0	0.2192	0.2135	-2.5870
	0.5	0.3380	0.3293	-2.5944
	1	0.4396	0.4282	-2.5932
	2	0.5634	0.5488	-2.5913
	5	0.6666	0.6494	-2.5819
	10	0.7320	0.7131	-2.5779

Le tableau IV.5 ainsi que les figures (IV.1 et IV.2) représentent la variation de la flèche des plaques en matériaux à gradient de propriétés FGM encastrées sur les quatre cotés soumises à un chargement sinusoïdal, d'où la précision de la présente théorie raffinée est validée pour le cas de différentes conditions aux limites (voir les résultats précédents) vu que l'erreur entre les résultats de la présente théorie et celles issues de la théorie de Zenkour ne dépasse pas 4.58% ou bien 0.0458 dans le pire des cas présentés ci-dessus.

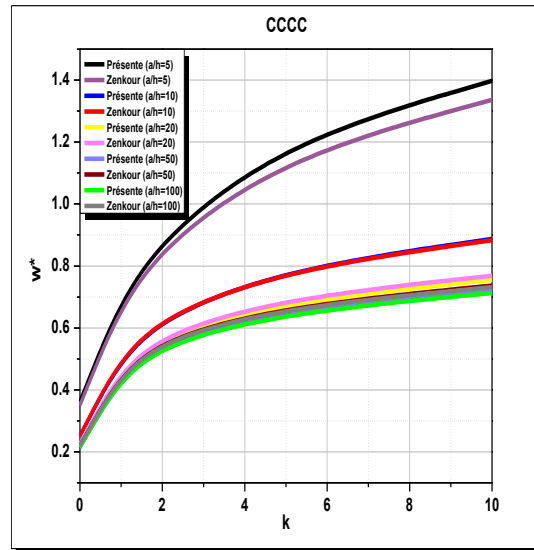


Figure IV.1 : Variation de la flèche maximale w^* en fonction du degré d'homogénéité (k) des plaques encastrees (CCCC) en FGM.

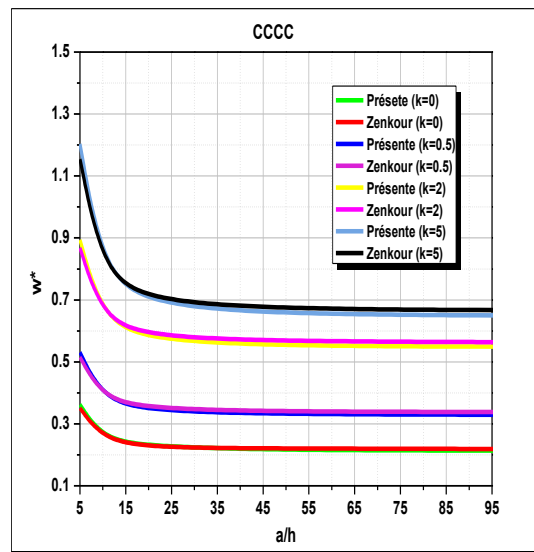
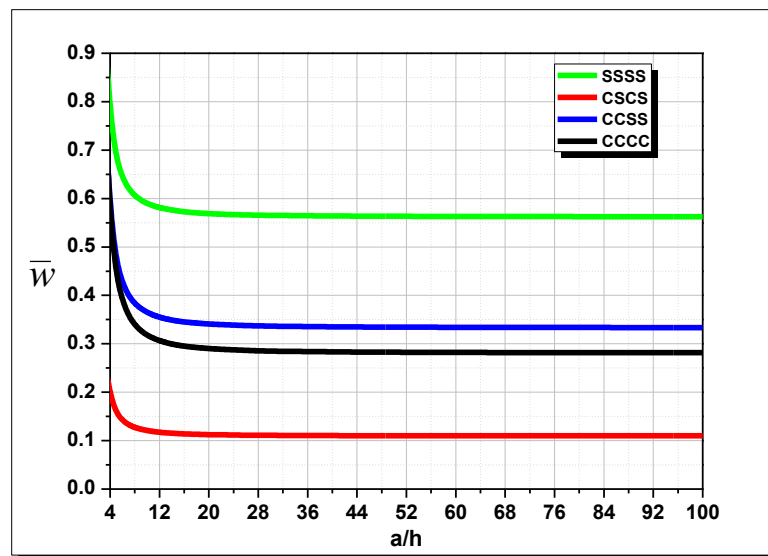


Figure IV.2 : Variation de la flèche maximale w^* en fonction du rapport coté sur épaisseur (a/h) des plaques encastrees (CCCC) en FGM.

Tableau IV.6 : Variation de la flèche \bar{w} d'une plaque carrée en FGM soumise à une charge sinusoïdale en fonction des différentes conditions aux limites.

Conditions aux limites	a/h	k					
		0	1	2	5	10	∞
SSSS	5	0.3433	0.6688	0.8671	1.0885	1.2276	1.8637
	10	0.2961	0.5890	0.7573	0.9114	1.0087	1.6072
	20	0.2842	0.5690	0.7298	0.8669	0.9538	1.5429
	50	0.2809	0.5633	0.7220	0.8544	0.9384	1.5249
	100	0.2804	0.5625	0.7209	0.8527	0.9362	1.5223
CSCS	5	0.0798	0.1522	0.1990	0.2605	0.2989	0.4334
	10	0.0610	0.1204	0.1553	0.1900	0.2118	0.3311
	20	0.0563	0.1124	0.1443	0.1722	0.1899	0.3054
	50	0.0549	0.1101	0.1412	0.1672	0.1837	0.2982
	100	0.0548	0.1098	0.1408	0.1665	0.1828	0.2972
CCSS	5	0.2380	0.4546	0.5940	0.7742	0.8870	1.2918
	10	0.1841	0.3637	0.4689	0.5726	0.6380	0.9995
	20	0.1706	0.3408	0.4375	0.5219	0.5753	0.9261
	50	0.1668	0.3344	0.4287	0.5076	0.5577	0.9055
	100	0.1663	0.3335	0.4274	0.5056	0.5552	0.9026
CCCC	5	0.2238	0.4225	0.5547	0.7393	0.8547	1.2151
	10	0.1612	0.3167	0.4092	0.5050	0.5652	0.8749
	20	0.1454	0.2900	0.3725	0.4458	0.4922	0.7893
	50	0.1410	0.2826	0.3623	0.4292	0.4716	0.7653
	100	0.1403	0.2815	0.3608	0.4268	0.4687	0.7619

**Figure IV.3** : Variation de la flèche suivant l'épaisseur (a/h) d'une plaque en FGM carrée (k=1) en fonction des conditions aux limites (SSSS, CSCS, CCSS, CCCC).

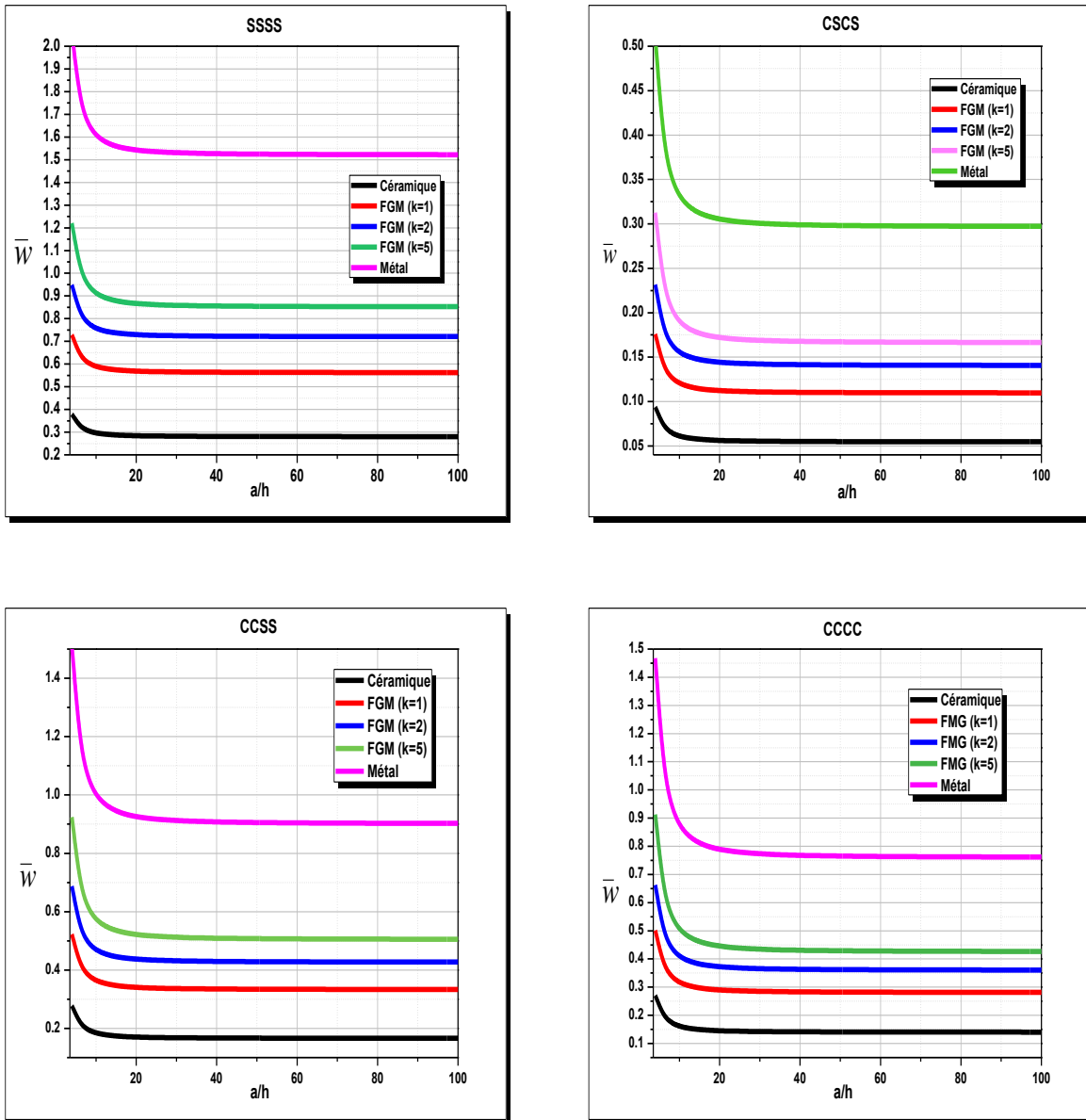


Figure IV.4 : Influence du rapport d'épaisseur a/h sur la variation de la flèche adimensionnelle d'une plaque carrée ($a/b=1$) en FGM.

Les tableaux (IV.6 et IV.7) ainsi que les figures (IV.3, IV.4 et IV.5) montrent la variation de la flèche \bar{w} des plaques carrées ($a/b=1$) et rectangulaires ($a/b \neq 1$) en matériaux à gradient de propriétés FGM soumises aux différentes conditions aux limites (SSSS, CSCS, CCSS et CCCC). On constate que la flèche \bar{w} augmente avec l'augmentation du degré d'homogénéité k , tandis que cette dernière (la flèche \bar{w}) diminue avec l'augmentation du rapport de géométrie de la plaque (rapport d'épaisseur a/h et rapport d'aspect a/b) et cela est valable pour toutes les conditions aux limites exhibés ci-dessus.

Aussi, les flèches sont maximales pour le cas des plaques simplement appuyées (SSSS) ce qui nous rappelle de la solution de Navier des plaques. Tandis que ces flèches sont minimales dans le cas de la condition CSCS, cela est dû à la non symétrie des appuis dans le même axe.

Tableau IV.7 : Variation de la flèche \bar{w} d'une plaque en FGM soumise à une charge sinusoïdale en fonction des différentes conditions aux limites ($a/h=10$).

k	a/b	Conditions aux limites			
		SSSS	CSCS	CCSS	CCCC
0	0.5	0.7428	0.1399	0.2731	0.3377
	1	0.2961	0.0610	0.1841	0.1612
	1.5	0.1159	0.0239	0.1029	0.0623
	2	0.0512	0.0106	0.0546	0.0274
	3	0.0144	0.0032	0.0176	0.0084
1	0.5	1.4821	0.2774	0.5396	0.6668
	1	0.5890	0.1204	0.3637	0.3167
	1.5	0.2293	0.0468	0.2027	0.1210
	2	0.1006	0.0205	0.1070	0.0523
	3	0.0278	0.0060	0.0340	0.0156
2	0.5	1.9034	0.3571	0.6957	0.8599
	1	0.7573	0.1553	0.4689	0.4092
	1.5	0.2955	0.0606	0.2617	0.1571
	2	0.1300	0.0267	0.1384	0.0683
	3	0.0361	0.0078	0.0443	0.0206
5	0.5	2.2762	0.4324	0.8493	1.0506
	1	0.9114	0.1900	0.5726	0.5050
	1.5	0.3591	0.0755	0.3212	0.1987
	2	0.1600	0.0341	0.1716	0.0892
	3	0.0459	0.0105	0.0564	0.0285
10	0.5	2.5120	0.4799	0.9462	1.1708
	1	1.0087	0.2118	0.6380	0.5652
	1.5	0.3993	0.0849	0.3587	0.2248
	2	0.1789	0.0387	0.1925	0.1022
	3	0.0520	0.0122	0.0640	0.0334
∞	0.5	4.0321	0.7592	1.4828	1.8332
	1	1.6072	0.3311	0.9995	0.8749
	1.5	0.6289	0.1300	0.5587	0.3384
	2	0.2777	0.0577	0.2964	0.1487
	3	0.0078	0.0172	0.0956	0.0457

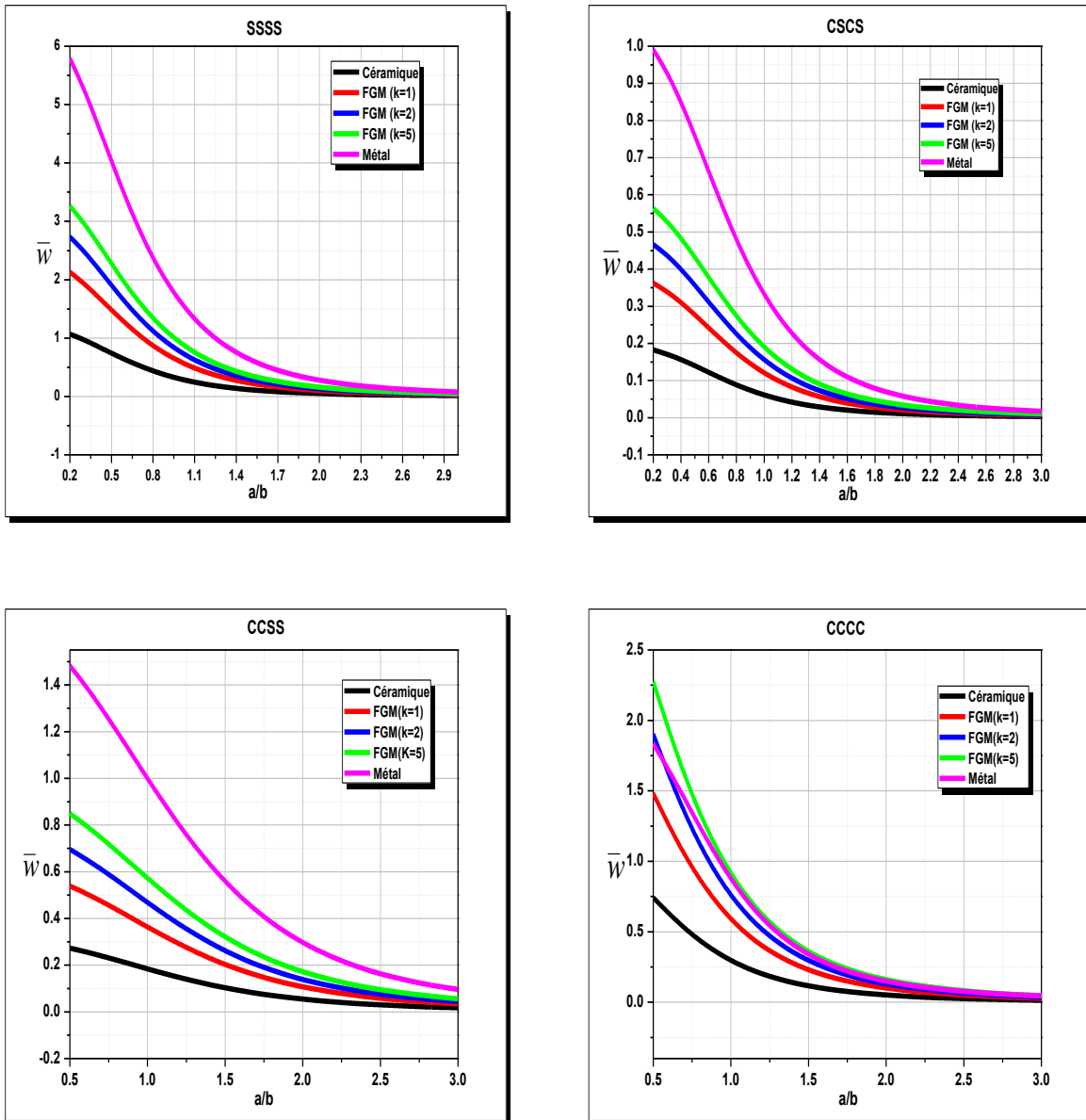


Figure IV.5 : Influence du rapport d'aspect a/b sur la variation de la flèche d'une plaque en FGM ($a/h=10$).

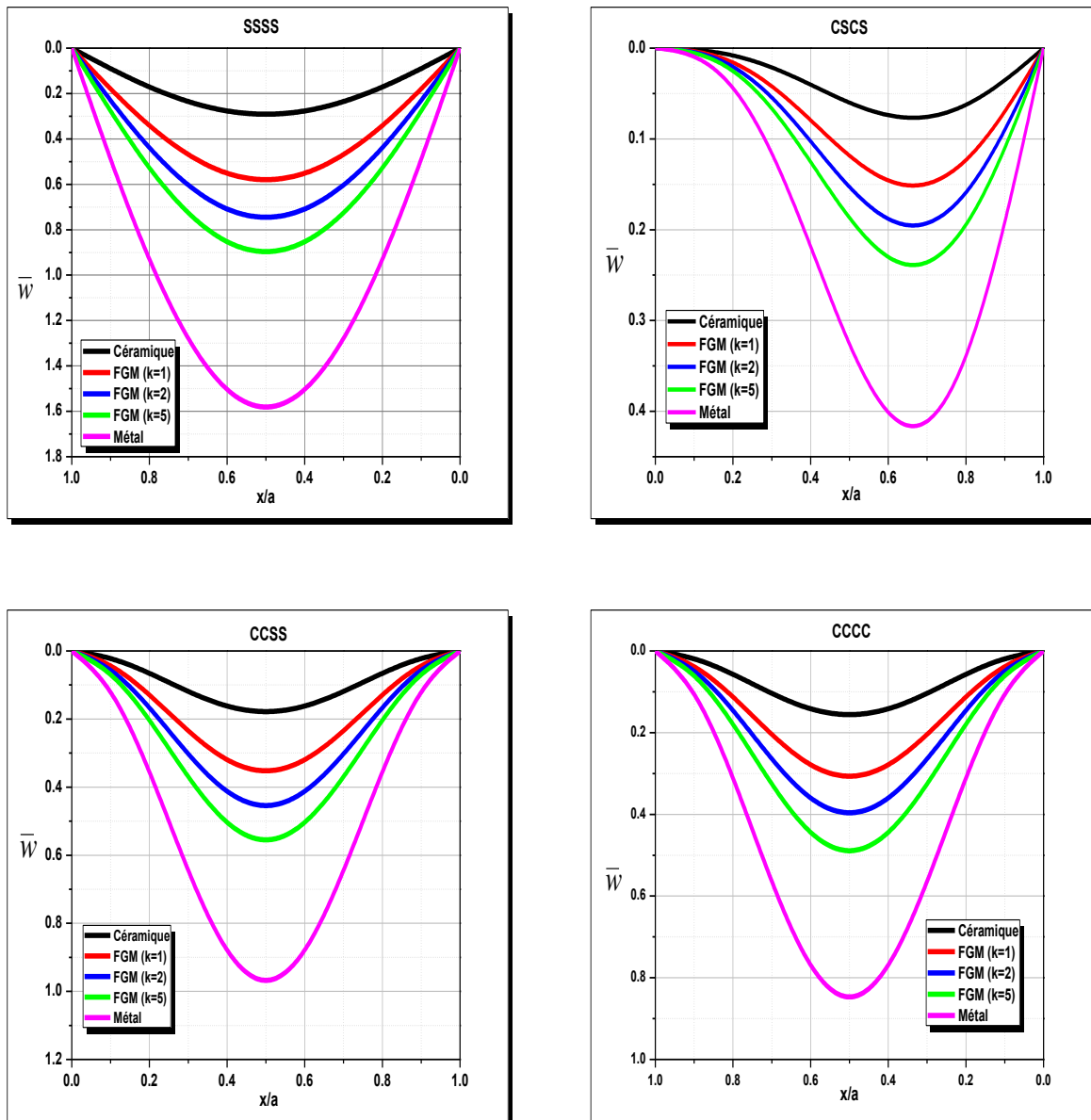


Figure IV.6 : Variation de la flèche suivant la longueur (x/a) d'une plaque carrée en FGM ($a/h=10$).

La figure IV.6 représente la variation de la flèche adimensionnelle suivant la longueur d'une plaque carrée en FGM soumise à une charge sinusoïdale, où la flèche est maximale au milieu de la plaque ($x=a/2$) pour les conditions aux limites (SSSS, CCSS et CCCC) et diminue en allant vers les bords (gauche et droite) de la plaque jusqu'à atteindre la valeur zéro à $x=0$ et $x=a$, alors que dans le cas de la condition aux limites CSCS la flèche maximale n'est pas au milieu de la plaque (déviée vers l'appui simple), puisqu'on a un encastrement à $x=0$ et un appui simple à $x=a$, ce qui explique la non symétrie de la flèche suivant la longueur de la plaque.

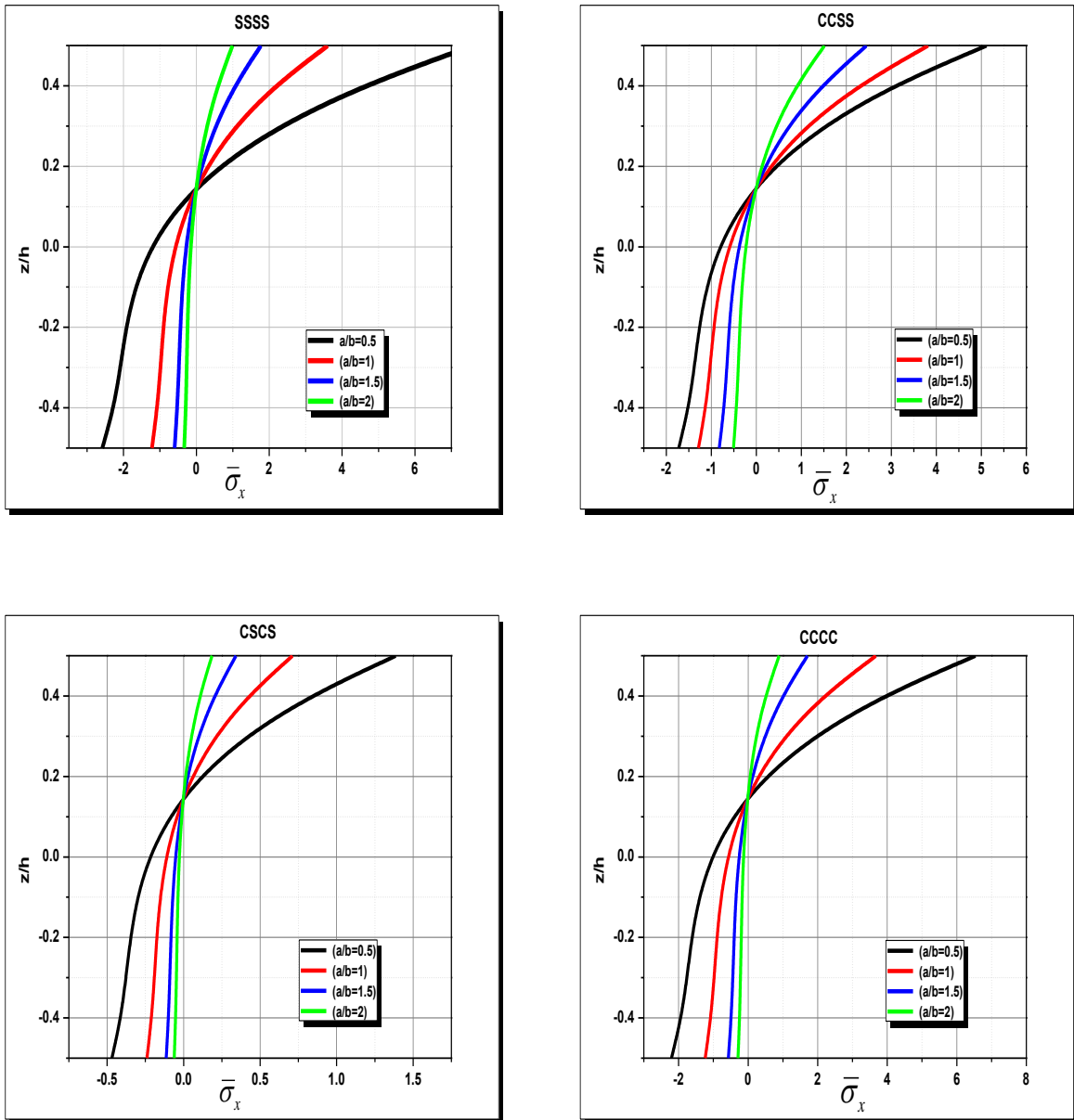


Figure IV.7 : Variation des contraintes normales $\bar{\sigma}_x$ suivant l'épaisseur (z/h) d'une plaque en FGM

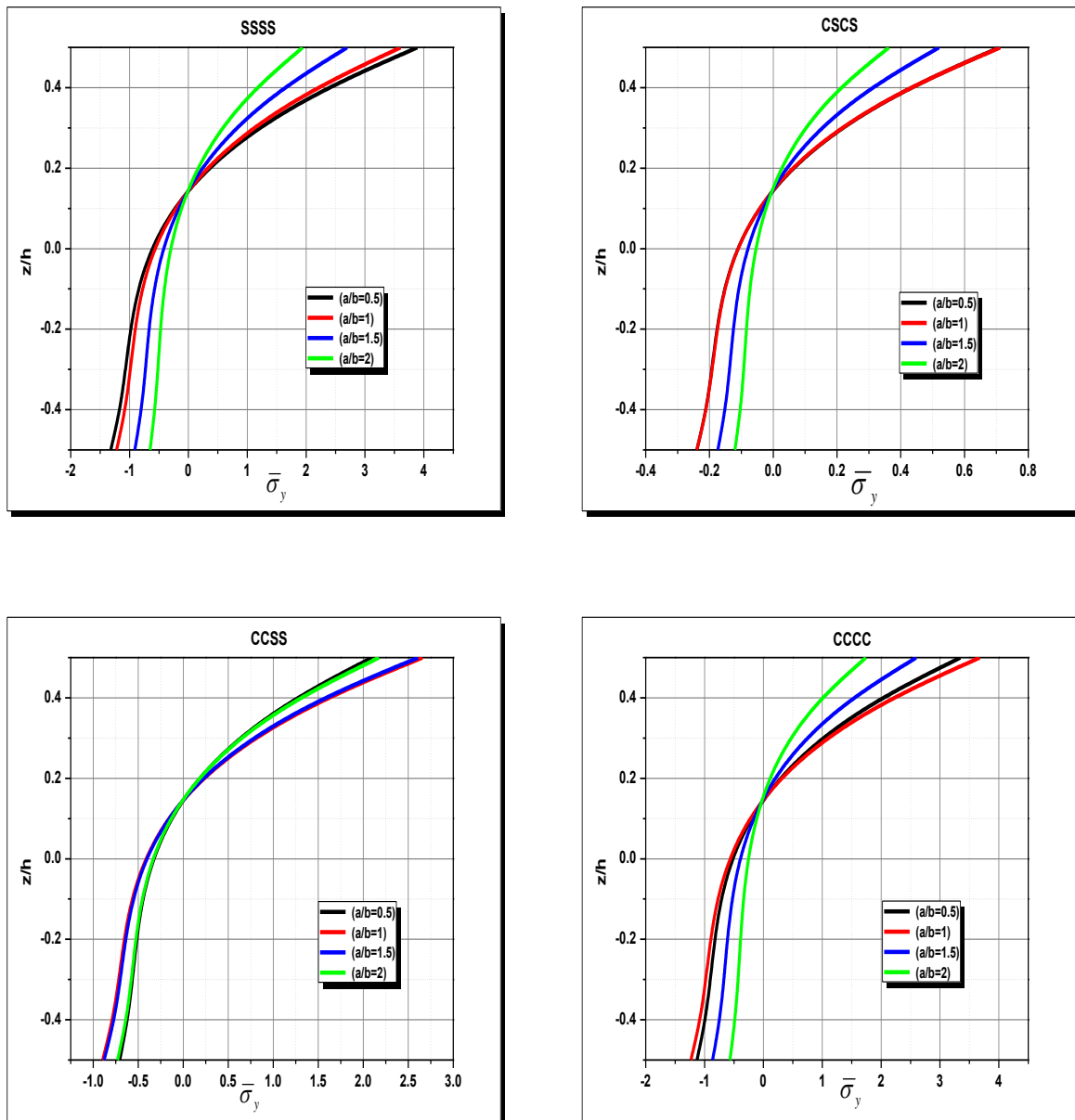


Figure IV.8 : Variation des contraintes normales $\bar{\sigma}_y$ suivant l'épaisseur (z/h) d'une plaque en FGM

Les figures IV.7 et IV.8 montrent la distribution des contraintes normales adimensionnelles suivant l'épaisseur ($a/h=10$) d'une plaque en FGM (le degré d'homogénéité $k=1$) soumise à une charge mécanique sinusoïdale pour différentes valeurs du rapport d'aspect de la plaque (a/b).

Il est à noter que ces contraintes normales sont en compression dans la partie inférieure de la plaque et décroissent en fonction de l'épaisseur jusqu'à atteindre une valeur nulle au point $z=0,15$, à partir duquel les contraintes normales deviennent en traction jusqu'à la face supérieure de la plaque. Il est clair que l'axe neutre est décalé vers le haut par rapport à l'axe

moyen de la plaque FGM, exactement au point $z=0,15$, ce qui est logique puisqu'on a une plaque fonctionnellement graduée ($k=1$) qui présente une dissymétrie des propriétés mécanique sur l'épaisseur, et la partie la plus rigide se trouve dans la partie supérieure de la plaque (partie céramique), ce qui provoque un décalage de cet axe neutre.

IV.3. Conclusion

En ce chapitre, nous avons présenté des résultats numériques pour l'analyse de la flexion des plaques fonctionnellement graduées FGM en utilisant la présente théorie raffinée d'ordre élevé. Les solutions analytiques sont obtenues pour les plaques FGM soumises à diverses conditions aux limites afin d'étudier les déplacements et les contraintes pour différentes valeurs du degré d'homogénéité « k », de rapport d'aspect géométrique a/b et de rapport épaisseur a/h . Par la suite, une étude paramétrique est présentée pour déterminer l'influence de certains paramètres géométriques et matériels sur le comportement mécanique des plaques FGM.

La théorie actuelle présente de fortes similitudes avec d'autres théories de déformation en flexion et d'autres modèles d'ordre supérieur.

Alors on peut conclure que la théorie proposée est plus précise et efficace pour prédire le comportement mécanique en flexion des plaques FGM.

*Conclusion Générale et
perspectives*

Conclusion générale et perspectives

Le FGM est le matériau du futur qui offre des possibilités d'études et d'applications plus poussées. Les matériaux à gradation fonctionnelle sont des matériaux avancés ayant des propriétés supérieures de résistance à la chaleur, une aptitude à être utilisés dans des conditions de température extrêmes et des propriétés mécaniques appropriées en même temps.

Dans ce mémoire, nous avons utilisé une théorie raffinée de déformation et de cisaillement d'ordre élevé pour étudier le comportement mécanique en flexion des plaques fonctionnellement graduées soumises aux différentes conditions aux limites.

La validation de la présente théorie raffinée est très bien mise en évidence en comparant les résultats tirés de la présente théorie avec celles issues des autres théories de déformation et de cisaillement d'ordre élevé.

Grâce à l'analyse paramétrique menée sur de nombreux résultats numériques, qui ont été illustrés aussi graphiquement pour faciliter la compréhension, nous pouvons tirer les conclusions suivantes :

- Les propriétés mécaniques de la plaque FGM (degré d'homogénéité k) affectent de manière significative la variation de déformation et des contraintes, où la flèche dans les plaques métalliques est maximale, tandis que, cette dernière est minimale pour les plaques en céramique et varie entre celle des deux (métal, céramique) en fonction du degré d'homogénéité.
- La variation de la géométrie de la plaque FGM influe d'une manière significative sur son comportement mécanique en flexion, pour cela, la flèche adimensionnelle dépend directement de la variation des rapports coté sur épaisseur a/h et rapport d'aspect a/b .
- Les conditions aux limites ont un effet majeur sur les déformations et contraintes de la plaque en matériau à gradient de propriétés.
- La symétrie des appuis joue un rôle important sur la position de la flèche maximale.

A la fin, on a bien remarqué que les résultats de la présente étude comparative montrent que la flèche et les contraintes produites par la présente théorie raffinée sont cohérentes avec les résultats d'autres auteurs. Cela montre que les hypothèses de la théorie proposée peuvent produire des résultats corrects, de sorte qu'elles peuvent être utilisées efficacement dans l'étude du comportement mécanique en flexion des plaques en matériaux à gradient de propriétés soumises aux diverses conditions aux limites.

En perspectives, il est recommandé de faire des recherches sur les axes suivants :

- D'étudier l'influence de la température sur le comportement des plaques.
- Etudier le flambement des poutres et des plaques sous les conditions aux limites
- Etudier le comportement des plaques en FGM sous les autres conditions aux limites

*Références
bibliographiques*

Références bibliographiques

- [1] H.-S. SHEN, «Functionally graded materials: nonlinear analysis of plates and shells,» 2016.
- [2] C. GPT, «OpenAI,» 2015-2023. [En ligne]. Available: <https://openai.com/blog/chatgpt>. [Accès le 27 05 2023].
- [3] A. e. a. MAHMOUDI, *Etude de l'influence des modèles micromécaniques sur la réponse globale des structures FGM*, Sidi belabes, 2018.
- [4] A. KAWASAKI et R. WATANABE, *Concept and P/M fabrication of functionally gradient materials.*, vol. 23, 1997, pp. 73-83.
- [5] K. (. ICHIKAWA, *Functionally graded materials in the 21st century: a workshop on trends and forecasts*, Springer Science & Business Media, 2001.
- [6] G. Z. W. K. Jean P. Mercier, *Introduction à la science des matériaux*, PPUR presses polytechniques, 1999.
- [7] K. K. CHAWLA, *Composite Materials Science and Engineering*, Springer Science & Business Media, 2012.
- [8] S. BRAIRI, *ANALYSE DE LA DEGRADATION DES STRUCTURES FGM RENFORCÉES PAR COMPOSITES FRP PRECONTRAINTS*, Université Abou Bekr Belkaid-Tlemcen, 2019.
- [9] A. e. a. SAID, *Etude et analyse des plaques FGM en Génie Civil*, UNIVERSITE DJILLALI LIABES SIDIBELABES, 2016.
- [10] I.-M. LOW, *Ceramic-matrix composites*, Woodhead Publishing, 2006, pp. 575-596.
- [11] M. A. e. H. M.J. Pindera, *Use of composites in Functionally Graded Materials*, Charlottes, 1994.
- [12] A. M. e. M. M. Pindera, *Use of composites in multi-phased and functionally graded materials*, vol. 28, 1997, pp. 1- 175.
- [13] G. e. V. O. Biest, *functionally graded materials VIII*, Uetikon-Zuerich, Éd., Trans Tech publications Ltd , 2004., pp. 492-493.
- [14] T. F. e. N. Noda, *Analysis of thermal stress in a plate of functionally graded material*, JSAE Review éd éd., vol. 16, 1995, pp. 263-268.
- [15] K. R. e. W. a. p. A. Markworth, *modeling studies applied to functionally graded materials*, vol. 30, Journal of material sciences, 1995, pp. 2183-2193.
- [16] Y. Tanigawa, *Some basic thermoelastic problems for nonhomogeneous structural materials*, vol. 48, 1995, pp. 2183-2193.
- [17] N. NOda, *Thermal stresses in functionally graded material*, vol. 22, Journal of Thermal Stresses,

- 1999, pp. 477-512.
- [18] Z. J. e. J. a. D. G. Paulino, *Failure of functionally graded materials*, in *Comprehensive structural Integrity*, vol. 2, E. K. eds. B et G.K. and W, Éd., New York: Elsevier Science, 2003, pp. 607-644.
- [19] k. K. e. Y. Takeuchi, *Multilayer ceramic thermal barrier coatings under transient thermal loads*, Sendai, 1990, pp. 31-36.
- [20] A. e. a. MAHMOUDI, *Etude de l'influence des modèles micromécaniques sur la réponse globale des structures FGM*, Sidi Bel Abbès, 2018..
- [21] L. s. e. G. P. H. Yin, *Micromechanics-based elastic model for functionally graded materials with particle interactions*, vol. 52, *Acta materialia*, 2004, pp. 3535-3543.
- [22] P. BOCH, T. CHARTIER et M. HUTTEPAIN, *Tape casting of Al₂O₃/ZrO₂ laminated composites*, 69.8 éd., *Journal of the American Ceramic Society*, 1986.
- [23] Y. e. a. SHINOHARA, *Functionally Graded Materials*, Japan: National Institute for Materials Science.
- [24] M. KOIZUMI, *Recent progress of functionally graded materials*, Japan, 16th annual conference on composites and advanced ceramic materials, 1992, p. 333.
- [25] M. KOIZUMI, *F. G. M. FGM activities in Japan*, 28.1-2 éd., Japan, 1997.
- [26] T.-K. NGUYEN, K. SAB et G. BONNET, *Shear correction factors for functionally graded plates*, 14.8 éd., 2007, pp. 567-575.
- [27] H. OKAMURA, *State of the art of material design projects for severe service applications*, 143.1-2 éd., 1991.
- [28] A. BETTOUMI et F. MENIA, *Analyse du comportement vibratoire des poutres poreuses en FGM*, Menia, 2019.
- [29] B. KIEBACK, A. NEUBRAND et H. RIEDEL, *Processing techniques for functionally graded materials*, vol. A 362, 2003, pp. 81-105.
- [30] M. e. Hirai, En ligne, , 1995..
- [31] H. H. GRAZZINI et D. S. WILKINSON, *Slip casting under pressure*, Hoboken, NJ, USA, *Ceramic Engineering and Science Proceedings*, 1992, pp. 528-535.
- [32] J. S. e. a. MOYA, *Functionally gradient ceramics by sequential slip casting*, 14.5-6 éd., 1992.
- [33] L. LOSTEC, *Elaboration par coulage en bande et caractérisation microstructurale et mécanique de composites SiC-MAS-L*, l'université de Limoges, 1997.
- [34] R. E. MISTLER, *High strength alumina substrates produced by multiplelayer Casting technique*,

- 52.11 éd., American Ceramic Society Bulletin, 1973.
- [35] B. P, "*Tape casting of layered composites, in processing of advanced ceramics*"., 1987: moya and aza sociedad espanoma de ceramica y vidrio.
- [36] H. Adjali, « *Etude de l'influence des propriétés mécaniques sur le comportement des plaques FGM*, » ,, Tissemsilt, 2021..
- [37] H. ABDIZADEH, *Elaboration et caractérisation de composites duplex*, Lyon, INSA, 1997.
- [38] A. MORTENSEN et S. SURESH, *Functionally graded metals and metal-ceramic composites: Part 1 Processing*, 40.6 éd., International materials reviews, 1995.
- [39] R. M. e. a. MAHAMOOD, *Fuctionally graded materials*, vol. III WCE, 2012, pp. 4-6.
- [40] L. GENDRE, *Matériaux composites et structures composites*, Université Paris-Saclay, 2011.
- [41] A. ARAB et I. SHAHROUR, *ETUDE EN LABORATOIRE DE L'AMELIORATION DES SOLS PAR L'AUGMENTATION DE LA DENSITE RELATIVE*, Chlef (Algérie), Université Hassiba Benbouali, 2010..
- [42] K. BATHE, D. CHAPELLE et P. LEE, *A shell problem 'highly sensitive' to thickness changes*, 57.8 éd., International journal for numerical methods in engineering, 2003.
- [43] J. S. HUBERT et E. S. PALENCIA, *Coques Elastiques Mince- Propriétés Asymptotiques*, Masson, Paris, 1997.
- [44] J. e. a. TKÄRANTA, *Shell deformation states and the finite element method:a benchmark study of cylindrical shells*, Vols. %1 sur %2128.1-2, 1995.
- [45] B. MAMIA, *étude de la réponse mécanique des structures en matériaux composites avancés en utilisant un modèle de déplacement d'ordre élevé*, SIDI BEL ABBES, université djilali liabes, 2018.
- [46] E. REISSNER et Y. STAVSKY, *bending and stretching of certain types of heterogeneous aelotropic elastic plate*, 1961.
- [47] S. e. a. TIMOSHENKO, *theory of plates and shells*,, New York, 1959.
- [48] J. E. A. E. J. M. Whitney, *theory of laminated plates*,, 1970.
- [49] J. N. REDDY, *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*, CRC press, 2003.
- [50] E. REISSNER, *The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates*, 1945.
- [51] R. MINDLIN, *influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates*, 1951.

- [52] O. e. T. M. POLIT, *A multilayered/ sandwich triangular finite element applied to linear and non-linear analyses*, vol. 58, 2002, pp. 121-128.
- [53] B. ADIM, *Etude de la stabilité des plaques en matériaux composite : analyse et modélisation*, Tiaret: Université de Tiaret-Ibn Khaldoun, 2016.
- [54] S. e. D. S. M. ABRATE, *Equivalent single layer theories for composite and sandwich structures*, vol. 179, 2017, pp. 482-494.
- [55] V. T. NGUYEN, *Modélisation globale et locale des structures multicouches par éléments finis de plaques*, école nationale des ponts et chaussées, Ecole des Ponts ParisTech, 2004.
- [56] M. Mahia, *Stabilité des plaques fonctionnellement graduées fgm*, Tissemsilt, 2020.
- [57] B. R. T. H. D. e. A. B. Kablia aicha, «Effect of porosity distribution rate for bending analysis of imperfect FGM plates resting on Winkler-Pasterank foundations under various boundary conditions,» *Techno press*, pp. 575-597, 2020.
- [58] A. M. ZENKOUR et A. F. RADWAN, *Compressive study of functionally graded plates resting on Winkler—Pasternak foundations under various boundary conditions using hyperbolic shear deformation theory*, 2017.
- [59] T. ., D.-H. C. HUU-TAI, «Finite element formulation of various four unknown shear deformation theories for functionally graded plates,» *ELSEVIER*, n° %175, pp. 50-61, 2013.
- [60] A. e. a. TOUNSI, *A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates*, 24.1 éd., 2013.

Résumé

Cette recherche présente une étude du comportement mécanique des plaques en matériaux à gradient de propriétés FGM sous différentes conditions aux limites en utilisant la théorie raffinée de déformation et de cisaillement d'ordre élevé à quatre variables. Nous utilisons la théorie proposée et la solution exacte pour étudier l'influence des différents paramètres tel que les propriétés mécaniques sur le comportement en flexion des plaques fonctionnellement graduées.

Les résultats de la flexion des plaques FGM obtenus par la présente théorie raffinée ont été comparé par celles issues de la littérature, d'où, il est clairement constaté qu'ils sont en très bon accord.

Alors, on peut dire que la présente théorie raffinée est plus exacte et simple pour la résolution du comportement en flexion des plaques en FGM soumises aux diverses conditions aux limites.

Mots clés : Plaque FGM, Flexion, théorie raffinée d'ordre élevé, Conditions aux limites.

Abstract

This research presents a study of the mechanical behavior of functionally graded plates FGM under different boundary conditions using the present high-order refined shear and deformation theory of four-variables. We use the proposed theory and the exact solution to study the influence of different parameters such as mechanical properties on the bending behavior of functionally graded plates.

The results of the bending of the FGM plates obtained by the present refined theory were compared with those from the literature, from where it is clearly found that they are in very good agreement.

So, it can be said that the present refined theory is more exact and simpler for the resolution of the bending behavior of the FGM plates subjected to the various boundary conditions.

Keywords: FGM Plate, Bending, High Order Refined Theory, Boundary Conditions

ملخص

يقدم هذا البحث دراسة للسلوك الميكانيكي للصفائح المصنوعة من المواد المتدرجة وظيفيا الخاضعة لمختلف المساند باستخدام النظرية المكررة ذات الترتيب العالي للتشوه والقص العرضي باستخدام أربع متغيرات. نستخدم النظرية المقترحة والحل الدقيق لدراسة تأثير العوامل المختلفة مثل الخواص الميكانيكية على سلوك الانحناء للصفائح المتدرجة وظيفيا.

تمت مقارنة نتائج انحناء الصفائح المتدرجة وظيفيا التي تم الحصول عليها بواسطة النظرية الحالية المكررة مع تلك الموجودة في المراجع، حيث تبين بوضوح أنها في توافق جيد جدًا.

منه، يمكن القول إن النظرية الحالية المكررة أبسط وأكثر دقة لحل سلوك انحناء الصفائح المتدرجة وظيفيا الخاضعة لمختلف المساند.

الكلمات المفتاحية: صفيحة متدرجة وظيفيا، الانحناء، النظرية المكررة ذات الترتيب العالي، مساند مختلفة