République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique Université de Tissemsilt

Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Génie Civil, Mécanique et Transport

Mémoire de fin d'études pour l'obtention du diplôme
De master académique en

Filière : **Génie mécanique**

Spécialité : **Fabrication mécanique et productique**

Présentée par : **DJAARAOUI NASSIRA**

Thème

Analyse modale des plaques homogènes : cas sain et Endommage.

Soutenu le, 22 /09/2026

Devant le Jury :

HAMDI Amine	Président	professeur	Univ-Tissemsilt
EL HANNANI Abdelhak	Encadrant	M.C.A	Univ-Tissemsilt
BOUBABOURI Benaissa	Examinateur	M.C.B	Univ-Tissemsilt

Année universitaire : 2025-2026

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Dieu Tout-Puissant de m'avoir accordé la force et la patience nécessaires pour mener à bien ce travail.

J'adresse mes sincères remerciements à mon encadrant Monsieur ABDELHAK EL HANNANI pour son accompagnement, ses précieux conseils et ses orientations tout au long de la réalisation de cette mémoire.

Mes remerciements vont également à Monsieur HICHAM TALEB BEN DIAB pour son soutien, son aide et ses conseils qui ont contribué à l'aboutissement de ce travail.

Je remercie aussi les membres du jury pour avoir accepté d'évaluer ce mémoire et pour l'intérêt qu'ils porteront à ce travail.

Je tiens également à remercier l'ensemble des enseignants du Département de Génie Mécanique de la Faculté des Sciences et de la Technologie pour la qualité de la formation et des connaissances transmises durant mon parcours universitaire.

Enfin, j'adresse mes sincères remerciements à ma famille et à toutes les personnes qui m'ont soutenue et encouragée de près ou de loin dans la réalisation de ce travail.

Dédicaces

Je dédie ce travail à toutes les personnes qui ont contribué, de près ou de loin, à la réussite de ce parcours.

À ma chère famille, particulièrement mes parents, pour leur amour, leurs sacrifices et leur précieux soutien qui m'ont accompagné tout au long de mes études.

À mes enseignants, pour leurs conseils, leur patience et les connaissances qu'ils m'ont transmises durant mon parcours universitaire.

À mes amis et collègues, pour leurs encouragements, leur soutien et les beaux moments partagés. Que ce travail soit le fruit de tous les efforts fournis et une marque de reconnaissance envers toutes les personnes qui m'ont aidé à atteindre cet objectif. Merci à vous tous

Résumé

Les plaques minces sont des éléments mécaniques importants largement utilisés dans plusieurs applications industrielles. Au cours de leur fonctionnement, elles peuvent être soumises à différentes sollicitations mécaniques et vibrations pouvant provoquer l'apparition de défauts tels que les fissures, ce qui affecte leur comportement mécanique et leurs propriétés dynamiques.

L'objectif de ce travail est d'étudier et d'analyser l'influence de la présence des fissures sur les caractéristiques vibratoires des plaques minces. Dans un premier temps, une modélisation numérique d'une plaque saine a été réalisée, ensuite une fissure a été introduite dans la plaque afin d'étudier son influence sur les fréquences propres.

La méthode des éléments finis a été utilisée à l'aide du logiciel de calcul ABAQUS pour effectuer l'analyse numérique. Les fréquences propres ont été calculées pour les deux configurations étudiées : la plaque saine et la plaque fissurée. Une comparaison des résultats obtenus a été effectuée afin d'analyser l'effet de la présence de la fissure sur le comportement vibratoire de la structure.

Cette étude met en évidence l'importance de l'analyse des défauts dans les structures minces afin de mieux comprendre leur comportement dynamique et d'évaluer l'influence des fissures sur les propriétés vibratoires des plaques

Mots clés :

Mécaniques de la rupture, fréquences propres, vibrations libre

Abstract

Thin plates are important mechanical components widely used in various industrial applications. During their operation, they may be subjected to different mechanical loads and vibrations that can lead to the appearance of defects such as cracks, which affect their mechanical behavior and dynamic properties.

The objective of this work is to study and analyze the influence of cracks on the vibrational characteristics of thin plates. First, a numerical model of an undamaged plate was developed. Then, à crack was introduced into the plate to investigate its influence on the natural frequencies.

The finite element method was used with the ABAQUS software to perform the numerical analysis. The natural frequencies were calculated for the two configurations considered : the undamaged plate and the cracked plate. The obtained results were compared to analyze the effect of the presence of a crack on the vibrational behavior of the structure.

This study highlights the importance of defect analysis in thin structures in order to better understand their dynamic behavior and evaluate the influence of cracks on the vibrational properties of plates

Key Works : Fracture mecanics, Natural frequencies , free vibration

ملخص

تُعدّ الصفائح الرقيقة مكونات ميكانيكية مهمة تُستخدم على نطاق واسع في العديد من التطبيقات الصناعية. أثناء تشغيلها، قد تتعرض هذه الصفائح لإجهادات ميكانيكية واهتزازات متنوعة قد تُسبب عيوبًا مثل الشقوق، مما يؤثر على سلوكها الميكانيكي وخصائصها الديناميكية.

يهدف هذا العمل إلى دراسة وتحليل تأثير وجود الشقوق على الخصائص الاهتزازية للصفائح الرقيقة. في البداية، تم إنشاء نموذج عددي لصفيحة صوتية؛ ثم تم إدخال شق في الصفيحة لدراسة تأثيره على الترددات الطبيعية.

استُخدمت طريقة العناصر المحدودة مع برنامج لإجراء التحليل العددي. حُسبت الترددات الطبيعية للتكوينين المدروسين: الصفيحة الصوتية والصفيحة المتشققة. أُجريت مقارنة للنتائج المُتحصل عليها لتحليل تأثير الشق على السلوك الاهتزازي للهيكل.

تسلط هذه الدراسة الضوء على أهمية تحليل العيوب في الهياكل الرقيقة لفهم سلوكها الديناميكي بشكل أفضل ولتقييم تأثير الشقوق على الخصائص الاهتزازية للصفائح.

الكلمات الدالة

ميكانيك الكسر, التردد الطبيعي ,الاهتزاز الحر

Liste des matières

Introduction Générale :……..

I.1 Introduction :……...01

1.2 Historique sur la rupture : ……..01

1.3 Catégories de la rupture : ……...02

1.3.1 Définition sur la mécanique de la rupture :…….02

1.3.2 Facture du influençant la déformation :……...03

1.4 La fissure :……03

1.4.1 Modes de fissure :……04

1.4.2 Modalisation de la fissure :……..04

1.4.3 La propagation de la fissure selon le type de matériau :……..05

1.5 Facteur d'intensité des contraintes :…….…06

1.6 Utilisation de la mécanique de la rupture en conception :…….. 07

1.6.1 Le critère d'énergie :……...08

1.6.2 Critères de rupture et propagation :……....10

1.6.3 Critères d'amorçage :…….....11

1.6.4 Plasticité en fonte d'entaille :…….....11

1.6.5 Loi de fissuration par fatigue (propagation) :……....12

1.6.6 Influence de l'état de contrainte sur la taille de la zone plastique :……...13

1.6.7 Forme et taille de la zone plastique :……14

1.7 l'influence de vibration libre sur les plaques fissure :……..……16

1.8 Conclusion :……...16

II.1 Introduction :…….....18

II.2 Historique des plaques :……20

II.3 Définition de plaque :…….....22

II.4 Différents types de plaque :…… …...22

II.4.1 Les plaques isotropes :……...22

II.4.2 Les plaques orthotropes :……23

II.4.3 Les plaques anisotropes :……23

II.5 Les plaques minces :……...23

II.6 La vibration des plaques :……...24

II.6.1 Vibration libre :……...24

II.7 Théorie de Love-Kirchhoff pour les plaques minces :…….....24

II.8 Hypothèses pour l'étude des plaques minces :……...25

II.9 Le modelé classique Love- Kirchhoff :……..27

II.10 Cinématique d'une plaque mince :…….....28

II.11 Définition de la méthode des éléments finis :…….30

II.12 Type des éléments finis :……31

II.13 Solution par éléments finis des problèmes physiques :……..……31

II.14 Eléments base sur la théorie de Kirchhoff :…….....33

II.15 Matrice de rigidité de flexion base sur la théorie de Kirchhoff :…….....34

II.16 Conclusion :…….....43

III.1 Introduction :…… 46

III.2 Présentation du logiciel de calcul :……..49

III.2.1 Unités de logiciel de calcul ABAQUS/CAE :…….50

III.2.2 Interface utilisateur :……50

III.2.3 Préprocesseur :…… 51

III.2.4 Solveur :…….....51

III.3 Géométrie Utilisée :…….....52

III.4 Matériau étudie :……..54

III.4.1 Les conditions aux limites :…….....55

III.4.2 Type de l'élément :…….....56

III.5 Résultats et discussions : ……...……...…….....57

III.6 plaque Sain et Fissurée :……57

III.7 L'effet de la longueur de la fissure sur les fréquences propres :…….....59

III.8 L'effet de la position de la fissure sur les fréquences propres :……..62

III.9 Conclusion :…….....64

Conclusion Générale :……....65

Liste des figures

Figure I.1 : Modes de fissuration pouvant être observes par la fissure au cours de sa propagation…….04

Figure I.2 : Les différents types de fissures ……..05

Figure I.3 : la rupture d'une éprouvette fissurée d'un matériau fragile…….....06

Figure I.4 : la rupture d'une éprouvette fissurée d'un matériau ductile ……06

Figure I.5 : Approche classique (RDM) ……08

Figure I.6 : Approche utilisant la numérique de la rupture :……..08

Figure I.7 : Fissure traversant de longueur 2a dans une plaque infinie …….09

Figure I.8 : Comparaison entre l'approche classique et la MLR ……...10

Figure I.9 Amorçage et propagation quasi-statique ……..11

Figure I.10 Représentation générale de l'évolution du taux de croissance de fissure en fonction de l'amplitude de facteur d'intensité des contraintes : da/ DN = (ΔK)…….12

Figure I.11 : L'amplitude effective du facture d'intensité des contraintes …….13

Figure I.12 : Définition des valeurs particulières de α selon Banks et al ……15

Figure II.1 : Géométrie d'une plaque de forme rectangulaire ……22

Figure II.2 : Illustration de la plaque de Love Kirchhoff ……25

Figure II.3 : Déformation d'une plaque mince ……26

Figure II.4 Cinématique de Love Kirchhoff …….....27

Figure II.5 : Déplacement du plan moyen avec mise en évidence de la rotation d'une fibre normale

Autour des axes X et Y ……..29

Figure II.6 : Rotation d'une fibre normale selon les axes X et Y mettant en évidence les relations entre u_0, v_0 et les ongles θ_x, θ_y correspondant du plan moyen ……29

Figure II.8 : Eléments de plaque en flexion ……33

Figure II.9 : Repère cartésien ……34

Figure II.10 : Repère adimensionnel …….....34

Figure III.1 : Modelés étudié d'une plaque saine et fissurée…….....47

Figure III.2 : Variation de la longueur de fissure a (mm) = 5mm, 15mm et 30mm……48

Figure III.3 : la hauteur de position fissure Y=30mm, Y=60mm, et Y=90mm……49

Figure III.4 : Interface utilisateur ABAQUS…….51

Figure III.5 : Représentation du maillage utilise en ABAQUS…….....52

Figure III.6 : Définition de la géométrie et lancer une simulation……...53

Figure III.7 : Conditions aux limites encastrement au bord de la fissure…….55

Figure III.8 : Les éléments hexahedral linéaire C3D8 a six points de Gauss……...56

Figure III.9 : Géométrie, maillage……..57

Figure III.10 : Plaque fissurée et saine……..58

Figure III.11 : Plaque fissurée et saine……..59

Figure III.12 : Cinq modes propres d'une plaque fissurée et encastrée……61

Figure III.13 : Cinq modes propres d'une plaque encastrée, avec différentes positions de fissure……62

Liste des tableaux

Tableau I.1 : Valeurs particulières de α……....15

Tableau III.1 : Les unités dABAQUS / CAE……50

Tableau III.2 : La géométrie et les dimensions de l'éprouvette……....53

Tableau III.3 : Composition chimique de L'acier S235 (la masse en ٪)……..54

Tableau III.4 : Propriétés mécaniques de l'acier S235……54

Tableau III.5 : Résultats des fréquences naturelles des deux plaques sain et fissurée……..58

Tableau III.6 : Résultats des fréquences naturelles d'une fissurée avec différentes longueurs de fissure…..60

Tableau III.7 : Résultats des fréquences naturelles d'une plaque fissurée avec différentes positions de fissure…….....62

Abréviations et Notations

a : la longueur de fissure [mm] $\boldsymbol{\sigma_{ij}}$ **:**

Champ de contrainte uniforme

$\boldsymbol{f_{ij}}$ **:** Fonction de l'angle θ

$\boldsymbol{K_1}$ **:** Facteur d'intensité des contraintes

Y : coefficient de forme

S : Contrainte à l'infini et la longueur de demi-fente

$\boldsymbol{\beta}$ **:** Facteur de correction géométrique

G : l'énergie de Griffith

E : module de Young

da/dN : vitesse de propagation de la fissure [m/s]

$\boldsymbol{K_m}$ **:** Facteur d'intensité de contrainte maximale

$\boldsymbol{K_{th}}$ **:** Amplitude du FIC seuil pour des amplitudes constantes

α : paramètre fonction de l'angle θ et de l'état de contraintes

σ : Les Contraintes

$\boldsymbol{\mathcal{E}}$ **:** La déformation

$\mathbf{u_0}$, $\mathbf{v_0}$, $\mathbf{w_0}$: Représenter les éléments de champ de déplacement sur le plan de la plaque

U : coefficient de poisson

Introduction générale

Les structures et les pièces mécaniques minces représentent des éléments importants largement utilisés dans plusieurs applications industrielles, grâce à leur faible poids et leur capacité à supporter différents types de sollicitations. Durant leur fonctionnement, ces structures peuvent être soumises à plusieurs phénomènes mécaniques, parmi lesquels l'apparition des fissures et des défauts qui influencent leur comportement mécanique, notamment leurs propriétés vibratoires et leur stabilité.

La mécanique de la rupture et l'étude de la propagation des fissures constituent des domaines essentiels dans l'analyse du comportement des matériaux et des structures mécaniques. Elles permettent de comprendre l'influence des défauts sur les performances des structures et d'évaluer leurs effets sur la sécurité et la continuité de fonctionnement. Par ailleurs, l'étude des vibrations libres des plaques minces représente un sujet important pour l'évaluation du comportement dynamique des structures, à travers la détermination des modes propres et des fréquences propres qui caractérisent leurs propriétés dynamiques.

L'objectif de cette étude est d'analyser le comportement vibratoire des plaques minces à travers le développement d'un modèle mathématique permettant d'étudier les caractéristiques dynamiques de la structure. Une simulation numérique sera également réalisée à l'aide du logiciel de calcul ABAQUS afin d'obtenir les résultats concernant les modes propres et les fréquences propres, ainsi que leur analyse selon les différentes configurations étudiées. Ce mémoire est divisé en trois chapitres principaux :

•Le premier chapitre : présent les notions générales de la mécanique de la rupture et de la fissuration.

•Le deuxième chapitre : est consacré à l'étude des plaques minces (Plaques minces) et présente le développement mathématique du modèle utilisé pour l'analyse des vibrations libres et la détermination des caractéristiques dynamiques représentées par les modes propres et les fréquences propres.

•Le troisième chapitre : présente la partie pratique de l'étude, à travers la modélisation et la simulation numérique à l'aide du logiciel ABAQUS, puis l'analyse et la discussion des résultats numériques obtenus concernant l'analyse vibratoire des plaques.

Chapitre I :

Généralité sur la mécanique de la rupture et fissuration

I.1 Introduction :

La notion de rupture a été introduite aux alentours de 1920. Il vise à décrire le comportement de la fissuration des structures des matériaux en utilisant divers paramètres tels que le champ de contraintes, la dimension de la fissure et la résistance du matériau à la fissuration.

Vers 1940, les premières études (déplacements, déformations et contraintes) autour d'une fissure ont été menées par George Rankine Irwin. La suite a marqué le début du développement de la discipline. Voici Quelques exemples de ruptures catastrophiques qui ont conduit les chercheurs et les ingénieurs à déterminer les causes de ces ruptures. (Les navires de type « Liberty Ships », effondrement du pont Silver Bridge en 1967).

En pratique toutes les structures de matériaux comportent des imperfections, qu'elles soient intégrées lors de la création du matériau ou lors de la production de la pièce (comme les défauts d'usinage ou de soudure, par exemple). Il est important de tenir compte de ces défauts, car ils influent sur la fiabilité de la structure et sa longévité. [1]

I.2 Historique sur la rupture :

Avant la révolution industrielle, les matériaux employés étaient principalement le bois de construction, la pierre, la brique et le mortier. La brique et le mortier présentent une certaine fragilité lorsqu'ils sont soumis à des efforts de traction. C'est pour cela que toutes ces constructions anciennes (pyramides, ponts romains...) qui ont réussi à défier le temps se trouvaient en situation de compression. Ce n'est qu'avec l'avènement de la révolution industrielle au début du XIXe siècle et l'emploi de l'acier que nous avons été en mesure de créer des structures capables de supporter des charges de traction. Cependant, l'emploi de nouveaux matériaux ductiles (tels que l'acier et autres alliages métalliques) pour des charges en traction a néanmoins entraîné certains problèmes, Il arrivait parfois que des cassures se produisent à des niveaux de chargement bien en dessous de la limite d'élasticité.

Nous avons minimisé ces risques de rupture en augmentant la taille des structures. Cependant, cette solution est devenue insatisfaisante face à la nécessité croissante de simplifier les structures tout en diminuant les coûts.

Il était donc nécessaire de développer la recherche en mécanique de la rupture. L'augmentation des accidents, combinée avec l'exigence contemporaine de simplifier les structures et de

répondre à des sollicitations mécaniques, thermiques et environnementales de plus en plus rigoureuses, a incité les designers à obtenir une évaluation nettement plus précise du champ de contraintes et des déformations locales autour de ces anomalies pour mieux anticiper le risque de fracture.

Ces préoccupations constituent la base de la mécanique de la rupture dont les objectifs sont **:** - L'identification de la zone des contraintes et des déformations près d'une entaille ou d'une fissure.

- L'évaluation de la capacité d'un matériau à résister à l'expansion d'un défaut. - Le développement de nouvelles techniques pour le calcul des structures, ainsi que l'établissement de procédures fiables et plus économiques de contrôle et d'entretien. - La prévention de la longévité des structures présentant des défauts dont les dimensions sont connues. [2]

I.3 Catégories de la rupture :

On identifie deux types de rupture des structures :

- Celle due à une négligence lors de la conception, construction ou utilisation de la structure.
- Celle qui découle de l'utilisation d'un nouveau matériau ou d'une nouvelle méthode, susceptible de provoquer une rupture imprévisible.
- Dans la première situation, on peut prévenir le risque de rupture si la structure est correctement dimensionnée avec des matériaux appropriés et que les charges sont correctement estimées.
- Dans le second scénario, éviter la rupture est plus complexe. Quand un designer emploie un nouveau matériau ou une nouvelle méthode, il n'a pas nécessairement la maîtrise totale de tous les éléments, car l'application de techniques inédites, bien qu'elle offre des bénéfices, entraîne inévitablement des soucis potentiels. [2]

I.3.1 Définition sur la mécanique de la rupture :

L'analyse de la rupture des matériaux comportant des fissures et des défauts relève du domaine de la mécanique de la rupture. Grâce à l'approche de la rupture, il nous est possible d'établir le seuil de contrainte au-delà duquel des fissures de dimension connue peuvent se

diffuser à travers le matériau, entraînant ainsi une rupture. Ceci nous permet d'identifier une caractéristique du matériau qui peut être traduite en termes de résistance à la fracture (brise) ou ductilité. Puisque les structures sont conçues de manière à ce que les contraintes nominales ne surpassent généralement pas la limite d'élasticité du matériau, elles seraient donc par conséquent protégées contre la défaillance due à la rupture de type ductile.

Elles ne sont pas infaillibles contre une destruction due à l'existence d'une fissure préexistante avant leur mise en fonctionnement ou générée pendant leur utilisation par fatigue (comme ce fut le cas lors de la tragédie ferroviaire de Meudon) ou par corrosion interne. [3]

I.3.2 Facteurs influençant la déformation :

a. Nature du matériau :

La structure du matériau et sa composition chimique ont une grande incidence sur sa capacité à résister à la déformation. La structure du matériau est déterminée au départ par les traitements thermiques et mécaniques auxquels il a été soumis. Cependant, cette configuration peut évoluer au fil de l'utilisation du Matériau en raison des contraintes mécaniques qu'il subit. [3]

b. Température :

Lorsque la température d'exploitation d'un matériau s'accroît, sa capacité à résister à la déformation plastique se réduit. Si la température T dépasse environ (0.3 ~ 0.4) x Tf (où Tf est la température de fusion), le matériau peut être sujet à une déformation persistante au fil du temps, connue sous le nom de déformation. Les variations de température peuvent influencer considérablement la déformation des objets, notamment pour les matériaux sensibles à la chaleur comme les plastiques. La dilatation thermique Peut provoquer une distorsion lorsque la température varie. [3]

c. vitesse de sollicitation :

Elle a un impact sur la capacité du matériau à se déformer et sur sa vulnérabilité. Certains matériaux se brisent soudainement lorsqu'ils sont exposés à un choc (vitesse de sollicitation élevée), tandis qu'ils présentent une déformation significative avant de se fracturer sous une vitesse de sollicitation basse**.** [3]

I.4 La fissure :

Chaque composant mécanique présente des fissures, même si elles sont invisibles à l'œil nu. Ces fissures peuvent se développer graduellement ou de manière abrupte, le second scénario étant fréquemment associé à une rupture ; anticiper ces occurrences est donc crucial pour la détermination des dimensions. La mécanique de la rupture est la discipline qui facilite la modélisation des fissures. [4]

I.4.1 Modes de fissure :

On définit une fissure comme la surface qui divise localement un solide en deux segments. Ainsi, le mouvement devient discontinu sur cette surface et les trois éléments vectoriels de cette discontinuité constituent les trois types de rupture :

Mode I : ouverture de la fissure, où les mouvements à ses bords sont orthogonaux à la direction dans laquelle elle se propage.

Mode II : Un mode de cisaillement dans le plan, où les mouvements aux bords de la fissure sont en parallèle avec la direction de progression.

Mode III : Mode de rupture en cisaillement hors du plan, où les mouvements aux bords de la fissure sont parallèles au fond de celle-ci**.** [5]

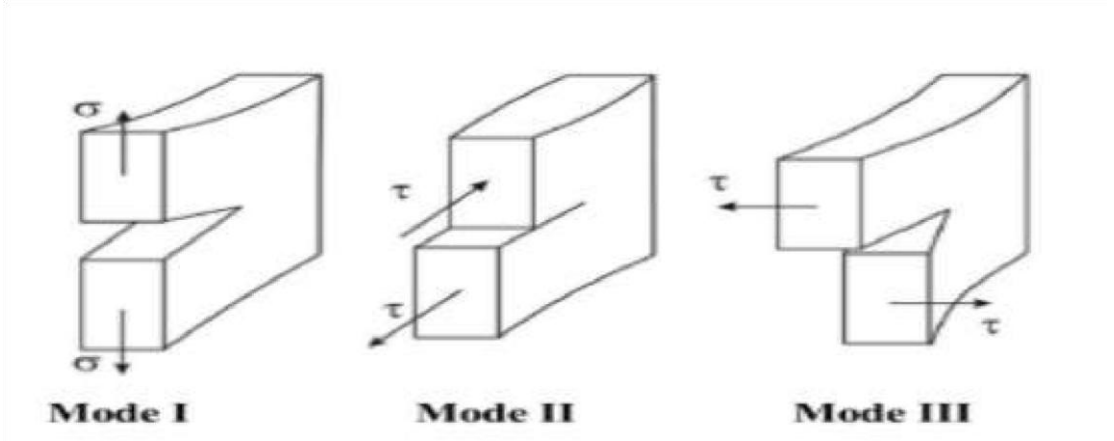


Figure I .1 : Modes de fissuration pouvant être observes par la fissure au cours de sa propagation [5]

I.4.2. Modalisation de la fissure :

Une fissure désigne une légère fente présente dans un matériau solide. Cette fissure peut se manifester sur la surface de l'objet (fissure de surface), être localisée entièrement à l'intérieur et ainsi rester cachée à l'œil nu (fissure interne), ou encore parcourir intégralement l'objet (fissure traversant).

- Ces trois cas de figure sont schématisés sur la figure**. [6]**

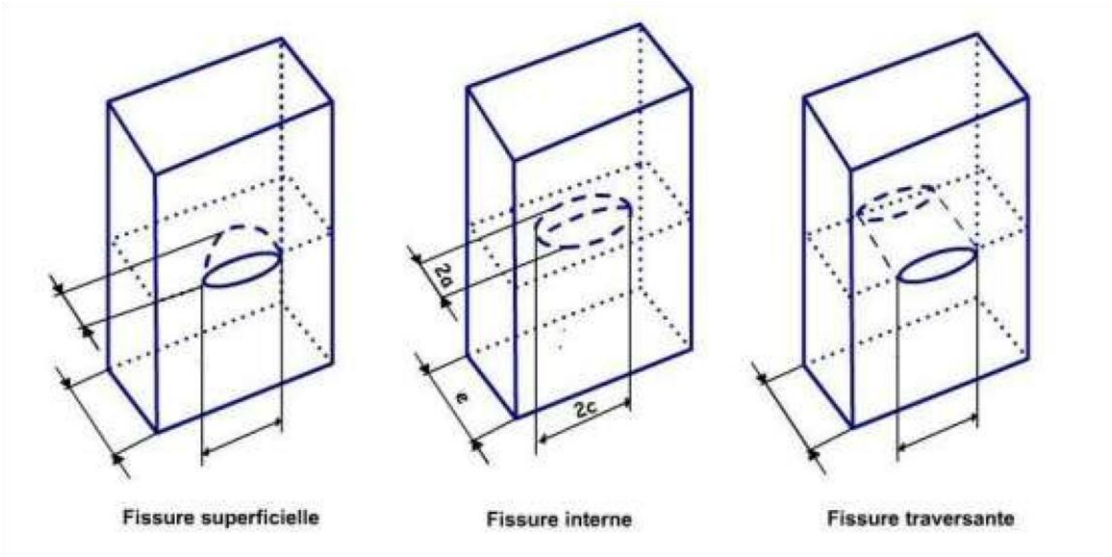


Figure I .2 : Les différents types de fissures [6]

I.4.3 La propagation de la fissure selon le type de matériau :

La représentation des fissures se réfère à l'illustration de leur progression au sein de divers matériaux et structures. Plusieurs études sur ce sujet ont été identifiées dans les résultats de recherche, y compris celles concernant la simulation de la propagation des fissures dans les structures légères à l'aide de la méthode étendue des éléments finis.

• L'analyse inclut la modélisation de la fermeture causée par la plasticité lors d'élargissement des fissures liées à la fatigue dans l'acier.

• Modélisation de la fracture quasi-fragile du béton à l'échelle méso.

Ces travaux utilisent une variété d'instruments et de modèles informatiques pour simuler la réaction des matériaux et des structures aux diverses contraintes et conditions

environnementales, dans le but de prévoir et de comprendre la propagation et la rupture des fissures.

Les deux animations suivantes sont produites à partir d'images recueillies lors du chargement en traction de spécimens pré-fissurés, l'une pour un matériau « fragile » (à gauche) et l'autre pour Un matériau « ductile » (sur la droite). Il est aisé de constater les divergences de comportement entre ces sortes de matériaux. L'échantillon fragile subit une rupture abruptement causée par l'élargissement d'une fissure qui donne l'impression de « déchirer » l'éprouvette. Avant de se fracturer, le matériau ductile montre une déformation plastique notable autour de la zone pré-fissurée. Les modèles développés par la suite ne sont adaptés qu'aux matériaux présentant un comportement élastique fragile (éprouvette de gauche). [7]

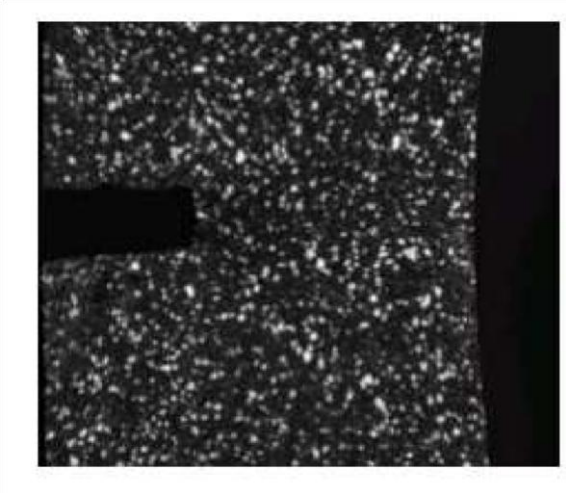


Figure I.3 : La rupture d'une éprouvette Fissurée d'un matériau fragile [7]

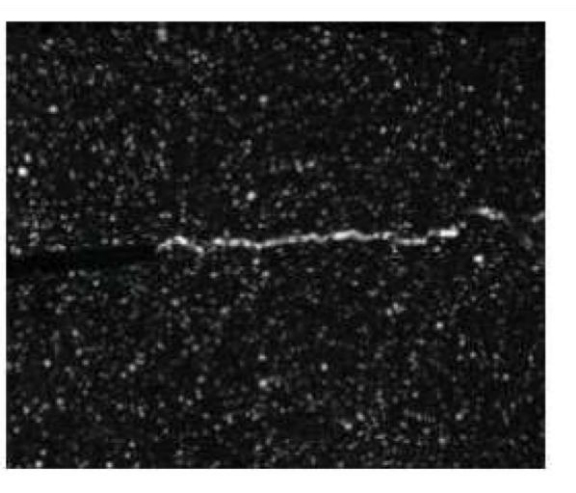


Figure I.4 : La rupture d'une éprouvette fissurée d'un matériau ductile [7]

I.5 Facteur d'intensité des contraintes :

Le facteur d'intensité des contraintes, généralement représenté par K, décrit l'état de contraintes à l'extrémité d'une fissure et est couramment utilisé en mécanique de rupture. Cette notion est généralement mise en œuvre sous l'hypothèse que le matériau est uniforme et dans un contexte d'élasticité linéaire isotrope. Il est principalement utilisé comme une tolérance aux dommages pour définir des critères de rupture. L'intensité des contraintes peut également être élargie aux matériaux présentant une plasticité confinée à l'extrémité de la fissure.

L'évaluation de l'ampleur des fissures dans les matériaux fait appel à un paramètre physique appelé la magnitude des contraintes. On le caractérise comme la contrainte à l'extrémité d'une fissure divisée par la racine carrée de la longueur de cette fissure. Il existe plusieurs méthodes pour calculer le facteur d'intensité des contraintes, y compris l'utilisation de grandeurs mécaniques globales visibles, la technique des éléments finis et diverses démarches analytiques.

L'élasticité nous permet de développer une expression analytique pour la contrainte au sommet de la fissure. On peut exprimer les composantes du tenseur σ de la manière suivante : [7]

$$\sigma_{ij} = \frac{k}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) \qquad \text{(I .1)}$$

$\boldsymbol{K1}$: IRWIN a recherché une formule qui pourrait caractériser le domaine de contraintes aux alentours de la fissure, en prenant en considération la zone plastique lors de l'extension de la fissure. Cela indique que la fissure s'installe et se diffuse lorsque le facteur d'intensité de contraintes KI atteint un seuil critique KIC, connu sous le nom de ténacité, qui définit quantitativement la résistance d'un matériau à l'expansion rapide d'une fissure en mode I. Il a donc formulé le critère de contrainte selon la relation.

$$k_1 = Y.\sigma\sqrt{\pi r} \qquad \text{(I.2)}$$

Avec :

Y : Il s'agit d'un coefficient de forme, une fonction géométrique reliant l'éprouvette à la longueur de fissure, qui est fourni pour les pièces majeures via des tableaux. Concernant la flexion à trois points :

$$Y = \frac{k_1}{\sigma\sqrt{S\alpha}} \qquad \text{(I. 3)}$$

Où S est la contrainte à l'infini et a est la longueur de la demi-fente. β est un facteur de correction géométrique. [7]

I.6 Utilisation de la mécanique de la rupture en conception :

La figure 2 présente une comparaison entre la méthode traditionnelle de calcul des dimensions des structures qui repose sur la limite d'élasticité du matériau σE, et l'approche qui

se fonde sur le concept de ténacité KC dérivé de la mécanique linéaire de rupture (MLR). Dans la première situation, nous concevons les structures de manière à ce que les contraintes appliquées σ demeurent en dessous de la limite d'élasticité ($\sigma < \sigma E$). On a généralement recours à un facteur de sécurité pour éviter tout danger de rupture fragile ($\sigma < \propto \sigma E \ avet < 1$).Cette méthode repose sur deux variables σ et ; elle ne prend pas en compte l'existence potentielle de défauts tels que des microfissures, par exemple. [8]

La méthode fondée sur la mécanique linéaire de rupture repose sur trois variables : la contrainte appliquée, la ténacité KC qui se substitue à la limite d'élasticité et une variable supplémentaire qui correspond à la dimension du défaut. Toutefois, il existe deux méthodes alternatives de la Mécanique de la rupture : l'une s'appuie sur l'idée d'intensité des contraintes critiques (ténacité du matériau), tandis que l'autre se fonde sur un critère énergétique. Sous certaines conditions, ces deux méthodes sont équivalentes. Nous allons les introduire succinctement avant d'exposer les hypothèses qui les soutiennent et de plonger dans les détails des calculs qu'elle engendre.

[8]

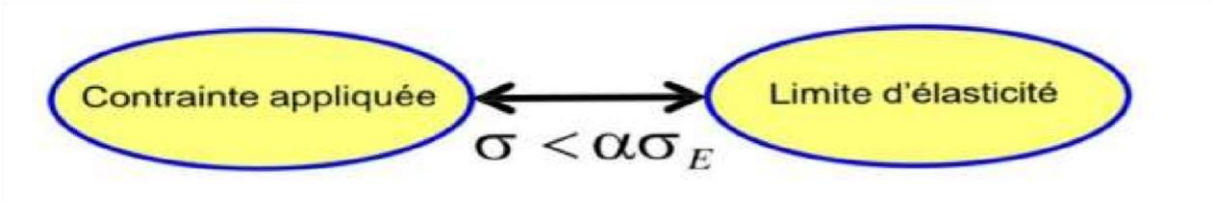


Figure I.5 : Approche classique (RDM) [3]

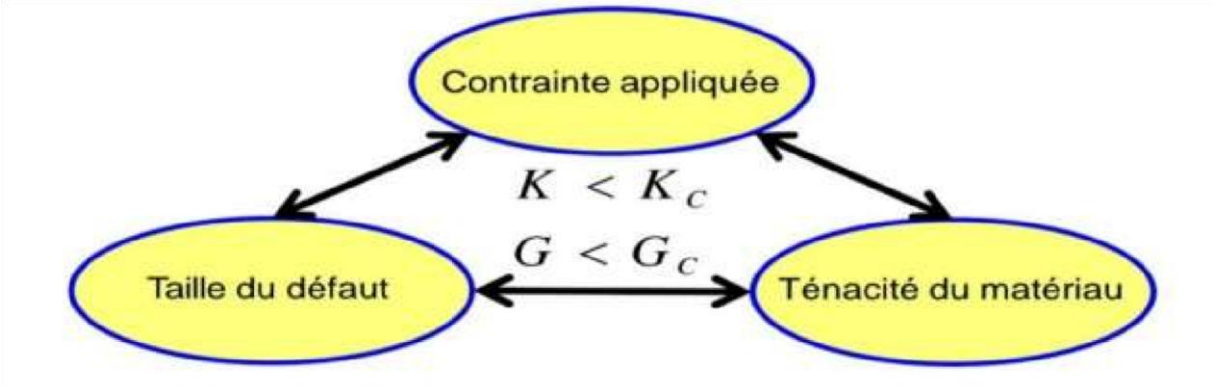


Figure I.6 : Approche utilisant la numérique de la rupture [3]

I.6.1 Le critère d'énergie :

L'indicateur d'énergie constitue un instrument crucial en mécanique de rupture pour anticiper la fracture des matériaux. Il se fonde sur l'évaluation et la quantification des taux de restitution d'énergie au niveau local. Cette approche a été employée dans diverses études pour examiner les processus de rupture de divers matériaux, comme le bois résineux et les poutres en béton précontraint exposées à des forces de cisaillement intenses et leurs seuils critiques locaux.

Cette technique a aussi été employée dans le cadre de recherches sur les géo-matériaux granulaires et leur comportement mécanique, en recourant à des approches micromécaniques, novatrices basées sur la dissipation.

Le critère d'énergie est un instrument essentiel pour saisir les processus de rupture des matériaux et élaborer des techniques pour anticiper la rupture des structures, Pour une fissure de longueur 2a dans une plaque de dimensions infinies, faite d'un matériau avec un module d'Young E et soumise à une tension, l'énergie de Griffith G par unité de surface fissurée est donnée par :

$$G = \frac{[\pi(\sigma^{\infty})2a]}{E} \qquad (I.4)$$

Si l'on continue à intensifier la contrainte σ ∞, la rupture surviendra lorsque l'énergie G atteindra sa valeur critique correspondant à une contrainte appliquée σ_R. Ceci est en accord avec la relation mentionnée précédemment.

$$G = \frac{(\pi\sigma^2 a)}{E} \qquad (I.5)$$

Il est à noter qu'avec une valeur de GC fixée, la contrainte de rupture σ_R varie. De même, lorsque GC et σ sont fixés, la longueur critique du défaut $a_c$est déterminée par. [9]

$$a_c = \frac{(E_{Gc})}{\pi(\sigma^{\infty})^2} \qquad (I.6)$$

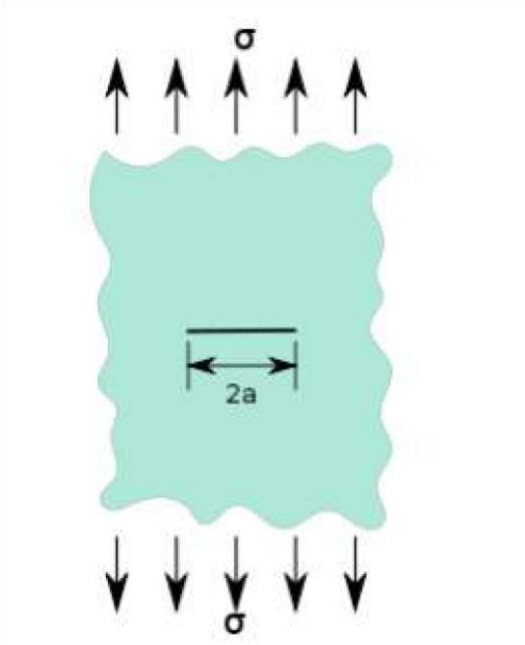


Figure I.7 : Fissure traversant de longueur 2a dans une plaque infinie [3]

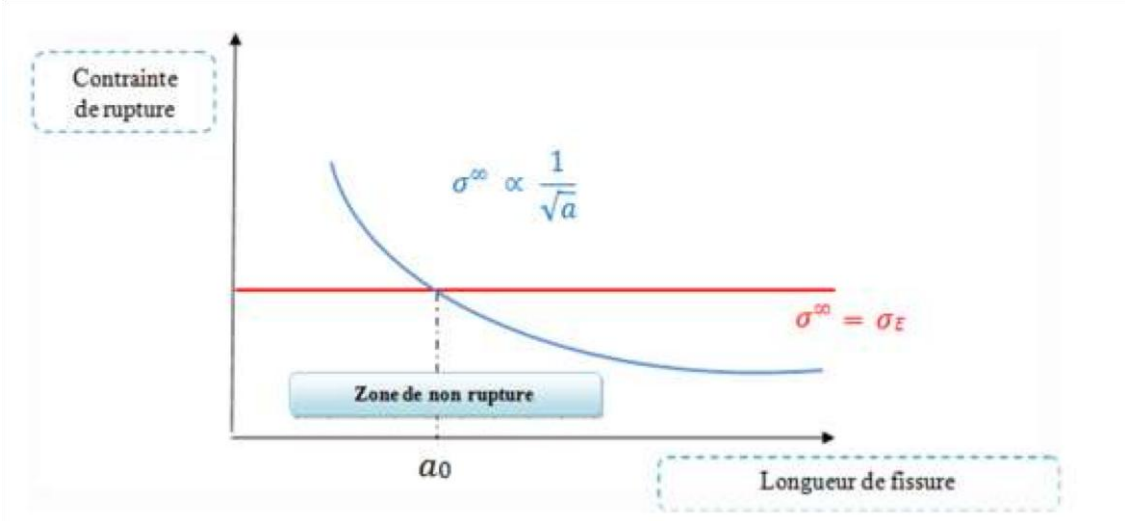


Figure I.8 : Comparaison entre l'approche classique et la MLR [3]

I.6.2 Critères de rupture et de propagation :

Les conditions de rupture et de propagation sont influencées par le matériau utilisé et les conditions d'application de la contrainte. Par exemple, pour les matériaux composites stratifiés, le taux de restitution d'énergie critique ainsi que divers facteurs comme l'orientation des plis

voisins, la tension de compression ou la vitesse d'application de la contrainte peuvent avoir un impact sur la fissuration et le délaminage.

Pour les céramiques, la résistance à la fissuration lente assistée par l'environnement dépend de la microstructure et de la taille de grain.

Des outils de simulation numérique peuvent être employés dans le cadre des recherches pour analyser la propagation des fissures et confirmer les lois de propagation des fissures sous impact.

On peut aussi, grâce à des études en laboratoire, tenter de reproduire des conditions très similaires à celles présentes sur le terrain pour analyser la propagation de fractures dans des roches soumises à des contraintes thermo-hydro-mécaniques complexes.

On distingue plusieurs sortes de paramètres concernant les fissures : Amorçage, bifurcation, propagation, branchement et arrêt.

I.6.3 Critères d'amorçage

Il est démontré que l'amorçage d'une fissure peut être expliqué en se basant uniquement sur le concept de minimum relatif de l'énergie globale. Les critères d'amorçage obtenus sont influencés par la sélection de la forme de l'énergie. Notamment dans le contexte d'une énergie élastique volumique et d'une énergie de surface liée au saut de déplacement, le critère d'amorçage obtenu se présente comme un critère en contraintes du genre courbe intrinsèque. [3]

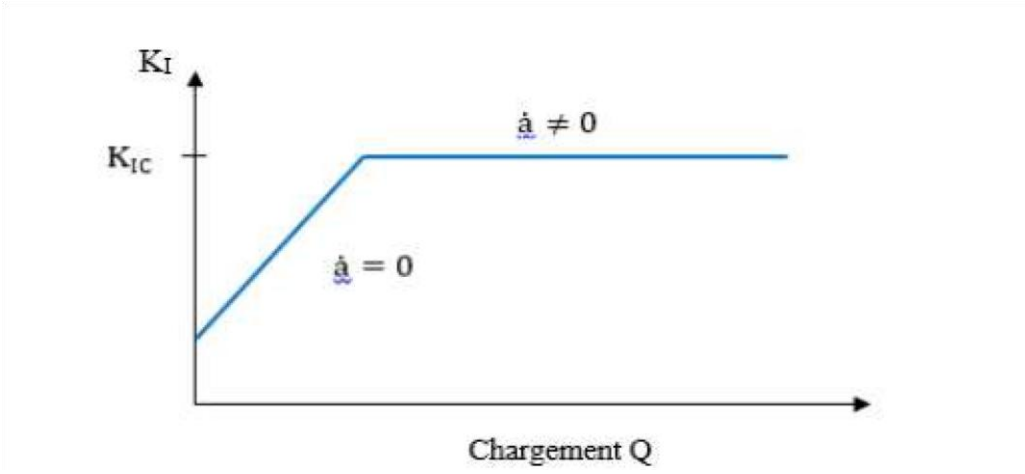


Figure I.9 : Amorçage et propagation quasi-statique. [3]

I.6.4 Plasticité en front d'entaille :

L'expression « Plasticité Notch-front » désigne une technique dénommée « MU3F » (Me surement by Ultra Sound Focus on Crack Fronts), qui nous offre la possibilité d'observer l'évolution de l'amplitude de l'écho ou la localisation du pic de l'écho dynamique résultant de la diffraction émanant d'une entaille ou d'un bord de fissure.

On peut employer cette technique pour diverses applications, comme l'identification précoce du début d'une fissure de fatigue, le suivi de son avancement, la détection et l'évaluation de l'ouverture et de la fermeture d'une fissure, la détermination de la configuration du front de fissure, l'observation du fléchissement d'une fissure ainsi que la quantification du mouvement de l'ouverture (C.T.O.D.). On peut également avoir recours à cette méthode pour identifier le début d'une rupture ductile sous une charge monotone, ce qui offre la possibilité d'obtenir une Mesure exacte de J1C. [9]

La technique repose sur l'analyse de la diffraction d'un faisceau ultrasonore focalisé à travers le bord de la fissure. [9]

I.6.5 Loi de fissuration par fatigue (propagation) :

Paris et al. Il a été démontré que la loi de propagation des fissures peut être simplifiée à une formulation générale en introduisant un nouveau paramètre : l'amplitude du facteur de concentration des contraintes $\Delta K = K_{max} - K_{min}$. On note donc une similitude dans les courbes da/dN en fonction de N pour tous les essais, à condition que le ΔK soit identique. Il est possible d'exprimer ΔK en termes du ratio de charge **:**

En représentant da/dN par rapport à ΔK sur un graphique bi-logarithmique, on obtient la courbe ci-dessous. [9]

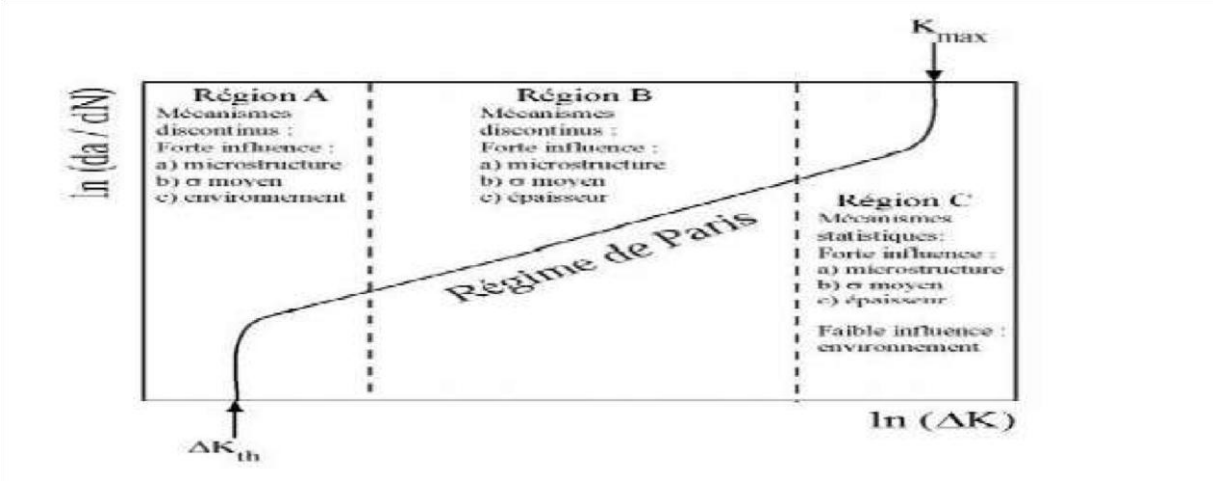


Figure I.10 : Représentation générale de l'évolution du taux de croissance de fissure en fonction de l'amplitude du facteur d'intensité des contraintes : da/dN = f (ΔK). (Bathias et Bailon 19891). [9]

✓ A – Pour des valeurs minimales de ΔK, on remarque une diminution rapide de la vitesse de propagation jusqu'à atteindre un seuil de ΔK qui correspond à la limite où l'avancement de la fissure devient indétectable ΔK th. Dans ce domaine, la vitesse de progression est influencée par la microstructure, le rapport de charge et l'environnement. Les fissures sont jugées inactives lorsque les valeurs de ΔK sont inférieures à ΔK th.

✓ B – Domaine de Paris - Pour des valeurs intermédiaires de ΔK, la courbe montre une portion linéaire qui correspond à l'évolution des vitesses de fissuration selon la loi expérimentale de Paris :

$$\frac{da}{dN} = C\Delta K^m \qquad (I.7)$$

✓ C– Quand ΔK s'accroît et que K max se rapproche du paramètre de ténacité KC du matériau, la propagation s'accélère, provoquant une rupture rapide. En réalité, ce domaine n'a pas beaucoup d'importance car les structures sont habituellement conçues pour ne pas opérer dans cette zone. Plusieurs auteurs ont suggéré des adaptations de la loi empirique de Paris pour tenir compte de l'influence de divers paramètres, notamment le ratio de charge R (loi de Walker, loi de Forman). La loi NASGRO, élaborée en collaboration avec la NASA, le NLR et l'ESA,

offre une représentation intégrale des trois zones de la courbe da/dN. Toutefois, elle exige de nombreux et longs essais pour identifier tous les paramètres qui entrent en jeu dans la loi NASGRO. [9]

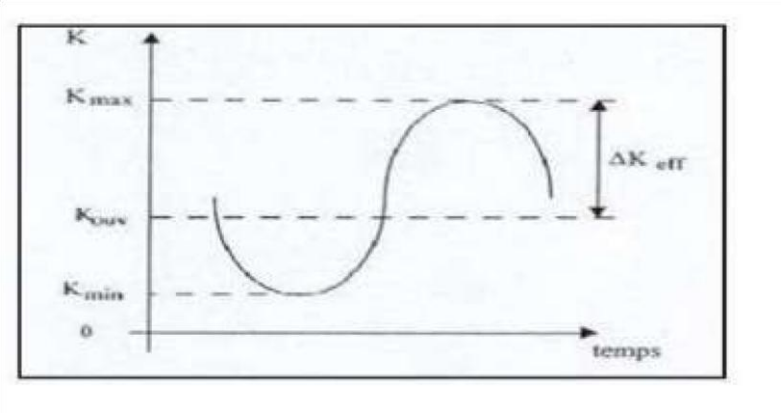


Figure I.11 : L'amplitude effective du facteur d'intensité des contraintes [9]

I.6.6 Influence de l'état de contrainte sur la taille de la zone plastique :

Quand ΔK s'accroît et que K max se rapproche du paramètre de ténacité K C du matériau, la propagation s'accélère, provoquant une rupture rapide. En réalité, ce domaine n'a pas beaucoup d'importance car les structures sont habituellement conçues pour ne pas opérer dans cette zone. Plusieurs auteurs ont suggéré des adaptations de la loi empirique de Paris pour tenir compte de l'influence de divers paramètres, notamment le ratio de charge R (loi de Walker, loi de Forman). La loi NASGRO, élaborée en collaboration avec la NASA, le NLR et l'ESA, offre Une représentation intégrale des trois zones de la courbe da/dN. Toutefois, elle exige de nombreux et longs essais pour identifier tous les paramètres qui entrent en jeu dans la loi

NASGRO.

En revanche, les phénomènes de l'histoire de chargement sont étroitement associés aux déformations plastiques. Nous allons donc débuter l'étude de la dimension de la zone plastique sous chargement cyclique.

Lors d'un cycle de chargement (comme un chargement ondulé par exemple) jusqu'à une charge maximale, des déformations plastiques apparaissent dans la zone plastique, c'est-à-dire tous les points où le critère de plasticité est franchi. Au moment de la décharge maximale, le processus de décharge n'est pas totalement élastiques, car les points situés près du bas de la fissure sont soumis à des tensions dans le sens inverse et connaissent des déformations plastiques

réciproques. Nous allons donc repérer deux types de zones plastiques : L'aire de charge optimale, fréquemment désignée sous le terme « zone monotone ». Dans le domaine des plastiques, la dénomination « cyclique » se rapporte à la charge minimale. La plasticité se définit par la relation ci-après : $L = \sigma max / Re$

Correspond à trois. Dans le cadre des déformations planes, l'équation devient : [7]

$$r_{YDp} = \frac{K_1^2}{(LR_e)^2} - \frac{K_1^2}{18R_e^2} \qquad (I.8)$$

I.6.7 Forme et taille de la zone plastique :

Irwin a suggéré que la zone plastique ait une forme circulaire. Effectivement, en mode I, la zone plastique comprend deux ailes. Récemment, Banks et son équipe ont effectué une étude concernant la forme et les dimensions de la zone plastifiée, en se fondant sur le critère de Von Mises. La formule ci-après représente l'expression de la zone plastifiée : [7]

$$r_m = \alpha \frac{K_1^2}{(R_e)^2} \qquad (I.9)$$

α est un paramètre fonction de l'angle θ et de l'état de contraintes :

$$a = 14(1 + \cos\theta 3 + \sin\theta 2) \quad \text{En} \quad \text{C.P.} \qquad (I.10)$$

$$a = 14[(1 - 2\theta)2(1 + \cos\theta) + \sin\theta 2] \quad \text{En} \quad \text{D.P.} \qquad (I.11)$$

Les valeurs de α sont reportées dans le Tableau I.1. Aux points A, B, et C définis dans la (Figure I.12) [11]

	Valeurs de α		
Etat de contraintes	**A**	**B**	**C**
C.P.	1/2π (θA= 0)	1/2π (θB= 0)	±0,205 (θC= ±80°)
D.P.(υ=1/3)	0,0175 (θA= 0)	0,054 (θB= ±51°)	±0,129 (θC= ±80°)

Tableau I.1 : Valeurs particulières de α [7]

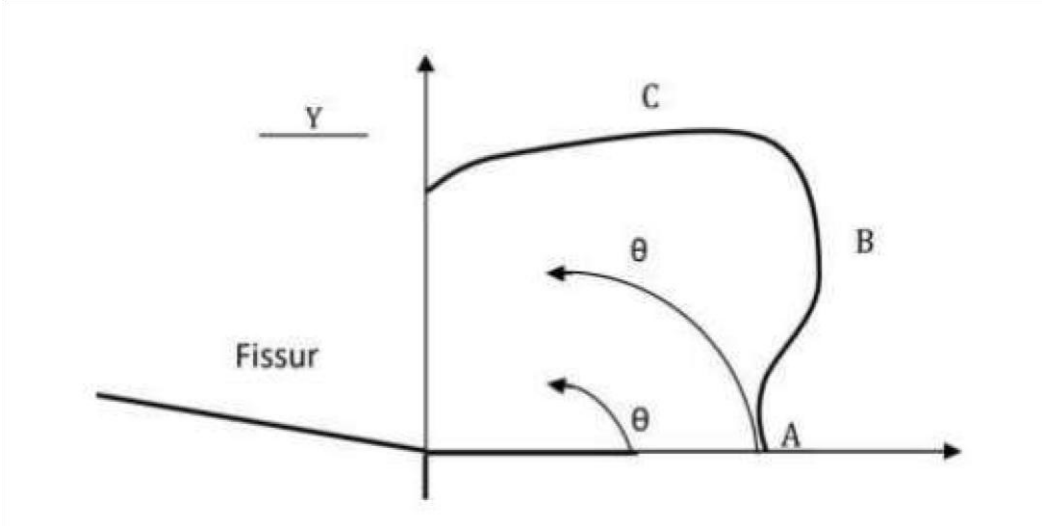


Figure I.12. Définition des valeurs particulières de α selon Banks et al. [7]

I.7 L'influence de vibration libre sur les plaques fissure.

L'analyse des vibrations libres des plaques fissurées représente un method privilégiée pour examiner l'impact des dommages sur le comportement dynamique des structures. Une fissuration existante sur une plaque cause une En cas de présence d'une fissure, les fréquences naturelles de la plaque peuvent varier par rapport à celles d'une plaque en bonne santé. Habituellement, le développement et l'amplification de la fissure conduisent à une baisse des fréquences naturelles, du fait de la diminution de la rigidité de la structure. Cette diversité est particulièrement influencée par la taille, l'intensité et l'emplacement de la fissure, ainsi que les contraintes aux frontières de la plaque. Baisse localisée de sa rigidité et, de ce fait, altère ses propriétés vibratoires.

La présence de fissures peut aussi altérer les configurations des modes propres. Sa position, en étant dans une zone où les déformations modales sont considérables, peut accroître son impact sur le comportement des vibrations. L'examen des fréquences et modes propres permet donc d'identifier les variations causées par la survenance d'un dommage.

Cette étude implique la comparaison entre une plaque intacte et une plaque fissurée, fournissant une évaluation de l'impact de la fissure sur le comportement dynamique de la structure. Grâce au logiciel Abaques, l'analyse modale effectuée sert principalement à identifier les fréquences et modes propres liés aux divers scénarios examinés. Ces résultats peuvent servir de guides pour évaluer l'état de la plaque et aider à la détection et à l'appréciation des dommages.

I.8 Conclusion :

L'élément de rupture est maintenant un aspect essentiel dans les techniques de conception industrielle. En évaluant la durée de vie restante pendant le suivi de l'évolution des fissures, on peut définir des plans d'inspection pour les composants qui montrent des irrégularités liées

Divers facteurs tels que le processus de fabrication, le matériau utilisé, les actions réalisées lors du montage, ainsi que les charges ou incidents rencontrés tout au long de la durée de vie d'une Structure mécanique. La mécanique linéaire de la rupture couvre la plupart des situations rencontrées, mais pour des modèles plus complexes, les simulations numériques offrent une approche plus précise en prenant en compte des facteurs tels que la plasticité, le multi-axialité et les interactions multiphasiques.

Chapitre Π :

Modélisation des plaques par élément finis

II.1 Introduction

Une plaque se définit comme une structure rigide délimitée par deux plans qui lui sont parallèles. La plaque présente des surfaces ainsi qu'une bordure cylindrique qui est orthogonale auxdites surfaces, à savoir la bordure de la plaque. L'épaisseur h de la plaque correspond à la distance entre les deux faces de celle-ci, et la surface moyenne est définie comme la surface équidistante entre ces faces. On peut utiliser des éléments de plaques pour divers types de modélisations :

- Que ce soit pour la présentation de solides dont une dimension est négligeable comparée aux autres et pour lesquels la superficie moyenne peut être considérée comme un plan ou un groupement de plans.
- Pour le cas où l'on souhaite approcher des surfaces moyennement courbes à l'aide de facettes planes assemblées.

Les plaques sont mises à l'épreuve dans leur plan, de manière membranaire, ou bien dans l'orientation qui est perpendiculaire au plan moyen, ce qui signifie que l'on les teste en flexion. Ces structures sont assurément le type le plus courant et sont utilisées pour le calcul des tôles planes, des hourdis, des dalles, des planchers, des semelles de fondation ainsi que des radiers. Les plaques peuvent se caractériser par des géométries très complexes et introduire diverses conditions de soutien ou de connexions (soutien simple, articulation et encastrement) ainsi que des charges diversifiées (charges concentrées ou disséminées, charges exercées dans le plan ou perpendiculaires au plan), tout cela en rapport avec les exigences fonctionnelles des structures.

 Trois catégories d'éléments finis de plaques résultent des suppositions cinématiques et statiques.

1- Dans les plaques minces, qui reposent sur l'hypothèse de Kirchhoff, l'énergie de Déformation due au cisaillement transversal est omise.

2- L'hypothèse Mindlin-Reissner est vérifiée par la méthode des éléments finis dans le cas de plaques d'épaisseur modérée.

3- Les plaques d'épaisseur considérable sont représentées par des éléments finis (éléments de volume).

L'évolution des éléments finis basés sur la théorie classique des plaques (théorie des plaques minces) entraîne une complication additionnelle.

Cette complexité additionnelle découle des suppositions effectuées pour transformer les équations élastiques tridimensionnelles en un modèle théorique de plaque où la déformation de l'ensemble de la plaque est déterminée exclusivement en fonction de la déviation w de la surface moyenne. L'hypothèse

De Kirchhoff concernant les lignes droites qui demeurent rectilignes et Perpendiculaires à la surface moyenne après déformation, est sans doute la plus significative parmi ces conjectures. La théorie classique des plaques, qui repose sur une seule variable w, présente des avantages substantiels mais implique également que cette dernière diffère considérablement de la théorie bidimensionnelle ou tridimensionnelle élastique.

Dans le cadre de la théorie élastique, les déplacements sont exprimés en termes de premier ordre, tandis que dans la théorie des plaques, ils le sont d'ordre quatre. Pour que les aspects développés dans le contexte de la théorie classique des plaques puissent être admis, le champ de mouvement des éléments doit présenter une continuité de type C1, c'est-à-dire que w et les dérivées premières de w doivent rester continues, ce qui peut rendre très complexe le développement des éléments. Dans certains scénarios, cette exigence de continuité peut être assouplie, tout en permettant la création d'éléments utiles (non conformes).

Deux théories principales modélisent les problèmes de stabilité des plaques : celle relative aux Plaques minces et celle concernant les plaques épaisses.
La théorie des plaques minces de Love, qui repose sur les postulats de Kirchhoff, est une dérivation de celle des poutres minces d'Euler-Bernoulli.

Quand l'épaisseur de la plaque rend impossible la vérification des hypothèses de Kirchhoff, une théorie plus complète, fondée sur celle des poutres de Timoshenko, devient indispensable. Rayleigh en 1877 suivi de Timoshenko en 1921 ont démontré que l'inclusion des effets d'inertie de rotation et de cisaillement influence les fréquences naturelles de flexion de Ces deux phénomènes ont pour effet de réduire les fréquences de résonance calculées en raison de l'augmentation de l'inertie et de la flexibilité du système.

En 1945 et 1951, Reissner et Mindlin ont proposé une extension de la théorie des plaques concernant l'effet de cisaillement. Poutres. [10]

II.2. Historique des plaques

Les plaques, souvent employées dans divers types d'installations industrielles, se déclinent en plusieurs variantes selon les exigences du site, nécessitant ainsi diverses suppositions pour définir le modèle analytique d'analyse : (a) les plaques fines avec des flèches

De petite taille (Kirchhoff) où l'énergie due à l'effet de cisaillement est négligée ; (b) les plaques fines avec des flèches de grande taille (Karman) ; (c) les plaques de taille modérée ou épaisse (Mindlin-Reissner) où l'énergie liée à l'effet de cisaillement est préservée.

De manière générale, diverses forces de natures variées (volumiques, surfaciques, ponctuelles) peuvent agir comme sources d'excitation. Les réponses pertinentes peuvent être définies en termes de mouvement, que l'on peut caractériser par des déplacements, des vitesses ou des accélérations.

Dans le contexte de l'analyse indépendante, nous nous focalisons sur les paramètres dynamiques naturels pour décrire le comportement intrinsèque lié à la structure concernée, indépendamment des influences externes.

Historiquement, Euler a été l'un des premiers à établir un modèle mathématique du problème en 1766, représentant le comportement d'une plaque assimilée à une membrane en vibration

libre. Ensuite, le physicien allemand Chladni (1787) a découvert les
Modes de vibrations propres initiaux d'une plaque horizontale en forme carrée, Puis ce fut Lagrange qui, en 1811, proposa la première équation différentielle adéquate pour représenter les vibrations d'une plaque libre de thickness constante, à laquelle la déformation w doit se conformer, mais sans fournir démonstration ni explication. Pour les mathématiciens, identifier les fréquences naturelles a été une priorité majeure. En 1816, Sophie Germain a reçu une récompense pour sa contribution au progrès de l'équation de la plaque mince. Peu de temps

après, Navier (1785-1836) a proposé une technique pour déterminer les modes et les fréquences propres d'une plaque sous certaines conditions aux limites.

Il employa les fonctions trigonométriques mises au jour par Fourier pour illustrer la déformation d'une plaque.

Ce n'est qu'en 1850 que Kirchhoff (1824-1887) a établi, pour la première fois de manière précise, les conditions aux limites en se basant sur le principe des déplacements virtuels et l'expression du travail des contraintes de la plaque.

Lord Rayleigh (1877) et Ritz (1909) ont été parmi les pionniers à établir la théorie que nous connaissons actuellement. Ritz a perfectionné la méthode de Rayleigh en s'appuyant sur les fonctions de forme qui définissent le mouvement dynamique propre, chaque fonction présentant

Un coefficient d'amplitude distinct. On désigne cette procédure sous le nom de « Méthode de Rayleigh- « Méthode du Ritz ou simplement Ritz ». C'est l'approche approximative la plus courante et répandue dans l'analyse des structures vibrantes.

En 1921, Timoshenko démontre que l'intégration des effets distincts de l'inertie rotative et du cisaillement conduit à une diminution significative des fréquences naturelles de vibration des poutres. Dans un contexte similaire, l'analyse vibratoire des plaques a progressé en intégrant des suppositions additionnelles comme la considération de l'effet de cisaillement pour les plaques de grande épaisseur.

Ce qui a abouti à des modèles plus sophistiqués tels que celui de Love (1944) qui a adapté les travaux de Kirchhoff aux plaques épaisses. Depuis cette période, un grand nombre d'études ont été réalisées, principalement grâce à l'expansion des secteurs naval et aéronautique. Ainsi, dans

Les années post-guerre, Reissner a élaboré de nouvelles théories concernant les plaques minces élastiques (1945).

Reissner a été parmi les premiers à suggérer une prolongation de la théorie des plaques avec cisaillement pour le cas statique. Puis, Uflyand en 1948 et Mindlin en 1951. C'est de cette manière qu'ils ont proposé une nouvelle perspective théorique rigoureuse pour les plaques.

D'après plusieurs recherches contemporaines, Waburtonet et Leissa (1969) ont apporté une contribution significative à la compréhension du problème des vibrations de plaques en tenant Compte des diverses hypothèses pour prédire de manière précise le comportement dynamique

Propre aux vibrations des plaques. En 1973, Leissa a présenté un catalogue détaillé pour divers cas d'hypothèses concernant la résolution des vibrations libres de plaques rectangulaires.

Parallèlement, Liew et al (1995) apportent une contribution utile pour les plaques épaisses. [11]

II.3. Définition de plaque

On qualifie de plaque tout corps ayant la forme d'un cylindre ou d'un prisme dont la hauteur (ou épaisseur) est inférieure en comparaison aux autres dimensions. Selon la conception du plan, les plaques peuvent être de forme rectangulaire, circulaire, annulaire, triangulaire, etc. Si le matériau de la plaque présente des propriétés mécaniques uniformes dans toutes les orientations, on parle alors d'une plaque isotrope. En revanche, si les propriétés mécaniques du matériau de la plaque varient selon l'orientation, on qualifie cette dernière d'anisotrope (orthotrope). [10]

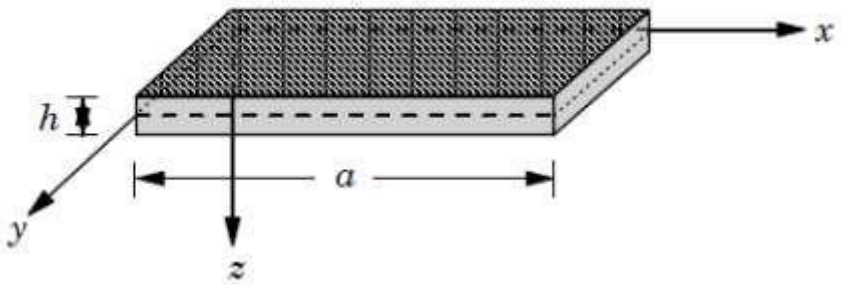


Figure II.1 : Géométrie d'une plaque de forme rectangulaire. [12]

II.4. Différents types de plaques :

Différentes sortes de plaques. Selon la composition des matériaux qui les forment et la forme de leur section transversale, les plaques peuvent être réparties en trois types distincts.

II.4.1. Les plaques isotropes :

Les plaques isotopiques Elles sont habituellement composées d'un matériel isotrope (comme l'acier ou le béton) et possèdent une section transversale uniforme.

Ces éléments sont caractérisés par deux paramètres élastiques (E et v), qui correspondent respectivement au

Module d'élasticité et au coefficient de Poisson. Ils sont présents dans les constructions civiles habituelles (édifices, infrastructures,...etc.)

II.4.2 Les plaques orthotropes :

Dans le cas des plaques orthotropes, leurs propriétés élastiques diffèrent selon les deux directions qui sont perpendiculaires. L'orthotrope peut être naturel (comme le bois) ou technique (à l'instar des dalles rétiles). Quatre paramètres élastiques déterminent le comportement de ces dalles, qui sont couramment utilisés dans les constructions navales, aéronavales, les réservoirs de l'industrie chimique, ainsi que dans la construction de divers bâtiments et ouvrages d'art.

II.4.3 Les plaques anisotropes :

Les caractéristiques élastiques de ces plaques varient dans toutes les orientations. Il est suffisant d'avoir neuf paramètres élastiques pour assurer leur devenir. Ces dernières sont fréquemment composées de matériaux composites et sont principalement destinées à être utilisées dans le domaine de l'aéronautique et du spatial. [13]

II.5 Les plaques minces

Depuis les recherches initiales de Sophie Germain en 1815 concernant les plaques minces, suivies par les modèles du premier ordre de Love-Kirchhoff et de Reissner-Mindlin, une multitude d'auteurs ont élaboré des théories relatives aux plaques basées sur des cinématiques ou des champs de contraintes plus sophistiqués. L'utilisation de structures légères, telles que les poutres, plaques et coques, est aujourd'hui courante dans divers secteurs, notamment les transports, le génie civil ou même les instruments de musique. Cela implique généralement de

prévoir le comportement des structures face à certaines sollicitations afin d'éviter divers phénomènes tels que l'endommagement ou le bruit. Dans les domaines de l'ingénierie et de la

Recherche, la majorité des modèles employés tendent à être linéaires et offrent une approximation satisfaisante, au premier ordre, du comportement vibratoire.

Les plaques possèdent une structure en trois dimensions où l'épaisseur h est nettement inférieure aux autres dimensions. [11]

II.6 la vibration des plaques

II.6.1 vibration libre

Les vibrations naturelles correspondent aux oscillations intrinsèques à la structure, en l'absence de forces externes. Quoi qu'il en soit, les vibrations impliquent un échange constant entre l'énergie cinétique et l'énergie de déformation des composants de la plaque. L'énergie cinétique est liée à la vitesse de vibration et à la masse des éléments qui sont déformés. Tandis que la déformation est liée aux contraintes dynamiques associées à la rigidité des composants qui subissent une déformation due au mouvement vibratoire**. [**11]

II.7 Théorie de Love-Kirchhoff pour les plaques minces.

On désigne par plaque mince une situation où la déformation due au cisaillement génère une flèche négligeable comparée à celle provoquée par la courbure de la plaque. Pour une plaque isotrope homogène, le rapport de cisaillement dans la flèche est directement lié à l'élancement (L/h).

La théorie classique des plaques minces (CPT) repose sur les postulats de Love-Kirchhoff, qui stipulent qu'une ligne perpendiculaire au plan moyen de la plaque demeure verticale suite à une déformation (figure II.1), ce qui revient à omettre les effets de déformation en cisaillement transversal. On peut se référer à ce modèle de plaque.

Sur la base des hypothèses précédentes, le champ de déplacement est défini comme suit : [14]

$$\mathbf{u(x,y,z) = u_0(x,y) - z\frac{\partial_{w_0}}{\partial_x}},$$

$$v(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) = \mathbf{v_0}(\mathbf{x},\mathbf{y}) - \mathbf{z}\frac{\partial_{w_0}}{\partial_y}, \qquad (\Pi.1)$$

$$w(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z},) = \mathbf{w_0}(\mathbf{x},\mathbf{y})$$

(u_0, v_0 et w_0) Représentent les éléments du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque à z=0

Étant donné que ce modèle ne prend pas en compte l'effet de cisaillement transversal, il fournit des résultats peu précis pour les plaques d'épaisseur importante. [14]

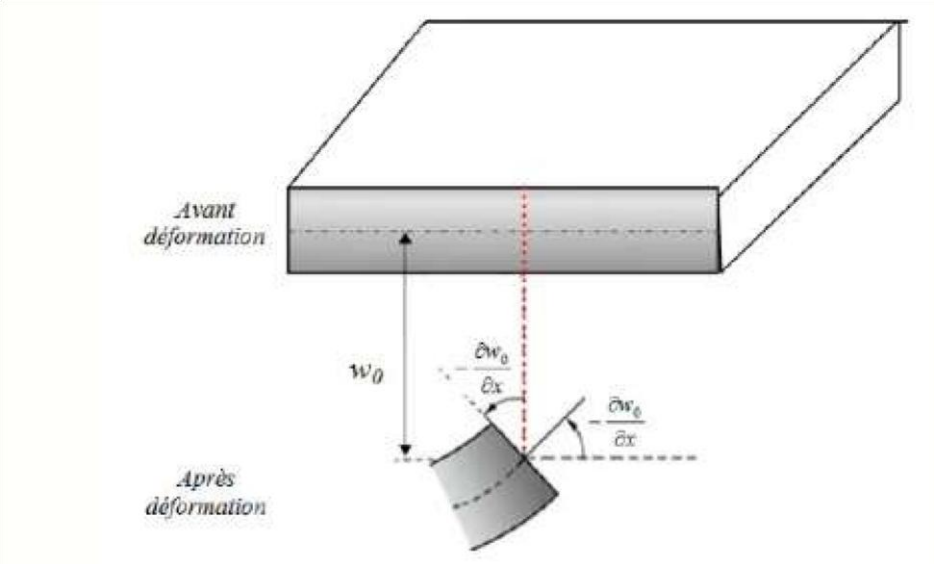


Figure II.2 : Illustration de la plaque de Love Kirchhoff [15]

II.8 Hypothèses pour l'étude des plaques minces :

Les hypothèses cinématiques adoptées pour les plaques minces par Kirchhoff de contrainte plane, généralisent à deux dimensions celles adoptées pour les poutres sans déformation à l'effort tranchant.

1) La plaque est d'épaisseur petite devant les autres dimensions. Elle possède un plan moyen aussi appelé plan neutre.

2) L'hypothèse des sections droites inclut celle dite de conservation des normales (les points matériels situés sur une normale à la surface moyenne non déformée restent sur la

normale à la surface moyenne déformée) ce qui conduit au modèle classique généralement associé au nom de Kirchhoff (mais qui doit également beaucoup aux scientifiques français du 19e siècle

: Sophie Germain, Lagrange, Poisson, Boussinesq, Levy, Saint-Venant). [16]

La déformation en cisaillement transverse est donc négligée.

4) Les termes non linéaires du déplacement sont négligés, en particulier, l'inertie de rotation est négligée. Seul le déplacement transversal w est considéré

5) La contrainte dans la direction transversale est nulle. Elle doit en effet s'annuler sur les faces extérieures et, du fait que la plaque est mince, il est naturel d'admettre qu'elle est nulle en tout z.

6) Les éléments basés sur la théorie sont les mieux adaptés à la modélisation des plaques minces. Leur formulation ne nécessite que l'approximation d'une seule composante de déplacement.

W(x, y) Les dérivées secondes des déplacements interviennent dans l'expression de l'énergie de déformation. Ainsi, la condition de compatibilité inter-éléments correspond à la Continuité c^1 Du déplacement traverse c.-à-d. à la continuité de w et de la pente normale $\frac{dw}{dx}$.[16]

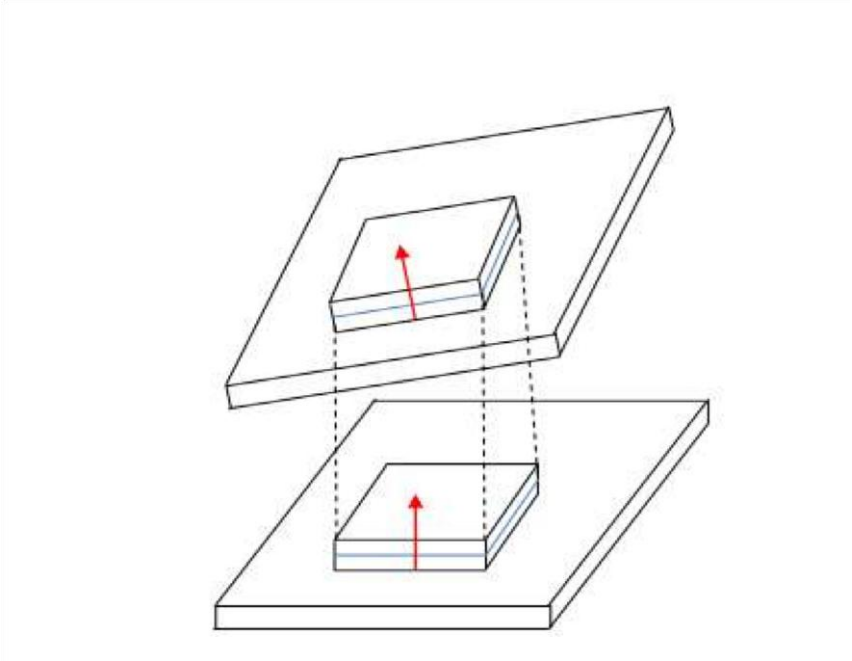


Figure II.3 : Déformation d'une plaque mince. [16]

II.9 Le modèle classique Love- Kirchhoff

Le modèle initial des plaques minces a été historiquement conçu par Lagrange, Poisson et Kirchhoff. On le nomme aujourd'hui modèle de Kirchhoff ou tout simplement plaque de Kirchhoff. Il est basé uniquement sur une unique variable : le mouvement vertical w(x, y, t). Ce modèle est qualifié de « pure flexion ». Les modèles se fondent sur une distribution linéaire des mouvements à travers l'épaisseur. On suppose l'hypothèse de Love-Kirchhoff des contraintes planes, négligeant les déformations causées par le cisaillement. C'est durant les années 19501960 que Mindlin, Vlassov, Reissner et d'autres ont particulièrement développé de nouvelles

Théories concernant les plaques minces élastiques et cela persiste encore aujourd'hui.

Un grand nombre de chercheurs s'attachent à développer des théories perfectionnées (par exemple, M. Levinson dont la théorie remonte à 1980, qui a élaboré la Méthode des éléments finis et la Méthode des différences finies...). [11]

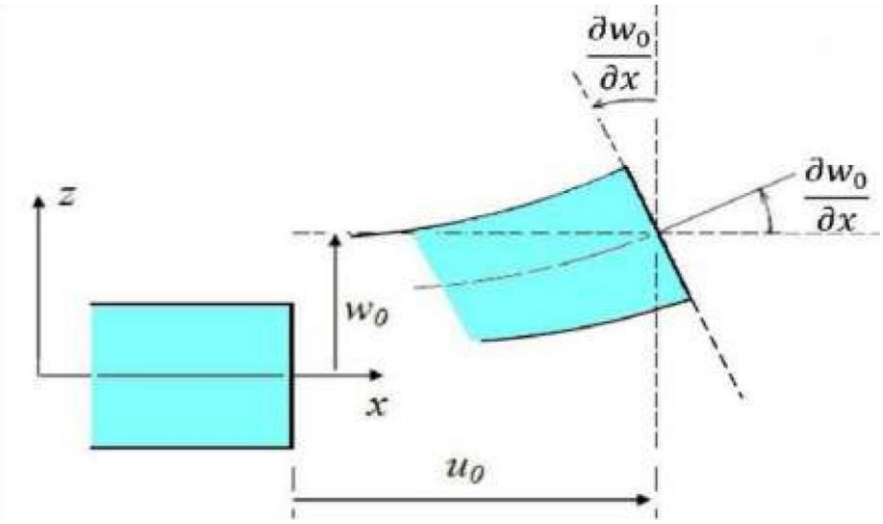


Figure II.4 : Cinématique de Love Kirchhoff. [16]

II.**10 Cinématique d'une plaque mince**

Pour décrire le mouvement de la plaque, nous utilisons le cadre local lié au plan moyen. On décrit ensuite la position de chaque point de la plaque immobile par ses coordonnées cartésiennes exprimées dans ce système de référence avec $X = (X_1, X_2, X_3)^T=(x, y, z)^T$.

À la suite de la transformation φ engagée sur la plaque, le mouvement $\vec{u}$ de ce point se caractérise par $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)^T = (u, v, w)^T$ qui représente le déplacement du point de la plaque depuis l'état de référence jusqu'à l'état modifié de la plaque. Les éléments du déplacement sont donc conditionnés par l'emplacement du point sur la plaque pris en compte dans la référence. En d'autres termes, les éléments u, v, w sont déterminés à partir des éléments x, y, z.

Dans la même logique que pour l'analyse des poutres, nous allons déterminer ce déplacement en relation avec le mouvement du plan moyen de la plaque. On peut décomposer ce mouvement en une translation associée à une rotation.

On note $\vec{u}_0 = (u_0(x, y, z), v_0(x, y, z), w_0(x, y, z))^T$ le mouvement de translation du plan moyen. Ainsi, les éléments u_0 et v_0 représentent le déplacement du plan moyen dans le plan (0, x, y). Étant donné que le plan moyen est situé à z = 0, elles dépendent uniquement de x et y avec

u_0(x, y, z) =u_0(x, y) et $v_0(x, z, y,)$=$v_0(x, y)$ La composante w_0 se réfère, pour sa part, au mouvement du plan intermédiaire dans la direction z. D'après les postulats de Kirchhoff-Love, les mouvements verticaux sont identiques pour chaque point d'une fibre normale placée en (x, y) dans le plan (0, x, y) du plan moyen. On sait donc que la composante w_0 ne dépend que de x et y, c'est-à-dire w_0(x, y, z) = w_0(x, y). En accord avec la même supposition, il est également établi que pour chaque point de la plaque W(x, y, z) = w_0(x, y, z) = w_0(x, y).

Passons maintenant à l'étude de la rotation du plan moyen, en notant θ_x et θ_y pour ses rotations par rapport aux axes x et y respectivement. Par conséquent, une fibre conventionnelle placée en (x, y)dans le plan (0, x, y) subit une rotation de l'angle θ_x autour de l'axe x et de l'angle $\theta_y$autour de l'axe y. La Fig. II.4 présente une illustration de tous ces concepts et notations. [17]

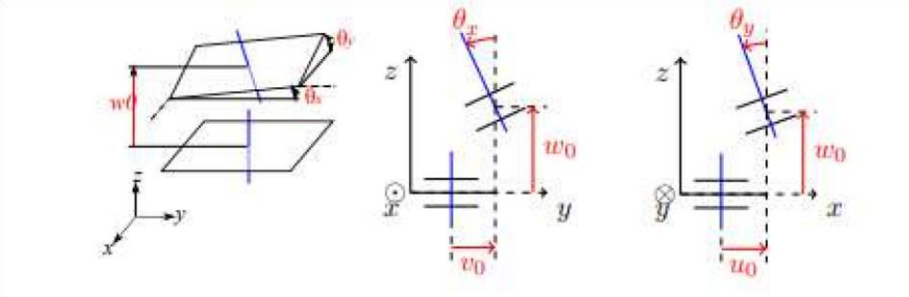


Figure II.5 : Déplacement du plan moyen avec mise en évidence de la rotation d'une fibre normale autour des axes x et y. [17]

Sous de petites distorsions, l'arc de cercle tracé lors du pivotement de la fibre normale, en tenant compte d'un point qui se situe sur celle-ci, peut être considéré comme une portion de ligne droite. Ainsi, en examinant la Fig. II.5 nous pouvons aisément établir les relations suivantes :

$$\tan\theta_x = -\frac{d_{v0}}{d_z}, \quad \tan\theta_y = \frac{du_0}{d_z} \qquad \text{(II.2)}$$

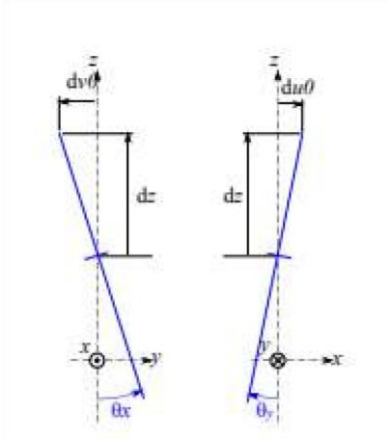


Figure II.6 : Rotation d'une fibre normale selon les axes x et y mettant en évidence les relations entre u_0, $v_0$et les angles θ_x, $\theta_y$correspondant au mouvement du plan moyen **[**17]

En supposant de petites déformations, les tangentes des angles $\theta_x$et θ_y sont approximativement équivalentes à leurs angles. Ainsi, les relations antérieures se présentent comme suit :

$$\theta_y=\frac{du_0}{d_z}\,,\ \theta_x=-\frac{dv_0}{d_z}\rightarrow du_0=\theta_y d_z\,,\ dv_0=-\theta_x d_z.$$

Selon l'axe x, le mouvement engendré par la rotation du plan moyen est représenté par z θ_y (x, y) tandis que pour l'axe y, il est dépeint par −z θ_x(x, y) pour le point (x, y, z) dans l'état de référence. Cette relation antérieure permet aussi d'écrire.

$$\theta_y=\frac{\partial_{u0}}{\partial_z}\,,\ \theta_x=-\frac{\partial_{v0}}{\partial_z}$$

Fig. II.4 souligne aussi que les tangentes des angles θ_x et θ_y illustrent la pente que suit le feuillet moyen. Cela engendre les relations suivantes :

$$\tan\theta_y=-\frac{\partial_{w0}}{\partial_x}\,,\ \tan\theta_x=\frac{\partial_{w0}}{\partial_y}\rightarrow\theta_y=-\frac{\partial_{w0}}{\partial_x}\,,\theta_x=\frac{\partial_{w0}}{\partial_y}$$

En définitive, si l'on prend en compte la translation et la rotation du plan moyen, le déplacement $\overrightarrow{u}$de chaque point de la plaque de position (x, y, z)depuis l'état de référence peut être représenté comme suit :

$$\vec{U}=\begin{pmatrix}u(x,y,z)\\v(x,y,z)\\w(x,y,w)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_0(x,y)\\v_0(x,y)\\w_0(x,y)\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}\theta_y(x,y)\\-\theta_x\ \ (x,y)\\0\end{pmatrix}$$

On a donc les relations suivantes pour les coordonnées du mouvement $\vec{u}$de la plaque mince :

$$\begin{cases} u(x,y,z) = u_0(x,y) + z\ \theta_y(x,y) \\ v(x,y,z) = v_0(x,y) - z\ \theta_x(x,y) \\ w(x,y,z) = w_0(x,y) \end{cases} \quad \text{(II.3)}$$

II.11 Définition de la méthode des éléments finis :

La technique des éléments finis est une approche numérique utilisée pour examiner les structures et les matériaux continus. Généralement, la problématique en question est difficile à traiter de façon satisfaisante avec les techniques analytiques traditionnelles. Les problèmes qui étaient auparavant totalement infranchissables sont désormais gérés par routine. On utilise des techniques d'éléments finis pour la conception des structures de bâtiments, de moteurs thermiques et électriques, ainsi que de fuselages pour bateaux et engins spatiaux. La technique des éléments finis génère de nombreuses équations algébriques simultanées, qui sont produites et résolues à l'aide d'un ordinateur numérique. Les calculs des éléments finis sont exécutés sur l'ordinateur personnel. Cependant, les erreurs ont diminué en traitant plus d'équations. Et les résultats assez précis pour la technologie sont parcourables à un coût raisonnable. Initialement, la méthode des éléments finis a été développée comme une technique d'analyse des contraintes.

Le problème pourrait impliquer des études sur les contraintes, le transfert thermique, ou une variété d'autres domaines. Actuellement, les méthodes par éléments finis sont couramment utilisées pour étudier divers problèmes tels que le transfert de chaleur, la dynamique de fluides de lubrification, les champs électriques et magnétiques, et bien d'autres encore. [18]

II.12 type des éléments finis :

En général, le choix de l'élément dépendra du type de problème à traiter.
Ils sont classés en quatre catégories :

- Les déplacements et les déformations planes.
- La flexion des plaques.
- Les coques.
- L’analyse des solides (3D)

On peut classer, les différents types d'éléments finis suivant leur géométrie

- Les éléments unidimensionnels 1D : barre, poutres rectilignes ou courbes**.**
- Les éléments bidimensionnels 2D : élasticité plane (déformation ou contrainte plane), plaque en flexion, coques courbe.
- Les éléments tridimensionnels 3D : éléments de volume ou coques épaisses.

II.13 Solution par éléments finis des problèmes physiques :

La technique des éléments finis est utilisée pour traiter des problématiques physiques dans le domaine de l'ingénierie et de la conception. Les ensembles aux géométries variées sont couramment étudiés dans ces structures complexes : tuyaux, poutres, plaques, coques, etc. Le schéma 1 résume le processus d'analyse effectué par la M.E.F. Cet enjeu physique concerne généralement une structure tangible ou un élément structurel exposé à diverses contraintes. L'abstraction du problème physique vers un modèle mathématique nécessite certaines hypothèses qui conduisent à un ensemble d'équations régissant le modèle mathématique. La méthode d'analyse des éléments résout ce modèle mathématique. L'évaluation de la précision de la solution est nécessaire dans le cadre de la méthode numérique des éléments finis.

On constate que par la méthode des éléments finis, seule la modélisation mathématique Sélectionnée sera résolue et toutes les suppositions du modèle seront reflétées dans le résultat prévu. Dans la modélisation des phénomènes physiques, nous ne saurions espérer obtenir plus d'informations que celles prévues dans le modèle mathématique.

Ainsi, la sélection d'un modèle mathématique adéquat est déterminante et confère une vision exhaustive du phénomène physique authentique.

Il est important de noter qu'à travers notre étude, nous sommes en mesure d'obtenir uniquement une vue d'ensemble du problème physique en question : nous ne sommes pas en mesure de prédire précisément la solution du problème physique en raison de l'impossibilité de transposer intégralement dans le modèle mathématique toutes les données présentes dans le problème physique naturel.

Après avoir résolu précisément le modèle mathématique et interprété les résultats, nous sommes en mesure de perfectionner ce modèle afin d’améliorer notre compréhension de la solution au problème physique. De plus, une modification du problème physique pourrait être nécessaire,

ce qui conduirait aussi à d'autres modèles mathématiques et à des résolutions par éléments finis (voir figure II.7)

La sélection des modèles mathématiques adéquats est la phase cruciale de l'analyse d'un ingénieur. Le choix des modèles se fera clairement en fonction des phénomènes à anticiper, et il est primordial de sélectionner les modèles mathématiques capables de prédire efficacement les quantités désirées. Pour évaluer la fiabilité et l'efficacité du modèle sélectionné, nous envisageons d'utiliser un modèle mathématique intégral du problème physique et comparer la réaction de notre modèle avec celle du modèle complet

C'est une représentation entièrement en trois dimensions qui comprend également des effets non linéaires.

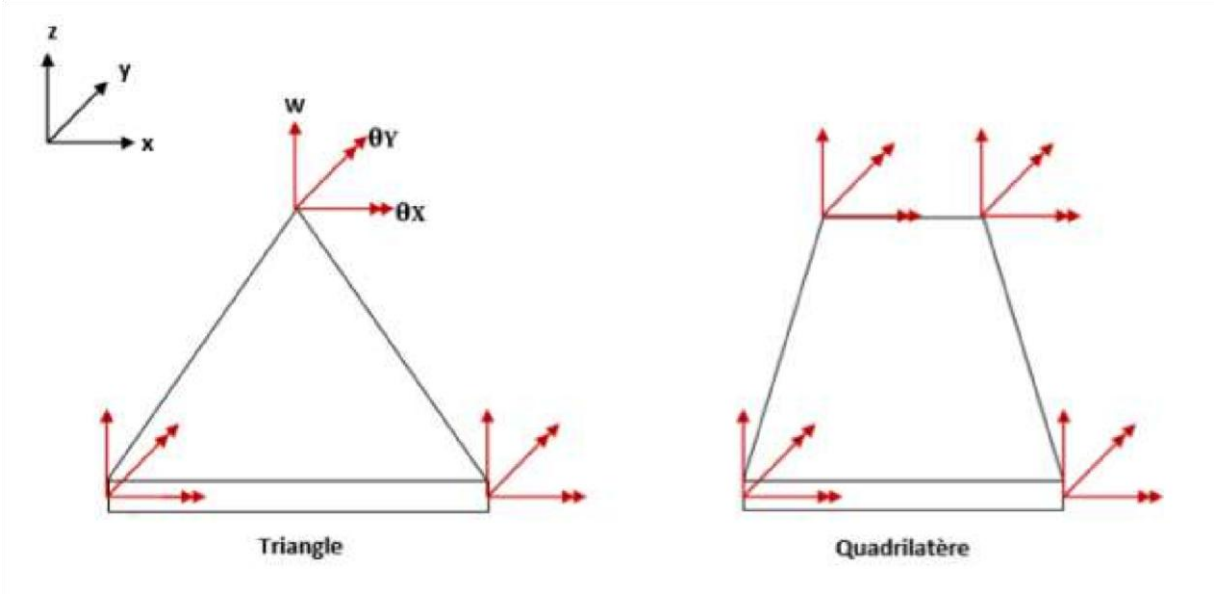
a) Efficacité d'un modèle mathématique :

Le modèle mathématique le plus performant pour l'analyse est celui qui fournit la réponse requise avec une précision suffisante et à un coût minimal.

b) Fiabilité d'un modèle mathématique :

Si la réponse attendue est connue pour être prévue à un degré de précision spécifié, le modèle mathématique sélectionné est considéré comme fiable, en se basant sur la réponse complète du modèle mathématique.

II.14 : éléments base sur la théorie de Kirchhoff :



Les éléments mixtes (hybride) :

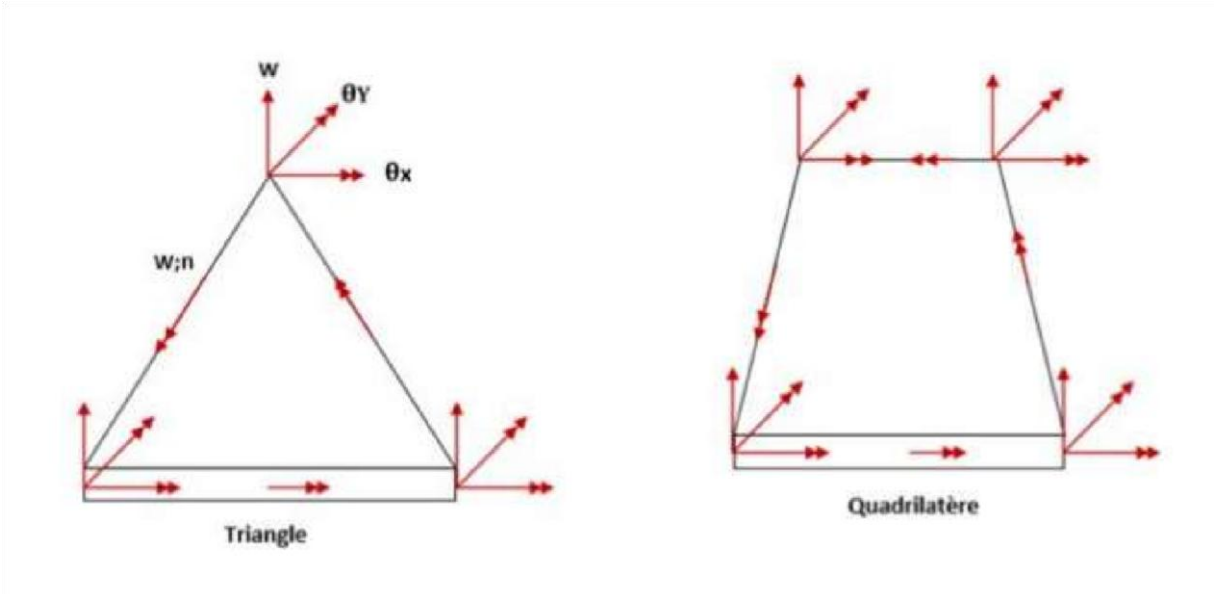


Figure II.8 : éléments de plaque en flexion

II.15 : matrice de rigidité de flexion base sur la théorie de Kirchhoff

Pour simplifier l'étude, considérons un élément rectangulaire à quatre nœuds de dimension (à, b, e) avec cette fois trois (03) D.D.L

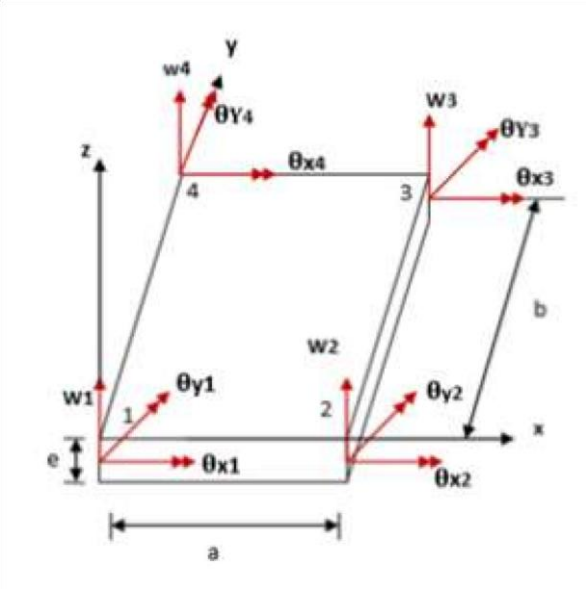


Figure II.9 : Repère cartésien

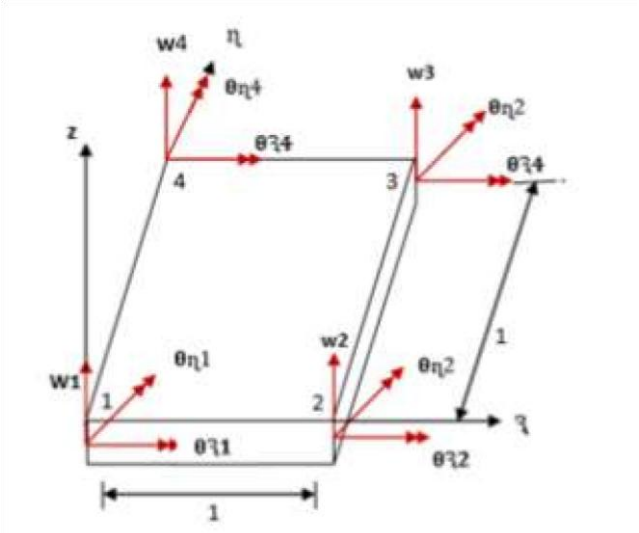


Figure II.10 : Repère adimensionnel

Pour chaque nœud, (W, θx et θy) comme cet élément possède 12 D.D.L, on aura le même

Membre de coordonnés généralisées. De cet effet, on peut approximer les déplacements à :

$$W(x, y) = d_1 + d_2x + d_3y + d_4x^2 + d_5xy + d_6y^2 + d_7x^3 + d_8x^2y + d_9xy^2 + d_{10}y^3 + d_{11}x^3y + d_{12}xy^3$$

On faisant le changement de variable suivant :

$$ξ = \frac{x}{a}; \qquad η = \frac{y}{b}$$

Alors la fonction W(x, y) devient :

$$W(ξ,η) = C_1 + C_2ξ + C_3η + C_4ξ^2 + C_5ξη + C_6η^2 + C_7ξ^3 + C_8ξ^2η + C_9ξη^2 + C_{10}η^3 + C_{11}ξ^3η + C_{12}ξη^3$$

Avec :

$$C_1 = d_1 \;;\; C_2 = ad_2 \;;\; C_3 = bd_3 \;;\; C_4 = a^2d_4 \;;\; C_5 = abd_5 \;;\; C_6 = b^2d_6 \;;$$

$$C_7 = a^3d_7 \;;\; C_8 = a^2bd_8 \;;\; C_9 = ab^2d_9 \;;\; C_{10} = b^3d_{10} \;;\; C_{11} = a^3bd_{11} \;;\; C_{12} = ab^3d_{12}$$

La relation entre $c_i$et d_i n'a pas une importance.

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial y}{\partial ξ}.\frac{\partial ξ}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial η}.\frac{\partial η}{\partial y}$$

$$\frac{1}{b}\{C_3 + C_5ξ + 2C_6η + C_8ξ^2 + 2C_9ξη + 3C_{10}η^2 + C_{11}ξ^3 + 3C_{12}ξη^2\}$$

$$\theta_x = -\frac{\partial w}{\partial x} = -\left(\frac{\partial w}{\partial ξ}\frac{\partial ξ}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial η}\frac{\partial η}{\partial x}\right)$$

$$= -\frac{1}{a}\{C_2 + 2C_4ξ + C_5η + 3C_7ξ^2 + 2C_8ξη + C_9η^2 + 3C_{11}ξ^2η + C_{12}η^3\}$$

La fonction de déplacement s'écrit :

$$\{\delta(\xi,\eta)\}_F = \begin{Bmatrix} w(\xi,\eta) \\ \theta_x(\xi,\eta) \\ \theta_y(\xi,\eta) \end{Bmatrix} = [g(\xi,\eta)]_F\{C\} \qquad \text{(II.4)}$$

Le vecteur de déplacement {q} s'écrit :

$$\{q\}_{tF} = \{w_1 , \theta_{x1} , \theta_{y1} , w_2 , \theta_{x2} , \theta_{y2} , w_3 , \theta_{x3} , \theta_{y3} ; w_4 , \theta_{x4} , \theta_{y4} \} \qquad \text{(II. 5)}$$

D'autre part, sur chaque nœud le système de charge correspondant consistent aux deux (02) moments Mx, My et 1 une force de cisaillement Pz alors, 1 vecteur force s'écrit :

$$\{P\}_t = \{P_{Z1} , M_{x1} , M_{y1} , P_{Z2} , M_{x2} , M_{y2} , P_{Z3} , M_{x3} , M_{y3} ; P_{Z4} , M_{x4} , M_{y4} \} \qquad \text{(II.6)}$$

Les forces nodales et les déplacements sont relies par :

$$\{P\} = [K]\{P\} \qquad \text{(II.7)}$$

Pour trouver les constantes (i=1, 2,3,…, 12) il faut poser les conditions aux limites

***pour le nœud 1 :** (ξ=0, η=0) → (x=0, y=0)

$$W_1 = C_1$$

$$\theta_{x1} = \frac{1}{b} C_3$$

$$\theta_{y1} = \frac{-1}{a} C_2$$

***pour le nœud 2 :** (ξ=1, η=0) → (x=a, y=0)

$$W_2 = C_1 + C_2 + C_4 + C_7$$

$$\theta_{x2} = \frac{1}{b}(C_3 + C_5 + C_8 + C_{11})$$

$$\theta_{y2} = \frac{-1}{a}(C_2 + 2C_4 + 3C_7)$$

***pour le nœud 3 :** (ʒ=1, η=1) → (x = a, = b)

$$W_3=C_1+C_2+C_3+C_4+C_5+C_6+C_7+C_8+C_9+C_{10}+C_{11}+C_{12}$$

$$\theta_{x3}=\frac{1}{b}(C_3+C_5+2C_6+C_8+2C_9+3C_{10}+C_{11}+3C_{12})$$

$$\theta_{x3}=\frac{-1}{a}(C_2+2C_4+C_5+3C_7+2C_8+C_9+3C_{11}+C_{12})$$

***pour le nœud 4 :** (ʒ=0, η=1) → (x = 0, y = b)

$$W_4=C_1+C_3+C_6+3C_{10}$$

$$\theta_{x4}=\frac{1}{b}(C_3+2C_6+3C_{10})$$

$$\theta_{y4}=\frac{-1}{a}(C_2+C_5+C_9+C_{12})$$

Sous la forme matricielle :

$$\{q\}_F=[H]_F\{C\}_F \qquad \text{(II.8)}$$

Ce qui donner que :

$$\{C\}_F=[H]_F^{-1}\{q\}_F \qquad \text{(II.9)}$$

Alors

$$\{\delta(ʒ,\eta)\}_F=[g(ʒ,\eta)]_F[H]^{-}{}_F{}^1q_F \qquad \text{(II.10)}$$

Avec :

$$[H]_F^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 2a & 3 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -b & a & 1 & b & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -a \\ 2 & -2b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -b & 0 \\ 2 & 0 & -a & -2 & 0 & -a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2a & -3 & 0 & -a & 3 & 0 & a & -3 & 0 & 2a \\ 3 & 2b & 0 & -3 & -2b & 0 & 3 & -b & 0 & -3 & b & 0 \\ 2 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & b & 0 \\ -2 & 0 & a & 2 & 0 & a & -2 & 0 & -a & 2 & 0 & -a \\ -2 & -b & 0 & 2 & b & 0 & -2 & b & 0 & 2 & -b & 0 \end{bmatrix}$$

On pose :

$$[(ʒ, ɳ)]_F = [(ʒ, ɳ)][H]^{-}{}_F{}^1 \qquad \text{(II.11)}$$

D'où :

$$\{(ʒ, ɳ)\}_F = [N(ʒ, ɳ)]_F\{q\}_F \qquad \text{(II.12)}$$

Telle que :

$$[(ʒ, ɳ)] = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \quad N_5 \quad N_6 \quad N_7 \quad N_8 \quad N_9 \quad N_{10} \quad N_{11} \quad N_{12}] \qquad \text{(II.13)}$$

Avec, pour $0 \le ʒ \le 1$ et $0 \le ɳ \le 1$

$N_1(ʒ, ɳ) = 1 - 3ʒ^2 - ʒɳ + 2ɳ^2 + 2ʒ^3 + 3ʒ^2ɳ + 3ʒɳ^2 + 2ɳ^3 - 2ʒ^3ɳ - 2ʒɳ^3$

$N_2(ʒ, ɳ) = b\,(ɳ - ʒɳ - 2ɳ^2 + 2ʒɳ^2 + ɳ^3 - ʒɳ^3)$

$N_3(ʒ, ɳ) = a(-ʒ + 2ʒ^2 + ʒɳ - ʒ^3 - 2ʒ^2ɳ + ʒ^3ɳ)$

$N_4(ʒ, ɳ) = 3ʒ^2 + ʒɳ - 2ʒ^3 - 3ʒ^2ɳ - 3ʒɳ^2 + 2ʒ^3ɳ + 2ʒɳ^3$

$N_5(ʒ, ɳ) = b\,(ʒɳ - 2ʒɳ^2 + ʒɳ^3)$

$N_6(ʒ, ɳ) = a(ʒ^2 - ʒ^3 - ʒ^2ɳ + ʒ^3ɳ)$

$N_7(\xi, \eta) = _\ \xi\eta + 3\xi^2\eta + 3\xi\eta^2 - 2\xi^3\eta\ _\ 2\xi\eta^3$

$N_8(\xi, \eta) = b\ (-\xi^2\eta\ + \xi\eta^3\ )$

$N_9(\xi, \eta) = a\ (\xi^2\eta\ - \xi^3\eta\ )$

$N_{10}(\xi, \eta) = \xi\eta + \xi\eta^2 - 3\xi^2\eta\ _\ 3\xi\eta^2 - 2\eta^3 + 2\xi^3\eta + 2\xi\eta^3$

$N_{11}(\xi, \eta) = b\ (-\eta^2 + \xi\eta^2 + \eta^3\ -\ \xi\eta^3)$

$N_{12}(\xi, \eta) = a\ (-\xi\eta + 2\xi^2\eta - \xi^3\eta)$

*Relation déformation déplacement :

$$\varepsilon_x = -z\frac{\partial^2 W}{\partial X^2}$$

$$\varepsilon_y = -z\frac{\partial^2 W}{\partial Y^2}$$

$$\gamma_{xy}=2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -z\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right) = -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}$$

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon x \\ \varepsilon y \\ \varepsilon xy \end{Bmatrix} = -z\begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} \end{Bmatrix} w \qquad \text{(II.14)}$$

Alors l'expression de déformation devient :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_\xi \\ \varepsilon_\eta \\ \gamma_{\xi\eta} \end{Bmatrix} = -z\begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{a^2\,\partial\xi^2} \\ \frac{\partial^2}{b^2\,\partial\eta^2} \\ \frac{2\,\partial^2}{ab\,\partial\xi\,\partial\eta} \end{bmatrix} w \qquad \text{(II.15)}$$

En calculant chaque terme on obtient :

$$\varepsilon_\xi = -z\,\frac{1}{a^2}(2C_4 + 6C_7\xi + 2C_8\eta + 6C_{11}\xi\eta)$$

$$\varepsilon_{\eta} = -z\,\frac{1}{b^2}(2C_6 + 2C_9\xi + 6C_{10}\eta + 6C_{12}\xi\eta)$$

$$\gamma_{\xi\eta} = -2z\,\frac{1}{ab}(C_5 + 2C_8\xi + 2C_9\eta + 3C_{11}\xi^2 + 3C_{12}\eta^2)$$

Sous forme matricielle on a :

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{\xi} \\ \varepsilon_{\eta} \\ \varepsilon_{\xi\eta} \end{Bmatrix} = -z[\emptyset(\xi,\eta)]_F\{C\}_F \qquad \text{(II.16)}$$

Remplaçant l'expression $\{C\}_F = [H]^{-}{}_F^1\{q\}$ dans la formule de déformation on obtient :

$$\{\varepsilon\} = -z[\emptyset(\xi,\eta)]_F[H]^{-}{}_F^1\{q\}_F \qquad \text{(II.17)}$$

On pose :

$$[B(\xi,\eta)]_F = [(\xi,\eta)]_F\{H\}^{-}{}_F^1 \qquad \text{(II.18)}$$

D'où on obtient

$$[\varepsilon(\xi,\eta)] = -Z[B(\xi,\eta)]\{q\}_F \qquad \text{(II.19)}$$

Telle que :

$$[B(\xi,\eta)]_F = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13}\ldots\ldots\ldots & B_{1\ 12} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23}\ldots\ldots\ldots\ldots & B_{2\ 12} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33}\ldots\ldots\ldots\ldots & B_{3\ 12} \end{pmatrix}$$

Avec :

$B_{11}(\xi,\eta) = ((-6 + 12\xi + 6\eta - 12\xi\eta)/a^2)$; $B_{12}=0$

$B_{13}(\xi,\eta) = (4 - 6\xi - 4\eta + 6\xi\eta)/a$; $B_{14}(\xi,\eta) = (6 + 12\xi - 6\eta + 12\xi\eta)/a^2$

$B_{15}(\xi,\eta) = 0$; $B_{16}(\xi,\eta) = (2 - 6\xi - 2\eta + 6\xi\eta)/a$

$B_{17}(\xi,\eta) = (6\eta - 12\xi\eta)/a^2$; $B_{18}(\xi,\eta) = 0$

$B_{19}(ξ, η) = (2η - 6ξη)/a$; $B_{1\ 10}(ξ, η) = (-6η + 12ξη)/a^2$

$B_{1\ 11}(ξ, η) = 0$; $B_{1\ 12}(ξ, η) = (4η - 6ξη)/a$

$B_{21}(ξ, η) = (-6 + 6ξ + 12η - 12ξη)/b^2$; $B_{22} = (-4 + 4ξ + 6η - 6ξη)/b$

$B_{23}(ξ, η) = 0$; $B_{24}(ξ, η) = (-6ξ + 12ξη)/b^2$

$B_{25}(ξ, η) = (-4ξ + 6ξη)/b$; $B_{26}(ξ, η) = 0$

$B_{27}(ξ, η) = (+6ξ - 12ξη)/b^2$; $B_{28}(ξ, η) = (-2ξ + 6ξη)/b$

$B_{29}(ξ, η) = 0$; $B_{2\ 10}(ξ, η) = (6 - 6ξ - 12η + 12ξη)/b^2$

$B_{2\ 11}(ξ, η) = (-2 + 2ξ + 6η - 6ξη)/b$; $B_{2\ 12}(ξ, η) = 0$

$B_{31}(ξ, η) = (-2 + 12ξ + 12η - 12ξ^2 - 12η^2)/ab$; $B_{32}(ξ, η) = (-2 + 8η - 6η^2)/a$

$B_{33}(ξ, η) = (2 - 8ξ + 6ξ^2)/b$

$B_{34}(ξ, η) = (2 - 12ξ - 12η + 12ξ^2 + 12η^2)/ab$; $B_{35}(ξ, η) = (2 - 8ξ + 6η^2)/a$

$B_{36}(ξ, η) = (-4ξ + 6ξ^2)/b$

$B_{37}(ξ, η) = (-2 + 12ξ + 12η - 12ξ^2 - 12η^2)/ab$

$B_{38}(ξ, η) = (-4η + 6η^2)/a$

$B_{39}(ξ, η) = (4ξ - 6ξ^2)/b$

$B_{3\ 10}(ξ, η) = (2 - 12ξ - 12η + 12η - 12ξ^2)/ab$

$B_{3\ 11}(ξ, η) = (4η - 6η^2)/a$

$B_{3\ 12}(ξ, η) = (-2 + 8ξ - 6ξ^2)/b$

***Relation contraintes déformations :**

$$\{\sigma(ʒ, \eta)\} = [E]\{\mathcal{E}(ʒ, \eta)\} \quad \text{(II.20)}$$

Substituant l'équation de l'expression $\{\varepsilon\}$ on aura :

$$\{\sigma(ʒ\,\eta)\} = -\,Z\,[E][B(ʒ, \eta)]\{q\} \quad \text{(II.21)}$$

Si on pose dans cette équation Z=0 ; on trouve :

$$\{\sigma(ʒ, \eta)\} = \{0\} \qquad \forall\,\{ʒ, \eta\} \quad \text{(II.22)}$$

Z=0 ; représente alors la position de la surface neutre**.**

***détermination de la matrice de rigidité de flexion :**

Le calcul de la matrice de rigidité se fait par la formule suivant :

$$[k]_F = \int_v [B]^t[E][B]\,dv \quad \text{(II.23)}$$

Qui déviant :

$$[k]_F = \int_A \int_{-h/2}^{h/2} [B]^t[E][B]dA\;dZ$$

$$\frac{abh^3}{12}\int_0^1\int_0^1 [B(ʒ, \eta)]^T[E]\,[B(ʒ, \eta)]dʒ\,d\eta$$

Les 78 valeurs de la matrice [K] se calculent à l'aide de la formule suivante :

$$K_{ij} = \frac{abh^3}{12}\int_0^1\int_0^1 \left\{\left(B_{1i}B_{1j}\right)e_{11} + \left(B_{2i}B_{1j} + B_{1i}B_{2j}\right)e_{12} + \left(B_{2i}B_{2j}\right)e_{22} + \left(B_{3i}B_{3j}\right)e_{33}\right\} dʒd\eta$$

Pour :

i=1, 2,3,...,12

J=i, i+1,... ,12

Pour calculer les éléments Kij on peut utiliser un programme qui calcule l'intégrale

Numérique des fonctions :

Exemple K11 = ?

* On posant i=1, j=1 dans la formule on trouve

$$K_{11} = \frac{abh^3}{12} \int_0^1 \int_0^1 \{B_{11}^2 e_{11} + 2B_{21}B_{11}e_{12} + B_{21}^2 e_{22} + B_{31}^2 e_{33}\} d\xi d\eta$$

$$= \frac{bh^3}{12a^3} \int_0^1 \int_0^1 (-6 + 12\xi + 6\eta - 12\xi\eta)^2 d\xi\, d\eta e_{11}$$

$$+ \frac{h^3}{12ab} \int_0^1 \int_0^1 (-6 + 12\xi + 6\eta - 12\xi\eta)(-6 + 6\xi + 12\eta - 12\xi\eta) d\xi d\eta\, e_{12}$$

$$+ \frac{ah^3}{12b^3} \int_0^1 \int_0^1 (-6 + 6\xi + 12\eta - 12\xi\eta)^2 d\xi d\eta\, e_{22}$$

$$+ \frac{h^3}{12ab} \int_0^1 \int_0^1 (-2 + 12\xi + 12\eta - 12\xi^2 - 12\eta^2)^2 d\xi d\eta\, e_{33}$$

On obtient le résultat suivant :

$$= \frac{h^3}{12}\left(\frac{4b}{a^3} e_{11} + \frac{2}{ab} e_{12} + \frac{4a}{b^3} e_{22} + \frac{28}{5ab} e_{33}\right) \qquad \text{(II.24)}$$

Avec la méthode on peut calculer tous les éléments kij on introduisant les fonctions nécessaires de la matrice [B (ξ, η)] dans la formule

II.16 Conclusion

Comme on a vue ci-dessus, il existe donc de différents types de plaques (isotropes, anisotropes et orthotropes) qui se comportent avec différents comportements (flexionnel, membrane ou mixte), dont les études se faits dans différents états (statique, dynamique). Ces études se basent généralement sur différents théories, principalement on utilise celle de Love - Kirchhoff dans le cas des plaques minces, et celle de Reissner - Mindlin dans le cas des plaques épaisses. [16]

Chapitre III :

Résultats numériques
Et Discussions

III .1 Introduction

L'analyse modale des plaques saines et détériorées est une technique pratique employée dans le secteur du contrôle de l'intégrité des structures (**Structural Health Monitoring ou SHM**). Elle consiste à l'analyse des caractéristiques dynamiques d'une structure, telles que les fréquences naturelles, les modes de vibration et d'amortissement, afin de détecter l'apparition d'un défaut et d'estimer son impact sur la réponse vibratoire de la structure. Pour une plaque saine, ses propriétés modales sont déterminées par sa géométrie, ses conditions aux limites et ses caractéristiques mécaniques (module d'élasticité, la masse volumique, le coefficient de Poisson, etc.). Les fréquences propres déterminées indiquent les fréquences auxquelles la structure vibre naturellement lorsqu'elle est excitée. Les formes modales associées illustrent la répartition spatiale des déplacements pour chaque mode vibratoire.

Ce chapitre vise principalement à l'analyse comparative des formes modales de la plaque saine et plaque endommagée (fissurée). Pour permettre d'évaluer l'effet de la fissure sur le comportement vibratoire de la plaque. Les analyses seront effectuées de manière numérique à l'aide du logiciel d'analyse par éléments finis ABAQUS. (FigureIII.1).

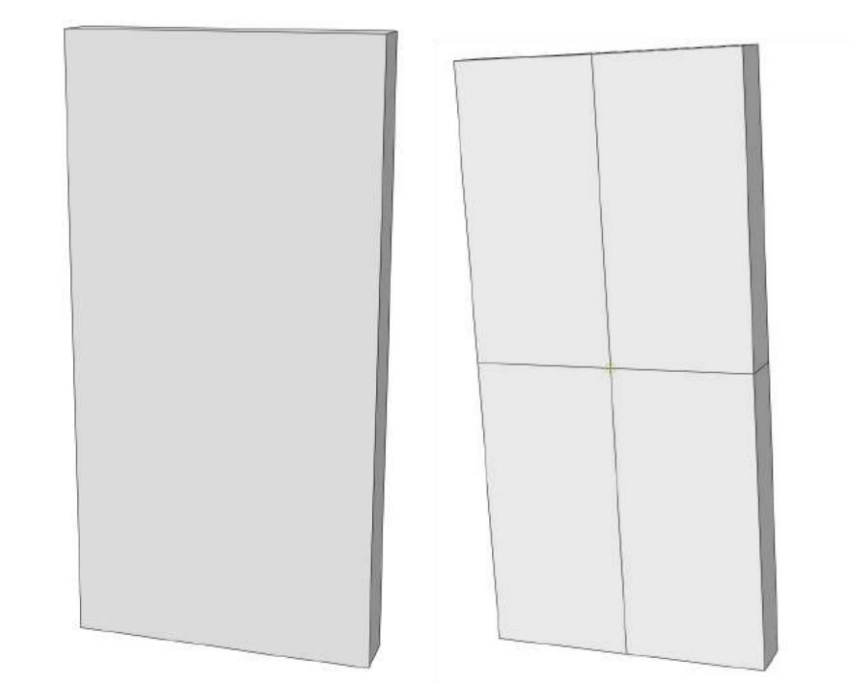


Figure III.1. : Modèles Étudié D'une plaque saine et fissurée

Le modèle de la plaque fissurée contient deux cas :

Cas 1 : une fissure horizontale au bord de la plaque (l'orientation de la fissure $\theta=0^{o}$) et en voir l'influence de la variation de la longueur de fissure a (mm) sur les fréquences propres de la Plaque.

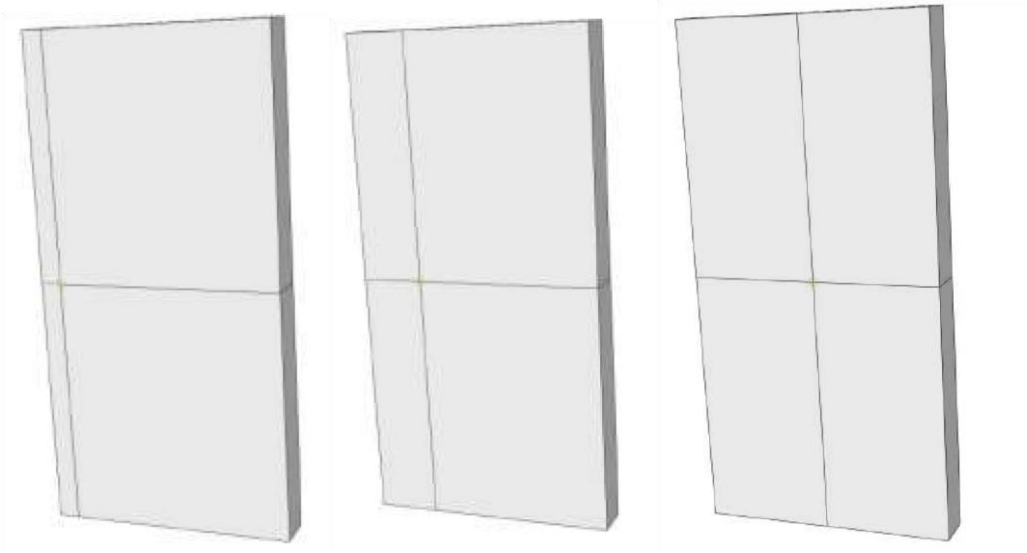


Figure III.2. : Variation de la longueur de fissure a (mm) =5mm, 15mm et 30mm

Cas 2 : une fissure avec une longueur bien déterminée c.-à-d. a=15mm et en voir l'influence de différentes positions de la fissure sur les fréquences propres de la plaque.

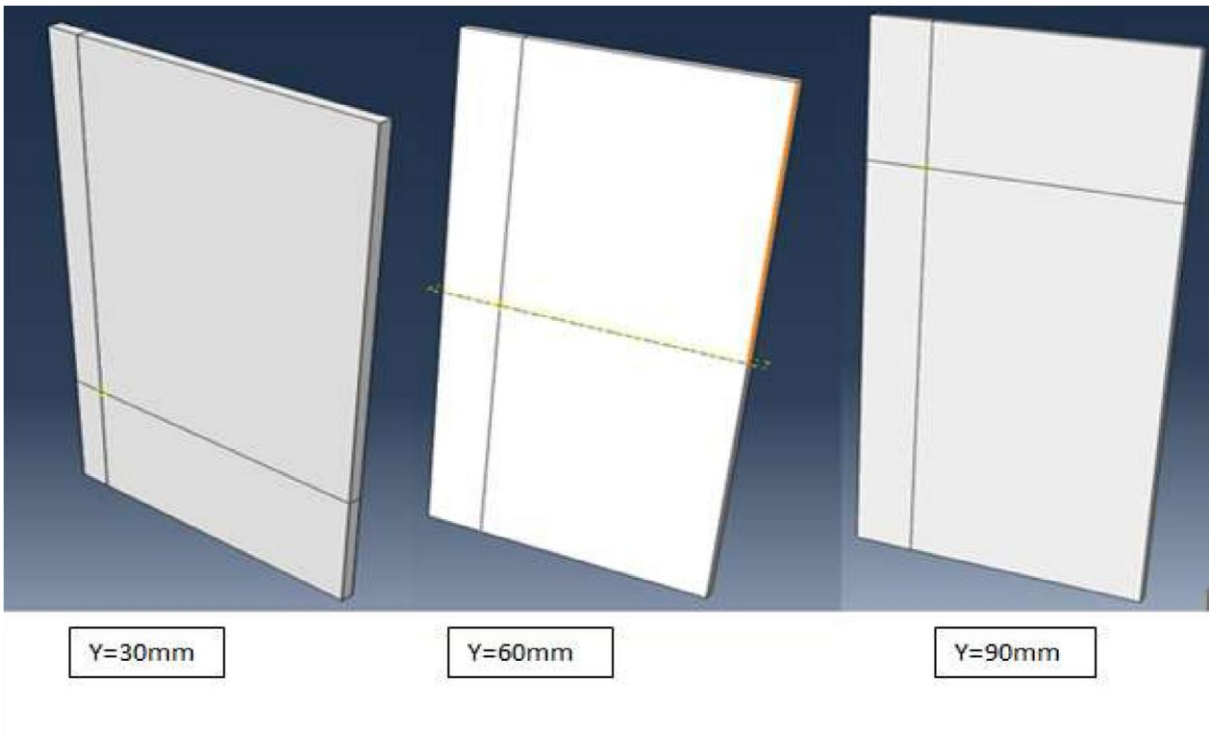


Figure III.3. : La hauteur de position fissure : Y=30mm, Y=60mm et Y=90mm

III.2 Présentation du logiciel de calcul :

Dans notre travail, nous utilisons le logiciel ABAQUS, qui est un programme de calcul par éléments finis. ABAQUS est un logiciel qui permet de simuler des structures, des produits ou des systèmes et d'analyser leur réaction physique, comme les formes modales ou la distribution spatiale des mouvements associés à chaque mode de vibration. Dans cette section, nous avons examiné numériquement l'impact des divers paramètres dimensionnels d'une fissure sur les fréquences naturelles de la plaque.

Notre modèle se compose d'une plaque en aluminium. Cette plaque en aluminium présente des fissures. L'objectif de cette section est de décrire l'approche numérique qui nous a menés aux conclusions du chapitre.

III.2.1 Unités de logiciel de calcul ABAQUS/CAE :

L'utilisation d'un système d'unités cohérent est recommandée PAR l'utilisateur, car ABAQUS/CAE ne gère pas les unités. **(Tableau III.1).**

Tableau III.1. Les unités d'ABAQUS/CAE.

Quantité	**SI**	**US Unité (pouce)**
Longueur	M	In
Force	N	Lbf
Masse	Kg	lbf s²/in
Time	Sec	Sec
Contrainte	Pa (N/m^2)	Psi (lbf/in^2)
Energie	J	Inlbf
Densité	Kg/m^3	$lbf\ s^2/in^4$
Température	K°	K°

III.2.2 Interface utilisateur :

L'interface utilisateur est basée sur l'environnement Xwindows conjointement avec OSF/Motif (figure III.4). La partie graphique est interactive, ce qui permet la visualisation en trois dimensions, et inclut les gradients, les iso surfaces, les flux de particules et les coupes de volumes.

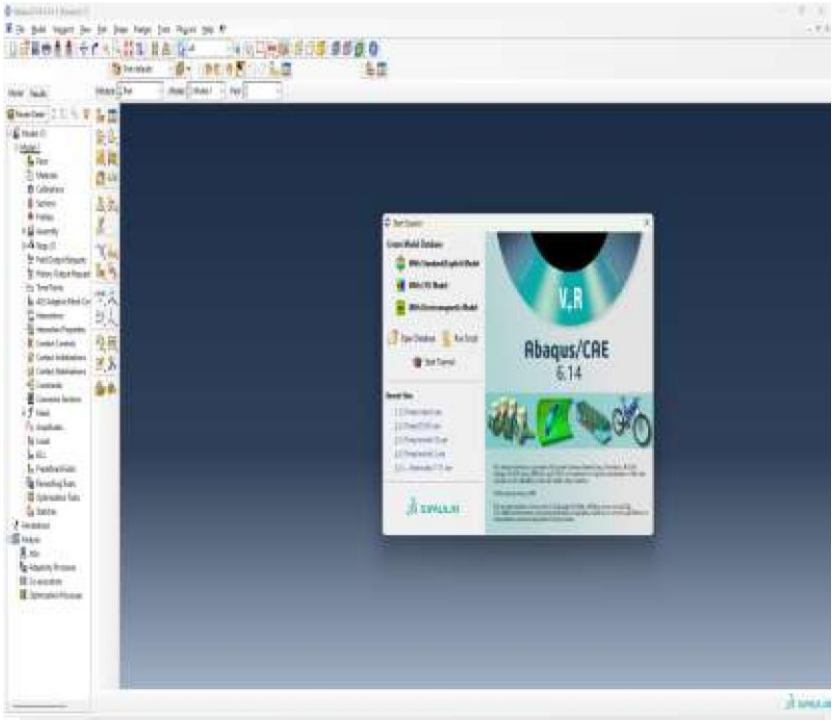


Figure III.4. : Interface utilisateur ABAQUS.

III.2.3 Préprocesseur :

La phase de traitement est celle où les données sont spécifiques. Celle dans laquelle les données sont spécifiques. L'utilisateur peut sélectionner le type d'éléments et le système de coordination, définir les constantes et les propriétés des matériaux, créer et organiser des modèles solides, et définir les équations de couplage et de contrainte .et organiser des modèles, et définir les équations de couplage et de contrainte. De plus, l'utilisateur peut exécuter un programme qui indique la taille des fichiers créés. La taille de la mémoire et le temps d'exécution. Créés, la taille la mémoire et le temps d'exécution.

III.2.4 Solveur :

Le type d'analyse sélectionné détermine les équations qui seront utilisées par le solveur. Les catégories disponibles incluent :

- Structures, thermique, champ EM, champ électrostatique, fluides, acoustique.

- Champs couplés : Ceci signifie qu'il est possible de résoudre simultanément plusieurs aspects (par exemple, la thermomécanique, l'hydromécanique, la thermo- fluidique, etc. …).

Le logiciel ABAQUS est un générateur de maillage qui permet la création d'un modèle géométrique bien défini et la discrétisation de la structure (**Figure III.5**).

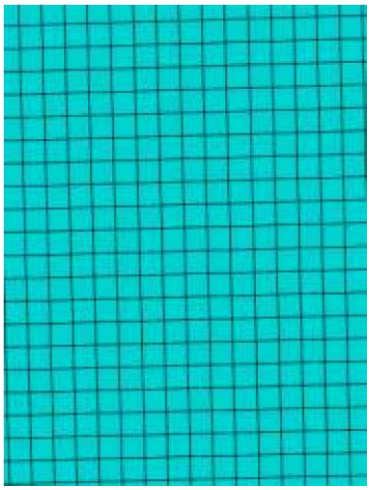


Figure III.5. Représentation du maillage utilisé en ABAQUS.

III.3 Géométrie utilisée :

La simulation numérique a été réalisée sur une plaque d'épaisseur e = 10mm, de largeur A=60mm et de longueur L=120mm. (Figure III.6).

Le modèle proposé contient une fissure horizontale au bord de la plaque en Acier avec différente longueur a=5mm, 15mm et 30 mm

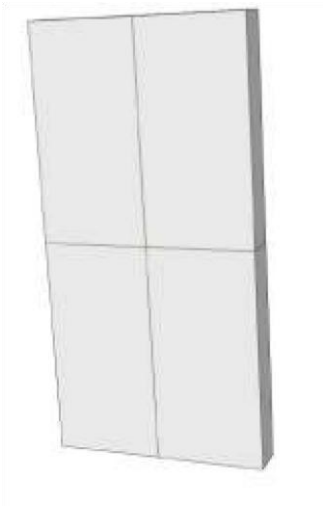


Figure III.6. : Définition de la géométrie et lancer une simulation.

Les dimensions de la plaque fissurée en Acier S235 représentent sur (**Tableau III.2)**

Tableau III.2 : La géométrie et les dimensions de l'éprouvette

Grandeurs	Valeur	Unité
Longueur (L)	120	mm
Épaisseur (e)	10	mm
Largeur (A)	60	mm
Module de Young (E)	210000	MPa
Coefficient de Poisson (υ)	0,3	-
La masse volumique	7850	Kg/m^3

III.4 Matériau étudié :

Le matériau étudié dans la simulation 3D est un Acier S235, La composition chimique de ce type d'Acier est portée dans le Tableau III.3.

Tableau III.3. Composition chimique de l'Acier S235 (la masse en %)

Poids%	C	**Si**	**Mn**	P	**S**	N	**Al**	Cu	**Cr**	Ni	Mo	**Autres**
S235	0 ,17 max	0,35 max	1,40 max	0,045 max	0,045 max	0,012 max	0,015 max	0,55 max	0,30 max	0,30 max	0,10 max	0,05 max (chacun) 0,15 (total)

Tableau III.4. Propriétés mécaniques de l'Acier S235

Matériau	Nuance	Epaisseur (mm)	Limite d'élasticité Ré (MPA)	Résistance à la traction Rm (MPA)	Allongement A % min	Résilience Charpy V (J) à 20° C min	Dureté Brinell HB
Acier S235 (Fe 360)	JR	≤ 16	235	360 – 510	26	27	120 – 170
Acier S235 (Fe 360)	J0	> 16 – 40	235	360 – 510	24	27	120 – 170
Acier S235 (Fe 360)	J2	> 40 – 100	235	360 – 510	22	27	120 – 170

Note :

- Ré : limite d'élasticité (limite conventionnelle à 0.2 %). Rm : résistance à la traction.
- A % : allongement a la rupture sur longueur initial de 5,65 $\sqrt{S_0}$ (S_0 enmm^2).
- Les valeurs sont conformes à la norme EN 10025-2 pour l'acier de construction S235.

III.4.1 Les conditions aux limites

Les conditions aux limites nécessaires pour la simulation numérique sont : encastrement au bord de la fissure.

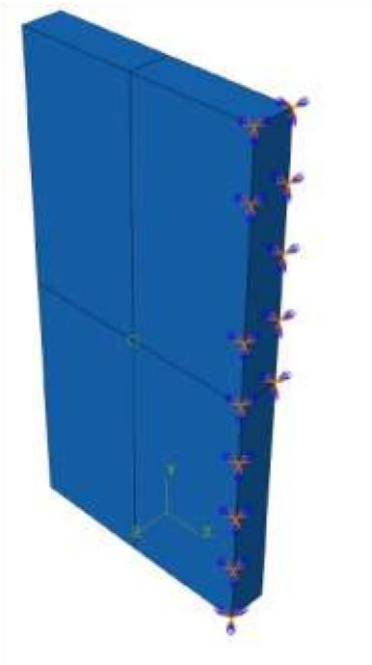


Figure III.7. : Conditions aux limites encastrement au bord de la fissure**.**

III.4.2 Type de l'élément :

La simulation a été effectuée en divisant le modèle géométrique en diverses sections, chacune ayant été maillée individuellement en utilisant des éléments C3D6 hexaédriques linéaires à six points de Gauss (figure III.8), appelés éléments d'intégration régulière. De ce fait, les résultats dérivant des éléments C3D6 seront plus précis que ceux découlant d'autres éléments. Subséquemment, les nœuds et les mailles partagés des différentes sections ont été reliés dans les zones d'interface. On a imposé les conditions aux limites pour chacun des deux plans.

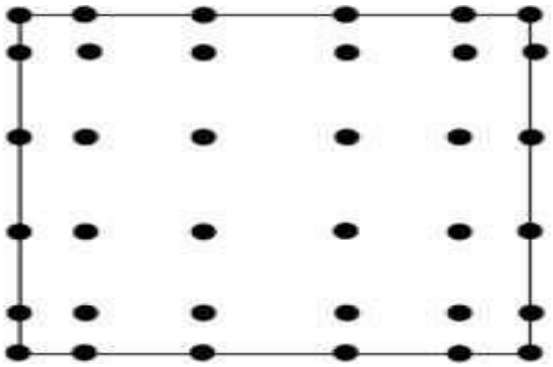


Figure III.8. Les éléments hexahedral linéaire C3D6 à six points de Gauss.

Dans le cadre d'une recherche numérique, la dimension du maillage est l'élément déterminant. Il est nécessaire d'affiner le maillage sur l'intégralité de la fissure en adoptant un maillage détaillé à la pointe de la fissure pour obtenir une précision fine et des résultats satisfaisants.

Toutefois, cela dépend de la performance du microprocesseur (Figure III.8).

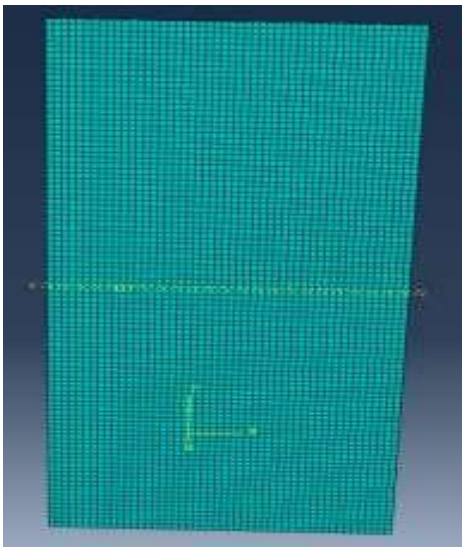


Figure III.9 Géométrie, maillage

III.5 Résultats et discussions :

Cette partie est consacrée à la présentation et la discussion des différents résultats obtenus à partir de la simulation numérique à l'aide d'outil de calcul ABAQUS 6.14, et cela après introduire les divers paramètres mis en jeu de la plaque saine et fissurée. L'analyse comparative des formes modales de la plaque saine et plaque endommagée (fissurée). Pour permettre d'évaluer l'effet de la fissure sur le comportement vibratoire de la plaque.

III.6 Plaque saine et fissurée :

Dans cette section, nous allons proposer deux cas (**Figure III.10**) :

Cas 1 : l'existence d'une pré-fissure horizontale au milieu de la plaque et de longueur de la fissure a=30mm.en calculant les fréquences propres.

Cas 2 : la plaque saine c à d sans défaut en calculant les fréquences propres.

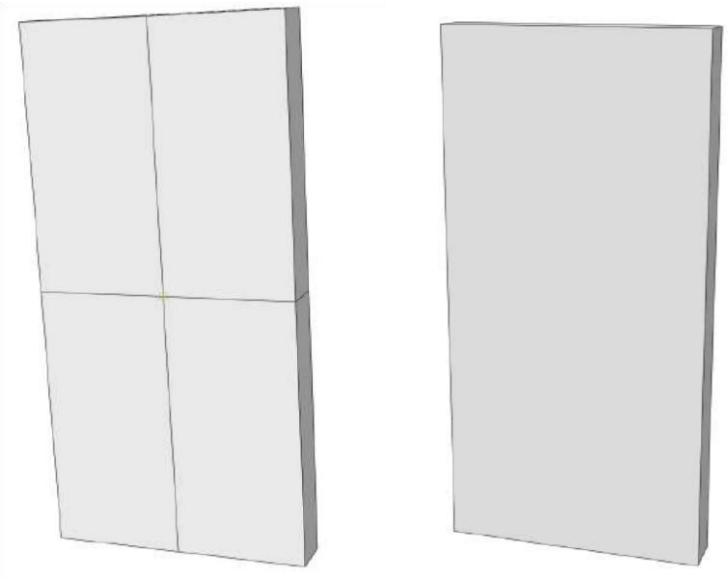


Figure III.10 Plaque fissurée et saine.

Le tableau III.5, présente une comparaison entre les fréquences naturelles d'une plaque saine sans défaut avec celles d'une plaque endommagée (fissurée) de longueur a=30mm.

Tableau III.5. Résultats des fréquences naturelles des deux plaques saine et fissurée.

Modes	Plaque saine	Plaque fissurée a = 30 mm
	Fréquence s naturelles (Hz)	
1	3466	2945.4
2	6397.6	5529.1
3	11237	7498.5
4	11676	10879
5	13126	12054

D'après l'analyse de ce tableau les résultats obtenus montrent clairement que la présence d'une fissure de 30 mm engendre une diminution des fréquences propres de la plaque en acier encastrée.

La figureIII.10 présente les cinq modes propres d'une plaque saine et fissurée, encastrée avec une longueur de fissure a=30mm.

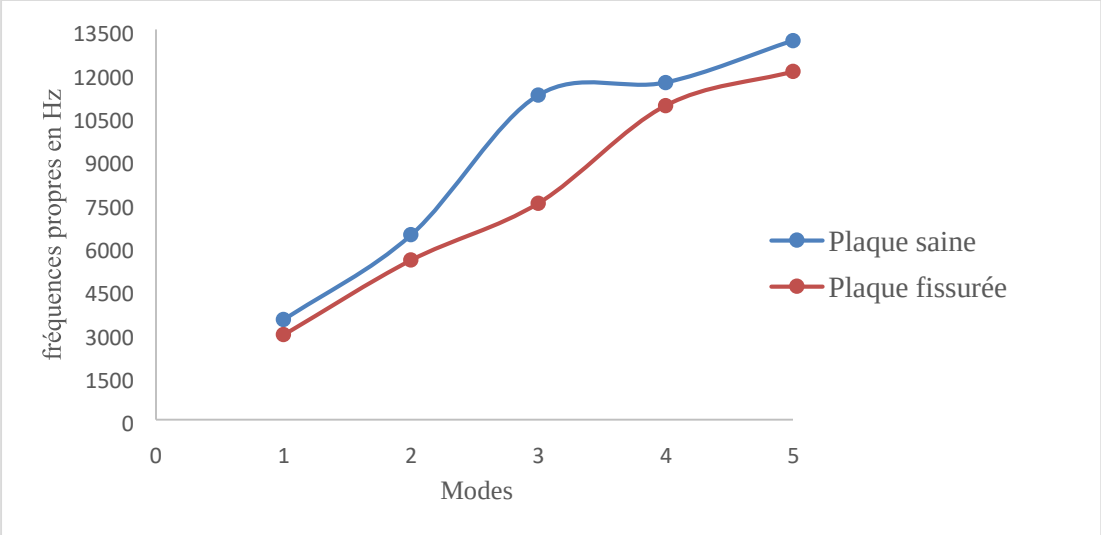


Figure III.11 Plaque fissurée et saine.

D'après l'analyse de cette figure nous avons constaté que la présence d'une fissure engendre une diminution des fréquences propres de la plaque endommagée. Cette diminution est due à la perte de rigidité causée par la fissure. Le troisième mode est le plus sensible au défaut avec une baisse d'environ 33%, ce qui suggère qu'il pourrait servir d'indicateur efficace pour la détection et le suivi de l'endommagement de la structure.

III.7 Effet de la longueur de la fissure sur les fréquences propres

Le modèle proposé contient une fissure horizontale au bord de la plaque en Acier. Le tableau III.6, présente les résultats des fréquences naturelles d'une plaque endommagée (fissurée) de différente longueur a=5, 15 et 30 mm

Tableau III.6. Résultats des fréquences naturelles d'une plaque fissurée avec différentes longueurs de fissure.

Modes	Plaque fissurée a = 5 mm	Plaque fissurée a = 15 mm	Plaque fissurée a = 30 mm
	Fréquences (Hz)		
1	3466	3350.5	2945.4
2	6353	6034.2	5529.1
3	11273	10565	7498.5
4	11629	11243	10879
5	13166	13139	12054

D'après le tableau on observe que pour tous les modes, la fréquence naturelle diminue lorsque la longueur de la fissure augmente.la diminution est faible entre a=5mm et a=15mm pour certains modes. Cette diminution est remarquable lorsque la longueur de la fissure prendre une valeur de, a=30mm. Nous avons observé aussi que le mode 3est le plus sensible à l'augmentation de la longueur de fissure (11273 Hz $\longrightarrow$ 7498,5 Hz).

La figureIII.11 présente l'influence de la longueur de la fissure (5 mm, 15 mm et 30 mm) sur les fréquences naturelles des cinq modes de vibration principaux.

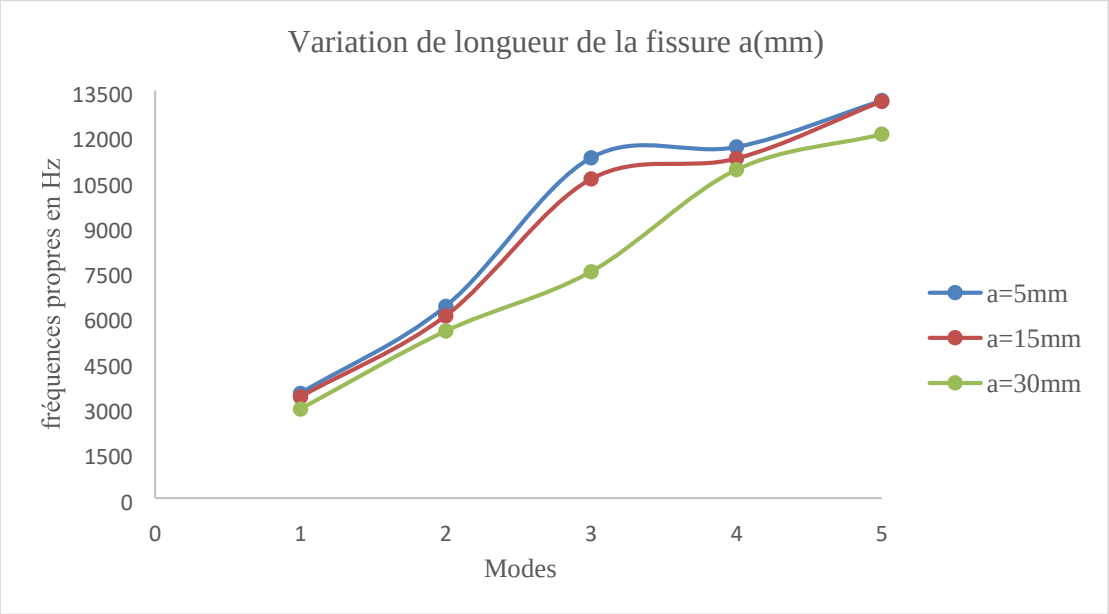


Figure III.12 Cinq Modes propres d'une plaque fissurée et Encastrée.

D'après l'analyse de la figure III.11 nous avons constaté que pour chaque longueur de fissure, les fréquences propres augmentent avec l'ordre du mode. En général, la présence d'une fissure plus longue tend à réduire les fréquences fondamentales, indiquant une diminution de la rigidité de la structure. En ce qui concerne le premier mode, on constate une légère décroissance des fréquences propres à mesure que la fissure s'allonge, tombant d'environ 3466 Hz pour (a=5 mm) à 2945 Hz pour (a=30mm). Cela indique une diminution douce de la rigidité de la structure. Le deuxième mode suit une tendance similaire avec une diminution graduelle des fréquences de 6353 Hz à 5529 Hz à mesure que la fissure s'agrandit. Le troisième mode est le plus exposer aux dommages : la fréquence diminue considérablement de 11 273 Hz pour une fissure de 5 mm à près de 7 498 Hz pour une fissure de 30 mm, mettant en évidence l'impact majeur de la fissure sur la dynamique de la structure. Dans le quatrième mode, les fréquences correspondantes à a=5 mm et a=15 mm restent relativement proches, alors que celle associée à a=30 mm augmente de manière significative, cherchant à converger vers les autres valeurs. Finalement, dans le Cinquième mode, les fréquences atteignent leurs valeurs maximales et se rapprochent considérablement, suggérant que l'impact de la longueur de la fissure diminue pour les modes supérieurs. Par conséquent, l'impact de la fissure est clairement observable dans les Modes intermédiaires, particulièrement dans le troisième mode, qui est un indicateur utile pour surveiller les dégradations de la structure.

III.8 Effet de la position de la fissure sur les fréquences propres

Le modèle proposé contient différentes positions de fissure de la plaque en Acier. Le tableau III.7, présente les résultats des fréquences naturelles d'une plaque endommagée (fissurée) de différente position H=30mm, 60mm et 90 mm

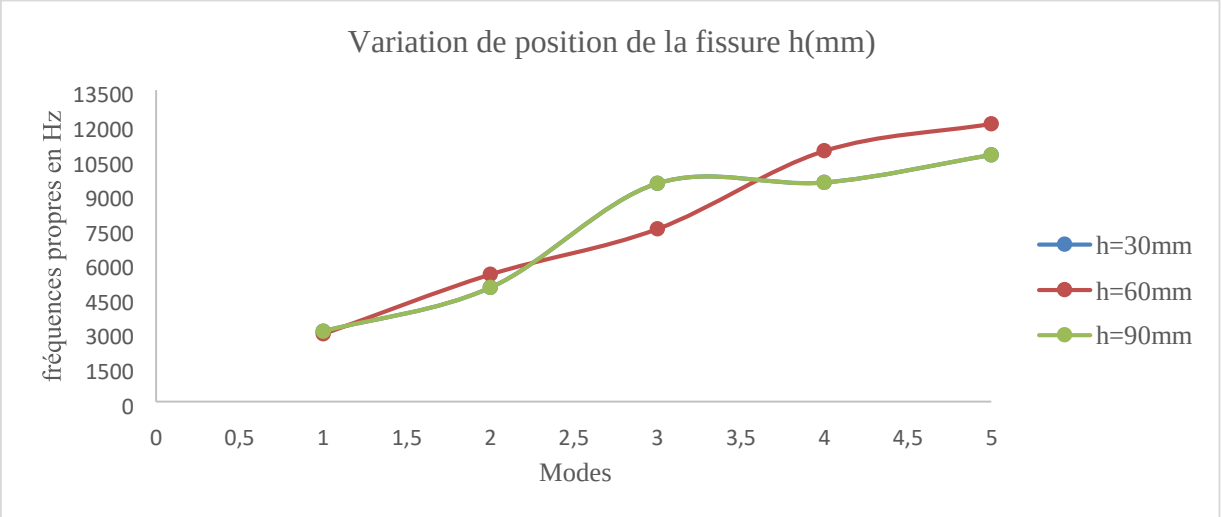


Tableau III.7. Résultats des fréquences naturelles d'une plaque fissurée avec différentes positions de fissure.

Modes	H=30mm	H=60mm	H=90mm
	Fréquences (Hz)		
1	3060.6	2945.4	3060.6
2	4951.8	5529.1	4951.8
3	9472.5	7498.5	9472.5
4	9513.7	10879	9513.7
5	10709	12054	10709

Figure III.13 Cinq modes propres d'une plaque encastrée, avec différentes positions de fissure

Les résultats illustrés dans le tableau III.6 et la figure III.12, montrent que l'influence de l'emplacement de la fissure sur les fréquences naturelles n'est pas constante, en fonction des modes de vibration. Pour les modes 1, 2 et 3, les fréquences déduites pour h=30 mm et h=90 mm sont quasiment les mêmes, signifiant une symétrie dans la réponse dynamique de la structure à ces deux emplacements. Toutefois, lorsque la fissure se trouve à h=60 mm, on observe que les fréquences des modes 1 et 3 baissent respectivement de 3060,6 Hz à 2945,4 Hz et de 9472,5 Hz à 7498,5 Hz, indiquant une forte réactivité de ces modes à cette position. Cependant, pour h=60 mm, les fréquences des modes 2, 4 et 5 s'élèvent, atteignant respectivement 5529,1 Hz, 10879 Hz et 12054 Hz. Cet écart illustre que la position de la fissure influence de manière différente sur chaque forme modale en fonction de la localisation des nœuds et des pulsations de vibration. Dans l'ensemble, la fissure située au milieu (h=60 mm) a l'impact le plus significatif sur les propriétés dynamiques de la structure, tandis que les emplacements h=30 mm et h=90 mm génèrent des réactions quasi identiques. Cela indique que l'aire centrale reflète un haut niveau de participation modale où l'avènement de la fissure impacte plus particulièrement la rigidité locale et, par conséquent, les fréquences naturelles.

III.9 Conclusion :

L'analyse de l'impact des paramètres de la fissure sur les fréquences naturelles indique que les propriétés dynamiques de la structure sont significativement modifiées par la présence du dommage. En général, l'augmentation de la longueur de la fissure conduit à une réduction des fréquences naturelles, ce qui indique une perte de rigueur de la structure. Cette La baisse est particulièrement prononcée pour certains types de vibrations, en particulier le troisième mode, qui semble être le plus réceptif à la progression du défaut. De plus, l'emplacement de la fissure a aussi une grande importance dans la réponse dynamique. Les résultats indiquent que certaines positions ont un impact plus marqué que d'autres, particulièrement lorsque la fissure est localisée dans une zone de forte incidence modale. Les fluctuations les plus notables des fréquences naturelles sont liées à la position intermédiaire (h=60 mm), alors que les positions symétriques (h=30 mm et h=90 mm) entraînent des réponses similaires. Pour conclure, l'analyse des fréquences propres s'avère être un outil de choix pour la détection et le suivi des fissures au sein des structures. L'analyse modale offre non seulement la possibilité de détecter un

Dommage, mais également d'évaluer sa progression en matière de dimension et de position. On peut donc utiliser les modes les plus sensibles comme indicateurs de suivi dans les méthodes de contrôle sans destruction et d'examen structurel.

Conclusion Générale

Ce travail s'est penché sur l'examen de l'impact de la fissuration sur la réaction vibratoire des plaques minces homogènes, en particulier leurs fréquences et modes de vibration naturels, en utilisant des approches théoriques et numériques.

Initialement, nous avons exposé les notions essentielles relatives à la rupture et à la fissuration, par la suite, nous avons abordé les concepts majeurs liés aux plaques minces, à la vibration libre, à la théorie de Love-Kirchhoff et à la technique des éléments finis.

Une analyse numérique a par la suite été effectuée à l'aide du programme Abaqus sur trois configurations de plaques, en mettant en comparaison les situations intacte et fissurée. Les observations indiquent que l'existence d'une fissure altère les fréquences naturelles et les modes de vibration, et que son impact est aussi lié à la configuration de la plaque. L'analyse modale est donc un outil approprié pour identifier les dommages au sein des structures. On pourrait enrichir cette recherche en tenant compte de diverses positions, longueurs et profondeurs des fissures, en plus d'autres matériaux et conditions aux limites, tout en procédant à une validation expérimentale des résultats numériques.

Reference bibliographique

[1] Pr. Younes Benarioua "supporte de cours Master en mécanique de la rupture " (2019-2020)

[2] Layeb Seyfe Eddine, mahcene Walid "Réparation des Structures Fissures "Mémoire de Fin d'étude Université de Constantine (2021-2022)

[3] Bouguetifa Redouane "technique de réparation de structures fissurées par patch composite" Mémoire de Fin d'étude de master Université de Tissemsilt (2022-2023)

[4] BENHAMOUDA, Ahmed. Étude du comportement des fissures dans les tubes sous pression interne. 2010.

[5] HAL Id : tel-01542902 https://hal.science/tel-01542902 v4 Submitted on 6 Mar 2020

[6] Sébastien GRANGE-Jean-Loub PRENSIER, Besnard 2005

[7] HARIZI SOUAD "Technique de réparation par patch composite d'une structure endommagée «Mémoire de Fin d'étude de master Université de Tissemsilt (2024-2025)

[8] MELAH Salah Eddine «Etude numérique de l'effet de la forme du patch sur la durée de vie des structures réparées en composite " Mémoire de Fin d'étude de master Université Ibn Khaldoune Tiaret (2020-2021)

[9] BIZ MOHAMED "calcul numérique du facteur d'intensité de contrainte et l'intégral J d'une structure fissurée et réparée par patch composite "Mémoire de Fin d'étude de master Université de Tissemsilt (2023-2024)

[10] Ghemmaz Karima, Fouirat Sabah "Flambement des plaques (Relation entre les théories CPT et FSDPT "Mémoire de Fin d'étude en vue de l'obtention du diplôme de master Université de Ibn Khaldoune Tiaret (30/09/2015)

[11] CHAOUHE Abdellah «Analyse vibratoire des plaques minces sous déférentes conditions aux limites " Mémoire de Master Professionnel Université de Kasdi Merbah Ouargla (2012/2013)

[12] MESSOUSSA M "Différentes théories des plaques " Université Ibn Khaldoune Tiare 2019

[13] BELGASMI Fatima, SEBIHI Amra «Contribution à l'analyse du flambement des plaques apaisses en utilisent une théorie raffinée de déformation de cisaillement «Mémoire de

Fin d'étude en vue de l'obtention de diplôme de master Université Ibn khaldoune Tiaret (2017/2018)

[14] REZKALLAH Chahira, YAHIAOUI Asmaa "Analyse dynamique des plaques composites par une simple théorie de déformation en cisaillement "Mémoire de Fin d'étude en vue de l'obtention du diplôme de Master Université Ibn Khaldoune Tiaret 2021/2022

[15] Ait Sidhoum Imene "Analyse de la vibration libre des plaques épaisses en Matériaux fonctionnellement Gradue «Thèse présente en vue de l'obtention du diplôme dz doctorat Université de Mohamed Boudiaf Oran 2018/2019

[16] DERBANE Said"Modolisation des plaques par la méthode des éléments finis "Mémoire présente en vue de l'obtention de diplôme de Magister Université Mohammed Khi der – Biskra (19/02/2012)

[17] HAL Id : cel- 01520287 https://hal.science/cel-01520287v1 Submitted on 10 May 2017

[18] BENNACEUR HAFNAOUI, CHIROUBA ABD ELMOULA "Modalisation d'une Structure en matériaux composites par la méthode des éléments finis «mémoire de master Université Kasdi Merbah Ouargla 2024/2025